Mesures invariantes pour l'équation KPZ sur un segment

Guillaume Barraquand

CNRS – ENS

Basé sur un travail avec **Pierre Le Doussal**.

Equation KPZ

- En 1986, les physiciens Kardar, Parisi and Zhang étudièrent les fluctuations d'interfaces rugueuses (croissance de colonies de bactéries, déposition de matière, propagation du feu...). Ils ont introduit l'EDP stochastique

$$\partial_t h(x,t) = \frac{1}{2}\partial_{xx} h(t,x) + \frac{1}{2}(\partial_x h(x,t))^2 + \xi(x,t),$$

  où $\xi(x,t)$ est un bruit blanc Gaussien espace-temps.
- Cette EDP stochastique est un exemple d'une classe beaucoup plus vaste de modèles partageant le même comportement à grande échelle (systèmes de particules, polymères dirigés, percolation de premier passage, etc.), appélée **classe d'universalité KPZ**.
- Le sujet est relié à de nombreux domaines mathématiques : structures de régularité de [Hairer], systèmes intégrables et groupes quantiques, théorie des matrices aléatoires, ...

Equation de la chaleur stochastique

- Considérons l'équation de la chaleur stochastique (à bruit multiplicatif)

$$\partial_t Z(t,x) = \frac{1}{2}\Delta\ Z(t,x) + Z(t,x)\ \xi(t,x), \quad t > 0, x \in \mathbb{X},$$

  où ξ est un bruit blanc Gaussien espace-temps. En dimension spatiale égale à 1, on donne un sens à cette équation en prescrivant que toute solution $Z(t,x)$ satisfait

$$Z(t,x) = Z_0 * p_t(x) + \int_0^t ds \int_{\mathbb{X}} d_y p_{t-s}(x-y) Z(s,y)\xi(s,y),$$

  où $p_t(x)$ est le noyau de la chaleur sur $\mathbb{X}$.
- $h := \log(Z)$ est **la** solution de l'équation KPZ

$$\partial_t h = \frac{1}{2}\partial_{xx} h + \frac{1}{2}\left(\partial_x h\right)^2 + \xi.$$

Question : Existe-t-il des mesures invariantes ? Y a-t-il unicité ? Comment les caractériser ? La réponse dépend de l'espace $\mathbb{X}$. Cela peut être $\mathbb{R}$, un tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ou un intervalle avec des conditions au bord.

Cas simple : sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

- Supposons que $\mathbb{X} = \mathbb{R}$. Pour une grande classe de conditions initiales, $h(t,x) \sim \frac{-t}{24}$, donc il ne peut pas y avoir de mesures invariantes au sens strict. En revanche il existe des mesures stationnaires dans $C(\mathbb{R})/\{x \mapsto c\}_{c\in\mathbb{R}}$.
- Si $h(0,x) = B_x^{(\mu)}$ un mouvement Brownien avec drift μ, alors pour tout $t > 0$, en tant que processus,

$$h(t,x) - h(t,0) \overset{(d)}{=} B_x^{(\mu)}.$$

  [Bertini-Giacomin 1997, Funaki-Quastel 2014] La loi de $h(t,0)$ est non triviale et

$$h(t,0) = \frac{-t}{24} + \text{fluctuations}.$$

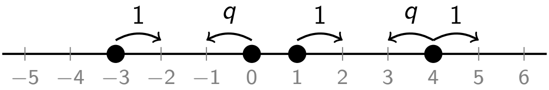
- Sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le mouvement Brownien est invariant et c'est l'unique mesure invariante [Hairer-Mattingly 2016].

Plan

1. Comment trouver les mesures invariantes sur $\mathbb{R}$ ou sur le tore ?
2. Equation KPZ sur un segment et ses mesures invariantes
3. Idées de preuve
4. Limites à grande échelle et mesures invariantes sur $\mathbb{R}_+$.

ASEP

L'ASEP (asymmetric simple exclusion process) est un processus de Markov continu, ici sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, dont les transitions dépendant d'un paramètre d'asymétrie q.



