Analysis I+II

ETH ZÜRICH

HS 2014 / FS 2015

Vorlesungen gehalten von :

Prof. Dr. Dietmar Arno Salamon

Mitschrift von :

Simon Dominik Vonlanthen

Bemerkungen zu dieser Mitschrift:

Ich wäre sehr verbunden, könnten diejenigen, die diese Mitschrift verwenden, folgenden Bitten nachkommen:

- Da diese Mitschrift im „Eifer des Gefechts" entstand, werden sich unweigerlich Fehler verschiedenster Art eingeschlichen haben. Ich bitte deshalb darum, mir die folgenden Fehler zu melden:

  - falsche mathematische Formeln / Ausdrücke / Formulierungen. WICHTIG: Hiermit meine ich eindeutige bzw. klar ersichtliche Fehler, wie z.B.:
    i) $\exists x \in \emptyset \ldots$ *Nonsense*
    ii) A anstatt $\overline{A}$ *leichte Typos*
    iii) $\varphi(x)$ anstatt $\psi(x)$ *schwere Typos*
    iv) "... isomorph ..." anstatt "... homöomorph ..." *Verwechslungen*

    Wenn Ihr Euch nicht sicher seid, so bitte ich darum, zuerst bei Euren KommilitonInnen / Assistierenden nachzufragen, ob es sich wirklich um einen Fehler handelt. Falls ja, dann wäre ich selbstverständlich froh, darüber in Kenntnis gesetzt zu werden. Ich habe leider zu wenig Zeit bzw. Kompetenz, um detaillierten konzeptionellen Fragen auf den Grund zu gehen.

  - Falls vorhanden / entdeckt: sprachliche Fehler, wie z.B. Missgeschicke in Orthographie oder Grammatik. Nur falls jemand Zeit für sowas hat...

- Falls irgendetwas komplett fehlen sollte oder nicht lesbar ist, so wäre ich auch hier um Rückmeldung dankbar.

Bitte wenden →

- Da ich bei dieser Mitschrift radierbare Tinte verwendet habe, kann es passiert sein, dass einzelne Stellen nachträglich ungewollt wegradiert worden sind, z.B. bei energischem Radieren auf der Rückseite eines Blattes können einz. Passagen auf der Vorderseite mitradiert werden. Die meisten sollten beim Einscannen der Schrift entdeckt und repariert worden sein. Falls doch noch eine Stelle auftauchen sollte: Bitte melden!

Ich werde versuchen, die eingehenden Verbesserungen, entweder durch ein Erratum oder durch Korrektur der Seiten selbst und anschliessendem, erneutem Scan, allen zugänglich zu machen und somit nachzuliefern.

Ich würde mich freuen, würde man diesen Bitten nachkommen, und hoffe, die Mitschrift wird der einen oder anderen Person hilfreich sein.

Ich wünsche viel Erfolg sowohl bei den Vorbereitungen als auch an den Prüfungen.

Simon D. Vonlanthen
Embrach, Mai 2015

Organisatorisches

- → bestes Buch: "Königsberger"
- → Mitschrift empfohlen! (duh)

Analysis I

Form	Sprache	Inhalt
Logik	Mengenlehre	Zahlen

$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$

Analysis!

Beispiele für Mengen:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} := \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$

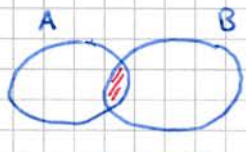
$\mathbb{Q} := \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{R} :=$ Menge d. reellen Zahlen

$\mathbb{C} :=$ Menge d. komplexen Zahlen

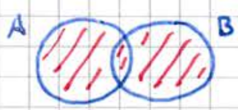
→ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Durchschnitt



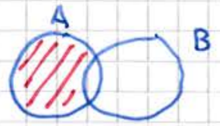
$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

Vereinigung



$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ → kein exklusives "oder"

Differenzmenge



$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

div. Mengen: $A := \{n^2 + m^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
$T := \{m \mid 24 \text{ ist durch } m \text{ teilbar}\}$
$P := \{*\}$
$\emptyset$ "leere Menge"

Lemma: $\sqrt{2}$ ist irrational

Beweis: Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d.h. $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}$, s.d. $p^2/q^2 = 2$

$\Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p$ ist gerade: $p \in 2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow q$ ist gerade (da $p^2/2 = q^2$ und $q \in \mathbb{N}$)

$\rightarrow$ p und q können so gewählt werden, dass höchstens eine von ihnen gerade ist! $\rightarrow$ Widerspruch!

$\blacksquare$

I Die reellen Zahlen

1. Körperaxiome

Axiome für die üblichen vier Grundrechenarten:

Je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ wird ein Element $x+y \in \mathbb{R}$ (die Summe) und ein Element $xy \in \mathbb{R}$ (das Produkt) zugeordnet

(K1) Add. & Multipl. sind kommutativ, d.h.
$x+y = y+x, \quad xy = yx \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(K2) Add. & Multipl. sind assoziativ, d.h.
$(x+y)+z = x+(y+z), \quad (xy)z = x(yz) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

(K3) Es gibt zwei verschiedene neutrale Elemente $0 \in \mathbb{R}$ (bez. Add.) und $1 \in \mathbb{R}$ (bez. Multipl.) mit folgenden Eigenschaften

(i) $x + 0 = x \quad , \quad x \cdot 1 = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!^{*} y \in \mathbb{R}$ s.d. $x + y = 0 \Rightarrow y := -x$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists!\, z \in \mathbb{R}$ s.d. $x \cdot z = 1 \Rightarrow z := x^{-1}$

(K4) Add. und Multiplikation sind distributiv

$x(y+z) = xy + xz \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

Bem. 1: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ erfüllen beide die Körperaxiome, ebenso $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$\rightarrow \mathbb{Z}_2$:

$0+0 := 0$	$0 \cdot 0 := 0$
$0+1 := 1$	$0 \cdot 1 := 0$
$1+1 := 0$	$1 \cdot 1 := 1$

Bem. 2: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ erfüllen die Körperaxiome nicht!

Bem. 3: Alle weiteren Rechenregeln lassen sich aus den KA herleiten.

Lemma 1: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $x \cdot 0 = 0$

(ii) $-(x+y) = (-x) + (-y)$

$-(-x) = x$

(iii) Falls $x \neq 0$, $y \neq 0$, so gilt $xy \neq 0$

und $(xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

$(x^{-1})^{-1} = x$

(iv) $(-x)y = x(-y) = -xy$

$(-x)(-y) = xy$

Bezeichnung: $x - y := x + (-y)$ und falls $y \neq 0$, $\frac{x}{y} := xy^{-1}$

Beweis von Lemma 1:

(i) $0 \overset{K3}{=} 0 + 0 \Rightarrow x \cdot (0+0) \overset{K4}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$

$\Rightarrow x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0)$

$0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) = x \cdot 0$

(ii) $(x+y) + ((-x) + (-y)) \overset{K1}{=} (x+y) + ((-y) + (-x))$
$\overset{K2}{=} x + (y + ((-y) + (-x)))$
$\overset{K2}{=} x + ((y + (-y)) + (-x))$
$\overset{K3}{=} x + (0 + (-x)) \overset{K3}{=} x + (-x) = 0$

* "es existiert genau ein"

$x + (-x) = 0$ (via Meditation)

(iii) $x \neq 0,\ y \neq 0$; Beh. $x \cdot y \neq 0$

Bew.: Annahme $xy = 0 \Rightarrow (x \cdot y) y^{-1} \overset{K2}{=} x(y \cdot y^{-1}) = x$

$$\| $$

$$0 \cdot y^{-1} \overset{K1}{=} y^{-1} \cdot 0 \overset{(i)}{=} 0$$

$\rightarrow$ Widerspruch!

Rest des Beweises von (iii) ist wie in (ii):

$$(xy)\underbrace{(y^{-1} \cdot x^{-1})}_{(xy)^{-1}} = (xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(y(y^{-1}x^{-1})$$
$$= x((yy^{-1})x^{-1})$$
$$= x(1 \cdot x^{-1}) = xx^{-1} = 1$$

(iv) a) $(-x)y = -xy$

$$xy + (-x) \cdot y \overset{K1}{=} yx + y(-x)$$
$$\overset{K4}{=} y(x + (-x))$$
$$\overset{K3}{=} y \cdot 0$$
$$\overset{(i)}{=} 0$$

b) $x(-y) = -xy$ (wie in a))

c) $(-x)(-y) = xy = (-x)(-y) \overset{a)}{=} -(x(-y))$

$$\overset{b)}{=} -(-xy)$$
$$\overset{(ii)}{=} xy$$

▨

2. Ordnungsaxiome

Es gibt eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$, genannt die Menge der positiven reellen Zahlen, mit folgenden Eigenschaften:

(O1) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$x \in P$, $x = 0$, $-x \in P$

(O2) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad x \cdot y \in P$

(O3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$, s.d. $n - x \in P$ "es gibt immer ein grösseres n"

Bem.: Um das Axiom (O3) zu formulieren, müssen wir zunächst zeigen, dass $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist. Dies folgt aus (K1-4) und (O1-2).

Schreibweise: $x > 0$ heisst $x \in P$, x ist positiv

$x < 0$ heisst $-x \in P$, x ist negativ

$x < y$ heisst $y - x \in P$, x kleiner als y

$x \leq y$ heisst $y - x \in P$ oder $x = y$, x kleiner/gleich y

Lemma 2: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $x < y,\ y < z \Rightarrow x < z$

(ii) $x < y,\ y > z \Rightarrow x + z < y + z$

(iii) $x < y \Rightarrow -y < -x$

(iv) $x < y,\ z > 0 \Rightarrow xz < yz$

(v) $x < y,\ z < 0 \Rightarrow yz < xz$

(vi) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 = x \cdot x > 0$

(vii) $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

(viii) $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $0 < \frac{1}{n} < x$

(ix) Jede natürliche Zahl ist positiv $\mathbb{N} \subset P$

(x) $x < y \Rightarrow x < x+y/_2 < y$

18.9.14

Beweis von Lemma 2

(i) $x < y,\ y < z \Rightarrow y - x \in P,\ z - y \in P \overset{(O2)}{\Rightarrow} y - x + z - y \in P$

$\Rightarrow z - x \in P \Rightarrow x < z$

(ii) $x < y,\ z \in \mathbb{R} \Rightarrow y - x \in P$

$$\underset{(y+z) - (x+z)}{\overset{y-x}{\parallel}} \in P \Rightarrow x + z < y + z$$

(iii) $x < y \overset{(ii)}{\Rightarrow} x - (x+y) < y - (x+y)$

$\overset{KA}{\Rightarrow} -y < -x$

(iv) $x < y,\ z > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow 0 < (y - x) \cdot z = yz - xz$

$\Rightarrow xz < yz$

(v) $x < y,\ z < 0 \Rightarrow z \notin P$, d.h. $-z \in P \Rightarrow -z > 0$

$\overset{(iv)}{\Rightarrow} x(-z) < y(-z) \Rightarrow -xz < -yz \overset{(iv)}{\Rightarrow} yz < xz$

(vi) $x > 0 \Rightarrow x^2 = x \cdot x > 0$

$x < 0 \overset{L1}{\Rightarrow} x^2 = -x \cdot -x > 0 \quad (-x > 0)$

(vii) $0 < x < y,\ y \cdot y^{-1} = 1 \overset{L1}{\Rightarrow} 1/y \neq 0 \overset{(vi)}{\Rightarrow} (y^{-1})^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{y}\right)^2 \cdot y \overset{(O2)}{>} 0$

→ Ebenso: $1/x > 0$, $1/xy = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \underbrace{\frac{1}{xy}}_{>0} \cdot \underbrace{(y - x)}_{>0} > 0$

$\Rightarrow 0 < 1/y < 1/x$

(viii) $x > 0 \overset{(vii)}{\Rightarrow} 1/x > 0 \overset{(O3)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$, s.d. $0 < \frac{1}{x} < n$
$\overset{(vii)}{\Rightarrow} 0 < 1/n < x$

$(ix) \Rightarrow (x)$; $x < y$, nach (ix): $2 > 0 \overset{(vii)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} > 0$
$\Rightarrow y - x/2 = \frac{1}{2}(y-x) > 0 \Rightarrow y - x+y/2 = y-x/2 = x+y/2 - x > 0$
$\Rightarrow x < x+y/2 < y$ (Beweis von (x))

Beweis von (ix): $\forall n \in \mathbb{N}: n > 0$
$n = 1 \rightarrow 1 = 1 \cdot 1 \overset{(vi)}{>} 0,\ 1 \neq 0$
$n \geq 1 \rightarrow$ Annahme: $n > 0,\ n \in \mathbb{N}$
$\overset{(ii)}{\Rightarrow} n+1 > 1 > 0 \overset{(i)}{\Rightarrow} n+1 > 0$

■

Vollständige Induktion

Wir wollen zeigen, dass eine Aussage "$\mathcal{A}(n)$" (z.B. $n > 0$) wahr ist.

→ Induktionsverankerung: $\mathcal{A}(1)$ ist wahr
→ Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N}: \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$

Wenn dies gezeigt ist, wissen wir, dass $\mathcal{A}(n)$ für jeder natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Endliche Summen und Produkte

Sei $n \in \mathbb{N}$, Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
Definiere:
$$\sum_{k=1}^{n} x_k := x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$\prod_{k=1}^{n} x_k := x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Bsp. 1) $a \in \mathbb{R},\ a \neq 1,\ x_k = a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k\text{-mal}}$; Konvention: $a^0 = 1$
$$S := \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$
$\rightarrow S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n,\ aS = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1}$
$S - aS = 1 - a^{n+1} = S(1-a) \Rightarrow S = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Bsp. 2) $x_k = k,\ \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n := n!$; Konvention: $0! = 1$
$n!$ = Anzahl d. Anordnungen von n versch. Elementen

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$: Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$

$\hookrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$: Anzahl aller Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$

SATZ 1 (Binomialformel)

$\forall n \in \mathbb{N} \; \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt : $\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}}$ $(*)$

Beweis: $\boxed{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}$ $(**)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \dots, n$

von $(**)$: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n+1-k)!}(k+n+1-k)$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

von $(*)$: vollst. Ind.

$n = 1$: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k y^{1-k} = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y + x$

$n \geq 1$: Annahme: $(*)$ gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

$$\stackrel{(**)}{=} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \quad \blacksquare$$

→ Übung: Beweise via vollst. Ind.

- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = ((n(n+1))/2)^2$
- $S_n^p := \sum_{k=1}^{n} k^p \Rightarrow \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_n^{p+1-k} = (n+1)^{p+1} - 1$

Lemma 3 (Bernoulli-Ungleichung)

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left.\begin{array}{l} x > -1 \\ x \neq 0 \\ n \geq 2 \end{array}\right\} (1+x)^n > 1 + nx$

Beweis (vollst. Ind.):

$n=2$: $(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{\substack{>0 \\ (L2)}} > 1 + 2x$

$n \geq 2$: Annahme: $(1+x)^n > 1 + nx$

$\Rightarrow \quad (1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{>1+nx} \underbrace{(1+x)}_{>0} > (1+nx)(1+x)$

$= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0}$

$> 1 + (n+1)x$ ▨

SATZ 2

(i) $\forall q > 1\ \forall c \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$, s.d. $q^n > c$

(ii) $\forall q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$, s.d. $q^n < \varepsilon$

Beweis (i): Sei $x := q - 1 > 0$

$q = 1 + x,\ x > 0 \overset{(L2)}{\Rightarrow} q^n > 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

wähle $n > c/x$

$\Rightarrow q^n > nx > c$

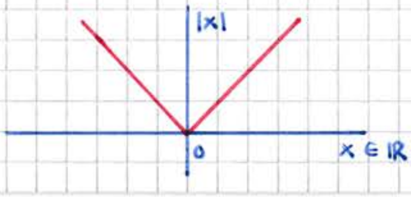
(ii): Per (L2): $0 < 1 < q^{-1}$

$\overset{(i)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$, s.d. $\underset{\substack{\| \\ 1/q^n}}{(q^{-1})^n} > \frac{1}{\varepsilon} \overset{(L2)}{\Rightarrow} 0 < q^n < \varepsilon$ ▨

Betragsfunktion

Def.: Sei $x \in \mathbb{R}$. Der Betrag von x ist die Zahl

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$



<u>Lemma 4</u> $\forall x,y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \iff x = 0$

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ "Dreiecksungleichung"

(iv) $|xy| = |x| \cdot |y|$

<u>Beweis:</u> (i), (ii) folgen sofort aus (O1)

(iii) 1. Fall: $x > 0,\ y > 0 \overset{(O2)}{\Rightarrow} x+y > 0$

$\Rightarrow |x+y| = x+y = |x| + |y|$

2. Fall: $x < 0,\ y < 0 \overset{(L2)}{\Rightarrow} x+y < 0$

$\Rightarrow |x+y| = -(x+y)$

$\overset{(L1)}{=} (-x) + (-y)$

$= |x| + |y|$

3. Fall: $x \geq 0,\ y < 0$

a) $x \geq -y > 0 \Rightarrow x+y \geq 0$

$\Rightarrow |x+y| = x+y = |x| - |y| < |x| + |y|$

b) $-y > x \geq 0 \Rightarrow x+y < 0$

$\Rightarrow |x+y| = -(x+y)$

$= (-x) + (-y) = -|x| + |y|$

$\leq |x| + |y|$

4. Fall: $x < 0,\ y \geq 0 \rightarrow$ wie 3. Fall!

(iv) 1. Fall: $x \geq 0,\ y \geq 0 \overset{(O1)}{\Rightarrow} xy \geq 0$

$\Rightarrow |xy| = x \cdot y = |x||y|$

2. Fall: $x < 0,\ y < 0 \overset{(L2)}{\Rightarrow} xy > 0$

$\Rightarrow |xy| = xy = (-x)(-y) = |x| \cdot |y|$

3. Fall: $x \geq 0,\ y < 0 \Rightarrow |xy| = -xy$

$-y > 0$ $\qquad = x(-y) = |x||y|$

$\Rightarrow x(-y) \geq 0$

$\overset{(L1)}{\Rightarrow} -xy \Rightarrow xy \leq 0$

4. Fall: $x < 0,\ y \geq 0 \rightarrow$ wie 3. Fall $\blacksquare$

$\rightarrow$

Das Vollständigkeitsaxiom (V)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ s.d.: (i) $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$

$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

(ii) $a \in A$, $a' \leq a \Rightarrow a' \in A$

(iii) $b \in B$, $b' \geq b \Rightarrow b' \in A$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ s.d. $a \leq c \ \forall a \in A$

$b \geq c \ \forall b \in B$

Bem.: Die Zahl c in (V) ist eindeutig

Bew.: Sei $c' \in \mathbb{R}$, s.d. $a \leq c' \ \forall a \in A$

$b \geq c' \ \forall b \in B$

Annahme: $c \neq c'$ o.B.d.A. $c < c'$

$\Rightarrow c < \frac{c+c'}{2} < c'$

$\Rightarrow \frac{c+c'}{2} \in A$; $\Rightarrow \frac{c+c'}{2} \in B$

$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ Widerspruch! $\blacksquare$

Bem.: Eine Zerlegung $\mathbb{R} = A \cup B$ mit (i), (ii), (iii) heisst Dedekind-Schnitt.

Bem.: $\mathbb{Q}$ erfüllt (V) nicht.

$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$, $B := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$

$\Rightarrow$ geht nicht, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (s. Bew. S.)

Bem.: Existenz

Es existiert ein $\underbrace{\text{vollständiger}}_{(V)}$ $\underbrace{\text{geordneter}}_{(O1-3)}$ $\underbrace{\text{Körper}}_{(K1-4)}$

Eindeutigkeit

Je zwei vollständige, geordnete Körper sind "isomorph".

→ isomorph müsste man noch definieren! (zuerst)

$\mathbb{R}$:= vollst. geordn. Körper {Menge der reellen Zahlen}

<u>Definition</u> Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ heisst nach oben beschränkt, wenn: $\exists y \in \mathbb{R} \ \forall x \in X: x \leq y$

Jedes solches y heisst obere Schranke von X

Eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ heisst Supremum von X, falls y die kleinste obere Schranke von X ist, d.h.:

i) y ist obere Schranke von X

ii) Ist $y' \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine obere Schranke von X so gilt $y' \geq y$ $(y' \leq y)$

→ Dasselbe gilt auch für untere Schranken. Die grösste untere Schranke heisst <u>Infimum</u>

SATZ 3

Jede nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, besitzt ein eindeutiges Supremum (bzw. ein eindeutiges Infimum).

Bezeichnung: $\sup X$, $\inf X$

<u>Beweis:</u> Sei $X \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und nicht leer.

Eindeutigkeit: Seien $y, y' \in \mathbb{R}$ Suprema von X

$\Rightarrow y \leq y'$ und $y' \leq y \underset{(01\text{-}3)}{\Rightarrow} y' = y$

Existenz: $B := \{ b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \text{ gilt } x \leq b \}$

Menge der oberen Schranken von X

$A := \{ a \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X \text{ s.d. } x > a \} = \mathbb{R} \setminus B$

→ $\mathbb{R} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$ weil $X \neq \emptyset$

$B \neq \emptyset$ da X nach oben beschränkt

→ $a \in A$, $a' \leq a \Rightarrow a' \in A$

→ $b \in B$, $b' \geq b \Rightarrow b' \in B$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ s.d. $a \leq c \ \forall a \in A$ und $c \leq b \ \forall b \in B$

Behauptung: $c \in B$ (dann ist c ein Supremum von X)

→ Annahme: $c \in A \Rightarrow \exists x \in X$, s.d. $x > c$

$\Rightarrow x - c > 0$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $x - c > \frac{1}{n} > 0$

$\Rightarrow x > c + \frac{1}{n} \Rightarrow c + \frac{1}{n} \in A$, $c + \frac{1}{n} > c$

Widerspruch! $\Rightarrow c \in B$ ▨

SATZ 4

Jede nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}$ besitzt ein grösstes Element, d.h. $\exists a_0 \in A$ s.d. $\forall a \in A$ gilt: $a \leq a_0$
(dasselbe gilt für nach unten beschränktes $A \subset \mathbb{Z}$, "kl. Element": $a \geq a_0$). Wichtig: $A \neq \emptyset$

Beweis

Schritt 1: $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset \Rightarrow A$ enthält eine kleinste Zahl

Bew.: Falls $A \subset \mathbb{N}$ kein kleinstes Element enthält, dann ist $A \neq \emptyset$

→ $\mathcal{A}$: "$A \neq \emptyset$"

$\mathcal{B}$: "A enthält eine kleinste Zahl"

$\neg\mathcal{A}$: "$A = \emptyset$"

$\neg\mathcal{B}$: "A enthält kein kleinstes Element"

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, wir zeigen stattdessen: $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$

$(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$

→ $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \neg\mathcal{A} \vee \neg(\neg\mathcal{B}) = \neg(\neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A}$

$= \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ (indirekter Beweis)

Ann. A enthält kein kleinstes Element

Beh. $A \cap \{1, \ldots, n\} = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

→ vollst. Ind.: IV: $n = 1$: $1 \notin A$, sonst wäre 1 kl. Element

IA: $n \geq 2$, $A = \{1, \ldots, n-1\} = \emptyset$

$\Rightarrow A = \{1, \ldots, n\} = \emptyset$

Andernfalls wäre n das kleinste Element von A

Wir haben gezeigt: $n \notin A \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$

Schritt 2: $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$, A nach oben beschränkt

$\Rightarrow$ A enthält grösstes Element.

Bew.: Nach Voraussetzung: $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A: a \leq c$

Nach O3: $\exists n \in \mathbb{N}$, s.d. $n > c$

$\Rightarrow n > a \ \forall a \in A$

$\Rightarrow B := \{n - a \mid a \in A\} \subset \mathbb{N}$, $B \neq \emptyset$

Schritt 1 $\Rightarrow \exists b_0 \in B$ s.d. $\forall b \in B: b_0 \leq b$

Definiere: $a_0 := n - b_0 \in \mathbb{Z}$, $b_0 \in B$

$\Rightarrow a_0 \in A$

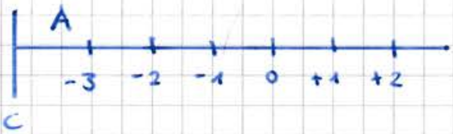
Es gilt: Falls $a \in A \Rightarrow n - a \in B$

$\Rightarrow n - a \geq b_0 \Rightarrow \underbrace{n - b_0}_{= a_0} \geq a$

$\Rightarrow a_0 \in A$ ist ein grösstes Element von A

Schritt 3: Jede nach unten beschr., nicht-leere Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}$ ein kleinstes Element.

Bew.: $B := \{-a \mid a \in A\}$



$\rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ a \geq c \Rightarrow -a \leq -c \ \forall a \in A$

$b \leq -c \ \forall b \in B$

$\Rightarrow B \subset \mathbb{Z}$, $B \neq \emptyset$, B nach oben beschränkt

Schritt 2 $\Rightarrow \exists b_0 \in B\ \forall b \in B$ gilt $b \leq b_0$

$\Rightarrow a_0 := -b_0$ ist ein kleinstes Element von A

weil $a \in A \Rightarrow -a \in B \Rightarrow -a \leq b_0$

$\Rightarrow a \geq -b_0 = a_0$ ▨

SATZ 5

$x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}$ s.d. $x < q < y$

Beweis: Nach Vorraussetzung: $y - x > 0$

$\overset{(L2)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $y - x > \frac{1}{n} > 0$

Definiere $A := \{m \in \mathbb{Z} \mid m > nx\}$

$\Rightarrow A \subset \mathbb{Z},\ A \neq \emptyset$ nach O3

A ist nach unten beschränkt

$\Rightarrow$ per Satz 4: $\exists m_0 \in A$ s.d. $\forall m \in A$ gilt $m \geq m_0$

$\Rightarrow m_0 \in A,\ m_0 - 1 \notin A$

$\Rightarrow m_0 > nx \geq m_0 - 1$

$\Rightarrow m_0/n > x \geq m_0/n - 1/n \iff x < \underbrace{\frac{m_0}{n}}_{=q} \leq x + \frac{1}{n} < y$

$\blacksquare$

Def.: Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ heisst Intervall, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l}(i)\ x, y \in I \\ (ii)\ x < z < y\end{array}\right\} \Rightarrow z \in I \qquad (\forall x, y, z \in \mathbb{R})$$

Bsp.)
a) $\emptyset,\ \{a\},\ \mathbb{R}$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$]a, b[= (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

c) $\forall a, b \in \mathbb{R}$
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$; $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$; $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Übung: Jedes Intervall hat eine dieser Formen! (z.z)

Offene Intervalle: $\emptyset, \mathbb{R}, (a,b), (a,\infty), (-\infty, b)$
Abgeschl. Intervalle: $\emptyset, \{a\}, \mathbb{R}, [a,b], [a,\infty), (-\infty, b]$
Beschr. Intervalle: $\emptyset, \{a\}, [a,b], (a,b], [a,b), (a,b)$
Kompakt. Intervalle: $\emptyset, \{a\}, [a,b]$

Für beschr. Intervalle: Länge eines Intervalls $I = [a,b]$:
$|I| := b - a$

Def.:

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge nichtleerer, kompakter Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $a_n \leq b_n$, s.d. gilt:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}: I_{n+1} \subset I_n$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $|I_n| = b_n - a_n < \varepsilon$

SATZ 6

Für jede Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, s.d. $x \in I_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

D.h. der Durschnitt ist eine einpunktige Menge: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$

Beweis: $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Beh. 1) $\forall m, n \in \mathbb{N}$ gilt $a_m \leq b_n$
$\rightarrow I_{m+1} \subset I_m \Rightarrow a_m \leq a_{m+1} \leq b_{m+1} \leq b_m$

$m < n$: $a_m \leq a_{m+1} \leq a_{m+2} \leq \ldots \leq a_n \leq b_n$
$m > n$: $a_m \leq b_m \leq b_{m-1} \leq b_{m-2} \leq \ldots \leq b_n$ ✓

Beh 1) $\Rightarrow$ Die Menge $A := \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ist nach oben beschränkt.
Die Menge $B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nach unten beschränkt.

Definiere $a := \sup A = \sup a_m, m \in \mathbb{N}$

$b := \inf B = \inf b_n, n \in \mathbb{N}$

Beh. 2) $a = b$

Bew.: 1. $a \leq b$

↳ b_n ist eine ob. Schranke von A (Beh. 1)) $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a := \sup A \leq b_n \ , n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a$ ist eine unt. Schranke von B

$\Rightarrow a \leq \inf B = b$

2. $a < b$

$\Rightarrow \underbrace{b - a}_{=: \varepsilon} > 0 \overset{(ii)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$, s.d. $b_n - a_n < \varepsilon$

Es gilt aber: $a_n \leq a < b \leq b_n$

und daher: $b_n - a_n \geq b - a = \varepsilon$

Widerspruch!

Existenz: $x := a = b$

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq a = x = b \leq b_n \overset{I_n}{\Rightarrow} x \in I_n$

Eindeutigkeit: Sei $y \in \mathbb{R}$, s.d. $y \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_n \leq y \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a = \sup A \leq y \leq \inf B = b$

$\Rightarrow a \leq y \leq b \ , a = b$

$\Rightarrow y = a = b = x$

▨

Bem.: (V) $\overset{S3}{\Rightarrow} \exists \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix} \overset{S6}{\Rightarrow}$ Intervallschachtellungsprinzip $\underset{\text{übg.}}{\Rightarrow}$ (V)

SATZ 7

Für jede reelle Zahl $x > 0$ und für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine reelle Zahl $y > 0$ s.d.: $y^n = x$

Def.: Diese Zahl $y > 0$ wird n-te Wurzel von x genannt und mit $\sqrt[n]{x} := x^{1/n} := y$ bezeichnet

Beweis: $x > 0,\ n \in \mathbb{N}$

Eindeutigkeit: Seien $y, z > 0$ s.d. $y^n = x$, $z^n = x$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{z}\right)^n = y^n/z^n = x/x = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - \left(\frac{y}{z}\right)^n$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{y}{z}\right)\underbrace{\left(1 + y/z + (y/z)^2 + \dots + (y/z)^{n-1}\right)}_{>0}$$

$$\overset{(L2)}{\Longrightarrow} 1 - \frac{y}{z} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = z$$

Existenz: Fall $x > 1$:

Wir konstruieren: $1 = a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$

$x = b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$

s.d.: $a_k^n \leq x \leq b_1^n$, $I_k := [a_k, b_k]$

$|I_k| = (x-1)/2^{k-1}$

$I_1 := [1, x]$

$$I_2 := \begin{cases} [1, \frac{1+x}{2}], & \text{falls } \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \geq x \\ [\frac{1+x}{2}, x], & \text{falls } \left(\frac{1+x}{2}\right)^n < x \end{cases}$$

$$I_{k+1} := \begin{cases} [a_k, a_k+b_k/2], & \text{falls } (a_k+b_k/2)^n \geq x \\ [a_k+b_k/2, b_k], & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere: $I_k^n := [a_k^n, b_k^n]$

Beh.: $\exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $|I_k^n| \leq c \cdot \frac{1}{2^k}$

$$|I_k^n| = b_k^n - a_k^n = (b_k - a_k)(a_k^{n-1} + a_k^{n-2} b_k + \dots + b_k^{n-1})$$

$\Rightarrow$ rechte Seite: $\leq n x^{n-1}$

$\Rightarrow$ die ganze Geschichte: $\leq \frac{2(x-1)nx^{n-1}}{2k} \hat{=} \frac{c}{2^k}$

Nach SATZ 2 gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N}$ s.d. $\left(\frac{1}{2}\right)^k < \frac{\varepsilon}{c}$ und daher:

$$|I_k^n| \leq c/2^k \ ; \ |I_k| = 2(x-1)/2^k \leq c/2^k < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ nach SATZ 6: Jeder der beiden Durschnitte:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k, \ \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k^n \quad \text{ist einpunktig.}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k^n = \{x\} \ ; \ \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{y\}$$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \underset{1 \leq}{\uparrow} a_k \leq y \leq b_k \Rightarrow a_k^n \leq y^n \leq b_k^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow y^n \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k^n \Rightarrow y^n = x$

Fall $0 < x < 1$: $\Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \exists! z > 0$ s.d. $z^n = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y := \frac{1}{z} > 0$ und $y^n = 1/z^n = x$

$\blacksquare$

Übung: $\forall m, n \in \mathbb{N} \ \forall x > 0$

(i) $(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m =: x^{\frac{m}{n}}$

(ii) $\left(\frac{1}{x}\right)^{1/n} = 1/x^{1/n} =: x^{-\frac{1}{n}}$; $x^0 := 1$

Wir haben definiert: $x^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$

$\forall x > 0$

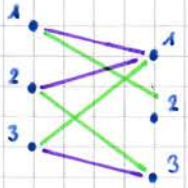
$\Rightarrow (xy)^q = x^q y^q$; $x^{pq} = (x^p)^q$

Eine Abbildung von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.
"Input - Output - System"

$$X \xrightarrow{\ni x} \boxed{f} \xrightarrow{f(x) \in} Y \quad , \quad f: X \to Y$$

Bsp 1) $X = Y = \{1,2,3\}$

$f(1) = 2$
$f(2) = 3$
$f(3) = 1$



Bsp 2) $X = Y = \{1,2,3\}$

$f(1) = 1$
$f(2) = 1$
$f(3) = 3$

Bsp 3) $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, \infty)$
$f(x) := |x|$

Bsp 4) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid {}^{y \in \mathbb{R}}_{x \in \mathbb{R}}$
$Y = \mathbb{R}$
$f(x,y) := x + y$
$f(x,y) := xy$

Bsp 5) $X = Y = \mathbb{R}$
$f(x) = -x$

Bsp 6) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = x^{-1}$

Bsp 7) $X = Y$, bel. Menge
$f(x) = x = \mathrm{id}_X$
" Identität"

Bsp 8) X bel. Menge, $Y \neq \emptyset$, $c \in Y$
$f(x) := c$
f eine konst. Abbildung

Bsp 9) $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$
$f(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$

Bsp 10) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$
$f(x) = 3x^2 - 7x + 3$
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ "Polynom"
$a_i \in \mathbb{R}$

Def: Seien X, Y Mengen
Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung

(i) X: Definitionsbereich von f
Y: Bildbereich von f

(ii) Eine Abbildung heisst injektiv, wenn $\forall x, x' \in X$ gilt: $f(x) = f(x') \iff x = x'$

(iii) Eine Abbildung heisst surjektiv, wenn für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, s.d. $f(x) = y$

(iv) Eine Abbildung heisst bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

SATZ 8 (Dirichlet'sche Schubfachprinzip)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. $X := \{1, \dots, m\}$, $Y := \{1, 2, \dots, n\}$

Sei $f: X \to Y$ eine injektive Abbildung $\Rightarrow m \leq n$

Übung (1): Seien $k, m \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. Konstruieren Sie eine Abbildung, die bijektiv ist:

$\varphi: \{1, \dots, m-1\} \to \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}$

Beweis: vollst. Ind. über n

• IV: $n = 1$: $Y = \{1\}$

$f(x) = 1 \quad \forall x \in \{1, \dots, m\}$

$m \geq 2 \Rightarrow f(1) = f(2) = 1 \Rightarrow$ f ist nicht injektiv!

Widerspruch $\Rightarrow m = 1$

Sei $n \in \mathbb{N}: n \geq 2$

• IA: Satz gilt für $n-1$

• IS: Sei $f: \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ injektiv

1\. Fall: $f(i) \neq n \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$

$\Rightarrow f: \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n-1\}$ injektiv

$\overset{IA}{\Rightarrow} m \leq n-1 < n$

2\. Fall: $\exists k \in \{1, \dots, m\}$, s.d. $f(k) = n$

Nach der Übg: $\exists$ bijektive Abbildung $\varphi: \{1, \dots, m-1\} \to \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}$

Definiere $g = \{1, \dots, m-1\} \to \{1, \dots, n-1\}$ durch

$g(i) := f(\varphi(i)) \neq n$, $\varphi(i) \neq k$

$\Rightarrow g$ ist injektiv

$\overset{IA}{\Rightarrow} \; m-1 \leq n-1 \Rightarrow m \leq n$

$\blacksquare$

Def.: Seien X, Y, Z Mengen, und $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen. Die Komposition von f und g ist die Abbildung $g \circ f: X \to Z$ die durch $g \circ f(x) := g(f(x))$ für $x \in X$ definiert ist.

Übg (2): Seien $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ Abbildungen

(i) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

(ii) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv

(iii) f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv

(iv) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv

Lemma 5: Sei $f: X \to Y$ injektiv. Sei $X \neq \emptyset$
Dann gilt:

(i) $\exists$ Abb. $g: Y \to X$, s.d. $g \circ f = id_X$

(ii) f surjektiv $\Rightarrow g$ bijektiv & $f \circ g = id_Y$

(Bew. folgt später...)

Def.: Eine Menge X heisst endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt und eine bijektive Abb. $\varphi: \{1, \dots, n\} \to X$

In diesem Fall nennen wir n die Anzahl der Elemente von X. Sie wird mit $\#X := n$ bezeichnet

Beweis L5: Da $X \neq \emptyset$, existiert ein Element $x_0 \in X$. Definiere $g: Y \to X$ durch: $g(y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in X \text{ s.d. } f(x) = y \\ x_0, & \text{falls } f(x) \neq y \;\; \forall x \in X \end{cases}$

$\Rightarrow g(f(x)) = x \;\; \forall x \in X \Rightarrow g \circ f = id_X$ (i) (ii): Sei f bijektiv. Sei $x \in X$ und $y := f(x)$

$\Rightarrow g(y) = g(f(x)) = x$ (1.)

(2.) : $f \circ g = id_Y$

Sei $y \in Y$, f surjektiv

$\Rightarrow \exists x \in X$ s.d. $y = f(x)$

$\Rightarrow g(y) = x \Rightarrow f(g(y)) = f(x) = y$

(3.) : g injektiv: Seien $y, y' \in Y$, s.d. $g(y) = g(y')$

$$\Rightarrow \underset{y}{\underset{\parallel}{f(g(y))}} = \underset{y'}{\underset{\parallel}{f(g(y'))}}$$

■

<u>Korollar</u>

Sei $f: X \to Y$ eine Abb.. Äquivalent sind:

(i) f ist bijektiv

(ii) $\exists g: Y \to X$ s.d. $g \circ f = id_X$ & $f \circ g = id_Y$

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii) Lemma 3

(ii) $\Rightarrow$ (i) Übg 2) (■)

<u>Def.:</u> Die Abb. g in diesem Korollar ist durch f eindeutig bestimmt und wird Umkehrabbildung genannt.

Bezeichnung: $f^{-1} := g: Y \to X$

$f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$

Bspe) (i) $X = Y$, $f = id_X$, $f' = id_X$

(ii) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = -x$, $f^{-1}(x) = -x$

(iii) $X = Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x^{-1}$, $f^{-1}(x) = x^{-1}$

(iv) $X = Y = \{1, 2, 3\}$

$f(1) = 2$ $f^{-1}(1) = 3$

$f(2) = 3$ $f^{-1}(2) = 1$

$f(3) = 1$ $f^{-1}(3) = 2$

(v) $X = Y = (0, \infty)$

$f(x) = x^n \Rightarrow f^{-1}(y) = y^{1/n}$

$(x^3 \to x^{1/3})$

<u>Bem.:</u> (zu endlichen Mengen)

Seien $\varphi : \{1, \dots, m\} \to X$ und $\psi : (1, \dots, n) \to X$ bijektiv $\Rightarrow$ $\underbrace{\psi^{-1}}_{\text{(bij. (L3))}} \circ \underbrace{\varphi}_{\text{(bij Vorauss.)}} : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow$ $\psi^{-1} \circ \varphi$ ist bijektiv nach Übg 2) und Lemma 3.

