

Théorèmes limites pour les processus d'exclusion intégrables dans la classe KPZ

Guillaume Barraquand

LPMA (Paris Diderot)

Basé sur des travaux en commun avec Ivan Corwin

Introduction

Classe d'universalité KPZ ?

Kardar, Parisi, Zhang, en 1986, étudient la croissance d'interfaces rugueuses. Proposent une EDPS pour décrire la hauteur $h(t, x)$ de l'interface

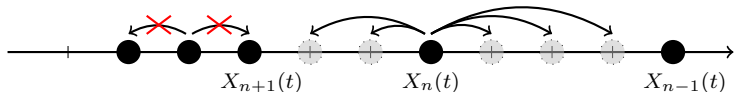
$$\partial_t h = \partial_x^2 h + (\partial_x h)^2 + \dot{\mathcal{W}},$$

où $\dot{\mathcal{W}}$ est un bruit blanc espace-temps. Ils prédisent une renormalisation particulière, qui serait *universelle*.

Dans cet exposé :

- On se concentre sur des modèles aléatoires discrets *exactement solubles*.
- ↪ plus précisément des processus d'exclusion.
- On part de la condition initiale la plus simple et on étudie différentes dynamiques.

Processus d'exclusion



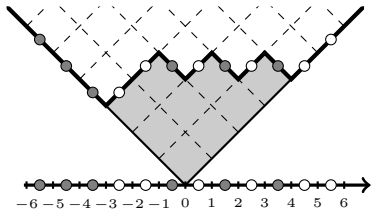
Description du système

- Coordonnées $X_n(t)$,
- Courant (intégré)

$$N_x(t) = \#\{n \mid X_n(t) \geq x\},$$

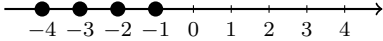
- (Fonction de hauteur via la bijection de Rost,

$$h(x, t) = x + 2N_x(t).$$



Théorèmes limites : Heuristique

Condition initiale step $x_n(0) = -n$:



Loi des grands nombres

On s'attend à : pour $n, t \rightarrow \infty$ à ratio fixé $n/t = \kappa$,

$$\frac{X_n(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \pi(\kappa).$$

Théorème limite de type Tracy-Widom

Pour les modèles de la classe d'universalité KPZ,

$$\frac{X_n(t) - \pi(\kappa)t}{\sigma(\kappa) \cdot t^{1/3}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{L}_{TW},$$

où \mathcal{L}_{TW} est la loi de Tracy-Widom. (fluctuations de la plus grande valeur propre du GUE)

“KPZ scaling theory” : Heuristique

Il existe une théorie (Krug, Meakin, Halpin-Healy 1992) qui prédit les valeurs des constantes $\pi(\kappa)$ et $\sigma(\kappa)$ intervenant dans les théorèmes limites.

Hypothèses

- La dynamique est locale et homogène en espace.
- Les mesures stationnaires invariantes par translation μ_ρ sont précisément indexées par la densité moyenne de particules $\rho = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ part. entre } -a \text{ et } a}{2a+1}$.
- La fonction $j(\rho) := \mathbb{E}^{\mu_\rho} \left[\frac{d}{dt} N_0(t) \right]$ est telle que $j''(\rho) \neq 0$.

Profil de densité macroscopique

Soit $\rho(x, \tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{Il y a une particule en } xt \text{ au temps } t\tau)$ le profil de densité macroscopique. Il satisfait l'équation de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} j(\rho(x, t)) = 0,$$

où $\rho(x, 0) = \mathbb{1}_{x < 0}$ pour la condition initiale step.