- Pour tout $\varrho \in [0,1]$, la mesure $\mathrm{Ber}(\varrho)^{\otimes \mathbb{Z}}$ est invariante.
- On définit une fonction de hauteur $H(t,x)$ telle que

$$H(t,x) - H(t,x-1) = \begin{cases} 1 & \text{si le site } x \text{ est occupé.} \\ -1 & \text{si le site } x \text{ est vide} \end{cases}$$

et $H(t,0)$ est le nombre de particules ayant traversé l'origine.

Convergence WASEP $\to$ KPZ

Soit $Z_t(x) = q^{\frac{1}{2}H(t,x)-\nu t}$, où $\nu = (1-\sqrt{q})^2$. Pour $q = e^{-\varepsilon}$, lorsque $\varepsilon \to 0$

$$Z_{\epsilon^{-4}t}(\epsilon^{-2}x) \Longrightarrow Z(t,x),$$

la solution de

$$\partial_t Z(t,x) = \tfrac{1}{2}\Delta Z(t,x) + Z(t,x)\,\xi(t,x).$$

La fonction de hauteur de l'ASEP converge vers une solution de l'équation KPZ. [Bertini-Giacomin 1997]

Rmq : Sous Ber$(\varrho)^{\otimes\mathbb{Z}}$, la fonction de hauteur converge vers un mouvement Brownien (avec drift), à un shift global près.

Equation KPZ sur un segment

Considérons l'équation KPZ sur le segment $[0, L]$,

$$\partial_t h = \frac{1}{2}\partial_{xx} h + \frac{1}{2}\big(\partial_x h\big)^2 + \xi.$$

Pour avoir unicité des solutions, il est nécessaire d'imposer des conditions aux bord. Comme $h(x,t) \sim -ct$ il est plus naturel d'imposer des conditions aux bord de type Neumann,

$$\partial_x h(t,0) = A, \quad \partial_x h(t,L) = B.$$

C'est le choix approprié du point de vue physique, car $\partial_x h$ correspond à la densité dans l'ASEP. Ces paramètres ont aussi une interprétation naturelle lorsque $Z(t,x) = e^{h(t,x)}$ est vue comme fonction de partition d'un polymère dirigé.

- Problème : $h(t,x)$ n'est pas dérivable...

Conditions au bord

$$\partial_t Z(t,x) = \tfrac{1}{2}\Delta Z(t,x) + Z(t,x)\,\xi(t,x).$$

Les conditions au bords deviennent

$$\partial_x Z(t,0) = AZ(t,0), \quad \partial_x Z(t,L) = BZ(t,L).$$

Definition

$h(t,x)$ est une solution de l'équation KPZ sur $[0,L]$ avec paramètres de bord $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$ si :
pour tout $t > 0$, $x \in [0,L]$, $h(t,x) = \log Z(t,x)$ et

$$Z(t,x) = \int_0^L dy Z_0(y) p_t^{u,v}(x,y) + \int_0^t ds \int_0^L d_y p_{t-s}^{u,v}(x,y) Z(s,y)\xi(s,y),$$

où $p_t^{u,v}(x,y)$ est le noyau de la chaleur sur $[0,L]$ satisfaisant les conditions au bord

$$\begin{cases} \partial_x p_t^{u,v}(x=0,y) = (u-\frac{1}{2})p_t^{u,v}(0,y), \\ \partial_x p_t^{u,v}(x=L,y) = (-v+\frac{1}{2})p_t^{u,v}(L,y). \end{cases}$$

Mesures invariantes sur un segment

Fixons $u, v \in \mathbb{R}$. Pour n'importe quel processus continu X_t, notons

$$A_t(X) = \int_0^t e^{-2X_s} ds.$$

Le processus

$$h(x) = W_x + X_x$$

est invariant pour l'équation KPZ sur $[0, L]$, où

- W est un mouvement Brownien avec coefficient de diffusion $1/2$.
- X est un processus continu, indépendant de W, dont la loi est absolument continue par rapport au mouvement Brownien B avec coefficient de diffusion $1/2$, et la dérivée de Radon-Nikodym est