$\overset{(S8)}{\Rightarrow}$ $m \leq n$ & $n \leq m$ (da $\psi^{-1} \circ \varphi$ ebenfalls bijektiv)

$\Rightarrow m = n$

$\Rightarrow$ daher ist die Anzahl der Elemente $\# X$ einer endlichen Menge wohldefiniert.

<u>Frage:</u> Sei $f : X \to Y$ surjektiv. Existiert eine Abb. $g : Y \to X$ s.d. $f \circ g = id_Y$ **?**

<u>AUSWAHLAXIOM (AA)</u>

Seien I, X zwei Mengen. Für $i \in I$ sei $X_i \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Dann existiert eine Abbildung $g : I \to X$ s.d. für jedes $i \in I$ gilt: $g(i) \in X_i$

<u>Bem.:</u> Bezeichnen wir $x_i := g(i)$. Dann besagt (AA):

$\forall i \in I \; \exists x \in X$ s.d. $x \in X_i$

$\Rightarrow \exists (x_i)_{i \in I} \; \forall i \in I$ gilt: $x_i \in X_i$

<u>Bem.:</u> Das (AA) ist ein Axiom (der Mengenlehre)

Gödel 1938: (AA) lässt sich nicht widerlegen

Cohen 1963: (AA) lässt sich nicht herleiten

read about it!

Lemma 6 X, Y: Mengen

$f: X \to Y$ surjektiv. $\Rightarrow$ $\exists$ Abb. $g: Y \to X$ s.d. $f \circ g = id_Y$

Bem.: g ist injektiv

Korollar: X, Y: Mengen, $Y = \emptyset$

$\exists$ surj. Abb $f: X \to Y$ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ inj. Abb $g: Y \to X$

Beweis: $\Rightarrow$ Lemma 3

$\Leftarrow$ Lemma 4

Beweis von Lemma 6:

Für $y \in Y$ definiere $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\} \subset X$ $(=: X_y)$

"Menge der Urbilder von y"

$\overset{f \text{ surj.}}{\Rightarrow} f^{-1}(y) \neq \emptyset \ \forall y \in Y \overset{AA}{\Rightarrow} \exists$ Abb. $g: Y \to X$ s.d. $\forall y \in Y$:
$g(y) \in X_y = f^{-1}(y)$

$\blacksquare$

SATZ 9 X, Y: Mengen

Seien $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ injektive Abbildungen.
$\Rightarrow$ $\exists$ bijektive Abb. $h: X \to Y$

Notation: Für $A \subset X$ sei $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$
Für $B \subset Y$ sei $f(B) := \{g(y) \mid y \in B\} \subset X$

Beweis

Wir konstruieren zwei Teilmengen $A \subset X$, $B \subset X$ s.d.
$f(A) = Y \setminus B$, $g(B) = X \setminus A$ $(*)$
Definiere $h: X \to Y$ durch: $h(x) := \begin{cases} f(x), \text{ falls } x \in A \\ y \in B, \text{ falls } x \in A^c \text{ und } g(y) = x \end{cases}$

Diese Abbildung ist bijektiv und

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} g(y), & \text{falls } y \in B \\ x \in A, & \text{falls } y \notin B \text{ und } f(x) = y \end{cases}$$

Konstruktion von A, B.

$$X \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} Y$$

$$\begin{array}{ll}
A_0 := \emptyset & B_0 := Y \\
\cap & \cup \\
A_1 := X \setminus g(B_0) & B_1 := Y \setminus f(A_1) \\
\cap & \cup \\
A_2 := X \setminus g(B_1) & B_2 := Y \setminus f(A_2) \\
\dots & \dots
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset X, \quad B := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subset Y$$

Übung: A und B erfüllen $(*)$

($\blacksquare$)

SATZ 10 X, Y : Mengen

Annahme: $\nexists$ inj. Abb. $g: Y \to X \Rightarrow \exists$ inj. Abb. $f: X \to Y$

Bew. folgt später...

Def.: X, Y : Mengen

1. Das kartesische Produkt von X und Y ist die Menge aller Paare
$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$

2. Sei $f: X \to Y$ eine Abb. Der Graph von f ist die Menge
$\operatorname{graph}(f) := \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$

Übung: Sei $\Gamma \subset X \times Y$

Es gibt genau dann eine Abb. $f: X \to Y$ s.d. $\operatorname{graph}(f) = \Gamma$,
wenn Γ folg. Bed. erfüllt: (i) $\forall x \in X \; \exists y \in Y$ s.d. $(x,y) \in \Gamma$

(ii) $\forall x \in X \; \forall y, y' \in Y : (x,y), (x,y') \in \Gamma \Rightarrow y = y'$

Welche Bed. an Γ sind dazu äquivalent, dass f injektiv bzw. surjektiv ist? (eig. Übung!)

Def. 1: Sei X eine Menge.
Eine Relation auf X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$
Wir sagen "x steht in Relation R zu y" wenn $(x,y) \in R$. Schreibweise: $xRy :\iff (x,y) \in R$

Def. 2: Eine Relation $R \subset X \times X$ heisst
- reflexiv: wenn $\forall x \in X$ gilt: xRx, d.h. $(x,x) \in R$
- anti-reflexiv: wenn $\forall x \in X$ gilt: $(x,x) \notin R$
- symmetrisch: wenn $\forall x,y \in X$ gilt: $xRy \Rightarrow yRx$
- anti-symmetrisch: wenn $\forall x,y \in X$ gilt: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- transitiv: wenn $\forall x,y,z \in X$ gilt: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Def. 3: Sei P eine Menge.
Eine Relation $R \subset P \times P$ heisst partielle Ordnung, wenn sie reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch ist.
Sie heisst totale Ordnung, wenn sie eine partielle Ordnung ist und: $\forall p,q \in P$: pRq oder qRp

Bsp 1) $P = \mathbb{R}$, $R := \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \leq y\}$: total geordneter Raum
Bsp 2) $P = \mathbb{N}$, $R := \{(m,n) \in \mathbb{N} \mid n$ ist durch m teilbar$\}$
Bsp 3) X Menge. $P := \{A \mid A \subset X\} =: 2^X$
$R := \{(A,B) \mid A \subset B \subset X\}$
$(2^X, \subset)$ ist ein partiell geordneter Raum

Def. 4: Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Ein Element m in P heisst maximal, wenn $\forall p \in P$ gilt: $m \leq p \Rightarrow p = m$

Def. 5: Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Eine Teilmenge $C \subset P$ heisst Kette, wenn $\forall p,q \in C$ gilt: $p \leq q$ oder $q \leq p$

Def. 6: Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $C \subset P$. Ein Element $a \in P$ heisst obere Schranke von C, wenn $\forall c \in C : c \leq a$

Zorn's Lemma (ZL)

Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, s.d. jede Kette $C \subset P$ eine obere Schranke besitzt.

$\Rightarrow$ Für jedes $p \in P$ existiert ein maximales Element $m \in P$, s.d. $p \leq m$

ACHTUNG: Kein Beweis, da $(ZL) \Leftrightarrow (AA)$ (s. Manuskript von Salamon) (s. Gödel)

Beweis vom Satz 10:

Definiere $P := \{(A, f) \mid A \subset X,\ f : A \to Y \text{ inj.}\}$

P ist partiell geordnet.

$(A, f) \leq (A', f') :\Leftrightarrow A \subset A',\ f'(A) = f \quad (I)$

Jede Kette $C \subset P$ besitzt eine obere Schranke (II)

$\tilde{A} := \bigcup_{(A,f) \in C} A \quad ; \quad \tilde{f}(x) := f(x)$ falls $x \in A$ und $(A, f) \in C$

$\hookrightarrow x \in \tilde{A}$

Beh. I: $f(A) \subsetneq Y \quad \forall (A, f) \in P$, denn $\nexists$ surj. Abb. $X \to Y$

Nach ZL: P besitzt ein maximales Element (A, f)

$\Rightarrow f : A \to Y$ injektiv; $f(A) \subset Y$, $f(A) \neq Y$

$\Rightarrow A = X$!

sonst $\exists x_0 \in X \setminus A$ und $\exists y_0 \in Y \setminus f(A)$

$A' := A \cup \{x_0\},\ f'(x_0) = y_0$ (wäre $\perp$)

$\blacksquare$

Def.: Seien X, Y Mengen

(i) Wir sagen X und Y sind gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abb. $f: X \to Y$ gibt.

(ii) Y hat grössere Mächtigkeit als X, wenn keine injektive Abb. $f: Y \to X$ existiert.

Bem.: Für je zwei Mengen X, Y gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- Y hat grössere Mächtigkeit als X
- X hat grössere Mächtigkeit als Y
- X, Y sind gleichmächtig

(Satz 9 & 10)

Def.: Eine Menge X heisst endlich wenn sie entweder leer ist oder ein $n \in \mathbb{N}$ existiert sowie eine bijektive Abbildung $f: \{1, \dots, n\} \to X$; $\#X := n$, $\#\emptyset = 0$

X heisst unendlich, wenn X nicht endlich ist.

Bem.: X, Y endliche Mengen

Y hat grössere Mächtigkeit als X $\iff$ $\#Y > \#X$ (Satz 8)

Bem.: X unendlich

$\Rightarrow \exists$ inj. Abb. $f: \mathbb{N} \to X$

Bew.: Übung mit Hinweis. "$\Rightarrow$"

1. $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists A \subset X$ s.d. A endlich und $\#A = n$ (voll. Ind.)
2. $\exists$ Abb. $\mathbb{N} \to 2^X : k \mapsto A(k)$ s.d. $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $A(k)$ ist endlich und $\#A(k) = 2^k$
3. $\exists f: \mathbb{N} \to X$ s.d. $\forall k \in \mathbb{N}: f(k) \in A(k) \setminus (A(1) \cup A(2) \cup \dots \cup A(k-1))$
4. f ist injektiv.

Def.: Eine Menge X heisst

- abzählbar unendlich, wenn X gleichmächtig ist zu $\mathbb{N}$
- abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder abzählbar unendlich
- überabzählbar, wenn sie grössere Mächtigkeit hat als $\mathbb{N}$

Bsp. 1) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar

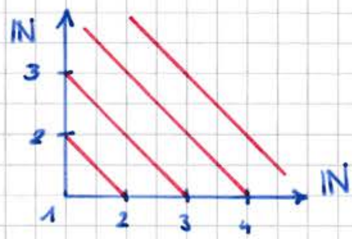
$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Z} & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \end{array} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(2n) = n \\ f(2n+1) = -n \end{array}\right\} \forall n \in \mathbb{N}$$

Bsp. 2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar

Def.: $\varphi\left(\frac{k(k-1)}{2} + i\right) := (i, k+1-i)$

$i = 1, 2, \dots, k$

$k \in \mathbb{N}$



$\rightarrow$ ist bijektiv!

Bsp. 3) Seien X_1, X_2 zwei abzählbar unendliche Mengen.

$\Rightarrow$ $X_1 \times X_2$ ist abz. unendlich

Nach Voraussetzung existieren bij. Abb. $f_1: \mathbb{N} \to X_1$ und $f_2: \mathbb{N} \to X_2$. Sei $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die bij. Abb. aus Bsp. 2)

Notation: $\varphi(n) =: (\varphi_1(n), \varphi_2(n)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Definiere $f: \mathbb{N} \to X_1 \times X_2$ durch $f(n) := (f_1(\varphi_1(n)), f_2(\varphi_2(n)) \in X_1 \times X_2$

$$\mathbb{N} \underset{\varphi}{\to} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \underset{f_1 \times f_2}{\to} X_1 \times X_2$$

$$(n_1, n_2) \mapsto (f_1(n_1), f_2(n_2))$$

φ und $f_1 \times f_2$: bijektiv $\Rightarrow$ $f: \mathbb{N} \to X_1 \times X_2$ bijektiv

Bsp. 4) X_i abz. unendlich für $i = 1, 2, 3, \dots$

$\Rightarrow X := \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ ist abz. unendlich.

Sei $f_i : \mathbb{N} \to X_i$ bijektiv $i = 1, 2, 3, \dots$

Sei φ wie in Bsp. 2). Definiere $f : \mathbb{N} \to X$ durch

$f(n) := f_{\varphi_1(n)}(\varphi_2(n)) \in X_{\varphi_1(n)} \subset X \to$ surjektiv!

$\Rightarrow \exists$ inj. Abb. $g : X \to \mathbb{N}$

$\exists$ inj. Abb. $\mathbb{N} \to X$

$\underset{(S9)}{\Rightarrow} \exists$ bij. Abb. $\mathbb{N} \to X$

Bsp. 5) $\mathbb{Q}$ ist abz. unendlich

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ (wie in Bsp. 1))

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (wie in Bsp. 2))

Def. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ durch $g(n) := \dfrac{f(\varphi_1(n))}{\varphi_2(n)}$; g surj.

Bsp. 6) $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist abz. unendlich (Bsp. 3) & Bsp. 5))

$\mathbb{Q}^3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}$

$= \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{Q} \}$ ist abz. unendlich

$\mathbb{Q}^n := \mathbb{Q}^{n-1} \times \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bsp. 7) $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathcal{E} := \{ A \subset \mathbb{N}_0 \mid A \text{ ist endlich} \} \subset 2^{\mathbb{N}_0}$

$\mathcal{E}$ ist abzählbar unendlich

Def.: $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ durch $\varphi(A) := \sum_{i \in A} 2^i$

Übung: φ ist bij.

Bsp. 8) Für jede Menge X hat 2^X grössere Mächtigkeit als X

<u>Bew.:</u> Sei $X \xrightarrow[A]{} 2^X : \underset{X}{\overset{x}{\in}} \mapsto \underset{X}{\overset{A(x)}{\subset}}$

Beh.: A ist nicht injektiv

$A_0 := \{x \in X \mid x \notin A(x)\}$

1. Fall $x \in A_0 \Rightarrow x \in A_0 \setminus A(x)$

2. Fall $x \notin A_0 \Rightarrow x \in A(x) \setminus A_0$

Für jedes $x \in X$ gilt $A(x) \neq A_0 \Rightarrow$ Beh.!

$\blacksquare$

Bsp. 9) X endlich, $2^X = \{A \mid A \subset X\}$

$\# 2^X = 2^{\# X}$, Bsp.: $X = \emptyset$, $2^X = \{\emptyset\}$: $\# X = 0$

$\# 2^X = 1$

weit. Bsp.: $X = \{1\} \rightarrow \# X = 1$

$2^X = \{\emptyset, X\} \rightarrow \# 2^X = 2$ usw.!

Bsp. 10) $2^{\mathbb{N}}$ hat grössere Mächtigkeit als $\mathbb{N}$, d.h. $2^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.

Bsp. 11) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Sei $\mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \longmapsto x_n$ eine beliebige Abbildung

Beh.: Diese Abb. ist nicht surjektiv.

Wir konstruieren eine IVS $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ s.d.

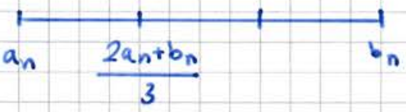
$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \notin I_n$, $|I_n| = 1/3^{n-1}$

Nach Satz 6 existiert dann ein Element $y \in \mathbb{R}$ s.d.

$y \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

d.h. $y \neq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$I_1 := [x_1 + 1, x_1 + 2]$; Sei $I_n = [a_n, b_n]$ konstruiert



$$I_{n+1} := \begin{cases} \left[a_n, \frac{2a_n+b_n}{3}\right] & \text{falls } x_{n+1} \notin [\dots] \\ \left[\frac{a_n+2b_n}{3}, b_n\right] & \text{falls } x_{n+1} \in \left[a_n, \frac{2a_n+b_n}{3}\right] \end{cases}$$

Bsp. 12) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das mind. zwei Elemente besitzt.

Dann ist I gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ bij., Rest ist Übg.

$I = (-1, 1)$; $f: I \to \mathbb{R} : f(x) := \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

Bsp. 13) K = Cantormenge

$K_0 = [0,1]$

$K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

$K_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$

$$K_n = \bigcup_{\substack{a_i \in \{0,1\} \\ i = 1, \dots, n}} \left[2\sum_{i=1}^{n} a_i/3^i \,,\, 2\sum_{i=1}^{n} a_i/3^i + 1/3^n \right]$$

$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$; $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to K$; $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \left\{ (a_i)_{i=1}^{\infty} \mid a_i \in \{0,1\}, \ i = 1,2,3,\dots \right\}$

$a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$

$\varphi(a) := \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n(a) \in K$; φ bijektiv, K hat die gleiche Mächtigkeit wie $2^{\mathbb{N}}$ und zu $\mathbb{R}$

(b)

$Y^X := \{$ Menge aller Abb. $f: X \to Y$ (Notation)

↳ $Y = \{0,1\}$, $\{0,1\}^X = \{$Menge aller Abb. $f : X \to \{0,1\}\}$

Jedes $f \in \{0,1\}^X$ definiert eine Teilmenge $A := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$

Umgekehrt bestimmt jede Teilmenge $A \subset X$ eine Abbildung $f: X \to \{0,1\}$ durch:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}$$

"charakteristische Funktion der TM $A \subset X$"

$\to \{0,1\}^X \approx 2^X$

Spezialfall $X = \mathbb{N}$: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ f : \underbrace{\mathbb{N}}_{i \in} \to \{0,1\}$

$$\begin{matrix} f(1), & f(2), & f(3), \dots \\ \| & \| & \| \\ a_1 & a_2 & a_3 \quad \dots \end{matrix}$$

$\to a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $a_i \in \{0,1\}$

Cantormenge: Jeder solchen Folge $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wird eine Intervallschachtelung

$$J_n(a) := \left[2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} \,,\, 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} \right]$$

führt zur geometrischen Darstellung von K

$\rightarrow \varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow K \quad ; \quad \varphi(a) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n(a) \quad$ (Satz 6)

| Übg.: φ ist bijektiv

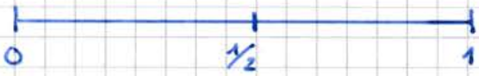
Damit ist K überabzählbar!

Bsp. 14) $\mathbb{R}$ ist gleichmächtig zu $2^{\mathbb{N}}$

Definiere: $\quad \psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0,1]$ wie folgt:

Sei: $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$I_n(a) := \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \right]$$



$\psi(a) \in [0,1]$ ist das eind. Element $\psi(a) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n(a)$

ψ ist surjektiv

$\rightarrow$ Binärdarstellung von x:

$\psi(a) = x \quad , \quad x = 0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

$\exists$ surj. Abb. $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0,1]$

$\exists$ inj. Abb. $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0,1]$

$\overset{(S9)}{\Longrightarrow} \exists$ bij. Abb. $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0,1]$

Folgende Mengen sind gleichmächtig: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $2^{\mathbb{N}}$, $[0,1]$, $\mathbb{R}$, K, I (Intervall mit mind. 2 El'ten)

Frage: Existiert eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die überabzählbar ist, aber kleinere Mächtigkeit hat als $\mathbb{R}$?

Cantorsche Kontinuumshypothese: (CKH)

Es gibt keine solche Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Gödel: 1938 : CKH lässt sich nicht widerlegen

Cohen: 1963 : CKH lässt sich nicht herleiten

Allgemeine Kontinuumshypothese : (AKH)

Sei X eine unendliche Menge. Es existiert keine Teilmenge von 2^X mit grösserer Mächtigkeit als X und kleinerer Mächtigkeit als 2^X

Ende Kapitel I !

Kapitel II : Die Komplexen Zahlen

Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt : $x^2 \geq 0$

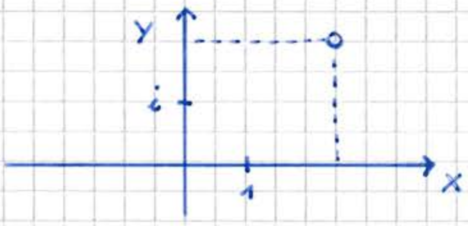
Es gibt also keine reelle Zahl, die die Gleichung $x^2 = c$ löst, wenn $c < 0$.

Trick: Wir führen eine neue Zahl i ein, die die Gleichung $i^2 = -1$ erfüllt.

$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$; Menge der komplexen Zahlen

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Graphisch:



Bezeichnung: $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$x =: \mathrm{Re}(z)$ "Realteil von z"

$y =: \mathrm{Im}(z)$ "Imaginärteil von z"

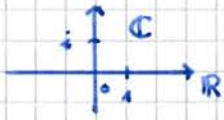
Zwei Grundrechenregeln

Seien $z = x + iy$, $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$

Addition: Summe von z und w ist: $\underbrace{z + w}_{\text{wieder } \in \mathbb{C}} := (x+u) + i(y+v)$ (1)

(Rechtfertigt die Schreibweise "x+iy")

Bem.: Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ identifizieren wir mit der komplexen Zahl $x + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$. D.h. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



Multiplikation: Das Produkt von z und w ist die komplexe Zahl

$$z \cdot w := (xu - yv) + i(xv + yu) \quad (2)$$

Motivation für (2): $(x+iy) \cdot (u+iv) = z \cdot w$

$$= x(u+iv) + iy(u+iv)$$

$$= xu + ixv + iyu - yv = (2)$$

Bem.: In der Schreibweise: (Vektorschreibweise)

$z = (x, y)$, $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$

Sind Summe und Produkt gegeben durch

$z + w := (x+u) + i(y+v)$

$z \cdot w := (xu - yv) + i(xv + yu)$, dann:

$$0_{\mathbb{C}} = (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$$
$$1_{\mathbb{C}} = (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$$
$$i = (0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$$

SATZ 1

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der Addition (1) und der Multiplikation (2), und den neutralen Elementen $0_{\mathbb{C}} = 0 + i \cdot 0$, $1_{\mathbb{C}} = 1 + i \cdot 0$ erfüllen die Körperaxiome.

Beweis: Kommutativität: ✓.

Assoziativität: ✓. | Übg.: Zeige Assoz. für Multipl.

Distributivität: | Übg.

$z + 0_{\mathbb{C}} = z$, $z \cdot 1_{\mathbb{C}} = z$, neutrale Elemente: ✓.

Inverse Elemente: Add.: $-z = -x - iy$

$$z + (-z) = 0$$

Mult.: $z \neq 0$

Ges: $w = u + iv \in \mathbb{C}$ s.d. $z \cdot w = 1_{\mathbb{C}}$

↳

$$(x+iy)(u+iv) = 1 + i\cdot 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} xu - yv &= 1 \\ xv + yu &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 u + y^2 u = x$$

$$u = \frac{+x}{x^2+y^2}$$

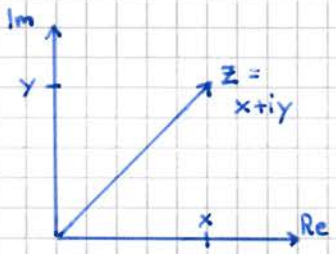
$$v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Antwort: $z^{-1} := \frac{1}{z} := w = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$\blacksquare$

Def.: Sei $z = x+iy$ eine komplexe Zahl; $z \in \mathbb{C}$, $x,y \in \mathbb{R}$; Die Zahl $\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$ heisst komplex konjugiert zu z.

Der Betrag:



Der Betrag einer komplexen Zahl ist die reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \quad \text{(Pythagoras)}$$

Bem.: $z \neq 0: \ \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

SATZ 2 $\forall z,w \in \mathbb{C}$

i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$; $\overline{zw} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

ii) $\bar{\bar{z}} = z$

iii) $z\cdot\bar{z} = |z|^2$

iv) $\overline{-z} = -\bar{z}$ und falls $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

v) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

vi) $|\mathrm{Re}(z)|_{\mathbb{R}} \leq |z|_{\mathbb{C}}$; $|\mathrm{Im}(z)|_{\mathbb{R}} \leq |z|_{\mathbb{C}}$

vii) $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \bar{z} \Longleftrightarrow |\mathrm{Re}(z)|_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$

viii) $|zw| = |z||w|$

ix) $|z+w| \leq |z| + |w|$

Übg.: $\big||z| - |w|\big| \leq |z-w|$; $|z|_{\mathbb{C}} \leq |\mathrm{Re}(z)|_{\mathbb{R}} + |\mathrm{Im}(z)|_{\mathbb{R}}$

Beweis: $z = x+iy$, $w = u+iv$

i) $\overline{zw} = (xu-yv) - i(yu+xv)$
$= (x-iy)(u-vi) = \bar{z}\cdot\bar{w}$

ii) $\bar{\bar{z}} = \overline{x-iy} = x+iy = z$

iii) $z\cdot\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$

iv) $\overline{-z} = \overline{-x-iy} = -x+iy = -(x-iy) = -\bar{z}$

$\frac{1}{\bar{z}} \overset{(iii)}{=} \frac{z}{|z|^2} = \frac{\bar{\bar{z}}}{|z|^2} = \overline{\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$

v) $z+\bar{z} = 2x$; $z-\bar{z} = 2yi$

vi) $|\mathrm{Re}(z)| = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$; $|\mathrm{Im}(z)| = |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

vii) Übg.

viii) $|zw|^2 = zw\cdot\overline{zw} = zw\bar{z}\cdot\bar{w} = z\cdot\bar{z}\cdot w\cdot\bar{w} = |z|^2\cdot|w|^2$

ix) $|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{w}$

$$
\begin{aligned}
&= |z|^2 + w\bar{z} + \overline{w\bar{z}} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2\,|\mathrm{Re}(z\bar{w})|_{\mathbb{R}} + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2\,|z\bar{w}|_{\mathbb{C}} + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 \\
&= (|z|+|w|)^2
\end{aligned}
$$

▨

SATZ 3 Seien $a,b \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists$ Lsg. $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

(I) $\boxed{z^2 + az + b = 0}$

Beweis: $\underbrace{z^2 + az + a^2/4}_{=(z+\frac{a}{2})^2 =: w} = \underbrace{a^2/4 - b}_{=:c}$

Gesucht: Lsg. $w = u+iv$ der Gleichung $\boxed{w^2 = c}$ (II)

$c =: \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

o.B.d.A. Sei $\beta \geq 0$ (Sonst: w, c ersetzen durch $\bar{w}, \bar{c}$)

$w^2 = c \Longleftrightarrow \begin{array}{l} u^2 - v^2 = \alpha \\ 2uv = \beta \end{array}$; $\begin{array}{l} \alpha^2+\beta^2 = (u^2-v^2)^2 + (2uv)^2 \\ = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2+v^2)^2 \end{array}$

$$w^2 = c \iff \begin{cases} u^2 - v^2 = \alpha \\ 2uv = \beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u^2 + v^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ u^2 - v^2 = \alpha \\ uv \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2} = \frac{|c|+\mathrm{Re}(c)}{2}$$

$$v^2 = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2} = \frac{|c|-\mathrm{Re}(c)}{2}$$

$$\Rightarrow W = \pm\left(\sqrt{\frac{|c|+\mathrm{Re}(c)}{2}} + i\sqrt{\frac{|c|-\mathrm{Re}(c)}{2}}\right) \Rightarrow \exists!\ 2 \text{ Lsg. ausser wenn } \frac{a^2}{4} - b = 0 = c$$

$$z := w + \frac{a}{2} \text{ Lsg. von (I)}$$

$\blacksquare$

| Übg.: $\sqrt{i}$, $\sqrt{-i}$, $\sqrt{1+i}$, $\sqrt{\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[4]{-i}$

<u>SATZ 4</u> (Fundamentalsatz der Algebra)

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}\ \exists z \in \mathbb{C}$ s.d.

$$\boxed{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0} \qquad \text{(III)}$$

"Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle!"
(Laplace 1795, Gauss 1799, Argand 1814)

→ Beweis in Kapitel 5 !

<u>Def.:</u> Ein Polynom ist eine Abbildung $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form
$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$; $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ (IV)
Die a_i heissen Koeffizienten von p. Ist $a_n \neq 0$, so wird n der Grad von p genannt: $\deg(p) = n$

$\mathbb{C}[z]$:= Menge aller Polynome $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$\mathbb{R}[z]$:= Menge aller Polynome mit $a_i \in \mathbb{R}$

Sind die Koeffizienten $a_i = 0$, so heisst das Polynom p Nullpolynom.

<u>Was heisst $p = 0$?</u>

Algebra: $p = 0$ heisst $a_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Analysis: $p = 0$ heisst $p(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

<u>SATZ 5</u>

Sei $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Äquivalent sind:

i) $\exists k \in \{0, 1, \dots, n\}$ s.d. $a_k \neq 0$

ii) $\exists z \in \mathbb{C}$ s.d. $p(z) \neq 0$

iii) $\exists c > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in \mathbb{C}: \ |z| \geq c \Rightarrow |p(z)| \geq \delta |z|^n$

<u>Beweis</u>: $(iii) \underset{\text{trivial}}{\Longrightarrow} (ii) \underset{K1\text{-}4}{\Longrightarrow} (i) \overset{!}{\Longrightarrow} (iii)$ → z.z.

O.B.d.A.: $a_n \neq 0$

Wähle $c \in \mathbb{N}$ s.d. $c > \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$; $|z| \geq c \geq 1$

$$\delta := |a_n| c - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| > 0$$

$$\to p(z) = a_n z^n + \hat{p}(z) \ ; \quad \hat{p}(z) := \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$$

$$\Rightarrow |\hat{p}(z)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \overset{S2}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i z^i| \overset{S2}{=} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \, |z|^i$$

$$\overset{|z| \geq 1}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right)}_{= c|a_n| - \delta} |z|^{n-1} = (c\,|a_n| - \delta)\,|z|^{n-1}$$

$$= (|a_n| - \delta/c)\, c\, |z|^{n-1} \leq (|a_n| - \delta/c)\,|z|^n$$

$$|p(z)| = |a_n z^n + \hat{p}(z)| \geq |a_n z^n| - |\hat{p}(z)| = |a_n||z|^n - |\hat{p}(z)|$$

$$\geq |a_n||z|^n - (|a_n| - \delta/c)|z|^n \geq \delta/c \, |z|^n$$

$\blacksquare$

SATZ 6 $\forall p,q \in \mathbb{C}[z]$:

$pq = 0 \Rightarrow p = 0$ oder $q = 0$

Beweis: $p \neq 0$ und $q \neq 0 \Rightarrow \exists c > 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq c$ gilt
$p(z) \neq 0$ und $q(z) \neq 0$
$\Rightarrow p(z)q(z) \neq 0 \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq c \Rightarrow pq \neq 0$ ▨

Def.: X Menge

$f, g: X \to \mathbb{C}$ Abbildungen. Die Summe $f+g$ ist die Abbildung $f+g: X \to \mathbb{C}$, die durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, bzw. das Produkt von f und g ist die Abbildung $fg: X \to \mathbb{C}$, die durch $(fg)(x) := f(x)g(x)$, definiert ist.

Bsp.) $X = \{a, b\}$

$$\left.\begin{matrix} f(a) = 1, & f(b) = 0 \\ g(a) = 0, & g(b) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (fg)(a) = 0 \cdot 1 = 0 = 0 \cdot 1 = fg(b)$$

Bem.: Satz 6 sagt:
Ist $X = \mathbb{C}$ und sind $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome, so gilt:
$fg = 0 \Rightarrow f = 0$ oder $g = 0$

Übg. 1. $p, q \in \mathbb{C}[z]$
$\Rightarrow p+q,\ pq \in \mathbb{C}[z]$
2. $\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$
$\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$
wobei: Für $x, y \in \mathbb{R}$: $\max\{x,y\} := \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x \leq y \end{cases}$

SATZ 7 (Division mit Rest)

Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(q) \geq 1$
$\Rightarrow \exists!\, f, r \in \mathbb{C}[z]$, s.d.: $p = fq + r$, $\deg(r) < \deg(q)$ (I)

Beweis:

Eindeutigkeit: Seien (f_1, r_1), (f_2, r_2) zwei Paare von Polynomen, die beide (I) erfüllen. $\Rightarrow$ $f_1 q + r_1 = f_2 q + r_2$

$$\Leftrightarrow f_1 q - f_2 q = r_2 - r_1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(f_1 - f_2) q}_{\substack{\deg((f_1-f_2)q) \\ \geq \deg(q) \\ \text{falls } f_1 - f_2 \neq 0}} = \underbrace{r_2 - r_1}_{\deg(r_2 - r_1) < \deg(q)} \quad \perp$$

$$\Rightarrow r_2 - r_1 = 0 \,,\ (f_1 - f_2) q = 0$$

$$\underset{56}{\Rightarrow} f_1 - f_2 = 0 \quad \checkmark$$

Existenz: $n := \deg(q) \geq 1$

$$q(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j z^j \,,\ b_j \in \mathbb{C} \,,\ b_n \neq 0$$

Induktion über $\deg(p)$:

1. $\deg(p) < n$: wähle $f := 0$, $r := p$
2. $\deg(p) =: m \geq n$

   IA: Existenz sei bereits bewiesen für alle Polynome vom Grade $< m$

   $$p(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^i \,,\ a_i \in \mathbb{C} \,,\ a_m \neq 0$$

   $$p_1(z) := p(z) - \frac{a_m}{b_n} z^{m-n} q(z) \quad m \geq n$$

   $\hookrightarrow$ ist ein Polynom vom Grade $m_1 < m$

   Es folgt aus IA: $\exists\, f_1, r_1 \in \mathbb{C}[z]$ s.d.

   $$p_1 = f_1 q + r_1 \,,\ \deg(r_1) < \deg(q)$$

   $$\Rightarrow p(z) = p_1(z) + \frac{a_m}{b_n} z^{m-n} q(z) = f_1(z) q(z) + r_1(z) + \frac{a_m}{b_n} z^{m-n} q(z) = \underbrace{\left(f_1(z) + \frac{a_m}{b_n} z^{m-n}\right)}_{=: f(x)} q(z) + \underbrace{r_1(z)}_{=: r(x)}$$

$\blacksquare$

Def: Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ mit $q \neq 0$. p heisst durch q teilbar, wenn ein Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ existiert, s.d. $p = fq$

Korollar 1: $q(z) = z - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\deg(q) = 1$

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ existiert ein Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ und eine Konstante $\gamma \in \mathbb{C}$, s.d.:

$$p(z) = f(z)(z-\lambda) + \gamma \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Bew.: Speziall von S7!

Bem.: $\gamma = p(\lambda)$; $p(\lambda) = 0 \iff p$ ist durch $z - \lambda$ teilbar.

Korollar 2: (Satz von der linearen Faktorzerlegung)

Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grade $n \in \mathbb{N}$:

$\Rightarrow \exists a, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ s.d. $\forall z \in \mathbb{C}$: $p(z) = a(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)$

Bew.: vollst. Ind. über n

IV: $n = 1$: $p(z) = az + b$; $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$\lambda := -\frac{b}{a}$

IA: $n \geq 2$: die Beh. sei für alle Polynome vom Grade $n-1$ bewiesen.

IS: $p \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(p) = n \overset{S4}{\Rightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{C}$ s.d. $p(\lambda) = 0$

$\overset{K1}{\Rightarrow} \exists f \in \mathbb{C}[z]$ s.d. $p(z) = f(z)(z-\lambda) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\overset{S6}{\Rightarrow} f \neq 0$ und $n = \deg(p) = \deg(f) + 1 \Rightarrow \deg(f) = n-1$

$\overset{IA}{\Rightarrow} \exists a, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}, a \neq 0$ s.d. $f(z) = a(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_{n-1}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}: p(z) = f(z)(z-\lambda) = a(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_{n-1})(z-\underset{\lambda_n}{\underset{!!}{\lambda}})$

▨

Korollar 3 : Jedes Polynom vom Grade n hat höchstens n Nullstellen

Bew.: Anstarren von Kor. 2 ■ :)

Korollar 4 : (Identitätssatz)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$

$$q(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n$$

zwei Polynome mit komplexen Koeffizienten, deren Werte an $n+1$ verschiedenen Stellen übereinstimmen, dann:

$\Rightarrow a_k = b_k$ für $k = 0, 1, \ldots, n$

Bew.: $p - q$ ist ein Polynom vom Grade $\leq n$ mit $n+1$ NS nach Voraussetzung. $\overset{K3}{\Rightarrow} p - q = 0 \overset{\text{Satz}}{\Rightarrow} a_k - b_k = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n$ ■

Bem.: zu Korollar 2

$$\left.\begin{aligned} p(z) &= (z+\lambda_1)(z+\lambda_2)\ldots(z+\lambda_n) \\ p(z) &= z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n \end{aligned}\right\} \text{beides ist legitim!}$$

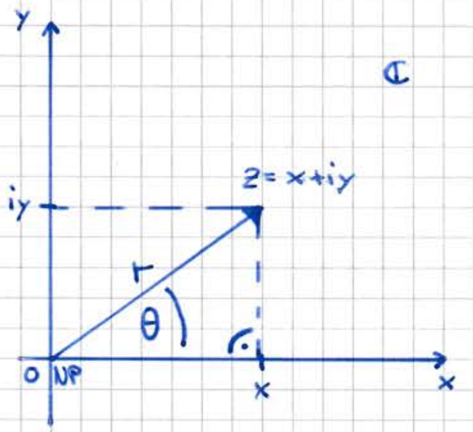
$\Rightarrow \quad a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

$$a_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

$$\vdots$$

$$a_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \lambda_{i_1} \cdot \lambda_{i_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_k} \quad \Rightarrow \quad a_n := \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

Komplexe Zahlen: Geometrisch



Polarkoordinaten: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

"Abstand zum NP"

θ : Winkel

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

$\theta = \arg(z)$ ist bestimmt durch: $\cos\theta = \frac{x}{r}$; $\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\Rightarrow \quad z = r\cos(\theta) + i r\sin(\theta)$

Notation: Eulersche Gleichung: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Zusatz: $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')$$
$$\sin(\theta+\theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')$$
$$\Rightarrow \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Daraus: gegeben $z \in \mathbb{C}$, gesucht $w \in \mathbb{C}$, s.d. gilt:

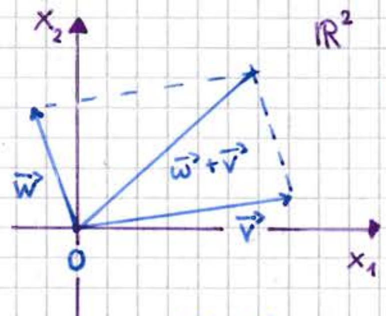
$$w^n = z \; ; \quad z = re^{i\theta}$$
$$w = \varrho e^{i\varphi}$$

Jetzt: $w^n = \varrho^n e^{in\varphi} \overset{!}{=} re^{i\theta}$

$$\Rightarrow \varrho := r^{1/n}, \quad \varphi := \frac{\theta}{n}$$

Ende Kap. II!

Kapitel 3: Vektorräume



s. Bsp. 4)

Def.: Ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$) besteht aus:

- einer Menge V
- einem Element $\vec{0} = 0_V \in V$ (Nullvektor)
- eine Abbildung (Vektoraddition) $V \times V \to V : (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto (\vec{v} + \vec{w})$
- eine Abbildung (skalare Multiplikation) $\mathbb{R} \times V \to V : (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda\vec{v}$ ...

..., die folgende Axiome erfüllen:

i) $(V, 0, +)$ ist eine abel'sche Gruppe (Assoziativität, Kommutativität, neutrales Element $e_+ = \vec{0}$, inverses Element $-\vec{v}$)

ii) Skalare Multiplikation:
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \forall \vec{v} \in V: \; \lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
- $\forall \vec{v} \in V: \; 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

iii) Distributivität:
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \; \lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \forall \vec{v} \in V: \; (\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

Notation : $\vec{v}, \vec{w} \in V$

- $\vec{v} - \vec{w} := \vec{v} + (-\vec{w})$;

Übg.: Sei V ein reeller VR

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda \cdot 0_V = 0_V$
2. $\forall \vec{v} \in V: 0_{\mathbb{R}} \cdot \vec{v} = 0_V$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall \vec{v} \in V: \lambda(-\vec{v}) = (-\lambda)\vec{v} = -\lambda\vec{v}$

Bem.: Man kann ebenso Vektorräume über den Körpern $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$, usw., definieren.