On fixe $n/t = \kappa$. En fait $\kappa = \kappa(\rho)$ où ρ est la densité “autour” de $X_n(t)$. On s’attend à $\frac{X_n(t)}{t} \rightarrow \pi(\rho)$. Si $\bar{\rho}(x, t)$ est une solution de l’équation de conservation, alors $\bar{\rho}(\pi(\rho), 1) = \rho$.

$$\pi(\rho) = \frac{\partial j(\rho)}{\partial \rho}.$$

La fonction $\kappa(\rho)$ se calcule en intégrant la densité, et on obtient pour la CI step

$$\kappa(\rho) = -\rho \frac{\partial j(\rho)}{\partial \rho} + j(\rho).$$

Taille des fluctuations

Soit $\lambda = -j''(\rho)$ et $A = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Cov_{\mu_\rho}(\eta_0, \eta_j)$ où $\eta_0, \eta_j \in \{0, 1\}$ sont les variables d’occupations aux sites 0 et j . Alors

$$\sigma(\rho) = \left(\frac{-\lambda A^2}{2\rho^3} \right)^{1/3}.$$

Covariance intégrée A

Soit $X_i, i \in \mathbb{Z}$ une suite stationnaire de v.a. centrées. Sous certaines hypothèses, S_n/\sqrt{n} converge faiblement vers la loi Gaussienne de variance σ^2 avec

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{S_N^2}{N} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N X_i \right) \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)}{N} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}} X_0 X_i \right] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(X_0, X_i).\end{aligned}$$

Mesures invariantes à forme produit

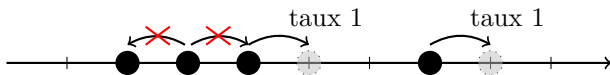
Si $\mu_\alpha(\text{gap} = k) \propto \alpha^k / (g(1) \dots g(k))$ pour une certaine fonction g positive, alors

$$A = -\alpha \rho \frac{d\rho}{d\alpha}$$

où $\rho(\alpha)$ est la densité de particules sous la loi μ_α .

Exemple : TASEP

Description de la dynamique



Propriétés

Mesures stationnaires invariantes par translation : chaque site occupé indépendamment avec proba ρ .

Implique $j(\rho) = \rho(1 - \rho)$, $\pi(\rho) = 1 - 2\rho$ et $\kappa(\rho) = \rho^2$. On trouve

$$\sigma(\rho) = \left(\frac{(1-\rho)^2}{\rho} \right)^{1/3}.$$

Théorème (Johansson 2000)

Pour $n/t = \kappa(\rho) \in (0, 1)$,

$$\frac{X_n(t) - \pi(\rho)t}{\sigma(\rho)t^{1/3}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_{TW}.$$

Une brève introduction aux q -analogues

Formule du binôme :

$$(X + Y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}.$$

Si $YX = qXY$, on pourra toujours écrire

$$(X + Y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k(q) X^k Y^{n-k}.$$

Definitions

- Entier q -déformé $[n]_q := 1 + q + \dots + q^{n-1}$.
- Factorielle q -déformée $n!_q := [n]_q [n-1]_q \dots [1]_q$.
- Symbole q -Pochhammer : $(a; q)_n := (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1})$.

Les coefficients q -binomiaux sont définis par

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \frac{n!_q}{k!_q (n-k)!_q} = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} = C_n^k(q)$$

Une brève introduction aux q -analogues

Fixons $0 < q < 1$ pour tout le reste de l'exposé.

Definition

La q -exponentielle est définie par

$$e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k_q!}$$

On a l'identité

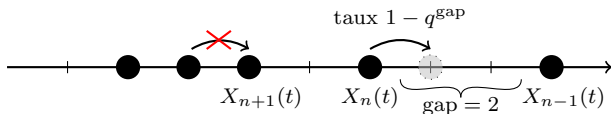
$$e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x(1-q))^k}{(q; q)_k} = \frac{1}{(x(1-q); q)_{\infty}}.$$

La q -transformée de Laplace d'une variable aléatoire X devient

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{(\zeta(1-q)X; q)_{\infty}} \right]$$

Definition du q -TASEP

Introduit par Borodin et Corwin dans le contexte des processus de Macdonald (2011). Soit $q \in (0, 1)$.