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{P}_X}{d\mathbb{P}_B}(B) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{u,v}} \left(A_L(B)\right)^u \left(A_L(B - B_L)\right)^v \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{u,v}} \left(\int_0^L e^{-2B_s} ds\right)^u \left(\int_0^L e^{-2B_s + 2B_L} ds\right)^v\end{aligned}$$

Cela signifie que pour toute fonctionnelle bornée et continue F,

$$\mathbb{E}_X[F(X)] = \frac{1}{\mathcal{Z}_{u,v}} \mathbb{E}_B \left[F(B) \left(A_L(B)\right)^u \left(A_L(B - B_L)\right)^v \right],$$

où B est un mouvement Brownien avec coeff de diffusion $1/2$ et $A_L(B) = \int_0^L e^{-2B_s} ds$.

- Echanger u et v a le même effet que renverser l'espace, c'est à dire changer X_x en $x \mapsto X_{L-x} - X_L$.
- On a

  $$\left(A_L(B)\right)^u \left(A_L(B - B_L)\right)^v = e^{-2vB_L} A_L(B)^{u+v}$$

  donc par le théorème de Cameron-Martin, X est absolument continu par rapport au mouvement Brownien $B^{(-2v)}$ avec drift $-2v$ et la dérivée de Radon-Nikodym est

  $$\frac{d\mathbb{P}_X}{d\mathbb{P}_B}(B) = \frac{1}{\widetilde{\mathcal{Z}}_{u,v}} A_L(B)^{u+v}.$$

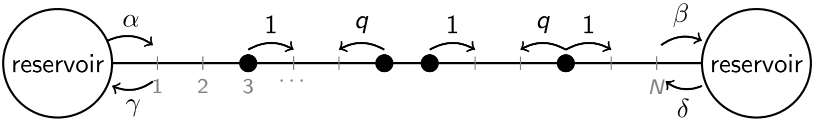
Ces mesures ont été étudiées par [Hariya-Yor 2004] sans aucun lien avec l'équation KPZ

Etapes principales

1. Trouver des/les mesures invariantes de l'ASEP sur un segment, avec des conditions au bord (réservoirs) [Derrida-Evans-Hakim-Pasquier 1993]
2. Reformuler le résultat pour obtenir des formules. [Bryc-Wesołowski 2018]
3. Prendre la limite vers KPZ [Corwin-Knizel 2021]
4. Interpréter les formules [B.- Le Doussal 2021] [Bryc-Kuznetsov-Wang-Wesołowski 2021]

Matrix product ansatz

Considérons l'ASEP sur $\{0,1\}^N$ avec paramètres de bord $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



On décrit l'état du système par $\tau \in \{0,1\}^N$. La mesure invariante $\mathbb{Q}$, déterminée par [Derrida-Evans-Hakim-Pasquier 1993], est telle que pour $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{Q}\left[\prod_{j=1}^{N} t_j^{\tau_j}\right] = \frac{1}{K_N} w^T (E + t_1 \mathrm{D})(\mathrm{E} + t_2 \mathrm{D}) \dots (\mathrm{E} + t_N \mathrm{D})\, v$$

où

$$K_N = w^T (E + \mathrm{D})^N\, v$$

et E, D sont des matrices infinies et w, v des vecteurs tels que

$$DE - qED = D + E$$
$$w^T(\alpha E - \gamma D) = w^T$$
$$(\beta D - \delta E)v = v$$

Polynômes orthogonaux de Askey-Wilson

- Trouver une représentation, c'est à dire des matrices E, D et vecteurs u, v explicites satisfaisant les relations, est non-trivial. [Uchiyama-Sasamoto-Wadati 2003] ont trouvé une représentation à l'aide de polynômes orthogonaux de Askey-Wilson.
- Cela permet de réécrire [Bryc-Wesołowski 2018]

$$\mathbb{Q}\left[\prod_{j=1}^{N} t_j^{\tau_j}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{N}(1+t_j+2\sqrt{t_j}\,Y_{t_j})\right]}{\mathbb{E}\left[\left(2+\sqrt{1-q}\,Y_1\right)^N\right]},$$