Bsp. 1) $V = \{0\}$, $\emptyset$ kann kein VR sein (es muss ein $0_V \in V$ geben...)!

Bsp. 2) $V = \mathbb{R}$

Bsp. 3) $V = \mathbb{C}$ ist ein VR über $\mathbb{R}$

Bsp. 4) $V = \mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n\}$

$\rightarrow 0_{\mathbb{R}^n} := (0, 0, \ldots, 0)$

x_i heissen Koordinaten von $\vec{x}$

Addition: $\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

sk. Multipl.: $\lambda \vec{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots, \lambda x_n)$

Bsp. 5) X: Menge

$V := \mathbb{R}^X := \mathcal{F}(X) = \{\text{Abbildungen } f: X \to \mathbb{R}\}$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $f, g \in \mathcal{F}(X)$

$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Betrachte: $n \in \mathbb{N}$, $X = \{1, \ldots, n\}$: $\mathbb{R}^X = \mathbb{R}^n$!

Bsp. 6) V = Menge der Polynome $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit kompl. Koeffizienten

$\rightarrow V = \mathbb{C}[z] \subset \{\text{Abb. } \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$; VR über $\mathbb{C}$ oder über $\mathbb{R}$

bzw. $\supset \mathbb{R}[z]$: reeller VR

Bsp. 7) $V = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0\}$

ergibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$

Bsp. 8) $\mathbb{R}$ ist ein VR über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Def.: Sei V ein reeller Vektorraum und sei $E \subset V$. E heisst:

i) linear unabhängig, wenn $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall e_1, \dots, e_n \in E$ mit $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$ $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}_{\text{Linearkombination der } e_i} = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

ii) vollständig, wenn gilt:
$\forall \vec{v} \in V\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists e_1, \dots, e_n \in E\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ s.d.
$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

iii) heisst Basis von V, wenn E sowohl linear unabhängig als auch vollständig ist.

SATZ 1

i) Jeder reelle VR V besitzt eine Basis.
ii) Je zwei Basen eines VR V sind gleichmächtig

Beweisskizze:

i) Zorn's Lemma
$\mathcal{P} := \{E \subset V \mid E \text{ ist linear unabhängig}\}$
- $\mathcal{P}$ ist partiell geordnet durch "$\subset$"
- $\mathcal{P}$ ist nicht leer, da $\emptyset \in \mathcal{P}$
- Jede Kette $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ besitzt obere Schranke $F := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$

| Übg.: F ist linear unabhängig, d.h. $F \in \mathcal{P}$

$\overset{ZL}{\implies} \forall E \in \mathcal{P}\ \exists$ max. Element $\mathcal{B} \in \mathcal{P}$ s.d. $E \subset \mathcal{B}$

| $\implies \mathcal{B}$ ist eine Basis (Übg.)

ii) nur für endliche Basen
Sei $E \subset V$ eine endliche Basis. $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, $n = \# E > 0$
Sei $F \subset V$ eine lin. unabh. Menge. Beh.: F ist endlich und $\# F \leq n$
$\to$ Bew. d. vollst. Ind.!

IV: $n = 1$: $V = \{ \lambda e_1 \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

Je zwei versch. Vektoren in V sind also lin. abh.

$\# F \leq 1$

IA: Beh. gilt für $n-1 \in \mathbb{N}$

IS: $n \geq 2$: Sei $\vec{w} \in F$. Dann $\exists \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ s.d.

$\vec{w} = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n \neq \vec{0}$

$\Rightarrow$ mind. eine der reellen Zahlen μ_i ist $\neq 0$

o.B.d.A.: $\mu_n \neq 0$

$\tilde{V} := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\} = \{ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$

$\tilde{E} := \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$: Basis von $\tilde{V}$

Für jedes $\vec{v} \in F$ existieren reelle Zahlen $\lambda_1(\vec{v}), \dots, \lambda_n(\vec{v})$ s.d. $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\vec{v}) e_i$; $\tilde{\vec{v}} := \vec{v} - \frac{\lambda_n(\vec{v})}{\mu_n} \vec{\omega} \in \tilde{V}$

$\Rightarrow \tilde{F} := \{ \tilde{\vec{v}} = \vec{v} - \frac{\lambda(\vec{v})}{\mu_n} \omega \in \tilde{V} \mid \vec{v} \in F \setminus \{\vec{\omega}\} \}$

$\Rightarrow \tilde{F}$ ist lin. unabh.

$\overset{IA}{\Rightarrow} \tilde{F}$ ist endlich und $\# \tilde{F} \leq n-1$

$\Rightarrow F$ ist endlich und $\# F = \# \tilde{F} + 1 \leq n$ ∎

Bem.: besitzt V eine endliche Basis E, so ist jede Basis endlich und besitzt die gleiche Anzahl von Elementen wie E.

Def.: V: reeller VR

V heisst endlichdimensional, wenn V eine endliche Basis E besitzt. In diesem Fall ist $\# E$ unabhängig von der Wahl der Basis und wird Dimension von V genannt.

$\dim V := \# E$

Bspe) auf d. nächsten Seite →

Bsp.)

VR	$\dim V$	E
$V = \{0\}$	0	$\emptyset$
$V = \mathbb{R}$	1	$\{1\}$
$V = \mathbb{C}$	2	$\{1, i\}$
$\mathbb{R}^n$	n	$\{e_1, \dots, e_n\}$, $e_i = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, \dots, 0\}$

<u>Def.:</u> Sei V ein reeller VR

Eine Norm (-funktion) auf V ist eine Abbildung $V \to \mathbb{R}$:

$\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$, mit folgenden Eigenschaften:

i) $\forall \vec{v} \in V: \ \|\vec{v}\| \geq 0, \ \ \|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall \vec{v} \in V: \ \ \|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \, \|\vec{v}\|$

iii) Dreiecksungleichung: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \ \ \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

Für $\vec{v} \in V$ heisst die Zahl $\|\vec{v}\|$ die Norm des Vektors $\vec{v}$.

Bsp.1) $V = \mathbb{R}$

$\|x\| := |x|$; Betrag von x

Bsp.2) $V = \mathbb{C}$

$\|z\| := |z|$; Betrag von z: $\sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

Bsp.3) $V = \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$

- $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
- $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$
- $\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; Euklidische Norm

$\|x\|_2 = 0 \iff x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \iff x_1 = \dots = x_n = 0 \iff x = \vec{0}$

$\|x\lambda\|_2 = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)} = |\lambda| \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$= |\lambda| \cdot \|x\|_2$

<u>Cauchy-Schwarz Ungleichung</u>

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n: \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (*)$

zur Δ-Ungleichung bei der Euklidischen Norm:

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

$$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \qquad (\blacksquare)$$

<u>Def.:</u> Die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x,y\rangle$ ist ein Beispiel eines inneren Produktes.

Sei V ein reeller VR. Ein inneres Produkt auf V ist eine Abbildung $\langle .,.\rangle \begin{cases} V\times V \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle \end{cases}$

mit folgenden Eigenschaften:

i) symmetrisch: $\forall \vec{v},\vec{w} \in V: \ \langle \vec{v},\vec{w}\rangle = \langle \vec{w},\vec{v}\rangle$

ii) bilinear: $\forall \vec{v},\vec{v}',\vec{w} \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \langle \lambda\vec{v},\vec{w}\rangle = \lambda\langle \vec{v},\vec{w}\rangle$

$$\langle \vec{v}+\vec{v}',\vec{w}\rangle = \langle \vec{v},\vec{w}\rangle + \langle \vec{v}',\vec{w}\rangle$$

iii) $\forall \vec{v} \in V\setminus\{0\}: \langle \vec{v},\vec{v}\rangle > 0$

Die Zahl $\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v},\vec{v}\rangle}$ heisst Norm von $\vec{v}$.

<u>SATZ 2</u>

Sei $\langle .,.\rangle$ ein inneres Produkt auf einem reellen VR V.

$\Rightarrow \forall \vec{v},\vec{w} \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

i) $|\langle \vec{v},\vec{w}\rangle| \leq \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$

ii) $\|\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

iii) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{v}\|$

<u>Beweis:</u>

i) $\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{v},\vec{w}\rangle = 0$. Für $\vec{w} = \vec{0}$ gilt also die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

$\vec{w} \neq \vec{0}$: $\qquad 0 \leq \left\| \vec{v} - \frac{\langle \vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w} \right\|^2$

$$\to \ = \left\langle \vec{v} - \frac{\langle \vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}, \vec{v} - \frac{\langle \vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w} \right\rangle = \left\langle \vec{v} - \frac{\langle \vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}, \vec{v} \right\rangle =$$

$$= \langle \vec v, \vec v\rangle - \frac{\langle \vec v, \vec w\rangle^2}{\|\vec w\|^2} = \|\vec v\|^2 - \frac{\langle \vec v, \vec w\rangle^2}{\|\vec w\|^2} \Rightarrow \langle \vec v, \vec w\rangle^2 \leq \|\vec v\|^2 \cdot \|\vec w\|^2$$

$\rightarrow$ i) $\underline{\checkmark}$

iii) Übg.

ii) $\langle \vec v + \vec w, \vec v + \vec w\rangle = \|\vec v\|^2 + 2\langle \vec v, \vec w\rangle + \|\vec w\|^2$

s.(*) $\leq \|\vec v\|^2 + 2\|\vec v\|\|\vec w\| + \|\vec w\|^2 = \|\vec v + \vec w\|^2$ ▨

<u>Frage:</u> Gegeben sei ein VR V mit einer Normfkt. $\|\cdot\|$ (ein normierter Vektorraum). Existiert ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V s.d. $\forall \vec v \in V$: $\|\vec v\| = \sqrt{\langle \vec v, \vec v\rangle}$

<u>Antwort:</u> Genau dann wenn $\forall \vec v, \vec w \in V$:

$\|\vec v + \vec w\|^2 + \|\vec v - \vec w\|^2 = 2\|\vec v\|^2 + 2\|\vec w\|^2$

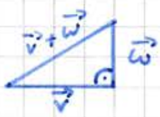
"Parallelogrammidentität"

$\langle \vec v, \vec w\rangle := \frac{1}{4}\left(\|\vec v + \vec w\|^2 - \|\vec v - \vec w\|^2\right)$; Bew.: Übg.

<u>Geometrische Intuition</u>

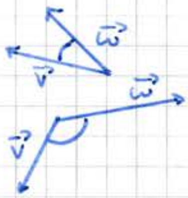
$\langle \vec v, \vec w\rangle = 0$: $\vec v \perp \vec w$ "$\vec v$ steht senkrecht auf $\vec w$"

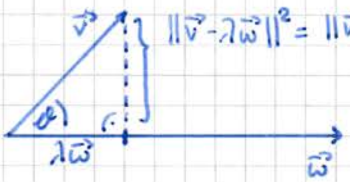
$\|\vec v + \vec w\|^2 = \|\vec v\|^2 + 2\langle \vec v, \vec w\rangle + \|\vec w\|^2 = \|\vec v\|^2 + \|\vec w\|^2$



$\langle \vec v, \vec w\rangle > 0$: "spitzer Winkel"

$\langle \vec v, \vec w\rangle < 0$: "stumpfer Winkel"





$\|\vec v - \lambda \vec w\|^2 = \|\vec v\|^2 - \frac{\langle \vec v, \vec w\rangle^2}{\|\vec w\|^2} \geq 0$

$\rightarrow$ Gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$ s.d. $\vec v - \lambda \vec w \perp \vec w$

d.h. $\langle \vec v - \lambda \vec w, \vec w\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec v, \vec w\rangle - \lambda\langle \vec w, \vec w\rangle$

$= \langle \vec v, \vec w\rangle - \lambda\|\vec w\|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\langle \vec v, \vec w\rangle}{\|\vec w\|^2}$

$\rightsquigarrow \vec v - \frac{\langle \vec v, \vec w\rangle}{\|\vec w\|^2}\vec w \perp \vec w$

Beachte: $\cos\vartheta = \frac{\|\lambda \vec w\|}{\|\vec v\|} = \frac{\lambda\|\vec w\|}{\|\vec v\|} = \frac{\langle \vec v, \vec w\rangle}{\|\vec v\|\|\vec w\|}$, $\lambda > 0$

Vektorprodukt

$V = \mathbb{R}^3$

Def.: Das Vektorprodukt von $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ist der Vektor:

$$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Bem.: $\vec{e_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{e_1} \times \vec{e_2} &= \vec{e_3} \quad ; \quad \vec{e_1} \times \vec{e_1} = \vec{0} \\ \vec{e_2} \times \vec{e_3} &= \vec{e_1} \quad ; \quad \vec{e_2} \times \vec{e_2} = \vec{0} \\ \vec{e_3} \times \vec{e_1} &= \vec{e_2} \quad ; \quad \vec{e_3} \times \vec{e_3} = \vec{0} \end{aligned}$$

Bem.: Das Vektorprodukt ist eine schief-symmetrische bilineare Abbildung: $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \\ (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \times \vec{y} \end{cases}$

d.h. $\forall \vec{x}, \vec{x}', \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

i) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

ii) $(\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda (\vec{x} \times \vec{y})$

iii) $(\vec{x} + \vec{x}') \times \vec{y} = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x}' \times \vec{y}$

Bem.: Das Vektorprodukt erfüllt die Jacobi-Identität:

$$(\mathrm{I}): \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{0}; \ \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

Übg. mit Hinweis: zeige zuerst: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} \quad (\mathrm{II})$

dann (I)

Warnung: Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ!

$$(\vec{e_1} \times \vec{e_2}) \times \vec{e_2} = \vec{e_3} \times \vec{e_2} = -\vec{e_1}$$

aber: $\vec{e_1} \times (\vec{e_2} \times \vec{e_2}) = \vec{e_1} \times \vec{0} = \vec{0}$

Bem.: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 : \; \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle \quad (\mathrm{III})$

Bew. ist Übung! $\quad (= \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$

↳ simples ausrechnen!

Lemma 1:

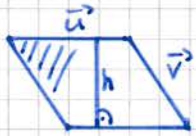
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \; \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}$$

Bew.:
$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle &= \langle (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &= \langle \|\vec{u}\|^2 \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Übg.: $\vec{u}, \vec{v}$ lin. unabh. $\iff \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}$

Bem.: Vektorprodukt geometrisch:

1. $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v} \quad (\mathrm{III})$
2. $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = A_{\text{Parallelogramm zw. } \vec{u} \text{ und } \vec{v}}$ /



da $A =$ Grundseite · Höhe
$$= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v} - \lambda \vec{u}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2}$$
$$= \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

Ende Kap. 3 !

Kapitel 4: Folgen und Reihen

Def.: X: Menge. Eine Folge in X ist eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to X$

Notation: Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $x_n := f(n)$

- $x_1, x_2, x_3, \dots$
- $\mathbb{N} \to X ; \; n \mapsto x_n$
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (x_n)

$X^{\mathbb{N}} = \{$Menge der Abb. $f: \mathbb{N} \to X\} = \{$Menge der Folgen in $X\}$

Def.: Eine Funktion $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heisst Abstandsfunktion, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

i) $\forall x,y \in X$ gilt: $d(x,y) = d(y,x)$

ii) $\forall x,y \in X$ gilt: a) $d(x,y) \geq 0$

b) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

iii) $\forall x,y,z \in X$ gilt: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Δ-Ungl.)

Für $x,y \in X$ heisst die Zahl $d(x,y)$ der Abstand von x zu y.

Ein metrischer Raum ist ein Paar (X,d), bestehend aus einer Menge X und einer Abstandsfunktion $d: X^2 \to \mathbb{R}$.

Bsp. 1) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) := |x-y|_{\mathbb{R}}$

Bsp. 2) $X = \mathbb{C}$, $d(z,w) := |z-w|_{\mathbb{C}}$

Bsp. 3) $X = V$ norm. VR, $d(\vec{v},\vec{w}) := \|\vec{v}-\vec{w}\|$

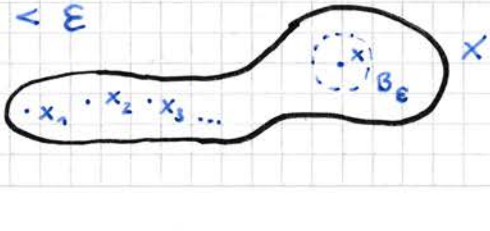
Bsp. 4) X beliebige Menge, $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

Bsp. 5) $X = \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ Primzahl, $d_p(x,y) := \min\{ p^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, (x-y) : p^k \in \mathbb{Z} \}$
$= p^{-n}$, wobei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die grösste Zahl ist, s.d. $x-y$ durch p^n teilpar ist.

Übg.: dies ist eine Abstandsfkt.
p-adische Metrik

Def.: Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x \in X$, $r > 0$.
Die Menge
$$B_r(x) := \{ y \in X : d(x,y) < r \}$$
heisst Ball vom Radius r mit Mittelpunkt x.
in $\mathbb{C}$: Kreisscheibe!

Def.: Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X, und $x \in X$. Wir sagen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, wenn für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.
$\forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$



Als logische Formel:
$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon)$

<u>Notation:</u> $x_n \to x$

<u>Lemma 1</u> Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X, $x, x' \in X$.
$x_n \to x \ \wedge \ x_n \to x' \Rightarrow x = x'$

<u>Def.:</u> Wenn (x_n) gegen x konvergiert, so wird x der Grenzwert oder Limes der Folge (x_n) genannt. Schreibweise: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

<u>Bew.:</u> Sei $\varepsilon > 0$.
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists n_0' \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0' \Rightarrow d(x_n, x') < \varepsilon/2$
Sei $n := \max\{n_0, n_0'\}$
$\Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2},\ d(x_n, x') < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
d.h. $d(x, x') < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$ ▨

Bsp. 1) $X = \mathbb{R}$, $(x_n) = \frac{1}{n}$
Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; Sei $\varepsilon > 0 = \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0: d(0, \frac{1}{n}) = |0 - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Bsp. 2) $X = \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$
Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$; Sei $\varepsilon > 0$. Nach S2 in Kap. 1: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|q|^{n_0} < \varepsilon \Rightarrow d(q^n, 0) = |q^n| = |q|^n$
$\leq |q|^{n_0} < \varepsilon$
↳ falls $n \geq n_0$

Bsp. 3) $X = \mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n \to$ die Folge konvergiert nicht!
Genauso wie: $x_n = n^2$ oder $x_n = 2^n$

Lemma 2 Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ s.d. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Dann gilt:

i) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$

ii) $\lim_{n\to\infty}|x_n| = |x|$

iii) $x \neq 0 \Rightarrow x_n \neq 0$ für hinreichend grosse $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$

iv) $x_n \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq y$

v) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \leq z_n \leq y_n$, $x = y \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = x$

Bem.: i), ii), iii) gelten ebenfalls für Folgen in $\mathbb{C}$

Bew.: i) Summe:

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$: $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(x_n + y_n) - (x+y)|$

$$\leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Produkt:

$x_n y_n - xy = x_n(y_n - y) + (x_n - x)y$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$:

$|x_n - x| < 1$, $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2(|y|+1)}$, $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2(|x|+1)}$

$$\overset{n \geq n_0}{\Rightarrow} |x_n y_n - xy| \leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{(\underbrace{|x_n - x|}_{<1} + |x|)}_{<|x|+1} |y_n - y|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_n - x|(|y|+1)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \quad \Rightarrow < \varepsilon$$

ii) $d_{\mathbb{R}}(|x_n|, |x|) = ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$

iii) $\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_n}{x x_n}$, Sei $\varepsilon > 0$: Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $|x_n - x| < \frac{|x|}{2}$ und

$|x_n - x| < |x|^2 \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ Für $n \geq n_0$ gilt: $|x_n| > \frac{|x|}{2} \overset{n \geq n_0}{\Rightarrow} \left|\frac{x - x_n}{x x_n}\right| \leq \frac{2}{|x|^2}|x - x_n|$

$\Rightarrow < \varepsilon$

iv) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ s.d. $x - \varepsilon < x_n \leq y_n < y + \varepsilon$

$\Rightarrow x - \varepsilon < y + \varepsilon \Rightarrow x - y < 2\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x - y \leq 0$

$\Rightarrow x \leq y$

v) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$|x_n - x| < \varepsilon$, $|y_n - x| < \varepsilon \overset{n \geq n_0}{\Rightarrow} x - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n$

$< x + \varepsilon$

$\Rightarrow |x - z_n| < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ ■

Bsp. 4) $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Beh.: $\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = 1$;

1. Fall: $a \geq 1$: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $a < (1+\varepsilon)^{n_0}$

Satz 2, Kap. 1

$\Rightarrow a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon \overset{n \geq n_0}{\Rightarrow} 1 \leq a^{1/n} \leq a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0: |a^{1/n} - 1| < \varepsilon$

2. Fall: $b := \frac{1}{a} \geq 1 \overset{1.\text{Fall}}{\Rightarrow} \lim_{n \to \infty} b^{1/n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} b^{1/n} = \frac{1}{a^{1/n}} \overset{L2}{\Rightarrow} \lim_{n \to \infty} a^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{b^{1/n}} = 1$

Bsp. 5) $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$, $\lim_{n \to \infty} n^{-s} = s$

Bsp. 6) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $n_0 \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon^2} \overset{n \geq n_0}{\Rightarrow} n - 1 \geq \frac{2}{\varepsilon^2}$

$\Rightarrow (1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \geq n$

$\Rightarrow 1 + \varepsilon > n^{1/n} \Rightarrow 1 < n^{1/n} < 1 + \varepsilon \Rightarrow |1 - n^{1/n}| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$

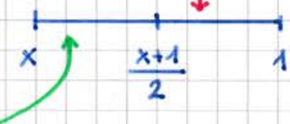
Bsp. 7) $0 < x < 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^k x^n = 0 \quad \text{(Beh.)}$$

Bew.: $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varepsilon^{1/n} = 1 \quad \text{(Bsp 4)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{k/n} \cdot x = x$$



$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$n^{k/n} \cdot x < \frac{x+1}{2} < \varepsilon^{1/n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq n^k x^n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \qquad (\blacksquare)$$

<u>Lemma 3</u> $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \cdot\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x \geq 0 \end{array}\right\}$ Sei $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{1/p} = x^{1/p}$

<u>Bew.:</u> 1. Fall: $x = 0$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow x_n < \varepsilon^p)$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n > n_0 \Rightarrow x_n^{1/p} < \varepsilon)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{1/p} = 0 = x^{1/p}$

2. Fall: $x > 0$

Für $a > 0$ gilt: $(a-1)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1})$
$= a^p - 1$

$\Rightarrow |a-1| < |a^p - 1|$; $a = \left(\frac{x_n}{x}\right)^{1/p}$

$\Rightarrow \left|\left(\frac{x_n}{x}\right)^{1/p} - 1\right| < \left|\frac{x_n}{x} - 1\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{x}\right)^{1/p} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{1/p} = x^{1/p}$ $\blacksquare$

Def.: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heisst beschränkt, wenn eine Zahl $c > 0$ existiert, s.d. $|x_n| \leq c \;\forall n \in \mathbb{N}$

Lemma 4 $(x_n), (y_n)$: Folgen in $\mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, y_n beschränkt $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

Bew.: Wähle $c > 0$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N} : |y_n| \leq c$
Für $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$:
$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{c}$, dann: $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n y_n| \leq |x_n| < \varepsilon$ ∎

Bsp.) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = (-1)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Lemma 5

Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt.

Bew.: $x := \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$:
$$|x_n - x| < 1$$

$$\overset{\forall n \geq n_0}{\Rightarrow} |x_n| \leq |x_n - x| + |x| \leq |x| + 1$$

$$c := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|, |x|+1\}$$

$$\Rightarrow |x_n| \leq c \;\forall n \in \mathbb{N}$$ ∎

Def.: Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heisst
- monoton wachsend wenn $x_{n+1} \geq x_n \;\forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend wenn $x_{n+1} \leq x_n \;\forall n \in \mathbb{N}$
- monoton, wenn sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.

SATZ 1

Jede monotone, beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$; $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt

1\. Fall: (a_n) monoton wachsend

$a := \sup A$ (per Kap. 1)

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $a_{n_0} > a - \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$a - \varepsilon < a_n \leq a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

2\. Fall: (a_n) monoton fallend

$a := \inf A$ ... analog wie 1. Fall!

∎

Bsp. 8) Sei $a > 0$

Sei $x_0 > 0$, $x_1 := \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$, $x_2 := \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$

... $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ (Rekursionsformel)

Beh.: $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

Bew.: 1.: $x_n \geq \sqrt{a} \quad \forall n \geq 1$

$$x_n^2 \geq \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 = a$$

2.: $x_{n+1} \leq x_n$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right)$$

$$= \frac{1}{2x_n}\left(a - x_n^2\right) \leq 0$$

$\overset{S1}{\Rightarrow}$ Der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n \geq \sqrt{a}$ existiert

$$\Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow \frac{a}{x} = x$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{a}$$

Beachte: $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{a} \Rightarrow \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^2 / 2\sqrt{a}$ (schnelle Konvergenz!)

Bsp. 9) $p_n := \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2n-1}$, $p_n / p_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}$

| Übg.: $\frac{n}{n+1} < \left(\frac{p_n}{p_{n+1}}\right)^2 < \frac{n+1}{n+2}$; $\frac{p_n^2}{n} > \frac{p_{n+1}^2}{n+1}$, $\frac{p_n^2}{n+1} < \frac{p_{n+1}^2}{n+2}$

$\rightarrow p_n/\sqrt{n}$: monoton fallend : $\geq \sqrt{2}$

$>$

$p_n/\sqrt{n+1}$: monoton wachsend : ≤ 2

$\overset{S1}{\Rightarrow} \exists p \in \mathbb{R}$, s.d. $\sqrt{2} \leq p = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\sqrt{n}} \leq 2$

Bem.: $W_n := p_n^2/_{2n+1} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{2n\,2n}{(2n-1)(2n+1)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$

J. Wallis 1616 - 1703 : $\lim_{n\to\infty} W_n = \frac{\pi}{2}$

$\frac{p_n^2}{n} = W_n \cdot \frac{2n+1}{n} \rightarrow \pi \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$

Bem.: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2n}{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2}\,2^{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\,2^{2n}$

$= \frac{2^{2n}}{p_n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{p_n}}_{\rightarrow 1/\sqrt{\pi}}$

$\Rightarrow \binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, $\frac{\binom{2n}{n}}{\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\right)} \rightarrow 1$

Def.: X: Menge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X

$1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \quad n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ heisst Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ die Abb. $f(n) = x_n$

Sei $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die Abb. $\varphi(k) := n$

φ ist strikt monoton wachsend, d.h. $\varphi(k) < \varphi(k+1)\ \forall k \in \mathbb{N}$

Dann ist $f\circ\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$ eine Teilfolge von f : $(f\circ\varphi)(k) = x_{n_k}$

Lemma 6 (X, d) : metr. Rm

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X, $x \in X$.

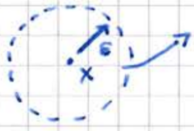
i) (x_n) konvergiert gegen $x \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (x_n) konv. gegen x.

ii) (x_n) konvergiert nicht gegen $x \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}\ d(x_{n_k}, x) \geq \varepsilon$

iii) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $n \geq N$, $d(x_n, x) < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$

Def.: Wenn diese äquivalenten Bedingungen in iii) erfüllt sind, so nennen wir x einen Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$



unendlich viele Folgenglieder in $B_\varepsilon(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$

Bew.: i) Übg.

ii) x_n konvergiert nicht gegen x

$\neg (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon))$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \wedge d(x_n, x) \geq \varepsilon)$

$\exists \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$

$N_k := \{ n \in \mathbb{N} \mid n > k,\ d(x_n, x) \geq \varepsilon \} \neq \emptyset$

Sei $\varphi(k) \in N_k$ das kleinste El't dieser Menge

$\Rightarrow \varphi(k) > k\ \forall k \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(k)}, x) \geq \varepsilon$ (Kap. 1)

$n_1 := \varphi(1)$, $n_2 := \varphi(n_1) > n_1$, $n_3 := \varphi(n_2)$ ...

$\Rightarrow d(x_{n_k}, x) \geq \varepsilon\ \forall k$

iii) "$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}$

$(k \geq k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \varepsilon)$

$k := \max\{k_0, N\}$, $n := n_k \geq k \geq N$, $d(x_n, x) < \varepsilon$

"$\Rightarrow$": Für $k \in \mathbb{N}$ sei $N_k := \{ n \in \mathbb{N} \mid n > k,\ d(x_n, x) < \frac{1}{k} \}$

$\Rightarrow N_k \neq \emptyset\ \forall k \in \mathbb{N}$, Sei $\varphi(k)$ kl. El't aus N_k:

$n_1 := \varphi(1)$, $n_2 := \varphi(n_1)$, $n_3 := \varphi(n_2)$, ...

$\Rightarrow n_{k+1} > n_k$, $n_k \geq k+1$, $n_k = \varphi(n_{k-1}) \in N_{n_{k-1}}$

$\subset N_k$, $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$ ▨

SATZ 2 (Bolzano - Weierstrass)
1781-1848 1815 - 1897

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$

$c>0$ s.d. $|x_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definiere für $n\in\mathbb{N}$: $b_n := \sup\{x_k \mid k\in\mathbb{N}, k\geq n\}$

$\Rightarrow b_{n+1} \leq b_n \ \forall n\in\mathbb{N}$ (monoton fallend), $-c \leq b_n \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\overset{S1}{\Rightarrow} (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert : $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Beh.: b ist ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Sei $\varepsilon>0$, $N\in\mathbb{N}$: Wähle $n_0\in\mathbb{N}$ s.d. $\forall n\in\mathbb{N}$: $n\geq n_0$
$\Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Definiere: $n := \max\{n_0, N\}$ und Wähle $k\geq n$ s.d. $b_n - \frac{\varepsilon}{2} < x_k \leq b_n$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |x_k - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad k\geq n\geq N \\ |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |x_k - b| \leq |x_k - b_n| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Beh. ✓ $\Rightarrow$ Lemma 6 : ■

Def.: Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist die Folge
$$b_n := \sup_{k\geq n} x_k$$
monoton fallend und beschränkt.

Ihr Grenzwert heisst Limes Superior der Folge (x_n) und wird mit
$$b := \limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$
bezeichnet.

Genauso ist die Folge
$$a_n := \inf_{k\geq n} x_k$$
monoton wachsend und beschränkt. Ihr Grenzwert heisst Limes Inferior der Folge (x_n) und wird mit
$$a := \liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$
bezeichnet.

Bem.:

1. Der Beweis von Satz 2 zeigt, dass a und b HP von (x_n) sind.
2. Es gilt $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Daher $a \leq b$
3. Jeder weitere HP x von (x_n) erfällt $a \leq x \leq b$

   Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

   $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ k \geq n,$ s.d. $|x_k - x| < \varepsilon$

   $\Rightarrow a_n - \varepsilon \leq x_k - \varepsilon < x < x_k + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon$

   $\Rightarrow a_n - \varepsilon < x < b_n + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow a_n \leq x \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow a \leq x \leq b$

   $\blacksquare$

4. $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n =: x \Rightarrow (x_n)$ konvergiert gegen x.

   | Bew.: Übg.

Bsp. 10) $x_n = (-1)^n$: $\liminf_{n\to\infty} x_n = -1$, $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$

$y_n = (-1)^{n+1}$: $\liminf_{n\to\infty} y_n = -1$, $\limsup_{n\to\infty} y_n = 1$

$x_n + y_n = 0$

| Übg. : $\limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \limsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$

Bsp. 11) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$x_n := n\alpha - [n\alpha]$, $[n\alpha] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq n\alpha\}$

$\rightarrow x_n \in [0,1)$

| Übg. : Jede Zahl $x \in [0,1]$ ist HP von (x_n)

Bsp. 12) $x_1 := 0,\ x_2 := 0,\ x_3 := 1/2,\ x_4 := 0,\ x_5 := \frac{1}{4},\ x_6 := \frac{2}{4},\ x_7 = \frac{3}{4}, \dots$

$x_{2^m+k} := k/2^m,\ k = 0,1,2,\dots,2^{m-1},\ m = 1,2,3,\dots$

$\Rightarrow$ Jede Zahl $x \in [0,1]$ ist ein HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Übg.: Jede Folge in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge

Das Cauchy - Kriterium (X, d) : metr. Rm

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X gegeben. Diese Folge heisst Cauchy - Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Lemma 7

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy - Folge.

Bew.: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konv. Folge in (X, d) und $x := \lim_{n \to \infty} x_n$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:
$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_0$ gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x, x_m)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Lemma 8

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy - Folge in (X, d). Sei $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge die gegen $x \in X$ konvergiert.
$\Rightarrow (x_n)$ konv. gegen x

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben: a) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N}$: falls $n, m \geq n_0$ $\Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

b) $\exists k \in \mathbb{N}$ s.d. $n_k \geq n_0$ & $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$: $d(x_n, x) \leq \underbrace{\underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{< \varepsilon/2}}_{< \varepsilon}$

$\blacksquare$

Lemma 9

Jede Cauchy - Folge reeller Zahlen ist beschränkt.

Bew.: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n,m \in \mathbb{N}$ gilt: $n,m \geq n_0 \Rightarrow \underset{|x_n - x_m|}{\underset{\parallel}{d(x_n,x_m)}} < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \\ &\leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| \\ &\leq 1 + |x_{n_0}| \end{aligned}$$

$c := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}|+1\}$

$\Rightarrow |x_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ▨

SATZ 3

Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert.

Beweis: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ L9: (x_n) ist beschränkt

$\Rightarrow$ S2: (x_n) hat eine konvergente Teilfolge

$\Rightarrow$ L8: (x_n) konvergiert ▨

Def.: Ein metrischer Raum heisst vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in (X,d) konvergiert.

Bspe)
1. $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$: vollständig
2. $X = (0,1)$, d wie oben : unvollständig
3. $X = \mathbb{Q}$, d wie oben : unvollständig

Bem.: Vollständigkeitsaxiom (Dedekind-Schnitte)

$\Downarrow$ K1/S3 $\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$ Übg.

$\exists$ sup/inf $\overset{K1/S6}{\Longrightarrow}$ Intervallschachtelungsprinzip

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$ Übg.

Konv. beschr. mon. Folgen

$\Downarrow$ K4/S2

Bolzano-Weierstrass $\overset{K4/S3}{\Longrightarrow}$ Jede CF reeller Zahlen konv.

Folgen in $\mathbb{R}^n$ (mit eukl. Norm: $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$)

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k)) \in \mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow$ Folge in $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$

Lemma 10

Sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Äquivalent sind:

i) $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ konv. gegen ξ

ii) $\xi_i = \lim\limits_{k\to\infty} x_i(k)$ für $i = 1, \dots, n$

Bew.: i) $\Rightarrow$ ii)

$$|\xi_i - x_i(k)| \leq \|\xi - x_k\|$$

ii) $\Rightarrow$ i)

$$\xi_i = \lim_{k\to\infty} x_i(k) = \lim_{k\to\infty} |\xi_i - x_i(k)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\xi_i - x_i(k)|^2}_{\|\xi - x(k)\|} = 0 \quad \overset{L3}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\|\xi - x(k)\|}_{= d(\xi, x(k))} = 0$$

$$\Rightarrow \xi = \lim_{k\to\infty} x(k) \quad \blacksquare$$

SATZ 4

i) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert

ii) Jede beschr. Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konv. Teilfolge

Beweis: i) $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$

$(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ Chauchy $\Rightarrow$ $(x_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy, $i = 1, \dots, n$

$|x_i(k) - x_i(l)| \leq \|x(k) - x(l)\|$ für $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ Satz 3 : $(x_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ konv. für $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ Lemma 10 : $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ konv.

✓

$\longrightarrow$

ii) zur Erinnerung: Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konv. TF.

Bew. via Ind. über n:

IV: $n = 1$: Satz 2 (Bolzano-Weierstrass)

IA: $n \geq 2$: ii) gilt im $\mathbb{R}^{n-1}$

IS: Sei $(x(k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$, d.h. $\exists\, c > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$: $\|x(k)\| = (x_1(k)^2 + \dots + x_n(k)^2)^{1/2} \leq c$

Definiere $\tilde{x}(k) := (x_1(k), \dots, x_{n-1}(k))$ für $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \|\tilde{x}(k)\|_{\mathbb{R}^{n-1}} \leq c \quad \forall k \in \mathbb{N}$, d.h.: $(\tilde{x}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^{n-1}$

$\Rightarrow \exists$ TF $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$, s.d. die Folge $(\tilde{x}(k_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Es gilt: $|x_n(k_\nu)|_{\mathbb{R}} \leq c \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$, d.h. $(x_n(k_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist beschr. Folge in $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Satz 2: $\exists$ TF $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots$ s.d. $(x_n(k_{\nu_m}))_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

$\Rightarrow$ L6: $(\tilde{x}(k_{\nu_m}))_{m \in \mathbb{N}}$ und $(x_n(k_{\nu_m}))_{m \in \mathbb{N}}$ konvergieren

$\Rightarrow$ L10: $(x_i(k_{\nu_m}))_{m \in \mathbb{N}}$ konv. $\forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ L10: $(x(k_{\nu_m}))_{m \in \mathbb{N}}$ konv. im $\mathbb{R}^n$. ■

Def.: Sei X eine Menge. Eine Relation $\sim\, \subset X^2$ heisst Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, d.h. $\forall x, y, z \in X$:

- $x \sim x$
- $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$
- $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Für $x \in X$ heisst die Menge $[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$ Äquivalenzklasse von x.

Bem.: $\cdot\ \forall x, y \in X$: $[x] \cap [y] = \emptyset \ \underline{\vee}\ [x] = [y]$

$\cdot\ \forall x \in X$: $x \in [x]$

→

Die Quotientenmenge der Äquivalenzrelation $\sim$ auf X ist die Menge:

$$X/\sim \; := \{ [x] \mid x \in X \} \subset 2^X$$

Bsp. 1) $p \in \mathbb{N}$

Für $x, y \in \mathbb{Z}$ definiere $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y$ ist durch p teilbar

$\Longleftrightarrow x - y \in p\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}/_\sim = \{ x + p\mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z} \}$$

$$x + p\mathbb{Z} = \{ x + py \mid y \in \mathbb{Z} \}$$

p: Primzahl $\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist ein Körper!

Bsp. 2) $\mathbb{Q}$ mit Metrix $d(x,y) := |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{Q}$

$$X := \{ \text{Menge der Cauchy-Folgen in } (\mathbb{Q}, d) \}$$
$$= \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine CF} \}$$

hierfür benutztes ε ist per def. zwar reell, könnte aber genauso gut rational sein.

Nun: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} :\Longleftrightarrow (x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

Der Quotientenraum $X/\sim$ ist ein vollständiger, geordneter Körper.

$$x = [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in X/\sim$$
$$y = [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in X/\sim$$
$$x + y := [(x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$
$$xy := [(x_n)_{n \in \mathbb{N}} * (y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$
$$0 := [(0)_{n \in \mathbb{N}}] = \{ \text{Nullfolgen} \}$$
$$1 := [(1)_{n \in \mathbb{N}}] = \{ \text{"Einerfolgen"} \}$$
$$-x := [(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$
$$x \neq 0 \Longleftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist keine NF}$$
$$\Longleftrightarrow \exists \delta > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |x_n| \geq \delta$$

$$\frac{1}{x} := \left[\left(\begin{cases} 0, & \text{falls } n < n_0 \\ 1/x_n & \text{falls } n_0 \geq n \end{cases}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right]$$

$$P := \{ x = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mid \exists \delta > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq \delta \}$$

$\rightarrow$ alle Axiome von $\mathbb{R}$ können durch diese Konstruktionen erfüllt werden.