Mesures stationnaires

Les mesures stationnaires invariantes par translation sont telles que les espaces inter-particules (gaps) sont distribuées selon la loi q -géométrique.

$$\mathbb{P}(X_n - X_{n+1} - 1 = k) = \frac{\alpha^k}{(q; q)_k} (\alpha; q)_\infty,$$

pour $\alpha \in (0, 1)$.

Théorème limite

- Pour un système à l'équilibre donné par la mesure stat $\mu_\alpha(k) = \frac{\alpha^k}{(q;q)_k} (\alpha; q)_\infty$, la densité moyenne de particules est

$$\rho_\alpha = \frac{1}{1 + \mathbb{E}[gap]} = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha q^k}{1 - \alpha q^k}}.$$

- La vitesse d'une particule est $\mathbb{E}^{\mu_\alpha} [1 - q^{gap}] = \alpha$.
- Implique $j(\rho_\alpha) = \alpha \rho_\alpha$.
- On déduit des formules pour $\kappa(\rho_\alpha)$, $\pi(\rho_\alpha)$ et $\sigma(\rho_\alpha)$ d'après la "KPZ scaling theory" (fait intervenir des fonctions spéciales q -déformées).

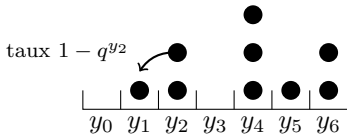
Théorème (Ferrari-Vető, 2013 / B. 2014)

Pour $\alpha \in (0, 1)$ et $n/t = \kappa(\alpha)$,

$$\frac{X_n(t) - \pi(\alpha)t}{\sigma(\alpha) \cdot t^{1/3}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_{TW}.$$

Processus d'exclusion et Zero-Range

- Couplage $x_k - x_{k+1} - 1 \sim y_k$
- Processus d'exclusion \leftrightarrow
Zero-range
- Ici, on l'appelle le “ q -totally asymmetric zero range process”,
ou q -Boson.



Définition

Deux processus de Markov $\vec{X}(t) \in \mathcal{X}$ et $\vec{Y}(t) \in \mathcal{Y}$ sont dits duals par rapport à $H : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ ssi pour toute condition initiale,

$$\mathbb{E}[H(\vec{X}(t), \vec{Y}(0))] = \mathbb{E}[H(\vec{X}(0), \vec{Y}(t))] \Leftrightarrow L^X H(\vec{x}, \vec{y}) = L^Y H(\vec{x}, \vec{y})$$

Proposition (Borodin-Corwin-Sasamoto, 2012)

Par un calcul direct, si $H(\vec{x}, \vec{y}) = \prod_{i=0}^N q^{(x_i+i)y_i}$,

$$L^{q\text{-TASEP}} H = L^{q\text{-Boson}} H.$$

Remarque

La dualité est utile quand H caractérise suffisamment la loi du processus. Ici $\mathbb{E}[H(\vec{X}(t), \vec{y})]$ sont des moments des v.a. $q^{X_i(t)}$.

Que fait on de cette dualité ?

But : calculer la loi de $X_n(t)$ (cf Borodin-Corwin-Sasmoto 2012).

- 1 On obtient un système d'équations différentielles pour $\mathbb{E} \left[\prod_i q^{y_i X_i(t)} \right]$. Grâce à la dualité, il suffit de considérer les équations de Kolmogorov pour le système q -Boson à k particules.
- 2 On résout ce système par *ansatz de Bethe*.
- 3 Cela donne une formule pour $\mathbb{E} \left[q^{k X_n(t)} \right]$ pour $k \in \mathbb{N}$ qui caractérise la loi de $X_n(t)$.
- 4 On prend la fonction génératrice pour calculer la q -transformée de Laplace $\mathbb{E} \left[\frac{1}{(\zeta q^{X_n(t)}; q)_\infty} \right]$.
- 5 Il existe une formule d'inversion.