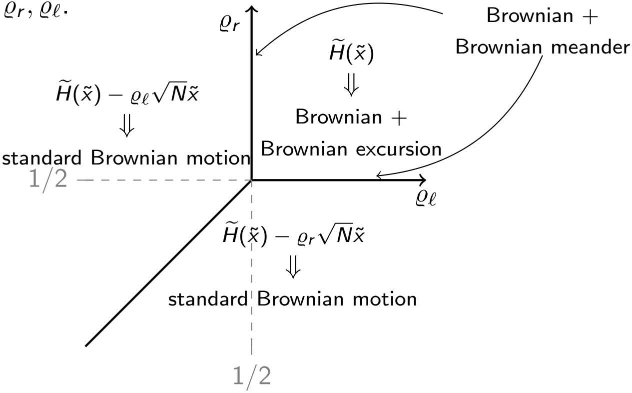
  où Y_t est un processus de Markov auxiliaire satisfaisant de nombreuses propriétés dont :
  - Pour tout $n \geqslant 1$, $P_n(Y_t;t)$ est une martingale (on note $P_n(x;t)$ les polynomes de Askey-Wilson spécialisés de manière appropriée).
  - Les probabilités de transitions de Y_t sont données par une formule explicite faisant intervenir la densité par rapport à laquelle les $P_n(x;t)$ sont orthogonaux.

Limite à grande échelle

[Bryc-Wang 2018] ont considéré le comportement de la fonction de hauteur sous la mesure invariante lorsque $N \to +\infty$, et obtiennent les mêmes résultats que pour le TASEP ($q = \gamma = \delta = 0$) [Derrida-Enaud-Lebowitz 2003].

$$\widetilde{H}(\tilde{x}) := \frac{1}{\sqrt{N}} H(N\tilde{x}).$$

En fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ on définit des paramètres de densité à gauche et à droite ϱ_r, ϱ_ℓ.



Transformées de Laplace

- [Corwin-Knizel 2021] ont pris la limite du résultat de [Bryc-Wesołowski 2018] dans le scaling menant à l'équation KPZ. Ils obtiennent des formules pour la transformée de Laplace des lois marginales du processus stationnaire $h(x)$.
- Le processus de Markov auxiliaire Y_t admet une limite ayant des probabilités de transition explicites. On obtient (cas particulier en un point)

$$\mathbb{E}[e^{-sh(x)}] = e^{\frac{s^2 x}{4}} \iint_0^\infty dt_1\, dt_2 p_0(t_2) p_{0,s}(t_2, t_1) e^{\frac{-1}{4}(t_1 x + t_2(L-x))},$$

où, pour $u, v > 0$,

$$p_0(t) = \frac{(u+v)(u+v+1)}{8\pi} \frac{\Gamma\left(v \pm i\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\Gamma\left(u \pm i\frac{\sqrt{t}}{2}\right)}{\sqrt{t}\Gamma\left(\pm i\sqrt{t}\right)}$$

$$p_{0,s}(t_2, t_1) = \frac{1}{8\pi} \frac{\Gamma\left(u - \frac{s}{2} \pm i\frac{\sqrt{t_1}}{2}\right)}{\Gamma\left(u \pm i\frac{\sqrt{t_2}}{2}\right)\sqrt{t_1}\Gamma\left(\pm i\sqrt{t_1}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} \pm i\frac{\sqrt{t_2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{t_1}}{2}\right)}{\Gamma(s)}$$

Mécanique quantique de Liouville I

- On reconnait des expressions typiques qui interviennent en mécanique quantique de Liouville, lorsqu'on calcule des fonctionnelles exponentielles du mouvement Brownien.
- Le Hamiltonien de Liouville (en dim 1) est l'opérateur

$$H = \frac{-1}{4}\frac{d^2}{dU^2} + e^{-2U}.$$

Il est diagonalisé par la famille de fonctions propres $\psi_k(U) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{|\Gamma(ik)|}K_{ik}(2e^{-U})$, où $K_{ik}(x)$ est une fonction de Bessel et satisfaisant

$$H\psi_k = \frac{k^2}{4}\psi_k, \quad \langle\psi_k|\psi_{k'}\rangle = \delta(k-k').$$