$\rightarrow$ Alternative Konstruktion von $\mathbb{R}$

Def.: Eine Nullfolge (in $\mathbb{R}$) ist eine Folge (reeller) Zahlen, die gegen Null konvergiert, d.h.: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Was ist mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gemeint?

Antwort: Wir bilden die endlichen Summen, d.h. Partialsummen,

$$S_n := a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \; , \; n \in \mathbb{N}$$

Def.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir sagen, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $S_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert.

In diesem Fall bezeichnen wir deren Grenzwert mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \; .$$

Wir sagen die Reihe divergiert, wenn sie nicht konvergiert.

Bem.: Das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat zwei Bedeutungen:

i) Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

ii) Deren Grenzwert, falls dieser existiert

Bem.: Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine NF.

Bew.: $a_n = S_n - S_{n-1}$, $S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0 \quad ▨$$

Bem.: Rechenregeln: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. Reihen in $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ konvergiere und $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Bem.: Sei $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq S_{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\iff$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

All dies gelte auch für $\mathbb{C}$!

Bsp. 13) Geometrische Reihe

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann konvergiert die GR:

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$; $\quad S_n := \sum_{n=0}^{k} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow{\text{Bsp. 2)}} \frac{1}{1-z}$

Bsp. 14) Harmonische Reihe

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Bew.: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$$

$$+ \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)$$

$$\geq 1 + \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} m \longrightarrow \infty$$

(S_n) divergiert. ▨

Bsp. 15) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} = 1$

$$\rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

Bsp. 16) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ divergiert $\rightarrow S_n = \begin{cases} -1, & n = 2m+1 \\ 0, & n = 2m \end{cases}$

Bsp. 17) $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, konvergiert für $s > 1$, divergiert für $0 < s \leq 1$

Für $0 < s \leq 1$ gilt: $n^{-s} \geq n^{-1} \Rightarrow$ Divergenz

Für $s > 1$: $S_{2^m-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right)$

$$+ \left(\frac{1}{4^s} + \ldots + \frac{1}{7^s}\right)$$

$$+ \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{(m-1)s}} + \ldots + \frac{1}{(2^m-1)^s}\right)$$

$$\leq 1 + 2\frac{1}{2^s} + 4\frac{1}{4^s} + \ldots + 2^{m-1}\frac{1}{2^{(m-1)s}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (2^k)^{1-s} = \sum_{k=0}^{m-1} (2^{1-s})^k \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

$$= \frac{1-(2^{1-s})^m}{1-(2^{1-s})} \rightarrow \frac{1}{1-2^{s-1}}$$

$\rightarrow$ Riemannsche ζ-Funktion! $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, $s \in \mathbb{Q}$, $s > 1$

Es gilt: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$

Bsp. 18) $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ mit $x_1, x_2, x_3, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$

Die Reihe $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k}$ konvergiert. $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$

für $x \in [0,1]$ $\begin{cases} \text{für } b = 10: \text{Dezimalbruch} \\ \text{für } b = 2: \text{Binärdarstellung} \end{cases}$

Konvergenzbeweis: $S_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k} \geq 0$

$$S_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{b-1}{b^k} = \frac{b-1}{b} \cdot \frac{1-(1/b)^n}{1-1/b} = 1-(1/b)^n \le 1$$

Jede reelle Zahl $x \in [0,1]$ lässt sich so darstellen:

$0 \le x < 1$, $\quad x_1 := [bx] = \max\{b \in \mathbb{Z} \mid k \le bx\}$ Gauss-Klammer

$x_n := \left[b^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \cdot b^{-k}\right)\right]$ ➡ Rekursionsformel

Übg.: i) $x_n \in \{0,1,\dots,b-1\}$

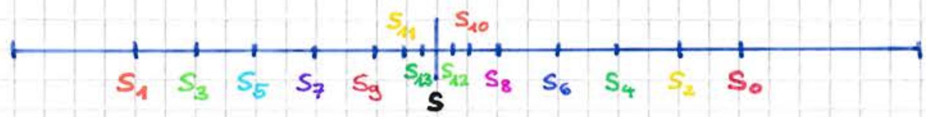
ii) $\left|x - \sum_{k=1}^{n} x_k / b^k\right| < b^{-n}$, $\quad x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k b^{-k}$

SATZ 5 (Leibniz-Kriterium)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge, d.h.: $0 \le a_n \le a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. Ausserdem gilt für $S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, $s = \lim_{n\to\infty} S_n$ die Ungleichung $|s - S_n| \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: $S_{n+2} - S_n = (-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) \begin{cases} \ge 0, & n \text{ ungerade} \\ \le 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$

$\to (S_0 \ge S_2 \ge S_4 \ge \dots) \ge (S_1 \le S_3 \le \dots)$

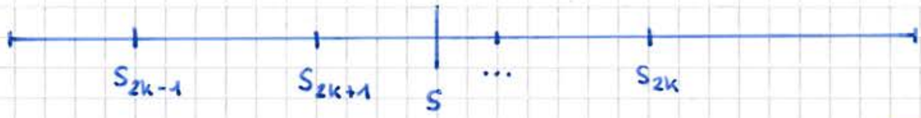


$I_k := [S_{2k-1}, S_k]$, $|I_k| = a_{2k}$

$\Rightarrow$ Kap. 1/S6: $\exists!\, s \in \mathbb{R}: \forall k \in \mathbb{N}: s \in I_k$

$|s - S_{2k-1}| \le a_{2k} \to 0$

$|s - S_{2k}| \le |S_{2k} - S_{2k+1}| = a_{2k+1} \to 0$



Bsp. 19) alternierende HR

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} =: s \overset{!}{=} \log(2)$$

$\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ ... Beweis folgt ein anderes Mal!

SATZ 6 (Cauchy - Kriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. genau dann wenn: $\left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n,m \in \mathbb{N} : \left(n > m \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon\right)\right)$.

Beweis: $S_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \text{Die Folge } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konv.}$$

$$\overset{S4}{\Longleftrightarrow} (S_n) \text{ ist Cauchy}$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n,m \in \mathbb{N} : n > m \geq n_0 \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$$

▨

SATZ 7 (Majorantenkriterium)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: Reihe in $\mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ konv. Reihe in $\mathbb{R}$, $\gamma_n \geq 0$ mit $0 \leq |a_n| \leq \gamma_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0 \overset{S6}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n,m \in \mathbb{N} : n > m \geq n_0 \Rightarrow$

$\sum_{k=m+1}^{n} \gamma_k < \varepsilon \Rightarrow \forall n,m \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq n_0$ gilt:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \gamma_k < \varepsilon$$

$\overset{S6}{\Rightarrow}$ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. ▨

Def.: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{C}$ heisst absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Dabei gilt: abs. K. $\Rightarrow$ K.

K. $\not\Rightarrow$ abs. K.

Bsp. 20) $a_n = \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \dfrac{2}{n^2}$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konvergiert (Bsp. 17) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert.

Bsp. 21) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \dfrac{1}{n+1} \geq \underbrace{\dfrac{1}{2n}}_{HR} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ divergiert.

SATZ 8 (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{C}$, s.d. $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und der Grenzwert $q := \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existiert. $q < 1 \Rightarrow$ abs. Konvergenz

$q > 1 \Rightarrow$ Divergenz

Beweis:

$q > 1$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \frac{1}{2}(q+1)$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : |a_{n+1}| > \frac{1}{2}(q+1)|a_n| \geq |a_n|$

$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ divergiert ✓

$q < 1$: $\alpha := \frac{q+1}{2} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \alpha \Rightarrow$ Für $n \geq n_0$ gilt:

$|a_{n+1}| \leq \alpha |a_n|$

$\overset{\text{Voll. Ind.}}{\Rightarrow} \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq \alpha^{n-n_0} |a_{n_0}|$

Sei $c := \max \{ \alpha^{-k} |a_k| \mid k = 1, \ldots, n_0 \} \Rightarrow |a_n| \leq c\,\alpha^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\overset{S7}{\Rightarrow}$ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert ▨

Bsp. 22) $\binom{s}{n} := \frac{s(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$, $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

Beachte: $\binom{s}{n} = 0$ für $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$B_s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$, wenn: $s \notin \mathbb{N}$ und $z \neq 0$: $a_n = \binom{s}{n} z^n \neq 0$

Nun: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{s-n}{n+1} z\right| = \left|\frac{\frac{s}{n} - 1}{1+\frac{1}{n}} \cdot z\right| \to |z|$

$\Rightarrow$ $|z| < 1$ konvergiert $B_s(z)$

$\Rightarrow$ $|z| > 1$ divergiert $B_s(z)$

<u>Bem.:</u> $s \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow B_s(z) = (1+z)^s$

Bsp. 23) $a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \text{ gerade} \\ 3^{-n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$, betrachte: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

falls n ungerade: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2^{-n-1} \cdot 3^n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$

$\hookrightarrow$ obwohl wir wissen: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Das Quotientenkriterium ist hier aber nutzlos!

Bsp. 17 - Redux) $a_n = n^{-s} \to \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \to 1$

$\hookrightarrow$ S8 sagt hier wieder nichts!

<u>SATZ 9</u> (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ und $L := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \in [0, \infty]$

$L < 1 \Rightarrow$ abs. Konvergenz und $L > 1 \Rightarrow$ Divergenz

<u>Beweis:</u> $L > 1 \Rightarrow |a_n| > 1$ für unendl. viele Folgenglieder

$\Rightarrow$ Divergenz ✓

$L < 1 \Rightarrow$ Wähle $\alpha \in \mathbb{R}$ s.d. $L < \alpha < 1$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow |a_n|^{1/n} < \alpha$

$\Rightarrow |a_n| < \alpha^{1/n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0 \overset{S7}{\Rightarrow}$ Konvergenz ▨

Potenzreihen

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, wird interpretiert als Fkt.: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

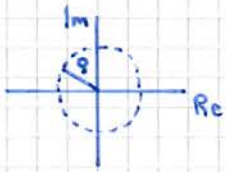
$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Eine solche Reihe heisst Potenzreihe.

Wurzelkriterium: $L := \limsup_{n \to \infty} |a_n z^n|^{1/n} = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right) |z|$

Die Reihe konvergiert, wenn $L < 1$

Def.: Die Zahl $\rho := \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \in [0, \infty]$ heisst Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.



SATZ 10

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert für $|z| < \rho$ und divergiert für $|z| > \rho$

Beweis: S9 mit $L = |z| / \rho$

Bsp. 24) $a_n = 1$, $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \to \rho = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$

Diese Reihe divergiert für $|z| = 1$

Bsp. 25) $a_n = n^{-s}$, $s \in \mathbb{Q}$, $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot n^{-s}$

$\to \rho = \limsup_{n\to\infty} (n^{-s})^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{(n^{1/n})^s}\right) = 1$

$\to$ Konvergenz für $|z| < 1$

$\to$ $s > 1$: $f_2(z)$ konvergiert für $|z| = 1$

$\to$ $s = 1$: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot n^{-1}$ divergiert für $z = 1$

konvergiert für $z = -1$

Bsp. 26) $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

Quotientenkriterium: $b_n := \dfrac{z^n}{n!}$ $\to$

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{z}{n+1}\right| \to 0$$

↳ Diese Reihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$

Konvergenzradius: $\rho = \left(\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n}$

$= \infty$, wie erwartet!

Bezeichnungen: $e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$= 2{,}718281628459045\ldots$

SATZ 11

$\forall z, w \in \mathbb{C}$: i) $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

ii) $\exp(0) = 1$

iii) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$

Beweis folgt später...

Korollar 1: Für jedes $\theta \in \mathbb{R}$: $|\exp(i\theta)| = 1$

Bew.: $|\exp(i\theta)|^2 = \exp(i\theta) \cdot \overline{\exp(i\theta)}$

$= \exp(i\theta) \cdot \exp\overline{(i\theta)}$

$= \exp(-i\theta) \cdot \exp(i\theta) = \exp(0) = 1$ ▨

Def.: Die Funktionen

$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sind definiert durch:

$\cos(\theta) := \mathrm{Re}(\exp(i\theta)) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots$

$\sin(\theta) := \mathrm{Im}(\exp(i\theta)) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$

Dann gilt die Eulersche Formel: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ nach Definition.

<u>Korollar 2</u> $\forall\, \theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

i) $\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')$

$\sin(\theta + \theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')$

ii) $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$

iii) $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

iv) $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

<u>Bew.:</u> (Kor. 1)

i) $\iff e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$

ii) $\iff e^{i0} = 1$

iii) $\iff e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$

iv) $\iff |e^{i\theta}|^2 = 1$ ▨

<u>Bem.:</u> $\cos(\theta) := \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ und $\sin(\theta) := \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ für $\theta \in \mathbb{C}$

<u>Def.:</u> Der hyperbolische Cosinus und der hyperbolische Sinus sind die Funktionen $\cosh, \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch

$$\cosh(z) := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

$$\sinh(z) := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

definiert sind.

<u>Übg.:</u> $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$:

1. $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$

   $\sinh(z+w) = \cosh(z)\sinh(w) + \cosh(w)\sinh(z)$

2. $\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$
3. $\cosh(-z) = \cosh(z)$, $\sinh(-z) = -\sinh(z)$
4. $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

mit $\cos(\theta) = \cosh(i\theta)$

$i\sin(\theta) = \sinh(i\theta)$

Um SATZ 11 zu beweisen, benötigen wir zuerst aber noch den SATZ 12:

$\rightarrow$

SATZ 12

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen und $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\right)$

Jetzt: S12 $\Rightarrow$ S11 (i) (Beweis v. S11)

$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$, $\exp(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w^\nu/\nu!$, Diese Reihen konvergieren absolut: $a_k = \frac{z^k}{k!}$, $b_\nu = \frac{w^\nu}{\nu!}$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w)$$

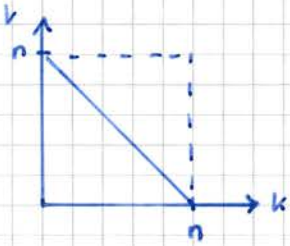
▨

Beweis von Satz 12:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|, \quad B := \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \rightarrow \sum_{m=0}^{n} c_m = \sum_{m=0}^{n} \left| \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} \right|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} |a_k| |b_{m-k}| \quad (*)$$

$$(*) = \sum_{\substack{k,\nu \\ k+\nu \leq n}} |a_k| |b_\nu| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} |a_k| |b_\nu| = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} |b_\nu|\right) \leq A \cdot B$$



$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$

Sei $\alpha_m := \left(\sum_{k=0}^{m} |a_k|\right)\left(\sum_{\nu=0}^{m} |b_\nu|\right) \xrightarrow{m \to \infty} A \cdot B$

$$\left| \sum_{m=0}^{n} c_m - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\right) \right| = \left| \sum_{k+\nu \leq n} a_k a_\nu - \sum_{\substack{k \leq n \\ \nu \leq n}} a_k b_\nu \right| = \left| \sum_{\substack{k \leq n, \nu \leq n \\ k+\nu > n}} a_k a_\nu \right|$$

$$\leq \sum_{\substack{k \leq n, \nu \leq n \\ k+\nu \leq n}} |a_k| |b_\nu| = \sum_{\substack{k \leq n \\ \nu \leq n}} |a_k b_\nu| - \sum_{\substack{k \leq n/2 \\ \nu \leq n/2}} |a_k b_\nu| \mathrel{\hat{=}} \alpha_n - \alpha_{[n/2]} = 0$$

▨

Def.: Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir schreiben
$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, wenn gilt: $\forall c>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow s_n > c$

Bem.: Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, d.h. $s_n \leq s_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$
Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \Leftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.

Nach Satz 1 und der obigen Bemerkung besitzt jede monotone Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ einen Grenzwert:
$s := \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

Sei $s_n \in (0,\infty)$ für $n\in\mathbb{N}$, s.d. $\lim_{n\to\infty} s_n \in [0,\infty]$ existiert.
Dann gilt:
$\lim_{n\to\infty} 1/s_n = 1/\lim_{n\to\infty} s_n$

Bsp.) $a_n \in \mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$

$s_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, Definiere: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| := \lim_{n\to\infty} s_n \in [0,\infty]$

Dann gilt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Bem.: $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sup\left\{ \sum_{k=0}^{n} |a_k| \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\} =$$
$$= \sup\left\{ \sum_{j\in J} |a_j| \,\middle|\, J\subset\mathbb{N}_0 \text{ endlich}\right\}$$

Frage: Sei J eine endliche Menge und $J\to\mathbb{R}: j\mapsto a_j$ eine Abbildung. Was ist gemeint mit $\sum_{j\in J} a_j$?

Antwort: Sei $n := \# J$. Wähle eine bij. Abb. $\varphi: \{1,\dots,n\}\to J$
Definiere $\sum_{j\in J} a_j := a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + \dots + a_{\varphi(n)}$
→ Die rechte Seite dieser Gleichung ist unabhängig von der Wahl von φ

SATZ 13 (Umordnungssatz)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Äquivalent sind:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ (Die Reihe konvergiert absolut)

ii) $\exists s \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall \mathcal{J} \subset \mathbb{N}: (\mathcal{J} \text{ endl.}) \wedge (\{0, \dots, n_0\} \subset \mathcal{J})$
$\Rightarrow |s - \sum_{i \in \mathcal{J}} a_j| < \varepsilon$

iii) Für jede bij. Abb. $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ (und der Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{(n)}$ ist unabh. von der Wahl von φ)

Beweis:

i) $\Rightarrow$ ii): $c := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{C}$ existiert gemäss S7.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\sum_{n=1}^{n_0} |a_n| > c - \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$: $\sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Für jede endl. Teilmenge $\mathcal{J} \subset \mathbb{N}$ mit $\{1, \dots, n_0\} \subset \mathcal{J}$:

$$|s - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j| = \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j \right| \leq \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j| - \sum_{j \in \mathcal{J}} |a_j| \right)$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j| - \sum_{j=1}^{n_0} |a_j| \right) \leq \varepsilon \quad \checkmark$$

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei s wie in ii) und sei $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bel. bij. Abb.
Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ wie in ii).
$n_1 := \max\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \dots, \varphi^{-1}(n_0)\}$. Sei $n \geq n_1$
$\Rightarrow \{\varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(n_0)\} \subset \{1, \dots, n\}$
$\Rightarrow \{1, \dots, n_0\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\} =: \mathcal{J}$
$\overset{ii)}{\Rightarrow} |s - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j| < \varepsilon \iff |s - \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)}|$, d.h.: $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} = s$

$\checkmark$

$iii) \Rightarrow i)$: $a_n \in \mathbb{R} \;\forall n \in \mathbb{N}$

Annahme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ konv. $\forall$ bij. Abb. $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ (wollen wir zum Widerspruch führen...)

$I^+ := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 0\}$ und $I^- := \{m \in \mathbb{N} \mid a_m < 0\}$

$I^+ = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ und $I^- = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$

Annahme $\Rightarrow$ I^+, I^- sind unendl. Teilmengen von $\mathbb{N}$

O.B.d.A.:

$\sum_{n \in I^+} |a_n| = \infty$, $\sup_{m \in I^-} |a_m| \leq C < \infty$

$\Rightarrow \exists\, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots \in \mathbb{N}$, s.d.: $\sum_{i=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_{n_i} \geq C+1$

$\mathbb{N}$ umsortieren:

$n_1, \dots, n_{\nu_1}, m_1, n_{\nu_1+1}, \dots, n_{\nu_2}, m_2, \dots$

$\;\,\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$

$\varphi(1) \quad \dots \quad \varphi(\nu_1+1) \quad \dots$

$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{\nu_n+n} a_{\varphi(i)} \geq n$ $\qquad \perp \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$

$\to$ s. Manuskript auf der Vorlesungs-Homepage!

$\Rightarrow$ ▨

Def.: Sei I eine Menge. Sei $I \to \mathbb{C} : i \mapsto a_i$ eine Abb.
$\mathcal{E}(I) := \{ J \subset I \mid J \text{ endlich} \}$. Für $J \in \mathcal{E}(I)$ sei $s_J := \sum_{j \in J} a_j$

Die Abbildung $(a_i)_{i \in I}$ heisst summierbare Familie, wenn:
$\exists s \in \mathbb{C} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists J_0 \in \mathcal{E}(I) \ \forall J \in \mathcal{E}(I): \ J_0 \subset J \Rightarrow |s - s_J| < \varepsilon$

SATZ 14

$(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$: Familie komplexer Zahlen. Äquivalent sind:

i) Die Menge $\{ \sum_{j \in J} |a_j| \mid J \in \mathcal{E}(I) \}$ ist beschränkt

ii) $(a_i)_{i \in I}$ ist eine summierbare Familie

Beweis: Königsberger S. 69

SATZ 15 (Grosser Umordnungssatz)

Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine summierbare Familie. Sei K eine Menge.
Für $k \in K$ sei $I_k \subset I$ s.d. $I = \bigcup_{k \in K} I_k$ und $I_k \cap I_{k'} = \emptyset \ \forall k, k' \in K$ mit $k \neq k'$
Dann folgt:

i) $(a_i)_{i \in I}$ ist eine summierbare Familie $\forall k \in K$

ii) $s_k := \sum_{i \in I_k} a_i, \ k \in K$. Dann ist $(s_k)_{k \in K}$ eine summierbare Familie.

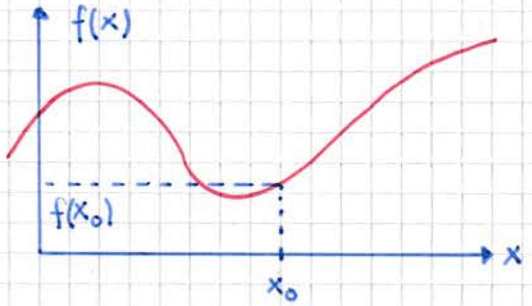
iii) $\sum_{k \in K} s_k = \sum_{i \in I} a_i$ **Beweis:** wird nicht geführt!

Bem.: Sei I eine Menge und $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ eine summ. Fam.

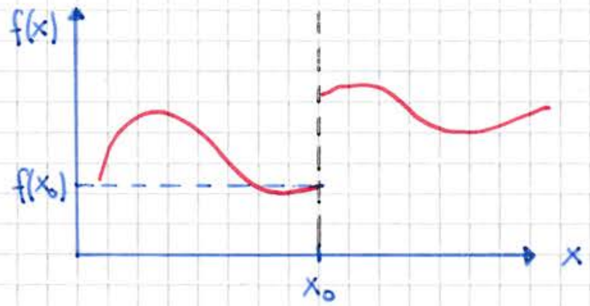
$\Rightarrow \{ i \in I \mid a_i \neq 0 \}$ ist abzählbar oder abzählbar unendlich.

Bew.: $|\{ i \in I \mid |a_i| \geq \frac{1}{n} \}| < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

Kapitel 5: Stetige Abbildungen



stetige Abbildung



unstetig an der Stelle x_0

Def.: $(X, d_X), (Y, d_Y)$: metr. Rme

Eine Abbildung $f: X \to Y$ heisst stetig an der Stelle $x_0 \in X$ wenn gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X: \ d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

f heisst stetig, wenn $\forall x_0 \in X$: f ist stetig bei x_0
f heisst unstetig, wenn f nicht stetig ist, d.h.
$\exists x_0 \in X$ s.d. f: unstetig bei x_0

Bsp. 1) $f = \text{const.}, \quad f(x) = y_0 \ \forall x \in X$ (δ beliebig)

Bsp. 2) $X = Y$ und $d_X = d_Y$, $f = id$, d.h. $f(x) = x \ \forall x \in X$
(Wähle $\delta = \varepsilon$)

Bsp. 3) $X = \mathbb{R}^n$, d_X: eukl. Norm, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$
$d_X(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|_2$
$Y = \mathbb{R}$, $d_Y(s, t) = |s - t|$
$f(x) := x_i$, $i = 1, \dots, n$ stetig
$d_Y(f(x), f(y)) = |x_i - y_i| \leq \|x - y\|_2 = d_X(x, y)$
(Wähle $\varepsilon = \delta$)

Def.: $f: X \to Y$ heisst Lipschitz-stetig, wenn: $\exists L > 0 \ \forall x, x' \in X$:
$d_Y(f(x), f(x')) \leq L \, d_X(x, x')$

Bem.: Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist stetig.
(Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$)

Bsp. 4) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2) := \max\{x_1, x_2\}$

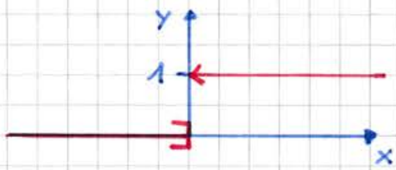
$$\underbrace{\left| \max\{x_1, x_2\} - \max\{y_1, y_2\} \right|}_{|f(x) - f(y)|} \overset{\text{Übg.}}{\leq} \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq \|x - y\|$$

Bsp. 5) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$|f(x) - f(y)| = \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

Bsp. 6) $X = Y = \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



unstetig bei $x_0 = 0$

Bsp. 7) $X = Y = \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Lemma 1 $(X, d_x), (Y, d_y), (Z, d_z)$: metr. Rme

$f: X \to Y$, stetig in $x_0 \in X$

$g: Y \to Z$, stetig in $y_0 := f(x_0) \in Y$

$\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ ist stetig in x_0

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\rho > 0$ s.d. $\forall y \in Y: d_y(y, y_0) < \rho$
$\Rightarrow d_z(g(y), g(y_0)) < \varepsilon$. Wähle $\delta > 0$ s.d. $\forall x \in X$:
$d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \rho$
$\Rightarrow \forall x \in X$ mit $d_x(x, x_0) < \delta : d_z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$ ▨

<u>Lemma 2</u> $(X, d_X), (Y, d_Y)$: metr. Rme.

$f: X \to Y$ Abb., $x_0 \in X$. Äquivalent sind:

i) f ist stetig in x_0

ii) Für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

<u>Bew.:</u> i) $\Rightarrow$ ii) : Sei $\varepsilon > 0$

Wähle $\delta > 0$ s.d. $\forall x \in X: d_X(x, x_0) < \delta$
$\Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0) < \varepsilon$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow d_X(x, x_0) < \delta$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$: $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$

ii) $\Rightarrow$ i) indirekter Beweis

Annahme: f nicht stetig in x_0

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in X$ s.d. $d_X(x, x_0) < \delta$, $d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$

Wähle $\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X s.d.

$d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$, $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $f(x_n)$ konvergiert gegen $f(x_0)$ ∎

<u>Lemma 3</u> (X, d) metr. Rm, $x_0 \in X$

$f: X \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$

$f_i: X \to \mathbb{R}$, $f = (f_1, \dots, f_n)$

Dann gilt:

f ist stetig an der Stelle x_0 $\Leftrightarrow$ f_i ist stetig in x_0 $\forall i$, $i = 1, \dots, n$.

<u>Bew.:</u> $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$

f stetig an der Stelle $x_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$

$\overset{K4/L10}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} f_i(x_n) = f_i(x_0)$ für $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f_i$ stetig in x_0 (per L2) $\blacksquare$

Bsp. 8) folgende Abbildungen sind stetig:

A) $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : (z, \omega) \mapsto z + \omega$

$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : (z, \omega) \mapsto z\omega$

$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} : (z, \omega) \mapsto \frac{z}{\omega}$

B) $\mathbb{C} \to \mathbb{R} : z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

$\mathbb{C} \to \mathbb{R} : z \mapsto \mathrm{Im}(z)$

C) $\mathbb{C} \to \mathbb{R} : z \mapsto |z|$

$\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \overline{z}$

Bew. mit Lemma 2: (z_n, ω_n) Folge in $\mathbb{C}^2$

$(z_n, \omega_n) \to (z, \omega)$

$\Rightarrow z_n \to z$ & $\omega_n \to \omega$ (K4, L10)

$\Rightarrow z_n + \omega_n \to z + \omega$, $z_n \cdot \omega_n \to z \cdot \omega$ (K4, L2)

$\frac{z_n}{\omega_n} \to \frac{z}{\omega}$, falls $\omega \neq 0$ usw. $(\blacksquare)$

<u>Lemma 4</u> (X, d) metr. Rm

$f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

i) $f+g : X \to \mathbb{R}$ und $fg : X \to \mathbb{R}$ sind stetig

ii) Falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$ ist $f/g : X \to \mathbb{R}$ stetig

iii) Die Funktionen $|f| : X \to \mathbb{R}$, $\max\{f, g\} : X \to \mathbb{R}$ und $\min\{f, g\} : X \to \mathbb{R}$ sind stetig

<u>Bew.:</u> i, ii, iii) $X \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto \dots$

stetig nach L3 — stetig nach Bsp 8 — stetig nach L1

$\Rightarrow f+g$, fg, f/g sind stetig

$|f|$: Bsp. 4)

$\max\{f, g\}$: Bsp. 4)

$\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$ $\blacksquare$

<u>Korollar</u> Der Raum $C(X) := \{f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$

Bsp. 9) Polynome $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ sind stetig. $a_k \in \mathbb{C}$

Bew.: $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z$ stetig nach Bsp. 2

$\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto a_i$ stetig nach Bsp. 1

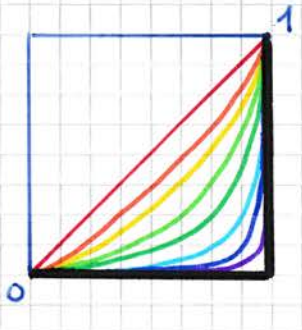
$\Rightarrow$ L4: $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^k$ stetig $\forall k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ L4: $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto a_k z^k$ stetig $\forall k = 0, 1, \ldots, n$

$\Rightarrow$ L4: $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ stetig ▨

Bsp. 10) $p \in \mathbb{N}$. Definiere die Funktion $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ durch $f(x) := x^{1/p}$. f ist stetig nach K5/L2 & K4/L3

Bsp. 11) $f_n: [0,1] \to [0,1] : f_n(x) := x^n$



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\underline{=: f(x)}$$

<u>Def.:</u> $(X, d_X), (Y, d_Y)$: metr. Rme

$f_n: X \to Y$ Abb. für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$f: X \to Y$ Abb.

i) f_n konvergiert punktweise gegen f, wenn $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in X$, d.h.

$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

ii) f_n konv. gleichmässig gegen f wenn

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in X : n \geq n_0 \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

SATZ 1

oder auch nur in x_0

$f_n : X \to Y$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$. f_n konv. glm. gegen $f : X \to Y$.

$\Rightarrow f$ ist stetig. (in x_0)

Beweis: Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in X : n \geq n_0 \Rightarrow$

$d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$

Sei $n = n_0$. f_n stetig in x_0.

Wähle $\delta > 0$ s.d. $\forall x \in X : \; d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow$ Für jedes $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta : d_Y(f(x), f(x_0))$

$$\leq \underbrace{d_Y(f(x), f_n(x))}_{\varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f_n(x), f_n(x_0))}_{\varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f_n(x_0), f(x_0))}_{\varepsilon/3}$$

$\Rightarrow \; < \varepsilon$ ▨

Anwendung: Potenzreihen

$(*) \; f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, konv. abs. für $|z| < \rho$, ρ: Konv.-Radius

↳ ergibt Kreisscheibe in $\mathbb{C}$: $B_\rho := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho \}$

SATZ 2

Die durch $(*)$ definierte Funktion $f : B_\rho \to \mathbb{C}$ ist stetig

Beweis: Definiere $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

Beh.: Sei $0 < r < \rho$.

Dann konvergiert die Folge $f_n|_{B_r} : B_r \to \mathbb{C}$

gleichmässig gegen $f|_{B_r}$

Wenn dies gezeigt: S1 $\Rightarrow$ f ist stetig auf B_r

$\Rightarrow$ f ist stetig auf B_ϱ

Bew.: Wähle $\alpha \in \mathbb{R}$, s.d. $r/\varrho < \alpha < 1$ ist.

Dann gilt: $r \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \alpha$. Wähle $N \in \mathbb{N}$

s.d. $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow r|a_n|^{1/n} < \alpha$

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow r^n |a_n| < \alpha^n$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $n_0 \geq N$ und

$$\frac{\alpha^{n_0+1}}{1-\alpha} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0: \left| f(z) - f_n(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right|$$

$$= \left| \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k z^k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k z^k \right|$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |a_k||z|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \leq \frac{\alpha^{n_0+1}}{1-\alpha} < \varepsilon \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

Bsp. 1) $\exp(z) = e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\varrho = \infty$

$\Rightarrow$ S2: $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig

Bsp. 2)
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$\rightarrow$ cos, sin, sinh, cosh sind stetig

Bsp. 3) $\tan := \frac{\sin}{\cos}$, $\mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$, $A := \{ z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) = 0 \}$

$\rightarrow$ ist stetig

$\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$, $\mathbb{C} \setminus B \to \mathbb{C}$, $B := \{ z \in \mathbb{C} \mid \cosh(z) = 0 \}$

$\rightarrow$ ist auch stetig!

Def.: (X, d_X): metr. Rm

Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heisst beschränkt, wenn ein $c > 0$ existiert, s.d. $|f(x)| \leq c \ \forall x \in X$. Die Supremumsnorm einer beschränkten Fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ ist die Zahl $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)| =: \|f\|_\infty$

$BC(X) := \{ f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und beschränkt} \}$

SATZ 3

$(BC(X), \|.\|)$ ist ein vollständiger, normierter Vektorraum.

Def.: Ein Banachraum ist ein vollständiger, normierter Vektorraum

Beweis: 1. $BC(X)$ ist ein VR und die Abb. $BC(X) \to \mathbb{R}$: $f \mapsto \|f\|$ ist eine Normfkt.

↳ $f, g \in BC(X) \Rightarrow f + g \in BC(X)$ und $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

a) $f+g$ stetig

b) $|f(x) + g(x)| < |f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\| \ \forall x \in X$

$\Rightarrow f+g$ ist beschränkt & $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

↳ $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in BC(X) \Rightarrow \lambda f \in BC(X)$ & $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$

↳ $\|f\| \geq 0$

↳ $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$, d.h. $f(x) = 0 \ \forall x \in X$ ✓

2. $(BC(X), \|.\|_\infty)$ ist vollständig

↳ Definiere die Abst.-Fkt. $d_\infty: (BC(X))^2 \to \mathbb{R}$ durch $d_\infty(f,g) := \|f - g\|_\infty$ für $f, g \in BC(X)$

↳ Sei also $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $BC(X)$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N}: n, m \geq N$

$\Rightarrow d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$, $d_\infty(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\|_\infty$ (**)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n,m \in \mathbb{N}: n,m \geq N$

$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ (Sei $x \in X$ fest)

d.h. $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ K4/S3 (?) : Der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existiert für jedes $x \in X$

Damit haben wir eine Fkt. $f: X \to \mathbb{R}$ definiert

Beh.: f_n konv. glm gegen f

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ wie in (**)

$\Rightarrow \forall x \in X \ \forall n,m \in \mathbb{N}$ mit $m,n \geq n_0$ gilt:

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\overset{m \to \infty}{\Rightarrow} \forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt:

$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Beh. ✓ $\Rightarrow f$ stetig

Es folgt auch $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt:

$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Beh.: f ist beschränkt.

Bew.: $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_n - f\|_\infty \leq 1$

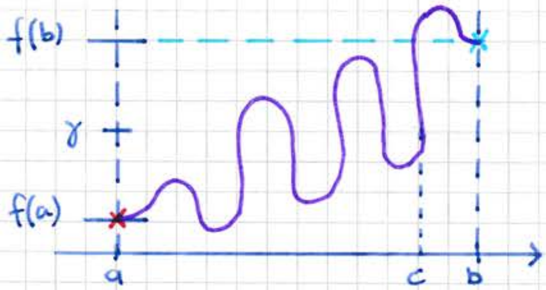
$\Rightarrow |f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq 1} + \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq \|f_n\|}$

Aus beiden Behauptungen folgt:

$f \in BC(X)$ & $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ bez. $d_\infty \Rightarrow 2.$ ✓ ▨

SATZ 4 (Zwischenwertsatz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $\gamma \in \mathbb{R}$ s.d. $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ oder $f(a) \geq \gamma \geq f(b)$ $\Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$ s.d. $f(c) = \gamma$



"Jeder Wert γ zw. $f(a)$ und $f(b)$ wird von der Funktion f $[a,b] \to \mathbb{R}$ angenommen, sol. f stetig ist!"