Déterminant de Fredholm

Théorème (Borodin-Corwin, 2011)

Soit $0 < q < 1$. Pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, si $X_n(t)$ sont les coordonnées des particules du q -TASEP avec CI step,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{(\zeta q^{X_n(t)}; q)_\infty} \right] = \det(I + K_\zeta)_{\mathbb{L}^2(C)},$$

où $\det(I + K_\zeta)_{\mathbb{L}^2(C)}$ est le déterminant de Fredholm de K_ζ défini par son noyau de convolution

$$K_\zeta(w, w') = \frac{1}{2i\pi} \int_{1/2+i\mathbb{R}} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} (-\zeta)^s \frac{g(w)}{g(q^s w)} \frac{ds}{q^s w - w'}$$

où

$$g(w) = \left(\frac{1}{(w; q)_\infty} \right)^n e^{-tw},$$

et le contour d'intégration C est un petit cercle autour de 1.

Analyse asymptotique I

- On veut prouver $X_n(t) \approx \pi(\alpha)t + t^{1/3}\sigma(\alpha)X_{TW}$ où X_{TW} est une v.a. de loi Tracy-Widom.
- La fonction $x \mapsto 1/(-q^x; q)_\infty$ a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.
Si on pose $\zeta = -q^{-\pi(\alpha)t - t^{1/3}\sigma(\alpha)x}$ pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{(\zeta q^{X_n(t)}; q)_\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{X_n(t) - \pi(\alpha)t}{\sigma(\alpha)t^{1/3}} \leq x \right).$$

- Donc on se ramène à devoir prouver

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det(I + K_\zeta) = F_{TW}(x),$$

où F_{TW} est la fonction de répartition de la loi de Tracy-Widom.

Analyse asymptotique II

Déterminant de Fredholm

$$\det(I+K)_{\mathbb{L}^2(C)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C \dots \int_C \det(K(w_i, w_j))_{1 \leq i, j \leq n} dw_1 \dots dw_n.$$

Représentation de $F_{\text{TW}}(x)$ sous forme de déterminant

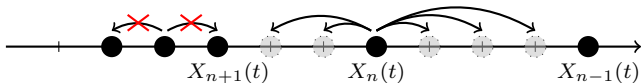
$F_{\text{TW}}(x) = \det(I + K_{\text{Ai}})_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}$ où

$$K_{\text{Ai}}(w, w') = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Xi} dz \frac{e^{z^3/3 - zx}}{e^{w^3/3 - wx}} \frac{1}{z - w} \frac{1}{z - w'},$$

où Γ et Ξ sont des contours partant à l'infini et ne s'intersectant pas.

Idée de la preuve

On applique la méthode du col sur chaque intégrale dans le développement ci-haut.



Question

Peut-on prouver un théorème limite pour le processus d'exclusion le plus général ?

Réponses (très) partielles

- TCL pour l'ASEP (Asymmetric simple exclusion process) (Tracy-Widom 2008).
- Version en temps discret du (q) -TASEP. (Borodin-Corwin 2013).
- Plein d'autres réponses partielles existent dans la littérature, par exemple prouvant l'ordre de grandeur $t^{1/3}$ des fluctuations sous certaines hypothèses.
- Le q -Hahn TASEP (Povolotsky 2013 / Corwin 2014).

La distribution q -Hahn

For $0 < q < 1$ and $0 \leq \nu \leq \mu \leq 1$,

$$\varphi_{q,\mu,\nu}(j|y) := \mu^j \frac{(\nu/\mu; q)_j (\mu; q)_{y-j}}{(\nu; q)_y} \begin{bmatrix} y \\ j \end{bmatrix}_q,$$

définit une loi de probabilité sur $\{0, 1, \dots, y\}$. (C'est aussi la fonction de poids des polynômes orthogonaux q -Hahn)

Povolotsky 2013

Si $YX = \alpha XX + \beta XY + \gamma YY$,

$$(X + Y)^n = \sum_{k=0}^n \varphi_{q,\mu,\nu}(j|n) X^k Y^{n-k}.$$

Gnedin-Olshanski 2009

Interprétation de $\varphi_{q,\mu,\nu}(j|y)$ en probabilités dans une q -déformation du modèle d'urne de Polya.