Mécanique quantique de Liouville II

Les fonctions de Bessel permettent de calculer certaines quantités, par exemple

$$\int_{\mathbb{R}} dU e^{-sU} \psi_k(U)\psi_{k'}(U) = \frac{C}{8\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} \pm \frac{ik}{2} \pm \frac{ik'}{2}\right)}{\Gamma(s)},$$

que l'on retrouve dans l'expression de $p_{0,s}(t_2, t_1)$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-sh(x)}\right] = e^{\frac{1}{4}s^2 x} \int dU_1 \int dU_2 \int dk_1 \int dk_2 e^{-2vU_2-(2u-s)U_1)} \\ \times \psi_{k_2}(U_2)\psi_{k_1}(U_1) \int dU e^{-sU} \psi_{k_1}(U)\psi_{k_2}(U) e^{-x\frac{k_1^2}{2}-(L-x)\frac{k_2^2}{2}}\end{aligned}$$

Il existe des formules analogues pour la transformée de Laplace de $(h(x_1), \dots, h(x_d))$, qui permettent de décrire $h(x)$ comme la somme d'un mouvement brownien et d'une transformée de Doob d'un processus de Markov ayant des transitions explicites.

Jusqu'ici, tout peut-être rendu parfaitement rigoureux, cf. [Bryc-Kuznetsov-Wang-Wesołowski 2021]

Résultat principal

En utilisant la formule de Feynman-Kac

$$\int dk_1 \int dk_2 \psi_{k_1}(U') e^{-(b-a)H} \psi_{k_2}(U) = \mathbb{E}_B \left[e^{-\int_a^b e^{-2B(x)}} \right],$$

où l'espérance est prise par rapport à un pont Brownien tel que $B(a) = U$ et $B(b) = U'$, on réinterprete les formules, et on obtient que

$$h(x) = W_x + X_x$$

est invariant pour l'équation KPZ sur $[0, L]$, où

- W est un mouvement Brownien avec coefficient de diffusion $1/2$.
- X est indépendant de W, et sa loi est absolument continue par rapport au mouvement Brownien B avec coefficient de diffusion $1/2$, et la dérivée de Radon-Nikodym est

$$\frac{d\mathbb{P}_X}{d\mathbb{P}_B}(B) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{u,v}} \left(A_L(B)\right)^u \left(A_L(B - B_L)\right)^v$$

où $A_L(B) = \int_0^L e^{-2B_s} ds$.

Discussion

- Le résultat de [Corwin-Knizel] est restreint à $L = 1$ et $u + v > 0$. On conjecture que pour u,v fixé, la mesure invariante est unique, et sa loi est analytique en u, v. La continuation analytique est difficile à partir des transformées de Laplace. En revanche elle est triviale à partir de la dérivée de Radon-Nikodym.
- Le long de la droite $u + v = 0$, le processus est un Brownien avec drift $u = -v$.
- Le processus X a été étudié par [Hariya-Yor, 2004] sans aucun lien avec l'équation KPZ.

Monsieur Jourdain...

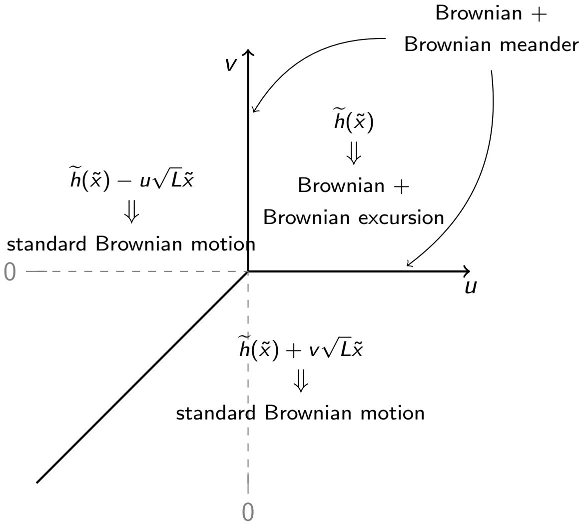
≪ *Our reference to Monsieur Jourdain (a character of Molière (1622–1673) [17]) in the title alludes to this point ; Monsieur Jourdain discovers that he is practicing prose without being aware of it ; analogously the following theorem shows that a number of authors have been dealing with harnesses :* ≫