Beweis: Annahme: $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$

Definiere $X := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \wedge f(x) \leq \gamma\}$

$\Rightarrow X \subset \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt $(x \leq b \;\forall x \in X)$

und $X \neq \emptyset$, da $a \in X$

Sei $c := \sup X$

Beh.: $c \in [a,b]$ und $f(c) = \gamma$

Bew.: $c \in [a,b]$: $a \leq c$, da $a \in X$

$c \leq b$, da b eine obere Schranke

1. $f(c) \leq \gamma$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\{x \in X \mid c - \frac{1}{n} \leq x \leq c\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$c - \frac{1}{n} \leq x_n \leq c$

$\Rightarrow c = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, $f(c) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

$\leq \gamma$, da $f(x_n) \leq \gamma \;\forall n \in \mathbb{N}$

2. $f(c) \geq \gamma$

1. Fall: $c = b \Rightarrow \gamma \leq f(b)$ nach Voraussetzung

2. Fall: $c < b \Rightarrow$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b-c}$ gilt $a \leq c + \frac{1}{n} < b \Rightarrow$ Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/b-c$ gilt $f(c + \frac{1}{n}) > \gamma$, da $c + \frac{1}{n} \in [a,b] \setminus X$

$\Rightarrow f(c) = \lim\limits_{n \to \infty} f(c + \frac{1}{n}) \geq \gamma \Rightarrow f(c) = \gamma$

Für den Fall $f(a) \geq \gamma \geq f(b)$ wähle $c := \inf X$ ... ▨

Korollar 1

$\forall y > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists x > 0 : \quad x^n = y$

Bew.: $\quad f : [0, y+1] \to \mathbb{R}$

$f(x) := x^n - y \ , \quad f(0) = -y < 0$

$f(y+1) = (y+1)^n - y^n > 0$

$\overset{S4}{\Longrightarrow} \ \exists \, x \in [0, y+1]$ s.d. $f(x) = 0$

$\Rightarrow \ x^n = y$ ▨

Korollar 2

Sei $a > b$. Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

$\Rightarrow$ f hat einen Fixpunkt $x \in [a,b]$ s.d. $f(x) = x$

Bew.: Definiere $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := f(x) - x$

$\Rightarrow$ g ist stetig

$\Rightarrow \ g(a) = f(a) - a \geq 0$

$g(b) = f(b) - b \leq 0$

$S4 \Rightarrow \ \exists \, x \in [a,b]$ s.d. $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$ ▨

SATZ 5

Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:

i) $\forall x \in \mathbb{R} : \ \exp(x) > 0$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$: $\exp(x) < \exp(y)$

iii) $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv

iv) $\forall n \in \mathbb{N} : \ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ d.h. $\forall c > 0 \ \exists x_0 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} :$

$x \geq x_0 \Rightarrow e^x / x^n > c$

Ausserdem: $\lim\limits_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : \ x \geq x_0 \Rightarrow x^n e^{-x} < \varepsilon$

Beweis:

i) $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$, $\exp(x)\cdot\exp(-x) = 1$

$\Rightarrow \exp(x) \neq 0$

$\Rightarrow \exp(x) > 0$ ✓

ii) $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow \exp(y-x) = 1 + {}^{y-x}/_{1!} + {}^{(y-x)^2}/_{2!} + \ldots > 1$

$\Rightarrow \exp(x) < \exp(x)\exp(y-x) = \exp(y)$ ✓

iii) Injektivität folgt sofort aus ii)

Surjektivität:

1. Fall: $y \geq 1 \Rightarrow \exp(0) = 1 \leq y < \exp(y)$

S4 $\Rightarrow \exists x \in [0, y]$ s.d. $\exp(x) = y$

2. Fall: $0 < y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{y} \geq 1$

1. Fall $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ s.d. $\exp(x) = \frac{1}{y} \Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = y$

✓

iv) $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot {}^{1}/_{k!}$, $x > 0 \Rightarrow \exp(x) > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$\Rightarrow \frac{\exp(x)}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \geq c$ falls $x \geq \underbrace{(n+1)!\,c}_{x_0}$

$\Rightarrow x^n \exp(-x) = \frac{x^n}{\exp(x)} < \frac{(n+1)!}{x} \leq \varepsilon$ falls $x \geq \frac{(n+1)!}{\varepsilon}$ ✓

▨

SATZ 6

Sei $c \in \mathbb{C}$. Definiere die Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch:

$f(z) := \exp(cz)$, $z \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

i) Die Fkt. f hat folgende Eigenschaften:

1) $f(z+w) = f(z)\cdot f(w)$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $f(0) = 1$

2) f ist stetig

3) $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{f(z)-1}{z} = c$, d.h. $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0\ \forall z\in\mathbb{C}$:
$0<|z|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(z)-1}{z} - c\right| < \varepsilon$

ii) f ist eindeutig bestimmt durch die Bedingungen 1), 2) und 3)

Beweis:

Teil i): zu 1): s. Kap. 4 / S11

zu 2): s. Kap 5 / S2

zu 3): Definiere $g: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ durch $g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-1}{z}, & z\neq 0\\ c, & z=0\end{cases}$

Dann gilt: 3) $\Leftrightarrow$ g ist stetig an der Stelle $z=0$

Für $z\neq 0$ gilt: $g(z) = \frac{1}{z}(\exp(cz)-1)$
$$= \frac{1}{z}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (cz)^n/n! - 1\Big)$$
$$= \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(cz)^n}{n!} = \frac{cz}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(cz)^{n-1}}{n!}$$
$$= c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k z^k}{(k+1)!}$$
$$\Rightarrow g(z) = c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{(k+1)!} z^k \Rightarrow g \text{ ist stetig (S2)}$$

Teil ii) folgt später! ▨

SATZ 7

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und sei $z\in\mathbb{C}$ s.d. $z=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Dann gilt: $\exp(z) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n$

SAT7 $\Rightarrow$ SAT6. Teil ii)

Sei $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine Fkt., die 1), 2) und 3) erfüllt.
Sei $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$
Definiere $z_n\in\mathbb{C}$ durch $z_n := n f\left(\frac{z}{n}\right) - n = \frac{f(z/n)-1}{1/n} = z\,\frac{f(z/n)-1}{z/n}$ $(*)$
$(*) \xrightarrow[\text{nach 3)}]{n\to\infty} cz$

$1+\frac{z_n}{n} = f\left(\frac{z}{n}\right)$; $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = f\left(\frac{z}{n}\right)^n = f\left(\frac{z}{n}+\frac{z}{n}+\frac{z}{n}+\ldots+\frac{z}{n}\right) = f(z)$

$\downarrow$ nach S7: $\exp(z)$ $\quad \Rightarrow \exp(cz) = f(z)$

$\blacksquare$

SATZ 6 insg.: $\blacksquare$

Beweis von Satz 7:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$|z_n - z| < 1$ und $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{(|z|+1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $\left|e^z - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right|$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{z_n}{n}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} \left| \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!} \right|}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} \binom{n}{k} \frac{|z_n|^k}{n^k}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}}_{\mathrm{III} < \frac{\varepsilon}{3}}$$

Beh.: $\mathrm{II} < \frac{\varepsilon}{3}$

Bew.: $\sum_{k=n_0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!\,n^k} |z_n|^k \leq \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} \frac{(|z|+1)}{k!}}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\leq 1} < \frac{\varepsilon}{3}$ ✓

wobei für $n \geq n_0$: $|z_n| \leq |z| + |z_n - z| \leq |z| + 1$

Zu I: $\binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} = \frac{z_n^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot n \cdots n}$ für $0 \leq k \leq n_0 - 1$

$= \frac{z_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} = \frac{z^k}{k!}$ für $0 \leq k \leq n_0 - 1$

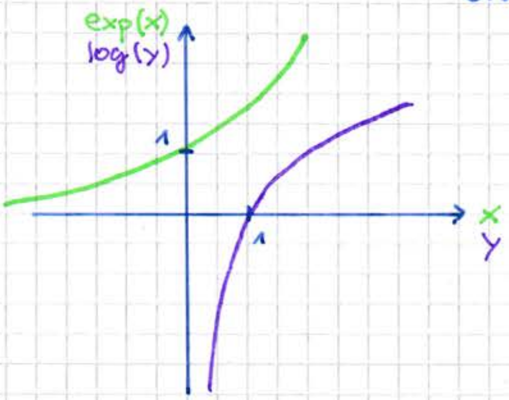
$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$: $\mathrm{I} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} < \varepsilon$ $\blacksquare$

Erinnerung: Satz 5: Die Exponentialabbildung $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung heisst natürlicher Logarithmus und wird mit $\log: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

Die Funktion $\log: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch die Bedingung: $\exp(\log(y)) = y$ für $y > 0$

Bem.: Oft wird die Bezeichnung "ln" statt "log" verwendet.



explizite Definition:

$$\log: (0,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto \log(y)$$

SATZ 8

Der natürliche Logarithmus hat folgende Eigenschaften:

i) $0 < x < y \Rightarrow \log(x) < \log(y)$

ii) log ist stetig

iii) $\log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad \forall x,y > 0, \quad \log(1) = 0$

iv) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{1/n}} = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = \infty$

Beweis: i) $\log(x) \geq \log(y) \Rightarrow \exp(\log(x)) \geq \exp(\log(y)) \Rightarrow x \geq y$ ✓.

ii) Sei $y > 0$. Sei $\varepsilon > 0$: $e^{\log(y)-\varepsilon} < y < e^{\log(y)+\varepsilon}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad e^{\log(y)-\varepsilon} < y-\delta < y+\delta < e^{\log(y)+\varepsilon}$

$\Rightarrow \forall y' \in \mathbb{R}$ mit $y-\delta < y' < y+\delta$ gilt: $e^{\log(y)-\varepsilon} < y' < e^{\log(y)+\varepsilon}$

$\overset{i)}{\Rightarrow} \log(y) - \varepsilon < \log(y') < \log(y) + \varepsilon$

$\Rightarrow |\log(y) - \log(y')| < \varepsilon \quad \forall y' \in (y-\delta, y+\delta) \Rightarrow$ ✓.

iii) $e^{\log(xy)} = xy = e^{\log(x)} \cdot e^{\log(y)} = e^{\log(y)+\log(x)}$ $\Rightarrow$ iii) folgt aus Injektivität der Exponentialfkt.

$e^{\log(1)} = 1 = e^0$ ✓

iv) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\rightarrow$ d.h. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}: 0<|x|<\delta$

$\Rightarrow \left|\frac{\log(1+x)}{x} - 1\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ f ist stetig an der Stelle $x=0$

Def. $f: (-1,\infty) \to \mathbb{R}: f(x) := \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(-1,\infty)$, die gegen 0 konvergiert.

$x_n > -1$, $x_n \to 0$

z.z.: $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(0)$

Bew.: o.B.d.A.: $x_n \neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

Definiere $y_n := \log(1+x_n) \Rightarrow e^{y_n} = 1+x_n$

$e^{y_n} - 1 = x_n,\ y_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\underbrace{y_n}_{\log(1+x_n)} \to \underset{\downarrow}{0}$ (L2), da log stetig

$ \quad \log(1)$

$\Rightarrow \frac{e^{y_n}-1}{y_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\frac{e^{y_n}-1}{y_n} = \frac{x_n}{\log(1+x_n)} \Rightarrow \underset{f(x_n)}{\underset{\|}{\frac{\log(1+x)}{x_n}}} \to \underset{f(0)}{\underset{\|}{1}} \overset{L2}{\Rightarrow}$ f ist stetig in $x=0$ ✓

v) • $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = \infty$ $\rightarrow$ $c>0$: Dann gilt für $x \geq e^c$:

$\log(x) \geq \log(e^c) = c$ ✓

• $\forall n\in\mathbb{N}: \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{1/n}} = 0$, Beachte: $e^y/y^n > y/(n+1)!\ \forall y>0$

Sei $x>1$ und $y: \log(x) > 0 \Rightarrow \frac{x}{\log(x)^n} > \frac{\log(x)}{(n+1)!} > 0$

$\Rightarrow \frac{\log(x)^n}{x} < \frac{(n+1)!}{\log(x)} \Rightarrow \frac{\log(x)}{x^{1/n}} < \left(\frac{(n+1)!}{\log(x)}\right)^{1/n} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

d.h. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{1/n}} = 0$ ▨

Def.: Sei $a>0$ und $z\in\mathbb{C}$. Definiere $a^z\in\mathbb{C}$ durch $a^z := e^{\log(a)z}$

Übung: $\forall a,b>0\ \forall x\in\mathbb{R}\ \forall z,w\in\mathbb{C}$:

i) $a^0 = 1$, $a^1 = a$

ii) $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$

iii) $(a^x)^z = a^{xz}$

iv) $(a\cdot b)^z = a^z \cdot b^z$

v) $|a^z| = a^{\mathrm{Re}(z)}$

Die Reihe $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ konvergiert absolut für $s\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$

Def.: Für $s\in\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}$ sei $\binom{s}{n} := \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}$ mit $\binom{s}{0} := 1$

SATZ 9

$\forall x\in(-1,1)\ \forall s\in\mathbb{C}$ gilt:

- $(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}x^n$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

beide Reihen konvergieren absolut

Beweis folgt!

SATZ 10

$$\forall s,t\in\mathbb{C}\ \forall x\in(-1,1)\ \forall n\in\mathbb{N}: \binom{s+t}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\binom{t}{n-k} \quad (*)$$

Beweis:

1. Fall: $s,t\in\mathbb{N}_0$: $(1+x)^{s+t} \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{s+t}\binom{s+t}{n}x^n$ (in K1 bewiesen, S1: BF)

$$* = (1+x)^s\cdot(1+x)^t = \left(\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}x^k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{t}\binom{t}{l}x^l\right) = \sum_{n=0}^{s+t}\Bigg(\sum_{\substack{k+l=n\\ k\geq 0,\, l\geq 0}}\binom{s}{k}\binom{t}{l}\Bigg)x^n$$

$\Rightarrow (*)$ ✓

2. Fall: $s\in\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{N}_0$: $t\in\mathbb{N}_0$ sei fest gewählt

$p(s) := \binom{s+t}{n} \to$ Polynom in s mit $\mathrm{grad}(p) = n \Rightarrow p(s) = q(s)\ \forall s\in\mathbb{N}_0$

$q(s) := \sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\underbrace{\binom{t}{n-k}}_{\text{const.}} \to$ Polynom in s mit $\mathrm{grad}(q) = n$

$\to$ p und q stimmen an ∞-vielen Stellen überein (in $\mathbb{N}_0$) $\Rightarrow$ müssen gleich sein $\Rightarrow p(s) = q(s)\ \forall s\in\mathbb{N}_0$

✓

3\. Fall : $s, t \in \mathbb{C}$: Sei $s \in \mathbb{C}$ fest gewählt

$f(t) := \binom{s+t}{n}$, $g(t) := \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k}$, $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Polynome vom Grad n

$\overset{2.\text{Fall}}{\Longrightarrow} f(t) = g(t) \;\; \forall t \in \mathbb{N}_0 \underset{\text{IS}}{\overset{\text{K2}}{\Longrightarrow}} f(t) = g(t) \;\; \forall t \in \mathbb{C}$

▨

Beweis von Satz 9:

Definiere $L(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ für $-1 < x < 1$

$B_s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$ für $-1 < x < 1$ und $s \in \mathbb{C}$

Beh. 1) $\forall x \in (-1, 1) \; \forall s \in \mathbb{C}$: $B_s(x) = \exp(s L(x))$ (**)

(**) für $s = 1 \Rightarrow \exp(L(x)) = B_1(x) = 1 + x$

$\Rightarrow L(x) = \log(1+x) \Rightarrow B_s(x) = \exp(s \cdot \log(1+x)) = (1+x)^s$

Beh. 2)

$$\left.\begin{array}{l} 1.\; B_{s+t}(x) = B_s(x) \cdot B_t(x), \quad B_0(x) = 1 \\ 2.\; s \mapsto B_s(x) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ stetig} \\ 3.\; \lim\limits_{\substack{s \neq 0 \\ s \to 0}} \frac{B_s(x) - 1}{s} = L(x) \end{array}\right\} \overset{\text{S6}}{\Longrightarrow} \text{Beh. 1)}$$

Wenn gezeigt $\Rightarrow$ S6: Beh. 1)

Bew.: 1. $B_0(x) = 1$ ✓

$$B_s(x) B_t(x) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \binom{t}{l} x^l\right)}_{\text{abs. Konv.}} \underset{\text{S12}}{\overset{\text{K4}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k}\right) x^n$$

$$\overset{\text{S10}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+t}{n} x^n = B_{s+t}(x) \;✓$$

3\. Wähle eine feste Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x < 1$

Definiere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch: $f(s) := \begin{cases} \frac{B_s(x) - 1}{s}, & \text{für } s \neq 0 \\ L(x), & \text{für } s = 0 \end{cases}$

z.z.: f ist stetig an der Stelle $s = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{s \to 0 \\ s \neq 0}} \frac{B_s(x) - 1}{s} = L(x)$

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch:

$$f_n(s) := \begin{cases} \frac{1}{s}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}x^k - 1\right), & \text{falls } s \neq 0 \\ \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k, & \text{falls } s = 0 \end{cases}$$

Dann gilt: 1) $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s) \ \forall s \in \mathbb{C}$

2) $f_n(s) = \frac{1}{s}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}x^k - 1\right) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n}\binom{s}{k}x^k$

$$= \frac{1}{s}\left(sx + \binom{s}{2}x^2 + \binom{s}{3}x^3 + \ldots + \binom{s}{n}x^n\right)$$

$$= x + \underbrace{\frac{1}{s}\binom{s}{2}}_{\frac{s-1}{2}}x^2 + \ldots + \underbrace{\frac{1}{s}\binom{s}{n}}_{\frac{(s-1)\cdots(s-n+1)}{2\cdot\ldots\cdot n}}x^n$$

Polynom in s

$s=0$: $\quad = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

$= f_n(0)$

$$\Rightarrow f_n(s) = x + \sum_{k=2}^{n}\frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}x^k$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \ \forall s \in \mathbb{C}$

Insbesondere ist f_n stetig $\forall n \in \mathbb{N}$

3. f_n konv. glm gegen f auf $B_1 := \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < 1\}$

$$|f(s) - f_n(s)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\underbrace{\frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}}_{\leq \frac{|s|+1}{2}\cdot\frac{|s|+2}{3}\cdot\frac{|s|+k-1}{k} \leq 1}x^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}|x|^k = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \longrightarrow 0 \quad \forall s \in B_1$$

$\Rightarrow f|_{B_1}$ ist stetig $\Rightarrow f$ ist stetig (insbesondere) in 0

$\Rightarrow$ 3. ✓

∎

SATZ 11

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Beweis: Nach S9 gilt: $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ für $0 < x < 1$

$$\overset{K4}{\underset{S5}{\Rightarrow}} \left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \left| \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

$$x_i := 1 - 1/i, \quad i = 2, 3, 4, \dots \to 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{i \to \infty} \left| \log(1+x_i) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x_i^k \right|}_{= \left| \log(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left| \log(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \log(2) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad \blacksquare$$

Erinnerung: $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\cos(x) := \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) := \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Nach K4, S2 & Korollare:

1) $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

2) $\cos(x) = \cos(-x), \ \sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0$

3) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

Bew.: $\frac{e^{ix}-1}{ix} = \frac{\cos(x) + i\sin(x) - 1}{ix} = -\frac{1}{i} \frac{\cos(x)-1}{x} + \frac{\sin(x)}{x}$

$x \to 0$: $\frac{e^{ix}-1}{ix} \to 1$, $\frac{\cos(x)-1}{x} \to 0$, $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ ✓

Lemma 5 Für $0 < x \leq 2$ gilt:

i) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

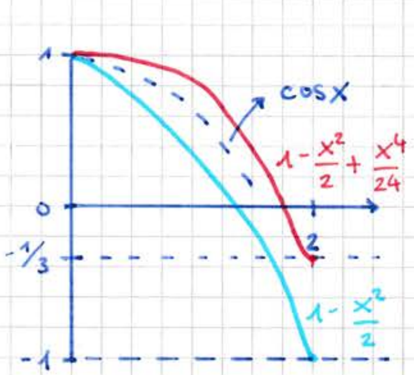
ii) $x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x$

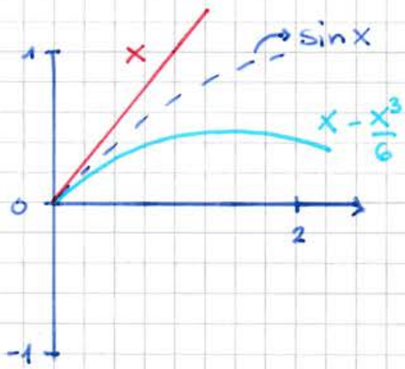
Bew.: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$ K4 / S5

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$ Betrag strikt fallend!

$-1 \quad 1 - \frac{x^2}{2} \quad 0 \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad 1$, $\cos x$ → analog für sin! ▨

Graphen:





Lemma 6

i) $0 < x \leq 2 \Rightarrow \sin(x) > 0$

ii) $0 \leq x < y \leq 2 \Rightarrow \cos(x) > \cos(y)$

Bew.: i) $\sin(x) > x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \geq \frac{x}{3} > 0$ ✓

ii) $a := \frac{x+y}{2} > 0, \quad b := \frac{y-x}{2} > 0 \Rightarrow 0 < a \leq 2, \; 0 < b \leq 2$

$\Rightarrow \cos(y) - \cos(x) = \cos(a+b) - \cos(a-b)$

$= -2 \sin(a) \sin(b) < 0$ ▨

Lemma 7 : $\exists! \, x_0 \in [0,2]$ s.d. $\cos(x_0) = 0$, $\sin(x_0) = 1$

Bew.: Existenz: ZWS (S4)

$\cos : [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig

$\cos(0) = 1$, $\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ ZWS: $\cos(x_0) = 0$ existiert

Eindeutigkeit: $0 \leq x < x_0 \Rightarrow \cos(x) > \cos(x_0) = 0$

$x_0 < x \leq 2 \Rightarrow \cos(x) < \cos(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ L6 : $\sin(x_0) = 1$ ▨

Def.: $\pi := 2x_0$

$\pi \cong 3{,}14159265358979323846264 33\ldots$

Korollar: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

i) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$e^{i\pi} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = i^2 = -1$

$e^{2\pi i} = (e^{\pi i})^2 = (-1)^2 = 1$

ii) $e^{z+\pi i/2} = e^z + e^{\pi i/2} = ie^z$

$e^{z+\pi i} = -e^z$

$e^{z+2\pi i} = e^z$

iii) $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(x)\sin(\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

$\cos(x+\pi) = -\sin(x+\pi/2) = -\cos(x)$

$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

SATZ 12

i) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ s.d. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}\pi$

iii) Die Zahl 2π ist die kleinste Periode von cos und sin

Beweis: i) "$\Leftarrow$" : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ per Def.

$\cos(\pi/2) = \cos(-\pi/2)$

$k = 2n,\ n \in \mathbb{N}$: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi\right)$

$\ldots \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$k = 2n+1$: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= 0$

Aufgrund Symmetrie : $\forall k \in \mathbb{Z} : \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$

"$\Rightarrow$" : 1. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \pi/2$

2. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$, $\underset{\cos(-x)}{\underset{\shortparallel}{\cos(x)}} = 0 \Rightarrow x = -\pi/2$

Sei $x \in \mathbb{R}$ s.d. $\cos(x) = 0$

$k := \left[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right]$ Gauss - Klammer

$\Rightarrow k \leq \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} < k + 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x/\pi - k < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x - k\pi < \frac{\pi}{2}$

$\cos(x - k\pi) = 0 \Rightarrow x - k\pi = -\frac{\pi}{2}$ ✓

ii) $\sin(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ s.d. $x = k\pi$ ✓

iii) Sei $0 < p \leq 2\pi$ s.d. $\cos(x+p) = \cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \cos(\pi/2 + p) = 0$

$\cos(\pi + p) = \cos(\pi) = -1$

$\left.\begin{array}{l} \overset{i)}{\Rightarrow} p \in \{\pi, 2\pi\} \\ \cos(2\pi) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p = 2\pi$ ✓

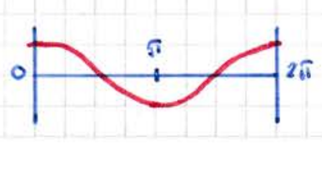
$\sin(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow p = 2\pi$ ✓

∎

Übg.: $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ ist strikt monoton fallend

$\cos : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ist strikt monoton wachsend

Hinweis: $\cos(x + \pi/2) = -\cos(\pi/2 - x)$



Erinnerung: $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind definiert durch:

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

SATZ 13 Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

i) $e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ s.d. $z = 2\pi i k$

ii) $\sin(z) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ s.d. $z = k\pi$)

iii) $\cos(z) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ s.d. $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$)

Beweis: i) $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$

$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \overset{!}{=} 1$

$\Rightarrow e^x = 1, \ \cos(y) = 1, \ \sin(y) = 0$

$\Rightarrow x = 0, \ y \in \mathbb{Z}\pi \overset{\cos y = 1}{\Rightarrow} y \in \mathbb{Z}2\pi$ ✓

ii) $0 \overset{!}{=} \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\Rightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz} = 1$

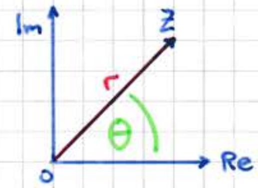
$\Rightarrow 2iz \in 2\pi i \mathbb{Z} \Rightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$ ✓

iii) $\cos(z) = 0$

$\overset{\text{Übg.}}{\Rightarrow} \sin(z + \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$ ✓

▨

SATZ 14 (Polarkoordinaten in $\mathbb{C}$)



$\forall z \in \mathbb{C} \ \exists \theta \in \mathbb{R}$ s.d. $z = re^{i\theta}, \quad r := |z|$

bzw.: $re^{i\theta} = r\cos(\theta) + ri\sin(\theta)$

Beweis: $z = 0$ ✓

$z \neq 0$: $w := \frac{z}{|z|} = x + iy \Rightarrow x^2 + y^2 = |w|^2 = 1$

Gesucht: $\theta \in \mathbb{R}$ s.d. $\cos(\theta) = x, \ \sin(\theta) = y$

1. Fall: $x \geq 0, \ y \geq 0$

$\cos: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad \cos(0) = 1 \geq x \geq \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\Rightarrow \exists!\, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ s.d. $\cos(\theta) = x$

$\Rightarrow \sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2$

$= 1 - x^2$

$= y^2$

$\Rightarrow \sin(\theta) = \sqrt{y^2} = y$ ✓

2. Fall: $x \leq 0,\ y \geq 0$

$\Rightarrow$ 1. Fall: $\exists \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ s.d. $\cos(\varphi) = -x$

$\sin(\varphi) = y$

$\theta := \pi - \varphi$

$\Rightarrow \cos(\theta) = -\cos(-\varphi) = -\cos(\varphi) = x$

$\sin(\theta) = -\sin(-\varphi) = \sin(\varphi) = y$ ✓

3. Fall: $y \leq 0$

$\Rightarrow$ 1. Fall / 2. Fall: $\exists\, \psi \in \mathbb{R}$ s.d. $\cos(\psi) = x$,

$\sin(\psi) = -y$

$\theta := -\psi$

$\Rightarrow \cos(\theta) = x,\ \sin(\theta) = y$ ✓ ▨

SATZ 15

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ \exists w \in \mathbb{C}$ s.d. $e^w = z$

Beweis: Nach S14 $\exists \theta \in \mathbb{R}$ s.d. $z = |z| e^{i\theta}$

Definiere $w := \log|z| + i\theta$

$\Rightarrow e^w = e^{\log|z| + i\theta} = e^{\log|z|} \cdot e^{i\theta} = |z| e^{i\theta} = z$ ▨

Korollar: $z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, \zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta^n = z$

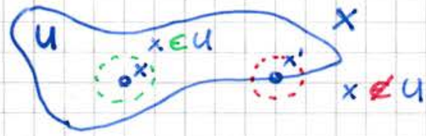
Bew.: aus S15: Wähle $\zeta = e^{w/n}$ ▨

<u>Repetition:</u> (X, d): metr. Rm

Für $x \in X$ und $r > 0$ gibt es einen offen Ball:

$B_r(x) := \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$

<u>Def.:</u> Eine Teilmenge $U \subset X$ heisst offen, wenn $\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset U$



<u>Bem.:</u>
1. $\emptyset$, X sind offen
2. $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X$ offen $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ ist offen.
3. I: Indexmenge, U_i offen für $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen

Bew.: 1. folgt aus Definition

2. Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow x \in U_i \ \forall i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \exists \varepsilon_i > 0$ s.d. $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$

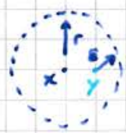
Definiere $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} > 0$

$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ für $i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ ✓

3. $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I$ s.d. $x \in U_i \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset U_i \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ ✓

Bsp. 1) $\forall x \in X \ \forall r > 0$ ist $B_r(x)$ offen



Sei $y \in B_r(x) \Rightarrow d(y,x) < r$

Definiere $\varepsilon := r - d(x,y) > 0 \Rightarrow B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$

$z \in B_\varepsilon(y) \Rightarrow d(y,z) < \varepsilon$

$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon < r \Rightarrow z \in B_r(x)$

Bsp. 2) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |y - x|$

Jedes offene Intervall ist offen:

$\left.\begin{array}{l} (a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \\ (a,\infty);\ (-\infty, b);\ \emptyset;\ \mathbb{R} \end{array}\right\}$ übg.

Jede Vereinigung offener Intervalle ist offen

Bsp. 3) $X = \mathbb{R}$

$U_i := \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{0\}$, aber $B_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset \{0\}$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ ist nicht offen

Def.: (X, d) : metr. Rm

Eine Teilmenge $A \subset X$ heisst abgeschlossen wenn $\forall x \in X$:
$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A$

SATZ 16

(X, d) : metr. Rm. $A \subset X$. Äquivalent sind:

i) A ist abgeschlossen

ii) $X \setminus A$ ist offen

iii) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X und $\forall x \in X$: $x_n \in A \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = x$
$\Rightarrow x \in A$

Beweis: i) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i)

i) $\Rightarrow$ iii): Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A die gegen $x \in X$ konvergiert.
Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $d(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x)$
$\Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x) \cap A \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \in A$ ✓

iii) $\Rightarrow$ ii): A erfülle iii). Sei $x \in X \setminus A$.
Beh.: $\exists \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$
Bew.: Annahme dies gilt nicht
d.h. $\forall \varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(x) \not\subset X \setminus A$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$
$\overset{AA}{\Rightarrow} \exists$ Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:
$x_n \in B_{1/n}(x) \cap A \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in A s.d. $\forall n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < 1/n$
$\Rightarrow x = \lim_{n \to \infty} x_n$, $x_n \in A \; \forall n \in \mathbb{N} \overset{iii)}{\Rightarrow} x \in A$ $\perp$ $\Rightarrow$ ✓

ii) $\Rightarrow$ i) : Sei $X \setminus A$ offen. Sei $x \in X$ s.d. $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \not\subset X \setminus A \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A$ ✓

<u>Bem.:</u>
1. $\emptyset, X$ sind abgeschlossen
2. $A_1, \ldots, A_n \subset X$ abgeschl. $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ist abgeschl.
3. I: Indexmenge, $A_i \subset X$ abgeschl. $\forall i \in I$
   $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ ist abgeschlossen

Bew.: Übg.

Bsp. 1) (X, d) metr. Rm
$\overline{B}_r(x) := \{ y \in X \mid d(x,y) \leq r \}$ $\Rightarrow$ abgeschlossen
$X \setminus \overline{B}_r(x) := \{ y \in X \mid d(x,y) > r \}$ offen

Bsp. 2) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$
Die abgeschlossen Intervalle sind abgeschlossen:
$[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty, b]$, $\{a\}$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$ (Übg.)
K: Kantormenge $\rightarrow$ abgeschlossen! (Übg.)

Bsp. 3) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$
$A_n := [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ abg. $\forall n \in \mathbb{N}$
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)$ nicht abgeschl.

Bsp. 4) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$
$[a,b)$, $(a,b]$: weder abg. noch offen

Bsp. 5) X: Menge, $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$
Jede Teilmenge von X ist offen und abgeschlossen

Bsp. 6) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$
$\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ die sowohl abg. als auch offen sind.

Zusammenhang Stetigkeit und Topologie:

$(X, d_X), (Y, d_Y)$: metr. Rme, $f : X \to Y$ eine Abb.
Für $Z \subset Y$ definiere : $f^{-1}(Z) := \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$

SATZ 17

Äquivalent sind:

i) f ist stetig

ii) $U \subset Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(U) \subset X$ offen

iii) $A \subset Y$ abg. $\Rightarrow f^{-1}(A) \subset X$ abg.

Beweis:

i) $\Rightarrow$ *ii)* : $U \subset Y$ sei offen. f sei stetig.

Beh.: $f^{-1}(U) \subset X$ ist offen

Bew.: Sei $x \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(x) \in U$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(f(x), d_Y) \subset U$

$\overset{f \text{ stetig (in } x)}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 \ \forall x' \in X : (d_X(x,x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon)$

$\Rightarrow f(B_\delta(x, d_X)) \subset B_\varepsilon(f(x), d_Y) \subset U$

$\Rightarrow B_\delta(x, d_X) \subset f^{-1}(U)$ ✓

ii) $\Rightarrow$ *i)* : Sei $x \in X$. z.z.: f ist stetig in x.

Bew.: $\varepsilon > 0 \Rightarrow B_\varepsilon(f(x), d_Y)$ ist offen in Y

$\overset{ii)}{\Rightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon(f(x), d_Y))$ ist offen in X

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d. $B_\delta(x, d_X) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x), d_Y))$

$\Rightarrow f(B_\delta(x, d_X)) \subset B_\varepsilon(f(x), d_Y)$

$\Rightarrow \forall x' \in X : d_X(x,x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

ii) $\Rightarrow$ *iii)* : $A \subset Y$ abg. $\overset{S6}{\Rightarrow} Y \setminus A$ ist offen $\overset{ii)}{\Rightarrow} f^{-1}(Y \setminus A)$ ist offen

$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ abgeschl.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* : Genauso wie oben!

$\blacksquare$

Bsp.) (X,d): metr. Rm, $f: X \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ $f^{-1}((-\infty, c)) = \{x \in X \mid f(x) < c\}$ offen

$f^{-1}((c, \infty)) = \{x \in X \mid f(x) > c\}$ offen

$f^{-1}((-\infty, c]) = \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ abgeschl.

$f^{-1}([c, \infty)) = \{x \in X \mid f(x) \geq c\}$ abgeschl.

$f^{-1}(c) = \{x \in X \mid f(x) = c\}$ abgeschl.

Bsp.) $X = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 - y$

$$\left.\begin{array}{l} \{f > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > y\} \\ \{f < 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y\} \end{array}\right\} \text{offen!}$$

Def.: (X,d): metr. Rm

Eine Teilmenge $K \subset X$ heisst kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K eine Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen ein Element von K konvergiert.

SATZ 18 X, Y: metr. Rme, $f: X \to Y$ stetig

i) $K \subset X$ kompakt $\Rightarrow$ $f(K) \subset Y$ kompakt

ii) Jede kompakte TMenge von X ist abgeschlossen

iii) $K \subset X$ kompakt, $A \subset K$ abgeschlossen $\Rightarrow$ A ist kompakt

Beweis: i) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(K)$

$\overset{AAA}{\Rightarrow}$ $\exists$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(x_n) = y_n$

$\overset{K \text{ kompkt}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ $\exists x \in K$ s.d. $x = \lim_{i\to\infty} x_{n_i}$

$\underset{L2}{\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow}}$ $f(x) = \lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})$, $f(K) = \lim_{i\to\infty} y_{n_i}$ $\Rightarrow$ $f(x) = \lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})$

✓

ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K und sei $x \in X$ s.t. $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Da K kmpkt ist: $\exists$ TFolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und $\exists x' \in K$ s.d. $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x'$ $\Rightarrow$ $x = x'$ $\Rightarrow$ $x \in K$ ✓

iii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A $\overset{K\text{ kmpkt}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ TFolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und $\exists x \in K$ s.d. $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x$

$\overset{A\text{ abg.}}{\underset{S16}{\Longrightarrow}}$ $x \in A$ ✓

■

SATZ 19

Seien X, Y: metr. Rme und sei $f: X \to Y$ stetig & bijektiv. Sei (X, d_X) kmpkt. $\Rightarrow$ f ist ein Homöomorphismus, das heisst die Umkehrabbildung $g := f^{-1} : Y \to X$ ist stetig.

Beweis: Sei $U \subset X$ offen $\overset{S16}{\Longrightarrow}$ Die Menge $X \setminus U$ ist abgeschlossen.

$\overset{S18}{\Longrightarrow}$ $X\setminus U$ ist kmpkt $\overset{S18}{\Longrightarrow}$ $f(X\setminus U)$ kmpkt. und $\subset Y$.

$f(X\setminus U) = Y \setminus f(U)$, da f bijektiv

$\overset{S18}{\Longrightarrow}$ $Y\setminus f(U)$ ist abgeschlossen $\overset{S16}{\Longrightarrow}$ $f(U)$ offen, $f(U) = g^{-1}(U)$ $\subset Y$ offen, ebenfalls: $U \subset X$ offen $\Rightarrow g^{-1}(U) \subset Y$ offen

$\overset{S17}{\Longrightarrow}$ g ist stetig

■

Übg.: Finden Sie ein Beispiel einer bijektiven & stetigen Abb. $f: X \to Y$ s.d. $f^{-1}: Y \to X$ nicht stetig

Nun: $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

SATZ 20 (Heine - Borel)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt: K kmpkt $\Leftrightarrow$ K ist abg. und beschränkt, d.h. $\exists c > 0\ \forall x \in K: \|x\| \leq c$.

Beweis: "$\Rightarrow$": $K \subset \mathbb{R}^n$ sei kmpkt $\overset{S18}{\Longrightarrow}$ K ist abgeschlossen.

Beh.: K ist beschränkt

Bew.: Ann. K sei nicht beschr. $\Rightarrow \forall c > 0\ \exists x \in K: \|x\| > c$

$\overset{c=k\in\mathbb{N}}{\underset{AA}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K s.d. $\forall k \in \mathbb{N}: \|x_k\| \geq k$

$\Rightarrow$ Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente TFolge

$\Rightarrow$ $\perp$ zu "K kmpkt" $\Rightarrow$ K ist beschr. ✓.

"$\Leftarrow$": Sei K abg. & beschr.

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Wähle $c > 0$ s.d.

$\forall x \in K : \|x\| \leq c \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \|x_k\| \leq c$

$\overset{K4/S4}{\Longrightarrow}$ $\exists$ TFolge die konvergent ist: $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$. $x := \lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} \in \mathbb{R}^n$

$\underset{S16}{\overset{K\text{ abg.}}{\Longrightarrow}}$ $x \in K$ $\Rightarrow$ K kmpkt. ✓.

∎

SATZ 21

Sei (X,d): metr. Rm und sei $f: X \to \mathbb{R}$ stetig bez. Std.-Metrik in $\mathbb{R}$.

Sei $K \subset X$ kmpkt. und $K \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \exists x', x'' \in K \ \forall x \in K : f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$

Beweis: 1. $f(K) \subset \mathbb{R}$ kmpkt (S18/i))

2. $f(K)$ ist abg. & beschr. (S20)

$-\infty < c' := \inf(f(K)) \leq f(x) \leq c'' := \sup(f(K)) < \infty \quad \forall x \in K$, da $f(K) \neq \emptyset$

3. Existenz von $x' \in K$ mit $f(x') = c'$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in K : f(x) < c' + \varepsilon$ und $c' \leq f(x)$

$\underset{\varepsilon = n^{-1}}{\overset{AAA}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K s.d. $\forall n \in \mathbb{N} : c' \leq f(x_n) < c' + \frac{1}{n}$

$\overset{K\text{ kmpkt}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ TFolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ $\exists x' \in K$ s.d. $x' = \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i}$

$\overset{f\text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $f(x') = \lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = c'$

4. Existenz von $x'' \in K$ mit $f(x'') = c''$

$\to$ genauso wie bei 3.

∎

Def.: X, Y: metr. Rme

$f: X \to Y$ heisst gleichmässig stetig wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$\forall x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

SATZ 22 X, Y : metr. Rme

$f : X \to Y$ stetig und X kmpkt. $\Rightarrow$ f ist glm. stetig

Beweis: Übg mit Hinweis (s. kommende Serien)

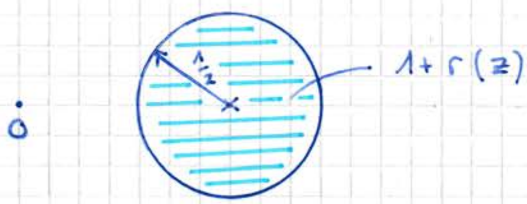
Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Betrachte das Polynom
$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : p(z) := z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ **(1)**
Zu zeigen: P hat eine Nullstelle.

Sei $A := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|$ und $R := \max\{1, 2A\}$.
Definiere $r : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ durch $r(z) := \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z}$ für $z \neq 0$. $\Rightarrow$ $p(z) = z^n(1 + r(z))$ **(2)**

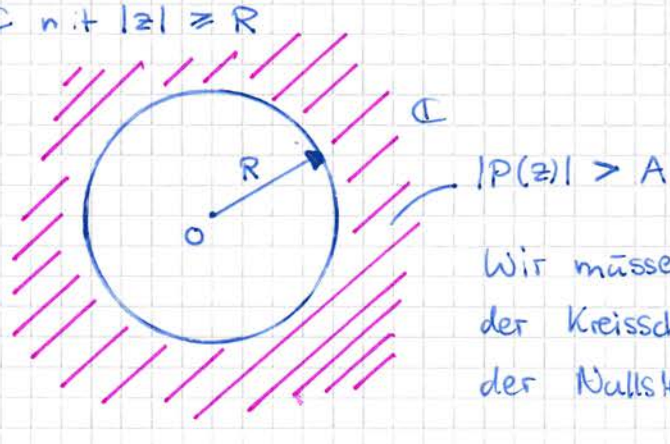
Für jede kompl. Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt: $|r(z)| = \left|\frac{a_0}{z^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z}\right|$
$\leq \frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \leq \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|z|} = \frac{A}{|z|} \leq \frac{1}{2}$

kl. Zeichnung:



$\Rightarrow |P(z)| = |z|^n \cdot |1 + r(z)| \geq |z|^n (1 - |r(z)|) \geq |z|^n/2 \geq |z|/2$
$\geq A$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$

kl. Zeichnung:



Wir müssen innerhalb der Kreisscheibe nach der Nullstelle suchen!

$K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ $\to$ K ist beschränkt & abgeschlossen
$\overset{S20}{\Rightarrow}$ K ist kmpkt. . Die Fkt. $\mathbb{C} \to \mathbb{R} : z \mapsto |P(z)|$ ist stetig.