Le processus q -Hahn

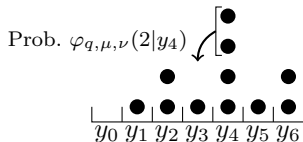
q -Hahn Zero-Range

Chaîne de Markov **temps discret**.

Les particules vivent sur N sites.

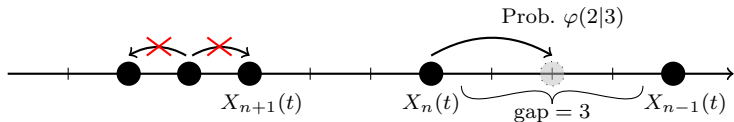
Partant d'un site occupé par y particules, $j \leq y$ particules sautent à gauche avec proba $\varphi(j|y)$.

Introduit par Povolotsky 2013



Dualité avec le q -Hahn TASEP

Le q -Hahn TASEP est un processus d'exclusion :



Dualité de Markov (Corwin 2014, B. 2014)

Le q -Hahn TASEP et le q -Hahn Boson sont duals par rapport à

$$H(\vec{x}, \vec{y}) = \prod_{i=1}^N q^{y_i(x_i+i)}.$$

$$\mathbb{E} \left[H(\vec{X}(t), \vec{Y}(0)) \right] = \mathbb{E} \left[H(\vec{X}(0), \vec{Y}(t)) \right].$$

Provient d'une propriété de symétrie de la distribution q -Hahn :

$$\sum_{j=0}^m \varphi_{q,\mu,\nu}(j|m) q^{jy} = \sum_{j=0}^y \varphi_{q,\mu,\nu}(j|y) q^{jm}.$$

Presque le même déterminant de Fredholm

Théorème (Corwin 2014)

Soit $0 < q < 1$ et $0 \leq \nu \leq \mu \leq 1$. Pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{(\zeta q^{X_n(t)}; q)_\infty} \right] = \det(I + K_\zeta)_{\mathbb{L}^2(C)},$$

où $\det(I + K_\zeta)_{\mathbb{L}^2(C)}$ est le déterminant de Fredholme de K_ζ défini par son noyau de convolution

$$K_\zeta(w, w') = \frac{1}{2i\pi} \int_{1/2+i\mathbb{R}} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} (-q^{-n}\zeta)^s \frac{g(w)}{g(q^s w)} \frac{ds}{q^s w - w'}$$

où

$$g(w) = \left(\frac{(\nu w; q)_\infty}{(w; q)_\infty} \right)^n \left(\frac{(\mu w; q)_\infty}{(\nu w; q)_\infty} \right)^t \frac{1}{(\nu w; q)_\infty},$$

et le contour d'intégration C est un petit cercle autour de 1.

Dégénération

- $\nu = 0$: Correspond au q -TASEP en temps discret.
- Si $\nu = 0$ et qu'on pose $\mu = (1 - q)\epsilon$ en renormalisant le temps $\tau = \epsilon^{-1}t$, on retrouve le q -TASEP.
- \exists plein d'autres dégénération.