Harnesses, Lévy bridges and Monsieur Jourdain, R. Mansuy, M. Yor, 2005

Limites et universalité

- Il est conjecturé que tous les modèles de la classe KPZ convergent à grande échelle vers un processus de Markov universel appelé le **point fixe KPZ**. La définition dépend tout de même de l'espace considéré $(\mathbb{R}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}_+, [0, L])$. Pour les modèle de croissance sur $\mathbb{R}$, le point fixe KPZ a été défini par [Matetski-Quastel-Remenik 2016] (ou de manière différente mais équivalente par [Dauvergne-Ortmann-Virag 2018]).
- En admettant l'existence de ce processus universel et la convergence des modèles, les mesures invariante pour n'importe quel modèle de la classe KPZ doivent converger vers les mesures invariantes pour le point fixe KPZ correspondant.
- Considérons
$$\tilde{h}(\tilde{x}) := \frac{1}{\sqrt{L}} h(L\tilde{x}),$$
où h est le processus invariant pour l'équation KPZ avec paramètres de bord u, v.

Diagramme de phase



On obtient le même diagramme de phase que pour le TASEP [Derrida-Enaud-Lebovitz 2004] et l'ASEP [Bryc-Wang 2018].

Crossover

Il est plus naturel de rescaler les parametres de bord comme

$$u = \frac{\tilde{u}}{\sqrt{L}}, v = \frac{\tilde{v}}{\sqrt{L}}$$

de sorte que la mesure stationnaire du point fixe KPZ satisfasse (formellement) les conditions aux bords

$$\partial_x \tilde{h}(0) = \tilde{u}, \quad \partial_x \tilde{h}(1) = -\tilde{v}.$$

On a

$$\tilde{h}(x) = W_x + \widetilde{X}_x$$

où

- W est un Brownien avec coefficient de diffusion $1/2$.
- $\widetilde{X}$ est indépendant de W, de loi absolument continue par rapport au mouvement Brownien $B^{(-v)}$ avec coefficient de diffusion $1/2$ et drift $-v$, et la dérivée de Radon-Nikodym est

$$\frac{d\mathbb{P}_{\widetilde{X}}}{d\mathbb{P}_{B^{(-v)}}}(B) = \frac{1}{\widetilde{\mathcal{Z}}_{u,v}} e^{2(u+v)\min \widetilde{X}}.$$

Mesures invariantes pour KPZ sur $\mathbb{R}_+$

- Lorsque $L \to +\infty$ on s'atttend à ce que les mesures invariantes de l'équation KPZ sur $[0, L]$ convergent (sans rescaling) vers les mesures invariantes sur $\mathbb{R}_+$.
- Cette limite a été étudiée par [Hariya-Yor 2004].

Transformée de Pitman géométrique

Pour un processus X_t on introduit sa transformée

$$T_z(X)(t) = X_t + \log\left(1 + zA_t(X)\right), \text{ où } A_t(X) = \int_0^t e^{-2X_s} ds.$$

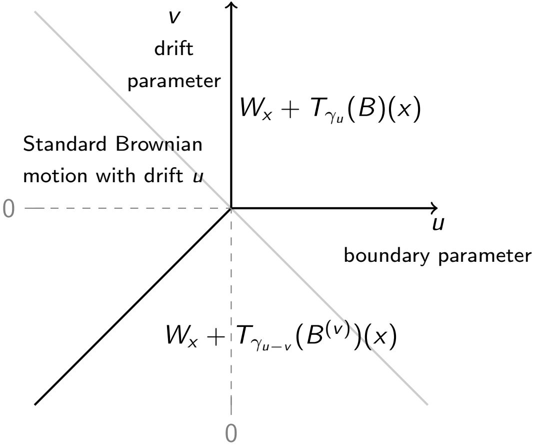
Cette transformation satisfait

$$T_z \circ T_{z'} = T_{z+z'}, \quad \frac{1}{A_t(T_z(X))} = \frac{1}{A_t(X)} + z,$$

et permet de relier des fonctionnelles sous la mesure $\mathbb{P}_X$ pour différentes valeurs de u, v en utilisant [Matsumoto-Yor 2003].