$\overset{S21}{\Rightarrow}$ $\exists\, z_0 \in K$ s.d. $\forall z \in K: \; |P(z_0)| \leq |P(z)|$ **(3)**

$P(0) = a_0 \;\to\; |P(0)| = |a_0| \leq A$, $0 \in K \overset{(3)}{\Rightarrow} |P(z_0)| \leq A$
$\leq |P(z)| \;\; \forall z \in \mathbb{C} \setminus K$

$\Rightarrow |p(z_0)| \leq |p(z)| \;\; \forall\, z \in \mathbb{C}$ **(4)**

<u>Beh.:</u> $P(z_0) = 0$

<u>Bew.:</u> Annahme: $P(z_0) \neq 0$

Definiere $Q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $Q(w) := \frac{p(z_0 + w)}{p(z_0)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{(z_0+w)^i}{P(z_0)}$

mit $a_n := 1$. Q ist ein Polynom, nicht konstant!

$\Rightarrow Q(0) = 1 \underset{(4)}{\leq} |Q(w)| \;\; \forall\, w \in \mathbb{C}$ **(5)**

$\Rightarrow Q(w) = 1 + bw^k + \text{ThO}$, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ThO: Therme höherer Ordnung

mit $1 \leq k \leq n$

Wähle $\beta \in \mathbb{C}$ so dass $\beta^k = -\frac{1}{b}$ (S15)

Erinnerung: $\exists\, \zeta$ s.d. $e^{\zeta} = -\frac{1}{b}$, Definiere $\beta := e^{\zeta/k}$

$b = -1/\beta^k \;\Rightarrow\; Q(w) = 1 - \left(\frac{w}{\beta}\right)^k + \text{ThO}$

$\Rightarrow$ Definiere $R(w) := Q(\beta w)$

$\Rightarrow R(w) = 1 - w^k + w^{k+1} S(w)$, $S(w)$: Polynom **(6)**

$\overset{(5)}{\Rightarrow} |R(w)| \geq 1 \;\; \forall\, w \in \mathbb{C}$ **(7)**

Wähle $c > 0$ s.d. $|S(w)| \leq c \;\; \forall\, w \in \mathbb{C}$ mit $|w| \leq 1$, per S21

$\Rightarrow$ Für $0 < w \leq 1$ gilt: $|R(w)| = |1 - w^k + w^{k+1} S(w)|$

$\leq 1 - w^k + w^{k+1} \underbrace{|S(w)|}_{\leq c} \leq 1 - w^k + w^{k+1} c$

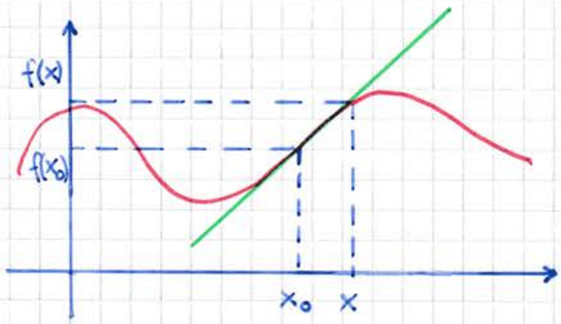
$= 1 - w^k(1 - wc) < 1$ für $0 < w < 1/c$

$\Rightarrow$ Widerspruch!

$\Rightarrow p(z_0) = 0$ ∎

Ende Kapitel 5!

Kapitel 6: Differentialrechnung



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Differenzenquotient:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Def.: $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

1) f heisst differenzierbar an der Stelle x_0, wenn es eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$:
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in I \wedge \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon$$

2) Es gibt es höchstens eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ welche die obige Bedingung erfüllt. Wenn sie existiert, wird sie die Ableitung von f an der Stelle x_0 genannt und mit
$$f'(x_0) = \dot{f}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
bezeichnet.

3) f heisst differenzierbar, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall ist die Ableitung von f eine Funktion $f': I \to \mathbb{R}$

Bem.: $s: I \to \mathbb{R}$ diff'bar, I: Zeitintervall

$s(t)$ = Position eines Teilchens zum Zeitpkt. t

$\dot{s}(t)$ = Geschwindigkeit zu jenem Zeitpkt. t

Bsp. 1) $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c \ \forall x \in I$ (konst. Fkt.)
$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in I$$

Bsp. 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Bsp. 3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0, \text{ d.h. } \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

Bsp. 4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\Rightarrow \text{K4/S5}: \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^x = f(x), \text{ d.h. } \exp' = \exp$$

Bsp. 5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \sin(x) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\to 0} + \cos(x) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \to \cos(x) \quad (h \to 0)$$

$\Rightarrow \sin' = \cos \Rightarrow \sin$ diff'bar

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$

$$\Rightarrow \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}$$

$$= \cos(x) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\to 0} - \sin(x) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \to -\sin(x) \quad (h \to 0)$$

$\Rightarrow \cos$ diffbar und $\cos' = -\sin$

Bsp. 6) $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{\log(x+h)-\log(x)}{h} = \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x} \underbrace{\frac{\log(1+h/x)}{h/x}}_{\text{Kap. 4: } \to 1 \ (h\to 0)}$$

$$\Rightarrow \log'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h)-\log(x)}{h} = x^{-1} \quad \forall x > 0$$

Bsp. 7) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left((x+h)^n - x^n\right) = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k} - x^n\right)$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k} \xrightarrow[h\to 0]{} \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

Bsp. 8) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht diffbar

sonst: $f'(x) = 1$ für $x > 0$

$f'(x) = -1$ für $x < 0$

Bsp. 9) $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

in $x_0 = 0$: $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h\to 0} \infty \quad (h > 0)$

$\Rightarrow f$ ist nicht diffbar in $x_0 = 0$ "Steigung in 0 ist ∞"

Lemma 1

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. und $x_0 \in I$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) f ist diffbar in x_0

ii) $\exists \varphi: I \to \mathbb{R}$: φ ist stetig in x_0 und $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\varphi(x) \ \forall x \in I$ (**)

Wenn dies der Fall ist, so gilt: $\varphi(x_0) = f'(x_0)$

Korollar

f diffbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

Bew.: $(**)$ & K4

Bsp. 10) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow f$ unstetig in $x_0 = 0$

$\Rightarrow f$ nicht diffbar in $x_0 = 0$

Beweis von L1

i) $\Rightarrow$ ii): Definiere $\varphi: I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{falls } x \neq x_0 \\ f'(x_0), & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi$ erfüllt ii)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I$:

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right|}_{= |\varphi(x) - \varphi(x_0)|} < \varepsilon$

$\Rightarrow \varphi$ stetig in x_0 ✓

ii) $\Rightarrow$ i): φ stetig in $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I$:

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|}_{\overset{(**)}{=} \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \varphi(x_0) \right|} < \varepsilon$ ▨

Lemma 2

$I \subset \mathbb{R}$: offen

$f, g: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. f, g seien diffbar in x_0. Dann gilt:

i) $f+g: I \to \mathbb{R}$ ist diffbar in x_0 und $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) $fg: I \to \mathbb{R}$ ist diffbar in x_0 und $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$

iii) falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ so ist $f/g: I \to \mathbb{R}$ diffbar in x_0 und

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Bew.: allg.: Nach L1 $\exists\, \varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ die stetig in x_0 sind, s.d.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x) \quad \forall x \in I$$
$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\psi(x) \quad \forall x \in I$$
und $\varphi(x_0) = f'(x_0)$, $\psi(x_0) = g'(x_0)$

i) $h := f + g : I \to \mathbb{R}$, $\chi := \varphi + \psi : I \to \mathbb{R} \Rightarrow \chi$ stetig in x_0
und:

$$h(x) - h(x_0) = f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0) = (x - x_0)\underbrace{(\varphi(x) + \psi(x))}_{\chi(x)}$$

$\overset{L1}{\Rightarrow}$ h ist diffbar in x_0 und $h'(x_0) = \chi(x_0) = \varphi(x_0) + \psi(x_0)$
$= f'(x_0) + g'(x_0)$ ✓

ii) $h := fg : I \to \mathbb{R}$:

$h(x) - h(x_0) = f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0)) = (x - x_0)(\varphi(x)g(x) + f(x_0)\psi(x))$

$\Rightarrow h(x) - h(x_0) = (x - x_0)\chi(x)$, $\chi := \varphi g + \psi f(x_0) : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0

$\overset{L1}{\Rightarrow}$ h diffbar in x_0 und: $\chi(x_0) = \varphi(x_0)g(x_0) + f(x_0)\psi(x_0)$
↳ sowie: $\chi(x_0) = h'(x_0)$ $\quad = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
$= h'(x_0)$ ✓

iii) $h := f/g : I \to \mathbb{R}$

$$h(x) - h(x_0) = f(x)/g(x) - f(x_0)/g(x_0) = \frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$
$$= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - (g(x) - g(x_0))f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$
$$= (x - x_0)\frac{\varphi(x)g(x_0) - \psi(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)} =: \chi(x)$$

$\Rightarrow \chi = \frac{\varphi g(x_0) - \psi f(x_0)}{g\, g(x_0)}$ ist stetig in x_0 $\overset{L1}{\Rightarrow}$ h ist diffbar in x_0 und $h'(x_0) = \chi(x_0)$

▨

Lemma 3 (Kettenregel)

$I, J \subset \mathbb{R}$ seien zwei offene Intervalle $f: I \to J$ sei diffbar in $x_0 \in I$ und $g: J \to \mathbb{R}$ sei diffbar in $y_0 := f(x_0) \in J$

$\Rightarrow g \circ f : I \to \mathbb{R}$ ist diffbar in x_0 und: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Bew.: Nach Lemma 1: $\exists\, \varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0

$\exists\, \psi : J \to \mathbb{R}$ stetig in y_0

s.d.: 1) $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x) \quad \forall x \in I$

2) $g(y) = g(y_0) + (y - y_0)\psi(y) \quad \forall y \in J$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = g(f(x)) - g(y_0)$

$\overset{2}{=} (f(x) - y_0) \cdot \psi(f(x)) \overset{1}{=} (x - x_0)\varphi(x)\psi(f(x))$

$\to \chi(x) := \varphi(x)\psi(f(x))$ stetig in x_0 nach L1 & L4 in Kap. 5

$\overset{L1}{\Rightarrow} g \circ f$ diffbar in x_0 und $(g \circ f)'(x_0) = \chi(x_0)$

$= \varphi(x_0) \cdot \psi(f(x_0)) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$ ∎

Bsp. 11) $s \in \mathbb{R}$, $f: (0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto s\log(x)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto e^y$

$\Rightarrow g \circ f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ diffbar

$(g \circ f)(x) = e^{s\log(x)} = x^s$

$\to \frac{d}{dx} x^s = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} \frac{s}{x}$

$= x^s \cdot \frac{s}{x} = s x^{s-1}$

Bsp. 12) $f: (0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x\log(x)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$

$\Rightarrow g \circ f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ diffbar

$(g \circ f)(x) = e^{x\log(x)} = x^x$

$\hookrightarrow \frac{d}{dx} x^x = (g \circ f)'(x) \underset{\text{Kettenregel \& Produktregel}}{=} x^x \cdot (\log(x) + 1)$

SATZ 1 (Umkehrfunktionen)

$I, \mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f: I \to \mathcal{J}$ strikt monoton, surjektiv

i) $f: I \to \mathcal{J}$ und $g := f^{-1}: \mathcal{J} \to I$ sind stetig

ii) f diffbar in $x_0 \in I$ und $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow g$ diffbar in $y_0 := f(x_0)$ und $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$, d.h.: $\frac{d}{dy} f^{-1}(y)\Big|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Beweis: f strikt monoton wachsend

i) 1. f ist bijektiv nach Voraussetzung

2. $g := f^{-1}: \mathcal{J} \to I$ ist strikt monoton wachsend

$\hookrightarrow$ $y, y' \in \mathcal{J}: y < y'$; $x := g(y)$ und $x' := g(y')$

$\Rightarrow y = f(x),\ y' = f(x') \Rightarrow x < x'$, sonst wäre $y \geq y'$

3. g ist stetig

$\hookrightarrow$ Sei $y \in \mathcal{J}$, sei $\varepsilon > 0$. Definiere $x := g(y)$. Dann gilt $y = f(x)$. $\delta := \min\{f(x+\varepsilon) - f(x), f(x) - f(x-\varepsilon)\} > 0$

$\Rightarrow \delta \leq f(x+\varepsilon) - y,\ \delta \leq y - f(x-\varepsilon)$

$\Rightarrow f(x-\varepsilon) \leq y - \delta < y + \delta \leq f(x+\varepsilon)$

$\Rightarrow x - \varepsilon \leq g(y-\delta) < g(y+\delta) \leq x + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall y' \in (y-\delta, y+\delta)$ gilt: $x - \varepsilon < g(y') < x + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall y' \in \mathbb{R}: |y - y'| < \delta \Rightarrow |g(y') - g(y)| < \varepsilon,\ y' \in \mathcal{J}$

✓.

ii) Nach Lemma 1 $\exists \varphi: I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 s.d. $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)\ \forall x \in I$

$\Rightarrow \varphi(x) \neq 0\ \forall x \in I$

Definiere $\psi: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ durch $\psi(y) := \frac{1}{\varphi(g(y))}$ für $y \in \mathcal{J}$

$\Rightarrow \psi$ stetig in $y_0 := f(x_0)$ (da $\varphi \circ g$ stetig in y_0)
L1 & L4 aus Kap. 5

Sei $y \in \mathcal{J}$ und $x := g(y)$, bzw. $y = f(x)$

$\Rightarrow y - y_0 = f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x) = (g(y) - g(y_0))\varphi(g(y))$

$\Rightarrow g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\underbrace{\frac{1}{\varphi(g(y))}}_{\psi(y)} \Rightarrow g$ diffbar in y_0

$\Rightarrow g'(y_0) = \psi(y_0)$ ∎

Bsp. 13) $f: (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto x^n, \; n \in \mathbb{N}$

$g := f^{-1} : (0,\infty) \to (0,\infty) : y \mapsto y^{1/n}$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n\, g(y)^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{y^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

vgl. Bsp. 11)

Bsp. 14) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$, strikt monoton wachsend,

$f'(0) = 0$

$$g(y) = f^{-1}(y) = \begin{cases} y^{1/3} & , y \geq 0 \\ -|y|^{1/3} & , y < 0 \end{cases}$$

g nicht diffbar in $y = 0$

Bsp. 15) $f: \exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$

$g = f^{-1} = \log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f' = f \quad \to \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f(g(y))} = 1/y$ wie erwartet!

Bsp. 16) $f: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} =: \tan(x)$

1. $-\frac{\pi}{2} < x < y < \pi/2 \implies \tan(x) < \tan(y)$

$\hookrightarrow \; 0 \leq x < y < \pi/2 \implies \cos(x) > \cos(y)$

$0 \leq \sin(x) < \sin(y)$

$$\implies \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

2. $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ bijektiv (Übg.)

3. $\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$= 1 + \tan^2(x) > 0$

4. Nach S1 ist $\tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ diffbar und $\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))}$

$= \frac{1}{1+y^2}$

Übg.: $\tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

<u>Def.:</u> $f: I \to \mathbb{R}$ Fkt., $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

1. Ein Element $x_0 \in I$ heisst lokales Maximum von f, wenn gilt: $\exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in I$ und $f(x) \leq f(x_0)$
2. Ein Element $x_0 \in I$ heisst lokales Minimum von f, wenn $\exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in I$ und $f(x) \geq f(x_0)$
3. Ein Element $x_0 \in I$ heisst lokales Extremum von f, wenn x_0 entweder ein lokMax oder ein lokMin von f ist.

Ein Randpunkt von I kann kein lokEx sein

Bsp. 17) $I = [0,1]$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}: x \mapsto x$
↳ $0, 1$ sind keine Extrema, erfüllen Definition nicht

$I = [0,1]$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}: x \mapsto 1$
↳ Jedes $x \in (0,1)$ ist sowohl ein lokMax als auch ein lokMin

Bsp. 18) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^4 - x^2$, $x_0 = 0$ ist ein lokMax

SATZ 2

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in I$.

i) Sei $f'(x_0) > 0$. Dann $\exists \delta > 0: \forall x \in I: x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) < f(x)$
bzw. $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

ii) Sei $f'(x_0) < 0$. Dann $\exists \delta > 0 \ \forall x \in I: x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x)$
bzw. $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

iii) Sei x_0 ein lokales Extremum von $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$

<u>Beweis:</u> *i)* $\varepsilon := f'(x_0)/2 \Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in I: (0 < |x - x_0| < \delta$
$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$
gilt $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) - \varepsilon = f'(x_0)/2 > 0$ ✓

ii) genauso wie in i)

iii) $f'(x_0) > 0 \overset{i)}{\Rightarrow} x_0$ kein lok Ex
$f'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ kein lok Ex $\Big\} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist lok Ex

zu Bsp. 18): $f'(x) = 4x^2 - 2x \quad 2x(2x^2 - 1)$
$\hookrightarrow f'(0) = 0 \rightarrow$ lok Max
$f'(\pm 1/\sqrt{2}) = 0 \rightarrow$ lok Minima

Bsp. 19) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$
$\hookrightarrow f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0$
aber: $x = 0$ kein lok Ex

<u>Def.:</u> $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar. $x_0 \in I$ heisst kritischer Punkt von f wenn $f'(x_0) = 0$

x_0 lok Ex $\Rightarrow x_0$ kritischer Punkt
$\not\Leftarrow$ s. Bsp. 19)

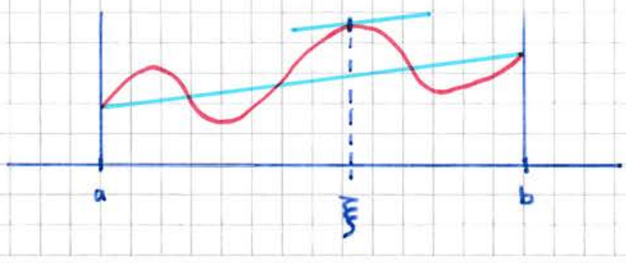
Bsp. 20) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ e^x - 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$\hookrightarrow f$ unstetig an jeder Stelle $x \neq 0$
f aber diff'bar in $x_0 = 0$
D.h. S2 (i) ist anwendbar!

<u>SATZ 3</u> (Mittelwertsatz)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. f sei differenzierbar an jeder Stelle $x \in (a,b)$.
$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ s.d. $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Geometrisch:



Die Konditionen dürfen nicht abgeschwächt werden!

Spezialfall: SATZ von Rolle

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar in x $\forall x \in (a,b)$. Es sei ausserdem $f(a) = f(b)$. $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$

Beweis: 1. Fall: $f(x) = f(a) \quad \forall \; x \in [a,b]$

$\Rightarrow f'(\xi) = 0 \quad \forall \; \xi \in (a,b)$ ✓

2. Fall: $\exists x \in (a,b)$ s.d. $f(x) > f(a)$

Nach K5 / S20 & S21 $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ s.d.

$f(\xi) = \max_{[a,b]} f > f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \xi \neq a, \; \xi \neq b$

$\Rightarrow \xi$ ist ein lokMax von $f \overset{S2}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$ ✓

3. Fall: $\exists x \in (a,b)$ s.d. $f(x) < f(a)$.

Wähle $\xi \in [a,b]$ s.d. $f(\xi) = \min_{[a,b]} f$

$\overset{S2}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$ ✓ ▨

Beweis von Satz 3

Definiere $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$

$\Rightarrow g$ stetig und diffbar in (a,b).

$g(b) = f(a) = g(a) \overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \; \xi \in (a,b)$ s.d. $g'(\xi) = 0$

$\Rightarrow 0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ ▨

Korollar 1 (Schrankensatz)

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar. Sei $L \geq 0$ s.d. $|f'(x)| \leq L$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow \forall x_0, x_1 \in I$ gilt: $|f(x_0) - f(x_1)| \leq L\,|x_0 - x_1|$

Bew.: O.B.d.A.: $x_0 < x_1 \overset{S3}{\Rightarrow} \exists \; \xi \in (x_0, x_1)$ s.d.:

$$L \geq |f'(\xi)| = \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| = \frac{|f(x_0) - f(x_1)|}{|x_0 - x_1|}$$ ▨

Korollar 2

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall. $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar. $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$
$\Rightarrow f$ ist konstant

Bew.: Kor. 1 mit $L = 0$ (■)

Bsp. 21) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar, $f'(x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$
$f(0) = 1$
$\Rightarrow f = \exp$

Bew.: Def. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := e^{-x} f(0)$
$\Rightarrow g$ diffbar. $g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$
$\overset{K2}{\Rightarrow} g = $ konstant, $g(x) = g(0) = 1$
$\Rightarrow f(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ ✓

Korollar 3

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall. $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar.
i) $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ ist strikt mon. steigend
ii) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow f$ ist mon. steigend

Bem.: in i) gilt die Umkehrung nicht. Beispiel: $f(x) = x^3$

Bew.: „$\Rightarrow$": Satz 2 (i, ii)
„$\Leftarrow$": f mon. steigend
Annahme: $f'(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in I$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{array}\right\} \perp !$$

$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \ \forall x_0 \in I$ ■

Bsp. 22) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto (1 + 1/x)^x$
$\hookrightarrow g(x) := \log(f(x)) = x \log(1 + 1/x)$

$$g'(x) = \log(1+1/x) + x \frac{1}{1+1/x}(-1/x^2) = \log(1+1/x) - \frac{1/x}{1+1/x}$$

$h: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(\xi) := \log(1+\xi) - \dfrac{\xi}{1+\xi}$

$$\to h'(\xi) = \frac{1}{1+\xi} - \frac{1+\xi-\xi}{(1+\xi)^2}, \quad h(0) = 0$$

$$= \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{(1+\xi)^2} > 0 \text{ für } \xi > 0$$

$\Rightarrow h(\xi) > 0 \quad \forall \xi > 0$

$\Rightarrow g'(x) = h(1/x) > 0 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow g$ strikt mon. steigend $\Rightarrow e^g = f$ strikt mon. wachsend.

Jetzt: $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar, $f': I \to \mathbb{R}$

Def.: f heisst stetig diff'bar wenn $f': I \to \mathbb{R}$ stetig ist

f heisst zweimal stetig differenzierbar wenn f diffbar ist und f' (stetig) diffbar ist. Die Funktion $f'' := (f')'$ heisst 2. Ableitung von f

f heisst n-mal (stetig) diffbar (für $n \in \mathbb{N}$) wenn f diff'-bar ist und f' $(n-1)$-mal stetig diffbar ist.

Notation für höhere Ableitungen:

$f = f^{(0)}$

$f' = d/dx\, f = f^{(1)}$

$f'' = d/dx\, f' = d^2/dx^2\, f = f^{(2)}$

$\to d^n/dx^n\, f := d/dx\,(d^{n-1}/dx^{n-1}\, f) = d/dx\, f^{(n-1)} = f^{(n)}$

Korollar 4

$I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ offen. $x_0 \in I$ fest, $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar, f' sei an der Stelle x_0 diffbar.

i) x_0 lok Min $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \geq 0$

ii) x_0 lok Max $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \leq 0$

iii) $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ x_0 striktes lok Min

iv) $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ striktes lok Max

Bew.: iii) $f''(x_0) > 0$

$\overset{S2}{\Rightarrow} \exists \delta > 0$ s.d. $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ und

$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f'(x_0) < f'(x)$

$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f'(x_0) > f'(x)$

$\overset{K3}{\Rightarrow}$ f ist strikt mon. wachsend in $(x_0, x_0 + \delta)$

f ist strikt mon. fallend in $(x_0 - \delta, x_0)$

$\Rightarrow f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in I$ und

$f(x) > f(x_0)$

iv) genauso

i) folgt aus iv)

ii) folgt aus iii) ∎

zu Bsp. 18): $f(x) = x^4 - x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 2x \rightarrow$ kritische Punkte: $x_0 = 0$

$f''(x) = 12x^2 - 2 \qquad x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x_0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{lok Max} \\ f''(x_{1,2}) = 4 > 0 \Rightarrow \text{lok Min} \end{array}\right\} \text{jeweils strikt}$$

Übg.: Young's Ungleichung

$p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$; $a, b > 0$

$\Rightarrow ab \leq 1/p\, a^p + 1/q\, b^q$ (z.z.)

Hinweis: Definiere $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = 1/p\, x^p - bx$

Finden Sie das globale Minimum von f

Def.: $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heisst konvex, wenn

$\forall x_0, x_1 \in I \; \forall t \in [0,1]: \; f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t) f(x_0) + t(f(x_1))$

f heisst strikt konvex, wenn $\forall x_0, x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$ und $\forall t \in (0,1)$ gilt: $f(x_t) < (1-t)f(x_0) + t(f(x_1))$ mit $x_t = (1-t)x_0 + t x_1$.

Korollar 5

$f: I \to \mathbb{R}$ 2 mal diff'bar, I: offen

i) f konvex $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \;\forall x \in I \Leftrightarrow f'$ mon. wachsend

ii) $f''(x) > 0 \;\forall x \in I \Rightarrow f$ strikt konvex $\Leftrightarrow f'$ strikt mon. wachsend

Bem.: $\not\Leftarrow$ in ii), s. Bsp. $f(x) = x^4$

Bew.: ii) $f''(x) > 0 \;\forall x \in I \overset{K3}{\Rightarrow} f'$ ist strikt monoton wachsend

$$\overset{MWS}{\Rightarrow} \exists \xi \in (x_0, x_t) \text{ s.d. } f'(\xi) = \frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0}$$

$$\exists \eta \in (x_t, x_1) \text{ s.d. } f'(\eta) = \frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t}$$

$$\hookrightarrow f'(\eta) > f'(\xi)$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_t) - f(x_0)}{t(x_1 - x_0)}, \quad f'(\eta) = \frac{f(x_1) - f(x_t)}{(1-t)(x_1 - x_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_t) - f(x_0)}{t} < \frac{f(x_1) - f(x_t)}{1-t}$$

$$\Rightarrow (1-t)(f(x_t) - f(x_0)) < t(f(x_1) - f(x_t))$$

$$\Rightarrow f(x_t) < (1-t)f(x_0) + t f(x_1) \quad ✓$$

i) $f''(x) \geq 0 \overset{K3}{\Leftrightarrow} f'$ mon. wachsend

Beh.: f konvex $\Leftrightarrow f'$ mon. wachsend

„$\Leftarrow$" bereits gezeigt

„$\Rightarrow$" z.z.: f konvex $\Rightarrow f'$ mon. wachsend

$x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$. Wähle $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < h < \frac{x_1 - x_0}{2}$

Definiere $0 < t := \frac{h}{x_1 - x_0 - h} < 1$

$$\Rightarrow x_0 + h = (1-t)x_0 + t(x_1 - h)$$

$$x_1 - h = t(x_0 + h) + (1-t)x_1$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow f(x_0 + h) \leq (1-t)f(x_0) + t f(x_1 - h) \\ &\Rightarrow f(x_1 - h) \leq t f(x_0 + h) + (1-t) f(x_1) \end{aligned}\right\} \text{da } f \text{ konvex}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0+h) + f(x_1-h) \leq f(x_0) + f(x_1)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0+h) - f(x_0) \leq f(x_1) - f(x_1-h)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_1) - f(x_1-h)}{h}$$

$$\overset{h\to 0}{\Rightarrow} \quad f'(x_0) \leq f'(x_1) \quad ✓$$

zu ii) f strikt konvex $\Rightarrow$ f' strikt mon. wachsend

$\Rightarrow$ f' ist mon. wachsend nach i)

Ann.: f' nicht strikt mon. wachsend

$\Rightarrow \exists\, x_0, x_1 \in I$ s.d. $x_0 < x_1$ und $f'(x_0) = f'(x_1)$

$\Rightarrow \forall\, x \in [x_0, x_1]$ gilt $f'(x) = f'(x_0) =: c$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) \quad \forall\, x \in [x_0, x_1]$

Definiere $g: [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$. Dann ist g diffbar und $g'(x) = f'(x) = 0$ $\forall\, x \in [x_0, x_1] \overset{K2}{\Rightarrow} g = \text{const.} \Rightarrow g(x) = 0 \quad \forall\, x \in [x_0, x_1]$

$\Rightarrow \forall\, t \in [0,1]: f((1-t)x_0 + t x_1) = (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$

$\Rightarrow f$ ist nicht strikt konvex $\Rightarrow \perp$ $\blacksquare$

Korollar 6

$f: I\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sei diffbar. Dann gilt:

i) f konvex $\Leftrightarrow$ f' mon. wachsend

ii) f strikt konvex $\Leftrightarrow$ f' strikt mon. wachsend

Bew.: s. Beweis von Korollar 5

Def.: $I \subset \mathbb{R}$ offen.
$f: I \to \mathbb{R}$ heisst (strikt) konkav, wenn $-f$ (strikt) konvex ist. Korollare 5 & 6 lassen sich analog für konkave Funktionen definieren.

Bsp. 23)

a) $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\hookrightarrow f''(x) = f'(x) = f(x) = e^x > 0 \Rightarrow f$ strikt konvex

b) $f = \log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$\hookrightarrow f' = 1/x, \quad f'' = -1/x^2 < 0 \Rightarrow f$ strikt konkav

c) $f = x^4 \to f'' = 12x^2$

$\hookrightarrow f' = 4x^3$ strikt mon. wachsend $\Rightarrow f$ strikt konvex

__Lemma 4__ (Jensen)

$I \subset \mathbb{R}$ offen und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex (konkav)

$x_1, \ldots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$

$$\Rightarrow f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \underset{(\geq)}{\leq} \lambda_1 (f(x_1)) + \ldots + \lambda_n (f(x_n))$$

__Bew.:__ $n = 2$: s. Definition

$n \geq 3$: Induktion $\to$ Übg.

(■)

Bsp. 24) $f = \log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \log\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \geq \sum_i \lambda_i \log(x_i) \overset{\exp}{\Rightarrow} e^{\sum_i \lambda_i \log(x_i)} \leq \sum_i \lambda_i x_i$

$\to e^{\sum_i \lambda_i \log(x_i)} = \prod_i e^{\lambda_i \log(x_i)} = \prod_i x_i^{\lambda_i} \leq \sum_i \lambda_i x_i$

Zusammenfassung: Für $x_1, \ldots, x_n > 0$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$ gilt: (1): $x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$

Spezialfall 1): $\lambda_i = 1/n \Rightarrow$ (2): $\underbrace{(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}}_{\text{geom. Mittel}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}}_{\text{arithm. Mittel}}$

Spezialfall 2): $n = 2$: $p, q > 1$ s.d. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a, b > 0$

$\Rightarrow \lambda_1 := 1/p,\ \lambda_2 = 1/q,\ x_1 = a^p,\ x_2 = b^q$

$\Rightarrow x_1^{\lambda_1} = a$ und $x_2^{\lambda_2} = b$

$\Rightarrow$ (3): $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

Youngs Ungleichung

Lemma 5

$1 < p < \infty$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\|x\|_p := \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$. Definiere $q := p/(p-1)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ (4): $|\langle x, y\rangle| = \sum_i x_i y_i \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$ (Hölder - Ungleichung)

(5): $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (Minkowski - Ungleichung)

Bew.: Hölder: $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$\hookrightarrow \frac{|\sum_i x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \sum_i \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \overset{(3)}{\leq} \underbrace{\sum_i \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p}_{1/p} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q}\right)^q}_{1/q} = 1$$

✓

Minkowski: $x + y \neq 0$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_i |x_i + y_i|^p \leq \sum_i |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_i |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\overset{(4)}{\leq} (\|x\|_p + \|y\|_p) \underbrace{\left(\sum_i |x_i + y_i|^{\overbrace{q(p-1)}^{p}}\right)^{1/q}}_{\|x+y\|^{p-1}} \Rightarrow (5)$$

▨

Bem.: $\mathbb{R}^n \to [0, \infty) : x \mapsto \|x\|_p$ ist eine Norm-Funktion

Bem.: $\|x\|_\infty := \max(\{|x_1|, \dots, |x_n|\})$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen bez. $\|.\|_p \iff U \subset \mathbb{R}^n$ offen bez. $\|.\|_\infty$

Bsp. 25) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \end{cases}$

$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| \leq \left|\frac{x^2}{x}\right| \leq |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$ f diffbar in $x = 0$: $f'(0) = 0$

$x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$: f diffbar, f' nicht stetig

Übg.: $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar $\Rightarrow f'$ erfüllt den ZWS

SATZ 4 (verallg. MWS)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, f, g diffbar in (a,b) und $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow g(a) \neq g(b)$ und $\exists \xi \in (a,b)$ s.d.:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

Beweis: $g(a) \neq g(b)$ nach dem Satz von Rolle

Definiere $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$

$\Rightarrow h(b) = f(a) = h(a)$

$\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a,b) : h'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$

∎

Def.: (X,d): metr. Rm

i) $a < b$, $f: (a,b) \to X$ und $x \in X$. Wir sagen f konvergiert gegen x für $t \to b$, wenn:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d. $a < b - \delta$ und $\forall t \in \mathbb{R}$ $b-\delta < t < b \Rightarrow d(f(t), x) < \varepsilon$. Genauso für $t \to a$

ii) $f: (a, \infty) \to X$, $x \in X$. Wir sagen $f(t)$ konvergiert gegen x für $t \to \infty$, wenn:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists t_0 > a \; \forall t \in \mathbb{R}: t > t_0 \Rightarrow d(f(t), x) < \varepsilon$
Genauso für $f: (-\infty, b) \to X$ für $t \to -\infty$

SATZ 5 (l'Hôpital)

$a < b$. Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar und $g(t) \neq 0$, $g'(t) \neq 0$ $\forall t \in (a,b)$. Wir nehmen an, dass

I) $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} f(t) = 0 = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} g(t)$ oder II) $\lim\limits_{t \to a} f(t) = \infty = \lim\limits_{t \to a} g(t)$

Falls der Grenzwert $\lim\limits_{t \to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} \frac{f'(t)}{g'(t)}$. Genauso für $t \to b$, $t \to \infty$ und $t \to -\infty$

<u>Beweis:</u> Sei $A := \lim_{t \to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$

s.d. $\delta < b-a$ und $\forall t \in \mathbb{R}: a < t < a+\delta$

$\Rightarrow \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - A \right| < \varepsilon$

Sei $a < s < t < a+\delta \overset{S4}{\Rightarrow} \exists \xi \in (s,t)$ s.d.

$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)} \Rightarrow \forall a < s < t < a+\delta$:

$\left| \frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)} - A \right| < \varepsilon$

Fall 1) $\forall a < s < a+\delta$ gilt: $\left| \frac{f(s)}{g(s)} - A \right| < \varepsilon$
$t \to a$

d.h. $\lim_{s \to a} \frac{f(s)}{g(s)} = A$ ✓

Fall 2) Wir halten $s = a + \delta/2$ fest. Nun:

$$\left| \frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)} - \frac{f(t)}{g(t)} \right| = \left| \frac{f(s)g(t) - f(t)g(s)}{g(t)\,(g(s)-g(t))} \right|$$

$$= \left| \frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)} \cdot \frac{f(s)g(t) - f(t)g(s)}{g(t)\,(f(s)-f(t))} \right|$$

$$= \underbrace{\left| \frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)} \right|}_{\leq A+\varepsilon} \cdot \underbrace{\left| \frac{\frac{f(s)}{f(t)} - \frac{g(s)}{g(t)}}{\frac{f(s)}{f(t)} - 1} \right|}_{\substack{\to 0 \\ t \to a}}$$

$\Rightarrow \exists \delta' > 0$ s.d. $0 < \delta' < \delta/2$ und $\forall t \in (a, a+\delta')$:

$\left| \frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)} - \frac{f(t)}{g(t)} \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall t \in (a, a+\delta')$ gilt: $\left| \frac{f(t)}{g(t)} - A \right| < 2\varepsilon$ ∎

Bsp. 26)

1) $\lim_{t \to 1} \frac{4t^2 - 5t + 1}{7t^3 + 2t - 9} = \lim_{t \to 1} \frac{8t - 5}{21t^2 + 2} = \frac{3}{23}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{t \to 0} \frac{\log(\cosh(\alpha x))}{\log(\cosh(\beta x))} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ für $\alpha, \beta > 0$ (Übg.)

Erinnerung: Ein normierter reeller VR $(V, \|\cdot\|)$ heisst Banachraum, wenn er mit der Abstandsfkt.
$$d(u,v) := \|u - v\| \; ; \quad u,v \in V$$
vollständig ist.

Bsp. 1) $V = \mathbb{R}$, std-Norm $\equiv$ Betrag (K4/S3)

Bsp. 2) $V = \mathbb{R}^n$ mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1/2}$
(K4/S4)

Bsp. 3) $a < b$; $C([a,b]) := \{ u : [a,b] \to \mathbb{R} \mid u \text{ stetig} \}$
mit $\|u\| := \sup_{a \le t \le b} |u(t)|$ (K5/S3)

Def.: Sei V ein reeller VR mit zwei Norm-Fkt.: $\|\cdot\|, \|\cdot\|' : V \to [0, \infty)$ heissen äquivalent, wenn gilt $\exists\, c \geq 1 \; \forall v \in V$:
$1/c \, \|v\| \leq \|v\|' \leq c \|v\|$

Lemma 6

Seien $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ zwei äquivalente Norm-Fkt. auf einem reellen Vektorraum. Dann gilt: $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum $\Leftrightarrow$ $(V, \|\cdot\|')$ ist ein Banachraum

Bew.: Sei $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V. Sei $v \in V$. Dann gilt:
$\lim_{k \to \infty} \|v_k - v\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \|v_k - v\|' = 0$ ✓

(v_k) ist eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|$ $\Leftrightarrow$ (v_k) ist eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|'$

$\Rightarrow$ $(V, \|\cdot\|)$ ist vollständig $\Leftrightarrow$ $(V, \|\cdot\|')$ ist vollständig. ▨

Bsp.) $p \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n \to \|x\|_p := \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}$ Norm.-Fkt.
ebenfalls: $\|x\|_\infty := \max(\{|x_1|, \dots, |x_n|\})$
$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n \|x\|_\infty$, d.h.:

$(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ ist vollständig $\overset{L6}{\Rightarrow}$ $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ ist vollständig
$\overset{L6}{\Rightarrow}$ $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ ist vollständig $\forall p \geq 1$

SATZ 6

i) Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist äquivalent zu $\|.\|_2$
ii) $\mathbb{R}^n$ ist mit jeder Norm vollständig
iii) Jeder endlich-dimensionaler normierler VR $(V, \|.\|)$ ist ein Banachraum

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) : Lemma 6

ii) $\Rightarrow$ iii) : Jeder VR mit endl. Dimensionalität besitzt eine endl. Basis und ist daher isomorph zu $\mathbb{R}^n$, mit $n = \dim V$
Man kann: $e_1, \dots, e_n \in V$ Basis und
$\varphi : \mathbb{R}^n \to V : x \mapsto \sum_i x_i e_i$, darans:
φ bijektiv und linear
Nun: $(V, \|.\|_V)$
und $\mathbb{R}^n \to [0, \infty) : x \mapsto \|x\|_\varphi := \|\varphi(x)\|_V$
nach ii) ist $(\mathbb{R}^n, \|x\|_\varphi)$ vollst.
$\Rightarrow (V, \|.\|)$ ist vollst.

i) Sei $\mathbb{R}^n \to [0, \infty) : x \mapsto \|x\|$ eine Norm-Fkt.
Schritt 1): $\exists c > 0$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq c\|x\|_2$ (Beh.)
Bew.: Sei $e_i := (0, \dots, 0, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{1}, 0, \dots 0)$ für $i = 1, \dots, n$

Dann $c := \left(\sum_i \|e_i\|^2 \right)^{1/2}$

$$\to \|x\| = \|\sum_i x_i e_i\| \leq \sum_i |x_i| \, \|e_i\| \leq \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_i \|e_i\|^2}$$
$$= \|x\|_2 \cdot c \ \checkmark$$

Schritt 2): Die Abbildung $\mathbb{R}^n \to [0, \infty) : x \mapsto \|x\|$ ist stetig bzgl. $\|x\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ (Beh.)
Bew.: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\| \leq c\|x - y\|_2$
$\Rightarrow$ Die Abb. ist Lipschitz-stetig. $\checkmark$

Schritt 3): $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i^2 = 1\}$, dann: $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in S$: $\|x\| \geq \delta$ (Beh.)