Mesures stationnaires invariantes par translation

$$\mu_\alpha(\text{gap} = k) = \alpha^k \frac{(\nu; q)_k}{(q; q)_k} \frac{(\alpha; q)_\infty}{(\alpha\nu; q)_\infty}.$$

Théorème (Vető (2014))

Sous certaines restrictions techniques sur les paramètres q, μ et ν , et pour $\alpha > 2q/(1 + q)$,

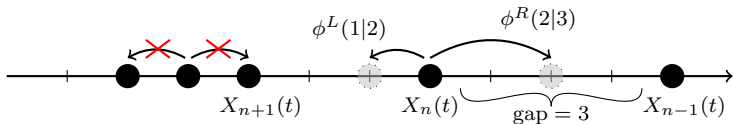
$$\frac{X_n(t) - \pi(\alpha)t}{\sigma(\alpha) \cdot t^{1/3}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_{TW}.$$

Le processus d'exclusion q -Hahn asymétrique

Question

Est-il possible de généraliser le modèle en permettant aux particules de sauter dans les deux sens, tout en préservant la dualité, et la solvabilité par ansatz de Bethe ?

Processus d'exclusion en temps continu :



Taux

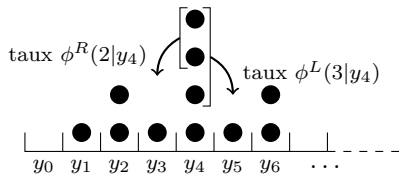
Soit $R, L \in \mathbb{R}_+$ des paramètres d'asymétrie vérifiant $R + L = 1$. On définit

$$\begin{aligned} \phi_{q,\nu}^R(j|m) &:= R \frac{\nu^{j-1}}{[j]_q} \frac{(\nu;q)_{m-j}}{(\nu;q)_m} \frac{(q;q)_m}{(q;q)_{m-j}} \simeq R \lim_{\mu \rightarrow \nu} \varphi_{q,\mu,\nu}(j|m) \\ \phi_{q,\nu}^L(j|m) &:= L \frac{1}{[j]_q} \frac{(\nu;q)_{m-j}}{(\nu;q)_m} \frac{(q;q)_m}{(q;q)_{m-j}} \simeq L \lim_{\mu \rightarrow \nu} \varphi_{q^{-1},\mu^{-1},\nu^{-1}}(j|m). \end{aligned}$$

Dualité

q -Hahn Zéro-range asymétrique

- Sites indexés par \mathbb{N} .
- Pour tout $j, j' \leq y_i$, j particules sautent sur le site $i - 1$ au taux $\phi_{q,\nu}^R(j|y_i)$ et j' particules sautent sur le site $i + 1$ au taux $\phi_{q,\nu}^L(j'|y_i)$.



Duality

Pour (**presque**) toutes conditions initiales $\vec{X}(0)$ et $\vec{Y}(0)$,

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{\infty} q^{Y_i(0)(X_i(t)+i)} \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{\infty} q^{Y_i(t)(X_i(0)+i)} \right].$$

Déterminant de Fredholm

Théorème (B.-Corwin 2015)

Soit $0 < q < 1$ et $0 \leq \nu < 1$. Pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{(\zeta q^{X_n(t)}; q)_\infty} \right] = \det(I + K_\zeta)_{\mathbb{L}^2(C)},$$

où $\det(I + K_\zeta)_{\mathbb{L}^2(C)}$ est le déterminant de Fredholm de K_ζ défini par son noyau de convolution

$$K_\zeta(w, w') = \frac{1}{2i\pi} \int_{1/2+i\mathbb{R}} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} (-q^{-n}\zeta)^s \frac{g(w)}{g(q^s w)} \frac{ds}{q^s w - w'}$$

où

$$g(w) = \left(\frac{(\nu w; q)_\infty}{(w; q)_\infty} \right)^n \exp \left((q-1)t \sum_{k=0}^{\infty} R \frac{wq^k}{1-\nu wq^k} - L \frac{wq^k}{1-wq^k} \right) \frac{1}{(\nu w; q)_\infty},$$

et le contour d'intégration C est un petit cercle autour de 1.

Renormalisation

Mesures stationnaires invariantes par translation

$$\mu_\alpha(\text{gap} = k) = \alpha^k \frac{(\nu; q)_k}{(q; q)_k} \frac{(\alpha; q)_\infty}{(\alpha\nu; q)_\infty},$$

les mêmes que pour le q -Hahn TASEP.