Mesures invariantes pour KPZ sur $\mathbb{R}_+$

Lorsque $L \to +\infty$, la loi de h converge faiblement dans $C(\mathbb{R})$ vers un processus qui dépend toujours de u, et parfois de v,



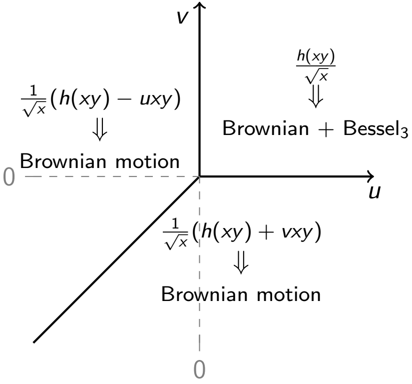
- γ_u et γ_{u-v} sont des variables exponentielles indépendantes.
- Le long de la droite $u + v = 0$, le processus est un Brownien avec drift $u = -v$.

A grande échelle

- Comme précédemment, on peut prendre la limite à grande échelle et obtenir la lesure invariante pour le point fixe KPZ sur $\mathbb{R}_+$.
- La transformée de Pitman géométrique devient la transformée de Pitman classique, i.e.

$$P(X)(t) = X_t - 2 \min_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s$$

et la transformée de Pitman d'un mouvement Brownien est un processus de Bessel tri-dimensionnel.

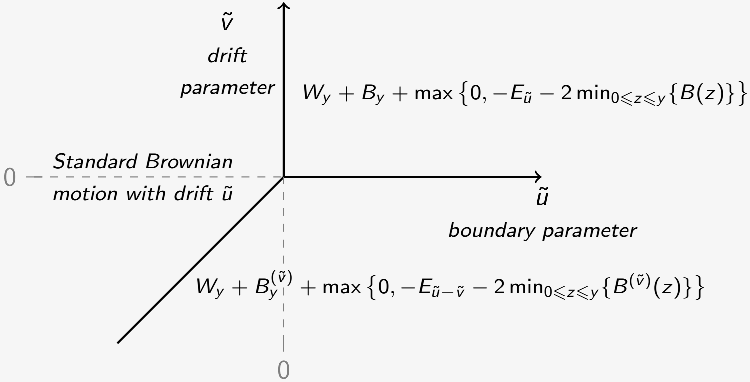


Conjecture

On peut aussi rescaler les paramètres u, v comme précédemment. Par universalité, les mesures invariantes obtenues doivent aussi apparaître comme limite d'échelle des mesures invariantes de l'ASEP sur $\mathbb{N}$.

Conjecture

Les mesures invariantes de l'ASEP sur $\mathbb{N}$, dont l'existence est prouvée par [Liggett, 1975], convergent à grande échelle vers



où $E_{\tilde{u}}$ et $E_{\tilde{u}-\tilde{v}}$ sont des variables exponentielles indépendantes.

Conclusion

Les mesures invariantes pour l'équation KPZ sur le segment sont données par des repondérations de la mesure Brownienne par des fonctionnelles exponentielles, étudiées par Hariya et Yor.

Perspectives

- Unicité : problème ouvert.
- Preuve directe du lien entre mécanique quantique de Liouville et KPZ. Et en dimension 2 ?
- Formuler une version discrète de la mesure de Hariya-Yor correspondant aux mesures invariantes pour l'ASEP, ou d'autres modèles. Plus généralement, il serait intéressant de comprendre le lien entre *matrix product ansatz* et mesures sur des chemins.

Merci