Bew.: S ist abgeschlossen und beschränkt $\overset{K5/S20}{\Rightarrow}$ S ist kmpkt $\underset{\text{Schritt 2}}{\overset{K5/S21}{\Rightarrow}}$ $\exists\, x_0 \in S\ \forall x \in S$: $\underbrace{\|x_0\|}_{=\delta > 0} \leq \|x\|$ ✓

Schritt 4): $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\delta \|x\|_2 \leq \|x\|$ (Beh.)

Bew.: Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{x}{\|x\|_2} \in S \overset{\text{Schritt 3}}{\Rightarrow} \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq \delta \Rightarrow$

$\|x\| \geq \delta \|x\|_2$ ✓

▨

Übg.) Sei $(V, \|.\|)$ ein endl.-dimensionaler normierter VR.
$d: V \times V \to \mathbb{R}: (u,v) \mapsto \|u - v\|,\ (u,v) \in V^2$
Sei $K \subset V$, dann gilt: K kmpkt. $\Leftrightarrow$ K ist abg. und beschr.

Erweiterung: Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren:
$C^k([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig diffbar}\}$
Dies ist ein VR über $\mathbb{R}$ (L2 / K4L4)
Für $f \in C^k([a,b])$ definiere:
$$\|f\|_{C^k} := \sum_{k=0}^{k} \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)| < \infty$$
Übg.) Die Abb. $C^k([a,b]) \to [0,\infty): f \mapsto \|f\|_{C^k}$ ist eine Normfunktion

SATZ 7

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $(C^k([a,b]), \|f\|_{C^k})$ ein Banachraum.

Beweis:

IV: $k = 0$: $C^0([a,b]) = C([a,b])$, $\|f\|_{C^0} = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

$\to$ K5/S3: Dies ist ein Banachraum!

✓

$k=1$: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^1([a,b])$.

$\|f_n - f_m\|_{C^1} = \|f_n - f_m\|_{C^0} + \|f_n' - f_m'\|_{C^0}$

$\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen in $C^0([a,b])$

$\Rightarrow$ $\exists\, f, g \in C^0([a,b])$ s.d. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^0} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_{C^0} = 0$

Bemerkungen: 1) f_n konv. glm. gegen f $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^0} = 0$

2) Beh.*) $\Rightarrow$ $f \in C^1([a,b])$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^1} = 0$

Beh.*): f ist diffbar und $f' = g$

Bew.: Sei $x_0 \in [a,b] =: I$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall x \in I$: $m \geq n \Rightarrow |f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon/4$ (1)

Wähle $\delta > 0$ s.d. $\forall h \in \mathbb{R}$: $0 < |h| < \delta$ und $x_0 + h \in I \Rightarrow \left| f_n'(x_0) - \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} \right| < \varepsilon/4$ (2)

$\Rightarrow$ $\forall m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ $\forall x \in I$ gilt:

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \underbrace{|f_n'(x) - g(x)|}_{<\varepsilon/4} + \underbrace{|g(x) - f_m'(x)|}_{<\varepsilon/4} \overset{(1)}{<} \varepsilon/2$$

$\overset{\text{MWS}}{\underset{\text{Kor 1}}{\Rightarrow}}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ $\forall x, y \in I$ gilt:

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \leq \varepsilon/2\, |x - y|$$

$$\overset{x = x_0+h \in I}{\underset{y = x_0}{\Rightarrow}} \left| \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} - \frac{f_m(x_0+h) - f_m(x_0)}{h} \right| \leq \varepsilon/2$$

$$\overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \left| \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leq \varepsilon/2$$

$$\overset{0<|h|<\delta}{\underset{x_0+h\in I}{\Rightarrow}} \left| g(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leq \underbrace{|g(x_0) - f_n'(x_0)|}_{(1):<\varepsilon/4} +$$

$$\underbrace{\left| f_n'(x_0) - \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} \right|}_{(2):<\varepsilon/4} + \underbrace{\left| \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right|}_{\leq \varepsilon/2}$$

$\Rightarrow\ < \varepsilon$ ✓

IS: $\nu \geq 2$: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^\nu([a,b])$

(inkl. IA) $\Rightarrow (f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $C^1([a,b])$

für $k = 0, 1, \dots, \nu-1$

$\Rightarrow$ Fall $\nu = 1$: $\exists\, g_0, g_1, \dots, g_{\nu-1} \in C^1([a,b])$ s.d.

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n^{(k)} - g_k \|_{C^1} = 0 , \quad k = 0, 1, \dots, \nu-1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| f_n^{(k+1)} - g'_k \|_{C^0} = 0$$

$$\Rightarrow g'_k = C^0\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n^{(k+1)} = g_{k+1} \text{ für } k = 0, 1, \dots, \nu-1$$

$$\Rightarrow g'_0 = g_1 ,\ g'_1 = g_2 , \dots , g'_{\nu-1} = g_\nu$$

$\overset{\text{vollst. Ind.}}{\Rightarrow}$ g_0 ist ν-mal stetig diffbar und $g_0^{(k)} = g_k$

für $k = 0, 1, \dots, \nu$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| f_n - g_0 \|_{C^\nu} = 0$$

▨

Def.: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heisst glatt oder C^∞ wenn sie für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ν-mal stetig diffbar ist.

$$\to C^\infty(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist glatt} \} = \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} C^\nu(I)$$

Sei $a_0, a_1, \dots$ Folge in $\mathbb{R}$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei $f(x)$ $(*)$

Erinnerung: $\varrho = \varrho_f = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} > 0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ mit $-\varrho < x < \varrho$, sonst keine Konvergenz!

SATZ 8

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ s.d. Konvergenzradius $\varrho = \varrho_f > 0$ ist.

$\Rightarrow$ Die Fkt. $f: (-\varrho, \varrho) \to \mathbb{R}$ in $(*)$ ist glatt und:

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$, ..., $f^{(\nu)}(x) = \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-\nu+1) x^{n-\nu}$. Diese Potenzreihen haben alle den Konvergenzradius ϱ.

Beweis: Definiere $g_\nu(x) := \sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\dots(n-\nu+1)\, a_n x^{n-\nu}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)\dots(n+\nu)\, a_{n+\nu}}_{=:\, b_n} x^n$$

Was ist ϱ_{g_1}? $g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow h(x) := x g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$

$$\Rightarrow \varrho_h = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |n a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} n^{1/n} \cdot |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = \varrho$$

$\Rightarrow \varrho_h = \varrho_{g_1} = \varrho$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, b_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+\nu+1) a_{n+\nu+1} x^n$$

$$= g_{\nu+1}(x)$$

$\Rightarrow$ $g_{\nu+1}$ hat den gleichen Konvergenzradius wie g_ν

$\overset{\text{Ind.}}{\Rightarrow}$ $\varrho_{g_\nu} = \varrho \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

Wir wissen: Für $0 < r < \varrho$ konvergiert die Folge der Funktionen $f_n : [-r,r] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ gleichmässig gegen f.

Definiere $g_{1,n} : [-r,r] \to \mathbb{R}$ durch $g_{1,n}(x) := \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = f_n'(x)$

$\rightarrow$ $g_{1,n}$ konvergiert glm auf $[-r,r]$ gegen g_1.

$\overset{S7}{\Rightarrow}$ f ist diffbar auf $[-r,r]$ und $f' = g_1$ $\Rightarrow$ f ist diffbar auf $(-\varrho, \varrho)$ & $f' = g_1$ $\overset{\text{Ind.}}{\Rightarrow}$ f ist C^ν und $f^{(\nu)} = g_\nu$ ▨

Korollar:

f, ϱ wie in Satz 8 $\Rightarrow$ $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$, $0 \in I$

Bew.: folgt direkt aus Satz 8 (▨)

<u>Umkehrung:</u> $I \subset \mathbb{R}$ offen, $0 \in I$. $f: I \to \mathbb{R}$ sei glatt.

Die Potenzreihe

$$(Tf)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

heisst Taylorreihe von f an der Stelle $x = 0$.

Frage 1: Konvergiert die Taylorreihe, d.h. hat sie ein pos. Konvergenzradius?

Frage 2: Falls ja, stimmen Tf und f für hinreichend kleine $|x|$ überein?

Bsp. 1) Definiere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$

Sei $h > 0$: $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{e^{-1/h}}{h} = \dfrac{1}{h} e^{-1/h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$\Rightarrow$ f ist diffbar in $x_0 = 0$ und $f'(0) = 0$

$\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$ für $x > 0$, f' stetig in $x = 0$

$f''(x) = \left(1/x^4 - 2/x^3 \right) e^{-1/x}$, $x > 0$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$, $x > 0$

| Übg.: f ist C^∞, $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $Tf(x) = 0$

$\Rightarrow$ $Tf(x) \neq f(x) \ \forall x > 0$

<u>Def.:</u> $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall; $f: I \to \mathbb{R}$ C^∞, $x_0 \in I$

Das Taylorpolynom der Ordnung n von f an der Stelle x_0 ist die Fkt'n:

$$(T_{x_0}^n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Die Taylorreihe von f an der Stelle x_0 ist die Potenzreihe:

$$(T_{x_0}^\infty f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Frage: Wie gross ist die Abweichung

$$R_n(x) := f(x) - \left(T_{x_0}^n f\right)(x) =$$

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

SATZ 9

$I \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(I)$.

$\Rightarrow \forall x \in I,\ x \neq x_0\ \exists\, \xi \in I$ s.d.

i) $x_0 < \xi < x$, falls $x > x_0$ (1)

$x < \xi < x_0$, falls $x < x_0$

ii) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (2)

Korollar:

Falls $\sup_{\xi \in I} |f^{(n+1)}(\xi)| \leq C$, so gilt: $|R_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!}\ \forall x$

Lemma 7

$x_0 \in I$, $g \in C^{n+1}(I)$

(3): $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in I,\ x \neq x_0\ \exists\, \xi \in I$ s.d. (1) gilt und:

(4): $\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

Lemma 7 $\Rightarrow$ Satz 9:

$g := R_n : I \to \mathbb{R} \Rightarrow g \in C^{n+1}(I) \Rightarrow g$ erfüllt (3)

$\Rightarrow \forall x \in I\ \exists\, \xi \in I$ s.d. (3), (4) gelten, d.h.: $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ ▨

Beweis von Lemma 7 (für $x > x_0$)

via Induktion:

IV: $n=0$: $\exists \xi \in (x_0, x)$ s.d. $\frac{g(x)}{x-x_0} = g'(\xi)$

gilt gemäss MWS und da $g(x_0) = 0$. ✓

IA: Sei $n \in \mathbb{N}$. Lemma 7 gilt für $n-1$.

IS: Sei $g \in C^{n+1}(I)$ s.d. (3) gilt. Definiere $h : I \to \mathbb{R}$ durch

$$h(t) := g(x)(t-x_0)^{n+1} - g(t)(x-x_0)^{n+1}$$

$\Rightarrow$ $h(x) = 0 \overset{(3)}{=} h(x_0)$

$\Rightarrow$ Rolle: $\exists t \in (x_0, x)$ s.d. $h'(t) = 0$

$\Rightarrow$ $(n+1)\, g(x)\, (t-x_0)^n = g'(t)\,(x-x_0)^{n+1}$ (5)

Nach Induktionsannahme für g' existiert ein $\xi \in (x_0, t)$

s.d. $\frac{g'(t)}{(t-x_0)^n} = \frac{(g')^{(n)}(\xi)}{n!}$

$$\begin{array}{ccc} \frac{g'(t)}{(t-x_0)^n} & = & \frac{(g')^{(n)}(\xi)}{n!} \\ \| & (5) & \| \\ (n+1)\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} & = & \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{n!} \end{array}$$

▨

Bsp. 2) f Polynom vom Grade n

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i$

$\Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} a_k, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \Rightarrow (T_0^m f)(x) = f(x)$ für $m \geq n$

Genauso:

$(T_{x_0}^m f)(x) = f(x)\quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq n\ \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ siehe Satz 9! Restterm verschwindet für genügend grosse m, nämlich: $m \geq n$

Bsp. 3) $f(x) := (1-x)^{-1}, \quad x < 1$

$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow f^{(k)}(0) = k!$

$\Rightarrow (T_0^\infty f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = f(x)$ für $|x| < 1$

Bsp. 4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

nach Bsp. 3) für $|x| < 1$

Bsp. 5) $f(x) = e^x$

$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot 1/n! \Rightarrow T_{x_0}^\infty f = f$ auf ganz $\mathbb{R}$

Bsp. 6) $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}: x \mapsto \log(1+x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$

$\frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \frac{1}{k}, \quad k \geq 1$

$(T_0^\infty f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

$\Rightarrow (T_0^\infty f)(x) = f(x)$ für $-1 < x \leq 1$

(K5/S9)

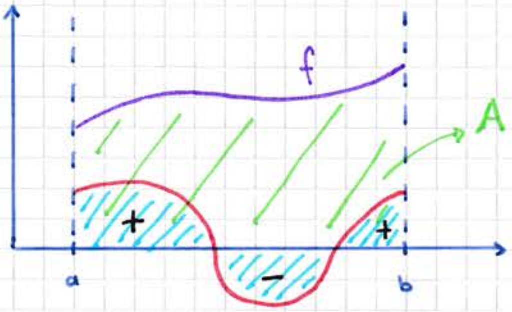
Übg.: mit S9 beweisen dass

$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ für $|x| < \frac{1}{2}$

Ende Kapitel 6 !

Kapitel 7: Integralrechnung

Idee: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$



Flächeninhalt = A

$\hookrightarrow A = \int_a^b f(x)\,dx$

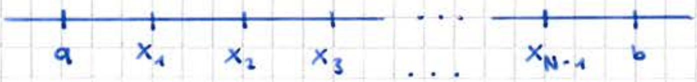
Dabei gibt es auch Flächen mit Vorzeichen!

Def.: Eine Partition des Intervalls $I = [a,b]$ ist eine endliche Teilmenge $P \subset I$ s.d. $a, b \in P$

Es bezeichne $\mathcal{P}(I) :=$ { Menge aller Partitionen von I }

$= \{ P \subset I \mid \#P < \infty, a \in P, b \in P \}$

Bem.: Wir können eine solche Partition $P \subset I$ in eindeutiger Weise in der Form $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ schreiben, s.d. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$



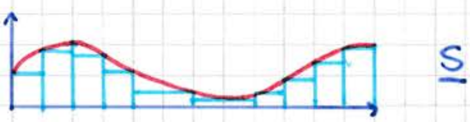
$N(P) := \#P - 1$, $\mu(P) := \max\limits_{k=1,\ldots,N} (x_k - x_{k-1})$: "Feinheit" der Partition

Ober- und Untersumme

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\} \in \mathcal{P}(I)$

$\overline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{N} \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1})$ "Obersumme"

$\underline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{N} \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1})$ "Untersumme"



Lemma 1

$f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt: $\sup\limits_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) \leq \inf\limits_{Q \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,Q)$

Bew.: 1. $\left.\begin{array}{l} P, Q \in \mathcal{P}(I) \\ P \subset Q \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P) \\ \underline{S}(f,Q) \geq \underline{S}(f,P) \end{array}$

2. $\forall P, Q \in \mathcal{P}(I)$ gilt:
$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f, P \cup Q) \leq \overline{S}(f, P \cup Q) \leq \overline{S}(f,Q)$

3. Sei $Q \in \mathcal{P}(I)$ festgehalten. Dann gilt:
$\sup\limits_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$

4. $\Rightarrow \sup\limits_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) \leq \inf\limits_{Q \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,Q)$ ▨

Def.: Eine beschränkte Funktion $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Riemann-integrierbar, wenn:

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) = \inf_{Q \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,Q) \quad (*)$$

Falls f Riemann-integrierbar ist, so wird die Zahl $(*)$ das (Riemann'sche) Integral von f genannt und mit:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) = \inf_{Q \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,Q)$$

bezeichnet.

Bsp. 1) $f(x) = h = \text{const.} \quad \forall x \in [a,b]$

$\overline{S}(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{N} h(x_k - x_{k-1}) = h(b-a) \approx$ "Länge mal Höhe"

$\underline{S}(f,P) = h(b-a) = \overline{S}(f,P) \Rightarrow \int\limits_a^b h\,dx = h(b-a)$

Bsp. 2) $f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \setminus [a,b] \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{S}(f,P) = 0, \ \overline{S}(f,P) = b-a \\ \Rightarrow f \text{ nicht Riemann-int.!} \end{array}$

Lemma 2

$f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Äquivalent sind:

i) f ist Riemann-integrierbar

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_0 \in \mathcal{P}(I)$ s.d. $\overline{S}(f,P_0) - \underline{S}(f,P_0) < \varepsilon$

Bew.: (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $P_0 \in \mathcal{P}(I)$ wie in ii)

$$\Rightarrow \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) \geq \underline{S}(f,P_0) > \overline{S}(f,P_0) - \varepsilon \geq \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,P) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_P \underline{S}(f,P) > \inf_P \overline{S}(f,P) - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \sup_P \underline{S}(f,P) \geq \inf_P \overline{S}(f,P) \overset{L1}{\geq} \sup_P \underline{S}(f,P) \Rightarrow \text{i) } \checkmark$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): $A := \int_a^b f(x)\,dx$, $\varepsilon > 0$

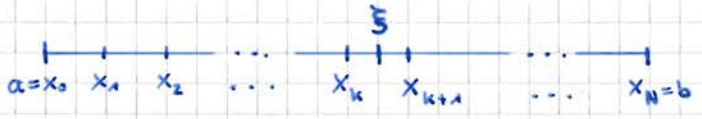
$$\Rightarrow \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ s.d. } \underline{S}(f,P) > A - \varepsilon$$
$$\exists Q \in \mathcal{P}(I) \text{ s.d. } \overline{S}(f,Q) < A + \varepsilon$$

$$\Rightarrow P_0 := P \cup Q$$
$$\Rightarrow \underline{S}(f,P_0) \geq \underline{S}(f,P) > A - \varepsilon$$
$$\overline{S}(f,P_0) \leq \overline{S}(f,Q) < A + \varepsilon$$
$$\Rightarrow \overline{S}(f,P_0) - \underline{S}(f,P_0) < 2\varepsilon \Rightarrow \text{ii) } \checkmark$$

$\blacksquare$

zum Beweis von L1:

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subset Q = P \cup \{\xi\}$



$$\rightsquigarrow \overline{S}(f,Q) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq k}} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f (x_j - x_{j-1}) + \underbrace{\sup_{[x_{k-1},\xi]} f \cdot (\xi - x_{k-1})}_{\leq \sup_{[x_{k-1},x_k]} f} + \underbrace{\sup_{[\xi,x_k]} f \cdot (x_k - \xi)}_{\leq \sup_{[x_{k-1},x_k]} f}$$

$\to$ die letzten beiden Terme: $\leq \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (\xi - x_{k-1} + x_k - \xi)$

$$= \sup_{[x_{k-1},x_k]} f (x_k - x_{k-1}) \overset{\text{Ind.}}{\Longrightarrow} \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$$

Lemma 3

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist Riemann-integrierbar

Bew.: $[a,b]$ kmpkt. $\Rightarrow$ f ist glm. stetig (per K5/S22), d.h.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow$
$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $(*)$

Sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Wähle $\delta > 0$ wie in $(*)$. Wähle
$P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \in \mathcal{P}([a,b])$ s.d.
$\mu(P) = \max\limits_{k=1,\dots,N} (x_k - x_{k-1}) < \delta$

$\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, N\} \; \forall x, x' \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt:
$|x - x'| < \delta$ und daher $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, N\}$ gilt: $\sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f \leq \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f + \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} (x_k - x_{k-1})$$
$$\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ L2: f ist Riemann-integr.

■

Übg.: Jede monotone Fkt. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.
Hinweis: Sei f mon. wachsend. Zeige:
$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq \mu(P) \cdot (f(b) - f(a))$

SATZ 1

$I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ kmpkt, $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt, $A \in \mathbb{R}$. Äquivalent sind:

i) f ist Riemann-integrierbar und $A = \int_a^b f(x)\,dx$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists P \in \mathcal{P}(I)$ s.d. $A - \varepsilon < \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) < A + \varepsilon$

iii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall P \in \mathcal{P}(I)$ gilt: $\mu(P) < \delta \Rightarrow A - \varepsilon < \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) < A + \varepsilon$

iv) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \in \mathcal{P}(I) \; \forall \xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{k=1,\dots,N} (x_k - x_{k-1}) < \delta \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \; \forall k \end{array}\right\} \Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Bem.: Kurzschreibweise für iv):
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\mu(P) \to 0 \\ P = \{x_0, \dots, x_N\} \\ x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k}} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\text{"}\Delta x\text{"}}$$

Historisch: $\sum \Delta x \longleftrightarrow \int dx$

Die Summen auf der rechten Seite der obigen Gleichung heissen Riemannsche Summen.

Bem.: $\underline{S}(f,P) \leq \sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \overline{S}(f,P)$

$\forall P = \{x_0, \dots, x_N\} \in \mathcal{P}(I) \; \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \; \forall k$

D.h.: iii) $\Rightarrow$ iv)

Bem.: iv) $\Rightarrow$ iii): $P := \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \in \mathcal{P}(I)$ festhalten.

$$\sup_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \overline{S}(f,P)$$

iv) $\Rightarrow \overline{S}(f,P) \leq A + \varepsilon$, $\underline{S}(f,P) \geq A - \varepsilon \Rightarrow$ iii)

Bem.: i) $\Leftrightarrow$ ii): Genau wie in Lemma 2

Nun: Wie zeigt man ii) $\Leftrightarrow$ iii)? Aber zuerst:

Lemma 4

$I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wähle $M > 0$ s.d. $-M \leq f(x) \leq M \; \forall x \in I \Rightarrow \forall P, Q \in \mathcal{P}(I)$: $\overline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q) + 4 \cdot M \cdot N(Q) \mu(P)$ und: $\underline{S}(f,P) \geq \underline{S}(f,Q) - 4M \cdot N(Q) \mu(P)$

Lemma 4 $\Rightarrow$ Satz 1

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $Q \in \mathcal{P}(I)$ s.d. $A - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) < A + \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Wähle $M > 0$ s.d. $-M \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$ (2)

Wähle $\delta > 0$ s.d. $4MN(Q)\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta$ gilt:

$$\overline{S}(f,P) \underset{(2)}{\overset{L4}{\leq}} \underbrace{\overline{S}(f,Q)}_{< A + \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{4MN(Q)\underbrace{\mu(P)}_{<\delta}}_{\underset{(3)}{<}\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\leq \varepsilon + A \quad ✓$$

Genauso $\underline{S}(f,P) > A - \varepsilon \quad \forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta$

iii) $\Rightarrow$ ii): "trivial" ∎

Bew. v. Lemma 4

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$

$N = N(P)$, $\mu(P) = \max\limits_{1 \leq k \leq N} (x_k - x_{k-1})$

Für $k = 1, \dots, N(P)$ definiere: $h_k^{\pm} := \begin{cases} \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f, & \text{falls } [x_{k-1}, x_k] \cap Q = \emptyset \\ \pm M, & \text{falls } [x_{k-1}, x_k] \cap Q \neq \emptyset \end{cases}$

Der 2. Fall kann höchstens $2N(Q)$-mal auftreten.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N(P)} (h_k^+ - h_k^-) \leq 4 \cdot M \cdot N(Q)$$

$$\sum_{k=1}^{N(P)} h_k^- (x_k - x_{k-1}) \leq \overline{S}(f, P \cup Q) \overset{L1}{\leq} \overline{S}(f, Q)$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{N(P)} \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{N(P)} h_k^+ (x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{N(P)} h_k^- (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{N(P)} (h_k^+ - h_k^-)(x_k - x_{k-1}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{N(P)} h_k^-(x_k - x_{k-1})}_{\leq \overline{S}(f,Q)} + \sum_{k=1}^{N(P)} \underbrace{(h_k^+ - h_k^-)}_{>0} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\leq \mu(P)}$$

$$\leq \overline{S}(f,Q) + \mu(P) \cdot \sum_{k=1}^{N(P)} (h_k^+ - h_k^-) \leq \overline{S}(f,Q) + \mu(P)\, 4MN(Q)$$

SATZ 2

$I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a<b$; $f, g: I \to \mathbb{R}$ Riemann-intgbar, $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$.

Dann gilt:

i) $f+g$, fg, λf, $|f|^p$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ sind Riemann-intgbar

ii) $$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

iii) $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in I \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

iv) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

v) $a < c < b \Rightarrow$ Die Fkten $f|_{[a,c]}$, $f|_{[c,b]}$ sind Riemann-intgbar und $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Bem.: Aus S1i) und ii) folgt, dass der Rm $\mathcal{R}(I) := \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Riemann-intgbar} \}$ ein reeller VRm ist und dass die Abb. $\mathcal{R}(I) \to \mathbb{R}: f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ linear ist.

Lemma 5

$I = [a,b]$. $f, g: I \to \mathbb{R}$ Riemann-intgbar. $M > 0$ s.d. $|f(t)|, |g(t)| \leq M \ \forall t \in I$. Sei $\varphi: [-M, M]^2 \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, d.h. $\exists L > 0 \ \forall x, y, x', y' \in [-M, M]$ gilt:
$|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')| \leq L|x-x'| + L|y-y'|$
Definiere $h: I \to \mathbb{R}$ durch $h(t) := \varphi(f(t), g(t))$ für $t \in I$
$\Rightarrow$ h ist Riemann-intgbar

Bew.: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta$ gilt:

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2L}$$
$$\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Wähle $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\} \in \mathcal{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta$
Sei $k \in \{1, \dots, N\}$ und $t, t' \in [t_{k-1}, t_k] =: I_k$
$h(t) - h(t') \leq L|f(t) - f(t')| + L|g(t) - g(t')|$

$$\sup_{I_k} h - \inf_{I_k} h \leq L(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f) + L(\sup_{I_k} g - \inf_{I_k} g)$$

$$\overset{(t_k - t_{k-1})}{\Rightarrow} \overline{S}(h,P) - \underline{S}(h,P) \leq L(\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)) + L(\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P)) < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Beweis von Satz 2:

Wähle $M > 0$ s.d. $|f(t)| \leq M$, $|g(t)| \leq M \ \forall t \in I$
Betrachte die folg. Fkten $\varphi: [-M, M]^2 \to \mathbb{R}$:

- $\varphi(x,y) = x + y$, $L = 1$ (Lipsch.-stet.) $h(t) = \varphi(f(t), g(t)) = f(t) + g(t)$, $t \in I$
- $\varphi(x,y) = xy$, $h = fg$; $|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')| = |xy - x'y'|$
  $\leq |x'(y-y')| + |(x-x')y| \leq M|x-x'| + M|y-y'|$, $L = M$
- $\varphi(x,y) = \lambda x$, $h = \lambda f$; Lipsch.-stet.: $L = |\lambda|$
- $\varphi(x,y) = |x|^p$, $p \geq 1$; Lipsch.-stet.: $L = pM^p$ (MWS, K1)
- $\left.\begin{array}{l}\varphi(x,y) = \max\{x,y\} \\ \varphi(x,y) = \min\{x,y\}\end{array}\right\}$ Lipsch.-stet.: $L = 1$ $\overset{L5}{\Rightarrow}$ i) ✓

ii) $P_N = \{t_{0,N}, t_{1,N}, \dots, t_{N,N}\}$, $t_{k,N} := a + \frac{k}{N}(b-a)$

→ Riemannsche Summen;

$$\begin{tikzcd}
\sum_{k=1}^{N} f(t_{k,N})\frac{1}{N} \arrow[d, "S1"', "N\to\infty"] & + & \sum_{k=1}^{N} g(t_{k,N})\frac{1}{N} \arrow[d, "S1"', "N\to\infty"] \arrow[r, "S1", "N\to\infty"'] & \int_a^b (f(t)+g(t))\,dt \quad (*) \arrow[d, bend left] \\
\int_a^b f(t)\,dt & + & \int_a^b g(t)\,dt & = (*)
\end{tikzcd} \qquad \checkmark$$

Ebenso: $\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$ $\checkmark$

iii) $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{S}(f,P) \leq \overline{S}(g,P)$$

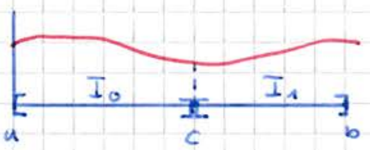
$$\Rightarrow \forall P \in \mathcal{P}(I) \text{ gilt: } \int_a^b f(x)\,dx \leq \inf_{P\in\mathcal{P}(I)} \overline{S}(g,P) = \int_a^b g(x)\,dx \quad \checkmark$$

iv) $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in I$

$$\overset{ii),\,iii)}{\Rightarrow} -\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \checkmark$$

v)



$f|_{[a,c]} =: f_0 : [a,c] = I_0 \to \mathbb{R}$

$f|_{[c,b]} =: f_1 : [c,b] = I_1 \to \mathbb{R}$

Sei $\varepsilon > 0$. $\overset{S1}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta$ gilt: $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$. Wähle $P_0 \in \mathcal{P}(I_0)$, $P_1 \in \mathcal{P}(I_1)$ mit $\mu(P_0) < \delta$ und $\mu(P_1) < \delta$. Dann: $P := P_1 \cup P_0 \Rightarrow \mu(P) < \delta$

$\Rightarrow \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

$\Rightarrow \overline{S}(f_0,P_0) + \overline{S}(f_1,P_1) - \underline{S}(f_0,P_0) - \underline{S}(f_1,P_1) < \varepsilon$

$\Rightarrow \overline{S}(f_0,P_0) - \underline{S}(f_0,P_0) < \varepsilon$, $\overline{S}(f_1,P_1) - \underline{S}(f_1,P_1) < \varepsilon$

$$\Rightarrow A_0 := \int_a^c f(x)\,dx \ , \quad A_1 := \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \underline{S}(f_0, P_0) + \underline{S}(f_1, P_1) \leq A_0 + A_1 \leq \overline{S}(f_0, P_0) + \overline{S}(f_1, P_1)$$

$$\Rightarrow \underline{S}(f, P) \leq \underbrace{A_0 + A_1}_{= \int_a^b f(x)\,dx} \leq \overline{S}(f, P) \quad , \forall P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } c \in P$$

■

SATZ 3

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Sei $f_n \in \mathcal{R}(I)$ eine Folge Riemann-intgbare Fkten, die gleichmässig gegen $f: I \to \mathbb{R}$ konvergieren.
$\Rightarrow$ f ist Riemann-intgbar und:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx$$

Bem.: Wenn $\exists M > 0$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I : |f_n(x)| \leq M$ und $f \in \mathcal{R}(I)$, dann genügt pkt.-weise Konvergenz in Satz 3.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

1. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ $\forall x \in I$ gilt:
$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ (1)

2. Wähle $P \in \mathcal{P}(I)$ s.d. $\overline{S}(f_{n_0}, P) - \underline{S}(f_{n_0}, P) < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

$$\Rightarrow f(x) \overset{(1)}{\leq} f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{bzw.} \quad f(x) \overset{(2)}{\geq} f_{n_0}(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f_{n_0}, P) + \frac{\varepsilon}{4} \ , \quad \underline{S}(f, P) \geq \underline{S}(f_{n_0}, P) - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f_{n_0}, P) - \underline{S}(f_{n_0}, P) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(2)}{<} \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f ist Riemann-intgbar ✓

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \geq n_0$$

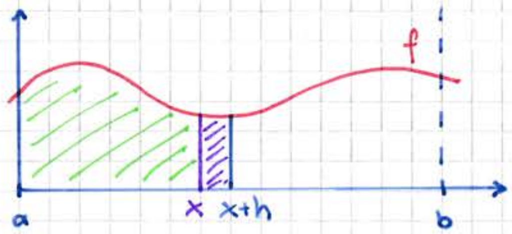
■

SATZ 4 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Definiere $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ durch:

$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $a \leq x \leq b$. Dann gilt: F ist stetig differenzierbar und $F' = f$.

Beweis:



$h > 0$: $F(x+h) - F(x)$

$$= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \overset{S2}{\underset{(ii)}{=}} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \frac{1}{h} \left| F(x+h) - F(x) - hf(x) \right|$$

$$= \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt \right| \overset{S2}{\underset{(ii)}{=}} \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right|$$

$$\overset{S2}{\underset{(iv)}{\leq}} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt \overset{S2}{\underset{(iii)}{\leq}} \sup_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)|$$

Für $a \leq x < x+h \leq b$ gilt:

1) $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \sup_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)|$

Genauso gilt für $a \leq x-h < x \leq b$

2) $\left| \frac{F(x) - F(x-h)}{h} - f(x) \right| \leq \sup_{x-h \leq t \leq x} |f(t) - f(x)|$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall t \in [a,b]$ mit $|t - x| < \delta$ gilt: $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

$\overset{1)}{\underset{2)}{\Longrightarrow}}$ $\forall h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \delta$ gilt: $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$ ▨

Korollar 1

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $F' = f$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F\Big|_a^b$$

Bew.: Sei $F_0: [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_0(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

$\overset{S4}{\Rightarrow}$ F_0 ist stetig diffbar und $F_0' = f$

$\Rightarrow$ $F - F_0$ ist stetig diffbar $(F-F_0)' = 0$

$\overset{MWS}{\Rightarrow}$ $F - F_0 = \text{const.}$

$\Rightarrow$ $F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ ∎

Def.: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f wenn F stetig diffbar und $F' = f$ ist, bzw. $F(x) = \int f(x)\,dx$

SATZ 4 sagt: Jede stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.

MWS $\Rightarrow$ Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann hat jede andere Stammfunktion von f die Form $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Bsp. 1) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x \leq 1$

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad F' = f$$

$$\overset{K1}{\Rightarrow} \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$\overset{!!}{=} f(x): \; f: [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

Repetition eines der vorherigen Sätze ...

Bsp. 2) $f(x) = x^a$; $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ fest und $a \neq -1$

$$\Rightarrow \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad , \quad x > 0$$

Bsp. 3) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$, $x \neq 0$

für $x > 0$ s. K6 / smth

für $x < 0$ Übg.

Bsp. 4) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$

$\arctan(x) = \tan^{-1}(x) : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

$\to \frac{d}{dx} \tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (K6 / Bsp. 16)

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)$$

Bsp. 5) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-x}$

$-1 < x < 1$

$= \frac{1}{2} \log(x+1) - \frac{1}{2} \log(1-x)$

$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \overset{!}{=} \tanh^{-1}(x) = \operatorname{artanh}(x)$

$\Rightarrow$ Beh.: $\tanh\left(\frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = x$

Bew.: Übg.

Bsp. 6) $\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx}$

Bsp. 7) $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$, $\int \cos(x) dx = \sin(x)$

Bsp. 8) $\int \sinh(x) dx = \cosh(x)$, $\int \cosh(x) dx = \sinh(x)$

Bsp. 9) $\sin : (-\pi/2, \pi/2) \to (-1, 1)$ bijektiv

$\sin'(t) = \cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$

$\sin^{-1} : (-1,1) \to (-\pi/2, \pi/2)$ stetig diffbar

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (K6/S1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) = \arcsin(x), \quad -1 < x < 1$$

Bsp. 10) $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\sinh'(t) = \cosh(t) = \sqrt{1+\sinh^2(x)} > 0$

$\Rightarrow \sinh$ bijektiv, $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar

und: $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $(K6/S1)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Bsp. 11) $\cosh : (0, \infty) \to (1, \infty)$

$\cosh'(t) = \sinh(t) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$

$\Rightarrow \cosh$ bijektiv. $\cosh^{-1} : (1, \infty) \to (0, \infty)$ diffbar

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} = \operatorname{arcosh}(x), \quad x > 1$$

Bsp. 12) $\int e^{-x^2} dx = ?$ $\to$ keine explizite Formel!

<u>SATZ 5</u> (partielle Integration)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar. Es gilt die folgende Formel:

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$
$$= fg\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

Beweis: $F = f \cdot g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig diffbar

$F' = f'g + fg'$

$$\overset{S4}{\underset{K1}{\Longrightarrow}} \int_a^b \big(f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \big)\, dx = F(b) - F(a)$$

∎

Bsp. 13) $\int \underbrace{x^n}_{f} \underbrace{e^{cx}}_{g'} dx = f \cdot g - \int f' g \quad , \quad g = \frac{1}{c} e^{cx}$, $f' = n x^{n-1}$

$$= \frac{x^n}{c} e^{cx} - \int \frac{n}{c} x^{n-1} e^{cx}\, dx = \frac{x^n}{c} e^{cx} - \frac{n}{c} \frac{x^{n-1}}{c} e^{cx} +$$

$$\frac{n}{c} \frac{n-1}{c} \int x^{n-2} e^{cx}\, dx = \dots \text{ usw.!}$$

$$\int x^n e^{cx}\, dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!\; x^{n-k}}{(n-k)!\; c^{k+1}} e^{cx}$$

SATZ 6 (Substitution)

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar. $\varphi([a,b]) \subset I$, I: Intervall.
$f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\Rightarrow \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

Ab heute: Notation: $\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx$

und: $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

Grund: $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$. Wähle $a, b, c \in \mathbb{R}$ entsprechend!

Beweis: Definiere $F: I \to \mathbb{R}$ durch:

$$F(x) := \int_{\varphi(a)}^{x} f(\xi)\, d\xi \quad , \quad x \in I$$

$\overset{S4}{\Longrightarrow}$ $F: I \to \mathbb{R}$ ist stetig diffbar & $F' = f$

$\overset{K6}{\underset{L3}{\Longrightarrow}}$ (KR) $F \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig diffbar und

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

$\overset{S4}{\underset{K1}{\Longrightarrow}}$ $$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$ ▨

Korollar (2)

i) $$\int_a^b f(t+c)\, dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$$

ii) $$\int_a^b f(ct)\, dt = \int_{ac}^{bc} \frac{1}{c} f(x)dx$$

iii) $$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt = \log(\varphi(b)) - \log(\varphi(a))$$

Bew.: S6 mit:

i) $\varphi(t) = t + c$

ii) $\varphi(t) = tc$

iii) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $\varphi : [a,b] \to (0, \infty)$ ▨

Bem.: Notation: $\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}$, $\varphi'(t)\, dt = dx$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

dt wird als "eigenständiger Ausdruck" gehandelt und entsprechend algebraisch manipuliert.

SATZ 7

$I \subset \mathbb{R}$ offen. $f: I \to \mathbb{R}$, C^{n+1} - Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$.

$\Rightarrow$ $\forall x_1, x_0 \in I$ gilt:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad (*)$$

Beweis: Vollst. Induktion

n = 0: $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$ (Satz 4)

n ≥ 1: (*) gelte für n-1

$$f(x) - (T_{x_0}^n f)(x) = f(x) - (T_{x_0}^{n-1} f)(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\overset{IA}{=} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)\right)dt\,; \quad \varphi(t) := -\frac{(x-t)^n}{n!},\ \varphi'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\psi(t) := f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)$$

$$\psi'(t) = f^{(n+1)}(t)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\psi(t)\,dt \overset{S5}{=} \underbrace{\varphi(x)}_{0}\psi(x) - \varphi(x_0)\underbrace{\psi(x_0)}_{0} - \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\psi'(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

∎

Bsp. 14) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = x$

$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = 1$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,dx = f \cdot g - \int f'g$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}(x), \quad -1<x<1$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}(x)\right), \quad -1<x<1$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ Fläche des Einheitskreises ist π !