Constantes du modèle

On peut encore trouver une expression pour ρ en fonction de α , puis $\kappa(\alpha)$, $\pi(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$. (fait intervenir des fonctions spéciales q -déformées).

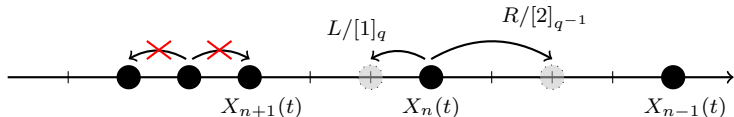
Théorème limite de type Tracy-Widom

Soit $0 < q, \nu < 1$ and $R > L$. Pour tout α faisant sens, pour $n/t = \kappa(\alpha)$ une analyse non-rigoureuse du déterminant suggère bien

$$\frac{X_n(t) - \pi(\alpha)t}{\sigma(\alpha) \cdot t^{1/3}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_{TW}.$$

Multi-particle Asymmetric Diffusion Model

Quand $\nu = q$ les taux ne dépendent plus des espacement inter-particules et deviennent $R/[j]_{q-1}$ et $L/[j]_q$.



- Introduit par Sasamoto and Wadati 1998 (dans la formulation Zero-Range).
- Les mesures stationnaires invariantes par translation sont les mêmes que pour l'ASEP (Bernoulli $^{\otimes \mathbb{Z}}$).

Simulations

On peut vérifier les prédictions d'universalité par simulation (Ici seulement la LGN) :

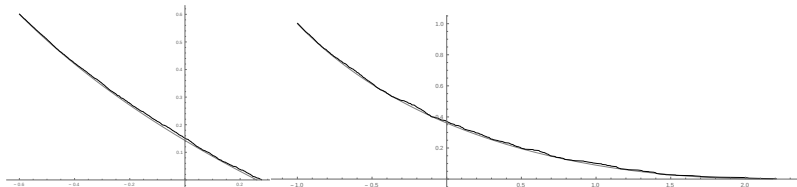


FIGURE : Courant renormalisé $N_{xt}(t)/t$ en fonction de x pour $t = 1500$.
Gauche : $R = 0.8$, Droite : $R = 1$. $L = 1 - R$

Resultat

Théorème (B.-Corwin, 2015)

Soit $0 < q < 1$ et $R > L$. Pour $\alpha \geq 2q/(1+q)$, en gardant $n/t = \kappa(\alpha)$ on a

$$\frac{X_n(t) - \pi(\alpha)t}{\sigma(\alpha) \cdot t^{1/3}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_{TW}.$$

La méthode du col est difficile à mettre en oeuvre pour $\alpha < 2q/(1+q)$ (trop gros calculs).

Phénomènes surprenants

- Le profil macroscopique de densité présente une discontinuité au niveau de la première particule.
- A cause des sauts sur la gauche qui peuvent être très grands, les particules se repoussent à petite échelle et s'attirent à grande échelle. Conséquence : La première particule a un mouvement non diffusif et vérifie un Théorème limite TW (Pas le cas pour l'ASEP)

Perspectives

Côté probabiliste : Un des intérêts du q -TASEP est son lien avec les polymères dirigés quand q tends vers 1.

- Quand $\nu = 0$, lien avec le modèle d'Anderson parabolique (?)
- Certaines limites du q -Hahn TASEP donnent de nouveaux modèles intégrables. (Travail en cours avec Ivan Corwin)

Côté plus algébrique :

- Les fonctions propres associées au générateur du processus q -Hahn (Déformations des fonctions symétriques de Hall-Littlewood) interviennent aussi dans d'autres modèles.
- Lien avec les algèbres de Hecke ?
- Généralisation du q -Hahn.

Plus difficile : On est encore loin de prouver l'universalité KPZ. Cela requiert a priori des méthodes analytiques. Meilleure compréhension de la loi de Tracy-Widom ?

Merci !