Bsp. 15) $$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1}(x)\right), \quad x\in\mathbb{R}$$

Bsp. 16) $$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} + \cosh^{-1}(x)\right), \quad x>1$$

Bsp. 17) Was ist $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx$?

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx \overset{S2}{\underset{\omega)}{=}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x+\pi/2)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} (\sin^2(x)+\cos^2(x))\,dx = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$$

Bsp. 18) π^2 ist irrational (Beh.)

Annahme: $\pi^2 = a/b$, $a,b\in\mathbb{N}$

Wähle $n\in\mathbb{N}$: $\pi a^n/n! < 1$. Definiere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

durch : $f(x) := 1/n!\; x^n(1-x)^n = 1/n! \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k$, $c_k\in\mathbb{Z}$

$$f^{(k)}(0) = \left\{\begin{array}{l} 0, \quad k < n \\ k!/n!\, c_k\,, \quad k = n, n+1, \dots, 2n \\ 0\,, \quad k > 2n \end{array}\right\} \in \mathbb{Z}$$

$$f(1-x) = f(x) \Rightarrow f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Definiere $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := b^n \left(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) \pm \dots (-1)^n f^{(2n)}(x) \right)$$
$$= a^n f(x) - a^{n-1} b\, f''(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\, b^n,$$
da $b\pi^2 = a$

$\Rightarrow F(0), F(1) \in \mathbb{Z}$

Definiere $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch:

$$G(x) := F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)$$
$$\Rightarrow G'(x) = \left(F''(x) + \pi^2 F(x)\right)\sin(\pi x)$$
$$= \pi^2 a^n f(x) \sin(\pi x)$$

$$A := \pi a^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 G'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(G(1) - G(0)\right)$$
$$= F(1) - F(0) \in \mathbb{Z}$$

Es gilt aber $0 \leq f(x) \leq 1/n! \quad \forall\, x \in [0,1]$

$$\Rightarrow 0 < \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cup}{A}} \leq \pi a^n/n! < 1 \qquad \Rightarrow \bot \qquad \Rightarrow \checkmark$$

Bsp. 19) $$\int \frac{x\,dx}{x^2+ax+b} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+a)\,dx}{x^2+ax+b} - \frac{1}{2}\int\frac{a\,dx}{x^2+ax+b},$$

da $2x + a = (x^2+ax+b)'$

$$\overset{S6}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+ax+b) - \frac{a}{2}\int\frac{dx}{x^2+ax+b}\;; \quad A := \sqrt{b - a^2/4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \int\frac{dx}{(x+\frac{a}{2})^2 + A^2} = \frac{1}{A}\int\frac{1/A\,dx}{(\frac{x}{A}+\frac{a}{2A})^2+1}$$

$y = \dfrac{x}{A} + \dfrac{a}{2A}, \quad dy = dx/A \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{A}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{A}\tan^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x\,dx}{x^2+ax+b} = \frac{1}{2}\log(x^2+ax+b) - \frac{a}{2\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\tan^{-1}\left(\frac{x+a/2}{\sqrt{b-\frac{a^2}{2}}}\right)$$

Bsp. 20) (Wallis'sche Produkt)

$$\int \cos^n(x)\,dx = \int \underbrace{\cos^{n-1}(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}\,dx = \dots$$

$$f'(x) = -(n-1)\cos^{n-2}(x)\sin(x), \quad g(x) = \sin(x)$$

$$\dots = \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\,dx$$

$$= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int\cos^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\cdot$$

$$\int \cos^n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^n(x)\,dx = \frac{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(x)\,dx$$

$$c_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx > 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{n-1}{n}c_{n-2}, \ n \geq 2$$

$$c_0 = \pi/2$$

$$c_1 = 1$$

$$\Rightarrow c_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot \dots \cdot \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\dots\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}}_{\omega_n \ (K4/\ Bsp.\ 9)}\Big)^{-1}$$

Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$

Bew.: Für $0 \leq x \leq \pi/2$ gilt: $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x) \geq \cos^{2n+1}(x) \geq$

$\cos^{2n+2}(x) \Rightarrow c_{2n} \geq c_{2n+1} \geq c_{2n+2}$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \longrightarrow 1$$

$$W_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \longrightarrow \pi/2$$

$$\overset{\text{K4}}{\underset{\text{Bsp. 9}}{\Rightarrow}} \quad \lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n} \frac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n}} = 1$$

Neues Thema:

$I = [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad a < b$

$C(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \}$

$$\| f \|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

Beh.: Die Abb. $C(I) \to \mathbb{R} : f \mapsto \|f\|_p$ ist eine Normfkt.

D.h.:
- $\|f\|_p \geq 0 \quad \forall f \in C(I)$
- $\|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall x \in I$
- $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$ (Übg.) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall f \in C(I)$
- $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \forall f,g \in C(I)$

Und: $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\, g(x) \, dx \quad , \quad f,g \in C(I)$

SATZ 8

$1/p + 1/q = 1, \quad 1 < p,q < \infty$. $\forall f,g \in C(I)$ gilt folgendes:

i) $(f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I) \wedge \left(\int_a^b f(x)dx = 0 \right) \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in I$

ii) Hölder: $|\langle f,g \rangle| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

iii) Minkowski: $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Beweis:

i) Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfkt. von f. F diffbar und $F' = f \geq 0 \Rightarrow F(a) \leq F(x) \leq F(b) \quad \forall x \in [a,b]$ und

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad F = \text{const.}, \quad F(x) = F(a) \;\forall x \in I$$

$$\Rightarrow \quad f = F' = 0 \quad ✓$$

ii) o.B.d.A.: $\langle f, g \rangle \neq 0 \Rightarrow f \neq 0,\; g \neq 0$

$$\overset{i)}{\Rightarrow} \|f\|_p > 0, \quad \|g\|_q > 0, \quad A := \|f\|_p, \quad B := \|g\|_q$$

$$\left| \int_a^b \frac{f(x)\,g(x)}{A \cdot B}\,dx \right| \leq \int_a^b \frac{|f(x)|}{A} \cdot \frac{|g(x)|}{B}\,dx \leq \int_a^b \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{A^p}\,dx + \int_a^b \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{B^q}\,dx = \frac{1}{p}\frac{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_a^b |g(x)|^q\,dx}{B^q} = 1 \quad ✓$$

iii) Minkowski: Übg. ▨

Bem.: $(C(I), \|.\|_p)$ ist nicht vollständig, es ist also kein Banachraum.

Def.: $I \subset \mathbb{R}$ offen. Eine Fkt. $f: I \to \mathbb{R}$ heisst lokal Riemann-integrierbar, wenn für jedes kompakte Teilintervall $K \subset I$, die Einschränkung $f|_K : K \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

Bem.: Jede stetige Fkt. $f: I \to \mathbb{R}$ ist lokal Riemann-integrierbar

Def.: Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $f: I \to \mathbb{R}$ lokal Riemann-intgbar. Wir definieren das Integral von f über I wie folgt:

1. $I = (a, b)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \text{falls der Limes existiert.}$$

2. $I = (a, \infty)$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{a+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx, \quad \text{falls der Limes existiert.}$$

3. $I = (-\infty, b)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{-R}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

4. $I = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Bsp. 21) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}$, $x > 0$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $s > 0$

$$\rightarrow \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^s} = \frac{1-\varepsilon^{1-s}}{1-s} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-s} \quad \text{falls } 0 < s < 1$$

$$\rightarrow \int_{1}^{R} \frac{dx}{x^s} = \frac{R^{1-s}-1}{1-s} \xrightarrow{R \to \infty} \frac{1}{s-1} \quad \text{falls } s > 1$$

Bsp. 22) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^{-1}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{R} x^{-1}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} (\log(R) - \log(\varepsilon))$

$\displaystyle = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)$ "$= \infty$", Grenzwert existiert nicht!

Bsp. 23) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) = \arctan(x)$

$$\left.\begin{aligned} \int_{0}^{R} \frac{dx}{1+x^2} &= \tan^{-1}(R) \xrightarrow{R \to \infty} \pi/2 \\ \int_{-R}^{0} \frac{dx}{1+x^2} &= -\tan^{-1}(-R) \xrightarrow{R \to \infty} \pi/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow \pi \; ✓$$

Bsp. 24) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} e^{-t}\,dt = \lim_{R \to \infty} (1 - e^{-R}) = 1$,

da $\displaystyle\int e^{-t}\,dt = -e^{-t} + c$, $c \in \mathbb{R}$

Die Gamma-Funktion

$\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty) \; : \; x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t} \, dt$, dieser Grenzwert existiert für jedes $x > 0$ (Übg.)

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\varepsilon^R t^x e^{-t} \, dt}_{\to \Gamma(x+1)} \overset{S5}{=} \underbrace{- t^x e^{-t} \Big|_\varepsilon^R}_{\to 0} + \underbrace{\int_\varepsilon^R x t^{x-1} e^{-t} \, dt}_{\to x\Gamma(x)} \; ; \text{ für } \varepsilon \to 0 \text{ und } R \to \infty$$

SATZ 9

$\forall x, y > 0 \;\; \forall \lambda \in (0,1)$ gilt:

i) $\Gamma(1) = 1$

ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

iii) $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$

bzw. $\log \circ \Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist konvex

Beweis:

i) & ii) ✓ (s. Bsp)

iii) $p = \frac{1}{\lambda}, \; q = \frac{1}{1-\lambda} \;\; \Rightarrow \;\; 1 < p, q < \infty, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\overset{S8}{\Rightarrow} \int_\varepsilon^R t^{\lambda x + (1-\lambda) y - 1} e^{-t} \, dt = \int_\varepsilon^R (t^{x-1} e^{-t})^\lambda (t^{y-1} e^{-t})^{1-\lambda} \, dt$$

$$\overset{S8}{\leq} \underbrace{\left(\int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t} \, dt \right)^{1/p}}_{\to \Gamma(x)^\lambda} \underbrace{\left(\int_\varepsilon^R t^{y-1} e^{-t} \, dt \right)^{1/q}}_{\to \Gamma(y)^{1-\lambda}} \quad \text{für } \varepsilon \to 0 \text{ und } R \to \infty$$

■

Korollar

i) $\log \circ \Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ ist konvex

ii) Die Gammafunktion ist stetig

<u>Bew.:</u> Übg.! Beachte: jede konvexe Funktion ist stetig

SATZ 10 (Bohr - Mollerup 1922)

Sei $F: (0,\infty) \to (0,\infty)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

i) $F(1) = 1$

ii) $F(x) \cdot x = F(x+1) \quad \forall\, x > 0$

iii) $F(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq F(x)^{\lambda} \cdot F(y)^{1-\lambda} \quad \forall\, x,y > 0 \ \forall\, \lambda \in (0,1)$

$\Rightarrow \ \forall\, x > 0 : \ F(x) := \Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$

<u>Beweis:</u> 1. $F(n+1+x) = (x+n)\,F(n+x)$

$= x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)\,F(x)$

$\overset{\text{Vollst.}}{\underset{\text{Ind.}}{\Rightarrow}} F(x+n) = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)\,F(x) \quad \forall x>0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$F(n+1) = n!$

2. $0 < x < 1$

a) $F(n+x) = F(x(n+1) + (1-x)n)$

$\leq F(n+1)^x\, F(n)^{1-x}$

$= n!^x\,(n-1)!^{1-x} = n!\,n^{x-1}$

$F(n+x) \leq n!\,n^{x-1}$

b) $n! = F(n+1)$

$= F(x(n+x) + (1-x)(n+1+x))$

$\leq F(n+x)^x \cdot F(n+1+x)^{1-x}$

$= F(n+x)^x \cdot (n+x)^{1-x} \cdot F(n+x)^{1-x} = F(n+x)\cdot(n+x)^{1-x}$

$\Rightarrow n!\,(n+x)^{x-1} \underset{(b)}{\leq} F(n+x) \underset{(a)}{\leq} n!\,n^{x-1}$

$\dfrac{n!\,(n+x)^x}{n+x} \leq x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)\,F(x) \leq n!\,n^{x-1}$

$\dfrac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}\left(\dfrac{n+x}{n}\right)^x \leq F(x) \leq \dfrac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}\left(\dfrac{x+n}{n}\right)$

für $0 < x < 1$ & $\forall n \in \mathbb{N}$

$\xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} \leq F(x) \leq \dfrac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$

$$F(x)\underbrace{\frac{n}{n+x}}_{\to 1} \leq \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} \leq F(x)\underbrace{\left(\frac{n}{n+x}\right)^x}_{\to 1} \qquad (n\to\infty)$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} \quad \text{für } 0<x<1$$

3. Für $0<x\leq 1$ gilt: $\dfrac{n!\cdot n^{x+1}}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n+1)} = \ldots$

$$\ldots = x\underbrace{\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}}_{\to F(x)}\underbrace{\frac{n}{x+n+1}}_{\to 1}$$

Falls $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\,n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$ $(*)$, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{x+1}}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n+1)} = x\,F(x) = F(x+1), \text{ d.h.:}$$

$(*)$ gilt für x $\Rightarrow$ $(*)$ gilt für $x+1$ ▨

Bem: Eulersches Sinusprodukt:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) \quad \forall x>0$$

SATZ 11

i) $0<x<1 \Rightarrow \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$

Beweis: i) $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) \overset{S10}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}\cdot\dfrac{n!\,n^{1-x}}{(1-x)\cdot\ldots\cdot(n+1-x)}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(1+x)(1-x)\cdot\ldots\cdot(n+x)(n-x)}\cdot\underbrace{\frac{n}{n+1-x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(1-x^2)(2^2-x^2)\cdot\ldots\cdot(n^2-x^2)} = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(k^2-x^2)}$$

$$\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \; ; \quad x = \sqrt{t}$$

$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}, \quad 2dx = \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

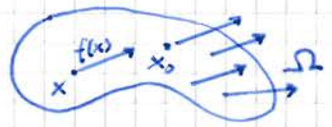
$$= \int_0^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \Gamma(1/2)$$

$$\Rightarrow (\Gamma(1/2))^2 = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Kapitel 8: Anwendungen

8.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ; $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig, f: Vektorfeld (VF)



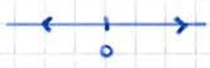
Gegeben: $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in \mathbb{R}$

Gesucht: Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine stetig diff'bare Fkt. $x: I \to \Omega$ s.d.:

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \forall t \in I \\ x(0) = x_0 \end{array}\right\} \text{Anfangswertproblem für GDGL}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, wobei $x_n: I \to \mathbb{R}$, $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$

Bsp. 1) $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $I = \mathbb{R}$



(1) mit $x_0 = 1$ und $t_0 = 0$

$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = x(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

$x(0) = 1 \Leftrightarrow x(t) = e^t \;\; \forall t \in \mathbb{R}$ (K6/ BSP 21)

Bsp. 2) $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ -\sqrt{|x|}, & x < 0 \end{cases}$, $x_0 = t_0 = 0$

$\Rightarrow x(t) \equiv 0$ ist Lsg.! $\Rightarrow x(t) = \begin{cases} t^2/4, & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$

Lokale Lipschitzsletigkeit

Für $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $|\xi|_{\mathbb{R}^n} := |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$

(Eukl. Norm)

Def.: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen

Eine Abbildung $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst lokal Lipschitz-sletig wenn $\forall x_0 \in \Omega \; \exists \delta > 0 \; \exists L > 0 \; \forall x,y \in \mathbb{R}^n$:

a) $\overline{B}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq \delta\} \subset \Omega$

b) $\forall x,y \in \overline{B}_\delta(x_0) : |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

SATZ 1 (Ex. & Eind. für GDGL)

Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lip.-sletig und $x_0 \in \Omega$ sowie $t_0 \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

i) $\exists$ offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ & $\exists$ sletig diffbare Abb. $x: I \to \Omega$, die Gleichung (1) erfüllt.

ii) Falls $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in I$ ist und $x,y: I \to \Omega$ Lsgen von (1) sind, so gilt $x(t) = y(t) \; \forall t \in I$.

Bem.: i) gilt für bel. sletige Abb. $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ (wird nicht bew.)

Bem.: Sei $y: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sletig mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$

Wir definieren:

$$\int_a^b y(t)\,dt := \left(\int_a^b y_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b y_n(t)\,dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

Es gilt auch hier die Ungleichung:

$$\left| \int_a^b y(t)\,dt \right|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^b |y(t)|_{\mathbb{R}^n}\,dt$$

(Bew.: Übg. mit Hinweis: $\eta := \int_a^b y(t)\,dt$. Man betrachte $|\eta|^2 = \langle \eta, \int_a^b y(t)\,dt \rangle = \int_a^b \langle \eta, y(t) \rangle\,dt$)

Bem.: Sei $x: I \to \Omega$ sletig. Dann gilt: x ist eine Lösung von (1) $\Leftrightarrow$ $x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(x(s))\,ds \quad \forall t \in I$, per K7/S4

(2)

SATZ 2 (Banach'scher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollst. metr. Rm und $X \neq \emptyset$. Ausserdem sei $f: X \to X$ eine Kontraktion, d.h. $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha < 1$ s.d. $\forall x, y \in X: d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$.

$\Rightarrow \exists! x \in X$ s.d. $x = f(x)$, wobei x der Fixpunkt von f genannt wird.

Beweis von S2:

Eindeutigkeit: Seien x, y Fixpunkte von f

$$\Rightarrow d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} d(x,y) \leq 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \checkmark$$

Existenz: Sei $x_0 \in X$. Definiere eine Folge $x_n \in X$ durch $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$, usw.: $x_{n+1} := f(x_n)$

Beh.: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

Bew.: $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$

$$\overset{\text{Ind.}}{\Rightarrow} d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$$

$$\underset{m,n \in \mathbb{N}}{\overset{\forall m > n}{\Rightarrow}} d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \ldots + \alpha^{m-1}) d(x_1, x_0)$$

$$\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow \checkmark$$

Beh. & Vollst. $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konv. gegen ein $x \in X$

$$\Rightarrow x = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(x)$$

▨

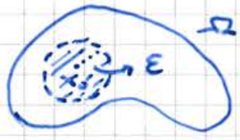
Beweis von S1:

Sei $x_0 \in \Omega$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Beh.: $\exists \delta > 0$ s.d. (1) auf dem Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine eindeutige Lösung besitzt. (... Salopp ...)

Bew.: Wähle $\varepsilon > 0$ und $L > 0$ s.d. a) und b) gelten. Definiere $M := |f(x_0)| + L\varepsilon$. Wähle $\delta > 0$ s.d. $\delta M < \varepsilon$ und $\delta L < 1$.

$\Rightarrow$ 1. $x \in \mathbb{R}^n$, $|x - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq M$, denn: $|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x_0)| + L|x - x_0| \leq |f(x_0)| + L\varepsilon =: M$

Illustration:



innerhalb des Balles: $|f(x)| \leq M$

$\Rightarrow$ 2. Sei $x: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \Omega$ eine Lsg. von (1).

Dann gilt $|x(t) - x_0| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

Annahme: $\exists t_1 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ s.d. $|x(t_1) - x_0| > \varepsilon$

1. Fall: $t_1 > t_0$

$\tau := \inf \{ t \in [t_0, t_0 + \delta] \mid |x(t) - x_0| \geq \varepsilon \}$

$\Rightarrow |x(\tau) - x_0| = \varepsilon$

$\quad |x(t) - x_0| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, \tau]$

$\Rightarrow |x(\tau) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{\tau} f(x(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^{\tau} \underbrace{|f(x(s))|}_{\leq M} ds$

$\leq (\tau - t_0) M \leq \delta M < \varepsilon \Rightarrow \perp$

$\Rightarrow$ 2. Fall: analog

$\Rightarrow$ 2.: ✓

$\Rightarrow$ Beide Beobachtungen bewiesen!

3. Definiere $\mathcal{X} := \{ x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n \mid x$ stetig & $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] : |x(t) - x_0| \leq \varepsilon \}$

Definiere $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0, \infty)$ durch: $d(x,y) := \|x - y\| := \sup_{t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta} |x(t) - y(t)|_{\mathbb{R}^n}$. Dann ist $(\mathcal{X}, d)$ ein vollst., metr. Rm (K5/S3)

Definiere $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ durch $\mathcal{F}(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s)) ds$, $t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta$ für $x \in \mathcal{X}$

4. $x \in \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{F}(x) \in \mathcal{X} : |\mathcal{F}(x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(x(s)) ds \right|$

$\leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(x(s))|}_{\leq M} ds \overset{1.}{\leq} (t - t_0) M \leq \delta M < \varepsilon$ (für $t \geq t_0$, 2. Fall analog zum ersten!)

5. $\mathcal{F}$ ist eine Kontraktion: $x, y \in \mathcal{X}$, $d(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = \sup_{t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta} |\mathcal{F}(x)(t) - \mathcal{F}(y)(t)|$, für $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ gilt:

$$|\mathcal{F}(x)(t) - \mathcal{F}(y)(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(x(s)) - f(y(s))) ds \right| \leq$$

$$\int_{t_0}^{t} |f(x(s)) - f(y(s))|\, ds \leq \int_{t_0}^{t} L\, |x(s) - y(s)|\, ds$$

$$\leq \underbrace{L\,(t-t_0)}_{\leq L\delta} \cdot \underbrace{\sup_{t_0-\delta \leq s \leq t_0+\delta} |x(s) + y(s)|}_{d(x,y)}$$

$$\leq \underbrace{L\delta}_{<1} \cdot d(x,y)$$

$$\Rightarrow \sup_{t_0-\delta \leq t \leq t_0+\delta} \left| \mathcal{F}(x)(t) - \mathcal{F}(y)(t) \right| \leq \underbrace{L\delta}_{<1}\, d(x,y)$$

$\Rightarrow$ Analoge Argumentation für $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$!

$\Rightarrow$ 3., 4., 5. & S2 $\Rightarrow \exists!\, x \in \mathcal{X}$ s.d. $x = \mathcal{F}(x)$

$\Rightarrow \exists!$ stetige Abbildung $x: [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$ s.d.

$|x(t) - x_0| \leq \varepsilon \quad \forall\, t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ und

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,ds \quad \forall\, t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$$

$\Rightarrow \exists!$ Lsg. $x: [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \overline{B}_\varepsilon(x_0)$ von (1)

$\overset{2.}{\Rightarrow} \exists!$ Lsg. $x: [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \Omega$ von (1)

Beweis von ii): Seien $x, y: I \to \Omega$ Lsgen von (1)

Annahme: $\exists\, \tau \in I$ s.d. $x(\tau) \neq y(\tau)$

1. Fall: $\tau > t_0$: $t_1 = \inf\{ t > t_0 \mid x(t) \neq y(t) \}$

$\Rightarrow x(t) = y(t) \;\forall\, t \in [t_0, t_1]$

$x_1 = x(t_1) = y(t_1) \overset{\text{Beh.}}{\Rightarrow} \exists\, \delta_1 > 0 : x(t) = y(t)$

$\forall\, t \in [t_1, t_1 + \delta] \Rightarrow \perp$

2. Fall: analog

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit & Existenz gezeigt!

∎

Bsp. 3) $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$

$\dot{x} = cx$, $x(t_0) = x_0$

Lsg.: $x(t) = e^{c(t-t_0)} x_0$, $t \in \mathbb{R}$

Bsp. 4) $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$\dot{x} = x^2$, $x(t_0) = x_0 > 0$

Lsg.: $\frac{dx}{dt} = x^2 > 0 \Rightarrow x: I \to \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend
$t \mapsto x(t)$

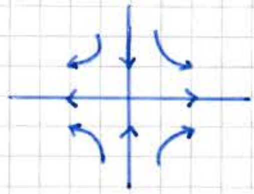
Umkehrfunktion: $x \mapsto t(x)$ mit $\frac{dt}{dx} = x^{-2}$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi^2} = t(x) - \underbrace{t(x_0)}_{=: t_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 1/x(t) = 1/x_0 - (t - t_0) = \frac{1 - x_0(t-t_0)}{x_0}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t-t_0)} \quad \text{für } t < t_0 + 1/x_0$$

Bsp. 5) $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x, -y)$

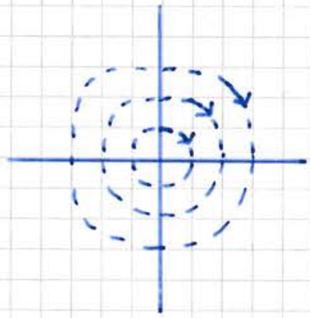


$\dot{x} = x$, $x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = e^{t} x_0$

$\dot{y} = -y$, $y(0) = y_0 \Rightarrow y(t) = e^{-t} y_0$

$\Rightarrow xy = \text{const.}$

Bsp. 6) $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y, -x)$



$\dot{x} = y$, $x(0) = x_0$

$\dot{y} = -x$, $y(0) = y_0$

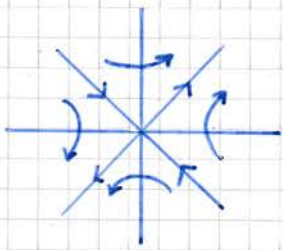
$\Rightarrow \ddot{x} = -x$ mit $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$

$\Rightarrow x(t) = \cos(t) x_0 + \sin(t) y_0$

$\quad y(t) = -\sin(t) x_0 + \cos(t) y_0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \text{const.}$

Bsp. 7) $n = 2$, $f(x,y) = (y, x)$



$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x} = x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x(t) = \cosh(t) x_0 + \sinh(t) y_0 \\ y(t) = \sinh(t) x_0 + \cosh(t) y_0 \end{array}\right.$$

DGL höherer Ordnung

Sei $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, g ist Lipsch.-st., mit $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$

Gesucht: Ein (offenes) Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.

Eine n-mal stetig diff'bare Fkt. $y: I \to \mathbb{R}$ s.d.:

$$(1) \begin{cases} y^{(n)}(t) = g(y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I \\ y^{(k)}(0) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Umformulierung: Sei $y: I \to \mathbb{R}$ eine Lsg. von (1)

Definiere $x: I \to \mathbb{R}^n$ durch $x(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

$$x_k(t) = y^{(k-1)}(t), \quad k = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = f(x(t))$ & $x(0) = x_0 \Rightarrow f(x) = (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, g(x))$

$x_0 := (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$

Korollar 1 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist lokal Lipsch.-stetig.

$\Rightarrow \forall y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0$ s.d. die DGL (1) auf dem Intervall $[-\delta, \delta]$ eine eindeutige n-mal stetig diff'bare Lsg. $y: I \to \mathbb{R}$ besitzt (S1)

Bew.: Nach S1 hat die DGL (2) auf einem Intervall $[-\delta, \delta]$ eine eind. Lsg. $x = (x_1, \dots, x_n)$: $[-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^n \Rightarrow y := x_1 : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung von (1)

$\blacksquare$

Lineare DGL

Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Gesucht: Alle n-mal stetig diff'baren Lsgen der DGL (3):

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Bem.: Die Lösungen von (3) bilden einen reellen VRm:

$\mathcal{L} := \{ y: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y$ ist n-mal stetig diff'bar und erfüllt (3)$\}$

Korollar 2 $\dim \mathcal{L} = n$

Bew.: Die Abb. $\mathcal{L} \to \mathbb{R}^n : y \mapsto \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}$ ist bijektiv & linear. Diese Abb. ist also ein VRm - Isomorphismus (s. LinAlg) ▨

Def.: Eine Basis $y_1, \dots, y_n$ von $\mathcal{L}$ heisst Lösungsbasis von (3) oder Fundamentalsystem von Lösungen von (3)

Ansatz zur Lösung von (3)

$y(t) = e^{\lambda t}$ (Annahme)

$\Rightarrow y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\vdots$

$y^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$

$\Rightarrow y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) \cdot e^{\lambda t}$

Def.: Das Polynom $p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ heisst charakteristisches Polynom der DGL (3).

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $p(\lambda) = 0 \Rightarrow y(t) = e^{\lambda t}$ ist eine Lsg. der Gleichung (3)

b) $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ($\pm$, da $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \Rightarrow$ alle komplexen NS kommen in konj. Paaren daher!), $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\lambda) = 0$

$\Rightarrow y_1(t) = \operatorname{Re}(e^{\lambda t}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ &

$y_2(t) = \operatorname{Im}(e^{\lambda t}) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ sind Lsgen von (3).

SATZ 3

Falls p n versch. NS hat, so bilden die Lsgen von (3) in a) und b) eine Basis von $\mathcal{L}$.

$\Rightarrow$ **Beweis:** Übg. (▨)

Bsp. 8) $y'' - y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y_1(t) = e^t \\ \Rightarrow y_2(t) = e^{-t} \end{array}\right\} \rightsquigarrow \text{Bsp. 7}$$

Bsp. 9) $y'' + y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y_1(t) = \cos(t) \\ \quad\; y_2(t) = \sin(t) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \text{Bsp. 6}$$

Bsp. 10) Gedämpfte Schwingung

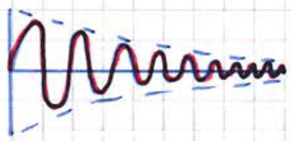
(4) $y'' + 2dy' + ky = 0$, $d, k > 0$

$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 2d\lambda + k = (\lambda + d)^2 + k - d^2$

Schwache Dämpfung: $d^2 < k \Rightarrow \lambda_{1,2} = -d \pm i\omega$

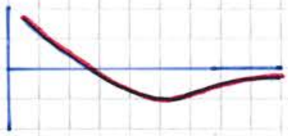
mit $\omega = \sqrt{k - d^2}$

$\rightarrow y_1(t) = e^{-dt}\cos(\omega t)$, $y_2(t) = e^{-dt}\sin(\omega t)$



Starke Dämpfung: $d^2 > k \Rightarrow \lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - k}$

$\rightarrow y(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$



Kritische Dämpfung: $d^2 = k \Rightarrow \lambda = -d$

$\rightarrow y_1(t) = e^{-dt}$

$\quad\; y_2(t) = te^{-dt}$

Bsp. 11) (5) $y'' + 2dy' + ky = \cos(\omega t)$ mit $d, k, \omega > 0$

Ansatz: $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow y'(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

$\quad\; y''(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$

y ist eine Lösung von (5) gdw $A, \varphi \in \mathbb{R}$ die folgenden

Gleichungen erfüllen:

$$(6)\quad \begin{aligned} (k-\omega^2)\, A\cos(\varphi) - 2d\omega\, A\sin(\varphi) &= 1 \\ 2d\omega\, A\cos(\varphi) + (k+\omega^2)\, A\sin(\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists$ Lsg A, φ von (6) gdw: $(k-\omega^2)^2 + 4d^2\omega^2 > 0$

$\Leftrightarrow \omega^2 \neq k \;\&\; d \neq 0$

(Resonanzfall: $d = 0$, $\omega^2 = k$, wird hier ausgeschl.)

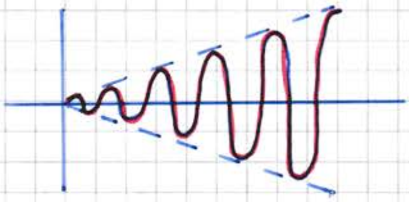
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A\cos(\varphi) &= \frac{k-\omega^2}{(k-\omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \\ A\sin(\varphi) &= \frac{-2d\omega}{(k-\omega^2)^2 + 4d^2\omega^2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{(k-\omega^2)^2 + 4d^2\omega^2}} \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{-2d\omega}{k-\omega^2}\right) \end{aligned}$$

Ansatz: $y(t) = (A + Bt)\sin(\omega t)$

$$y'' + ky = \underbrace{2B\omega}_{1}\cos(\omega t) \quad (k = \omega^2, \text{ Resonanz!})$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$$

Illustration:



$\rightarrow$ kann Gebäude zum Einsturz bringen!

Variation der Konstanten

Gegeben: $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Gesucht: Lsg. $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gleichung (7):

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = q$$

Ansatz: (Variation der Konstanten)

Sei $y_1, \dots, y_n$ eine Basis von $\mathcal{L}$. Jede Lösung von (3) lässt sich als LK in der Form $y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$ schreiben mit $c_i \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, y_i(t), \quad u_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (8)$$

Frage: Für welche U_i ist (8) eine Lösung von (7)?

Antwort: Wähle $u_1, u_2, \dots, u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass: $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$$

Dann: Wähle $U_i(t)$ als Stammfklen von $u_i(t)$ für $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ (8) ist Lsg. von (7) (Beweis ist Übg.)

Bsp. 12) $y'' + y = \frac{1}{\cos(t)} \Rightarrow y_1(t) = \cos(t)$ & $y_2(t) = \sin(t)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1(t) = -\tan(t) \\ u_2(t) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} U_1(t) = \log(\cos(t)) \\ U_2(t) = t \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y(t) = \log(\cos(t))\cos(t) + t\sin(t)$$

$(t : -\pi/2 < t < \pi/2)$

8.2 Fourierreihen

Def.: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heisst

- 2π-periodisch, wenn $f(x + 2\pi) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- lokal Riemann-intgbar, wenn für jedes kmpkte Intervall $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ die Einschränkungen $\mathrm{Re}(f)|_I$ und $\mathrm{Im}(f)|_I$ (beide: $I \to \mathbb{R}$) Riemann-intgbar sind.

Bsp. 1) $e_k(t) := e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

Re / Im: ergeben sin & cos!

Bsp. 2) Seien $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$.

(1) $f(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$, ein solches f heisst "trigonometrisches Polynom"

Lemma 1

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wie in Bsp. 2 gegeben.

$\Rightarrow a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ (2), für $k \in \mathbb{Z}$, $-n \leq k \leq n$

Bew.: Für $k, \nu \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{-i\nu t} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{falls } k = \nu \\ 0, & \text{falls } k \neq \nu \end{cases} \quad (3)$$

Daraus folgt: $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt \overset{(1)}{=} \sum_{k=-n}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-i\nu t} dt$

$= a_\nu \cdot 2\pi$

$\blacksquare$

Def.: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und lokal Riemann-intgbar.

- Die komplexen Zahlen $\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ (4)

  heissen Fourier-Koeffizienten von f.

- Die Partialsumme

  $(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$ heisst Fourier-Polynom der Ordnung n von f

- Die Reihe

  $(S_\infty f)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$ heisst Fourierreihe von f

Frage 1: Konvergiert die Funktionen-Folge $S_n f$ (punktweise oder gleichmässig)?

Frage 2: Falls ja, ist der Grenzwert $S_\infty f$ gleich f?

Antworten: 1. Nicht immer, selbst wenn f stetig ist.
2. Ja, falls f stetig ist (an der Stelle x).

Def.: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und lokal Riemann-intgbar. Die Faltung von f und g ist die Funktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die durch die Formel

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(x-t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

für $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Übg.: 1. $f * g = g * f$
2. Die Abb. $f \mapsto f * g$ ist linear für jede 2π-periodische, lokal Riemann-intgbare Fkt. g, d.h. $\forall f, f_1, f_2, g \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$$
$$(\lambda f) * g = \lambda f * g$$

3. $\forall f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-per., lokal Riemann-intgbar ist die Funktion $f * g$ stetig (und 2π-periodisch).

Bsp. 3) $e_k(t) = e^{ikt}$

$$(f * e_k)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{ik(x-t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{ikx} e^{-ikt}\, dt$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \right) e^{ikx} = \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

Bsp. 4) $D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \Rightarrow f * D_n = f * \left(\sum_{k=-n}^{n} e_k \right) =$

$$= \sum_{k=-n}^{n} f * e_k \overset{\text{Bsp.3}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e_k = S_n f$$

Bsp. 5) $F_n := 1/n\, (D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1})$

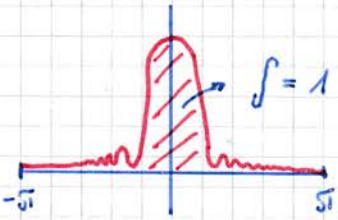
$f * F_n := 1/n\, (f * D_0 + f * D_1 + \ldots + f * D_{n-1}) =$

$$= \tfrac{1}{n}\left(S_0 f + S_1 f + S_2 f + \ldots + S_{n-1} f \right)$$

Lemma 2

i) $F_n(x) := \tfrac{1}{n} \left(\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$



iii) Für $\delta > 0$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) = 0$

Bew.: i) $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} (e^{ix})^k$

$$= e^{-inx} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

$$= e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1/2)x} - e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$

$$= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

$$n\left(\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)^2 F_n(x) = \left(\sin\left(x/2\right)\right)^2 \left(D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_{n-1}(x)\right)$$

$$= \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\left(\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{3x}{2}\right) + \ldots + \sin\left(\tfrac{2n-1}{2}x\right)\right)$$

$$\left(\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\beta-\alpha) - \cos(\beta+\alpha)}{2} \quad (*)\right)$$

$$= \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((k + 1/2)x\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{2}\left(\cos(kx) - \cos((k+1)x)\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \cos(nx)\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \left(\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\right)^2 \quad \Rightarrow \text{i) } \checkmark$$

ii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,dt}_{=1} = 1 \quad \Rightarrow \text{ii) } \checkmark$

iii) Sei $\delta > 0$ und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\rho > 0$ s.d. $\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq \rho \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ mit $\delta \leq |x| \leq \pi$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $n_0 > 1/\varepsilon\delta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$
$\forall x \in \mathbb{R}$ mit $\delta \leq |x| \leq \pi$ gilt:

$$F_n(x) \overset{i)}{=} \frac{1}{n} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{n \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{n\delta} \leq \frac{1}{n_0 \delta} < \varepsilon$$

SATZ 4 (Fejer)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-period. & Riemann-intgbar. Dann gilt:

i) f stetig an d. Stelle $x_0 \Rightarrow f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (f * F_n)(x_0) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} 1/n \sum\limits_{k=0}^{n-1} (S_k f)(x_0)$

ii) f stetig $\Rightarrow f * F_n$ konvergiert glm. gegen f

iii) Falls f an d. Stelle x_0 stetig ist und die Folge $((S_n f)(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so gilt: $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n f)(x_0) =$
$= \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx_0}$

Beweis:

i) Wähle $M > 0$ s.d. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Wähle $\delta > 0$ s.d. $\forall t \in \mathbb{R}: |t| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_0 - t)| < \varepsilon/2$.
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$\sup\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) < \varepsilon/4M \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$|f(x_0) - f * F_n(x_0)| = \left| f(x_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) F_n(t)\, dt \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x_0) - f(x_0 - t) |\, F_n(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_0) - f(x_0 - t)| \cdot$$

$$F_n(t)\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x_0) - f(x_0 - t)|}_{\leq \varepsilon/2} F_n(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \underbrace{|f(x_0) - f(x_0 - t)|}_{\leq 2M} \cdot$$

$$\underbrace{F_n(t)}_{\leq \varepsilon/4M} dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{1/2\pi \int_{-\delta}^{\delta} F_n(t)\, dt}_{\leq 1} + \underbrace{1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon/2\, dt}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ i) ✓

ii) f glm. stetig per K5/S22 $\Rightarrow$ δ unabh. von x_0 und n_0 wählen
$\rightarrow$ sonst analog wie i) ($\checkmark$)

iii) $a_n := (S_n f)(x_0)$, $s_n := (f * F_n)(x_0) = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n}$

$\overset{i)}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} s_n = f(x_0)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$ existiert.

Beh.: $a = f(x_0)$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$:
$|a_n - a| < \varepsilon/2$. Wähle $n_1 > n_0$, $n_1 \in \mathbb{N}$, s.d. $\varepsilon/2 \cdot n_1 > |a_0 - a| + \ldots + |a_{n_0-1} - a|$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$ gilt:

$$|s_n - a| \leq \underbrace{\frac{|a_0 - a| + \ldots + |a_{n_0-1} - a|}{n}}_{< \varepsilon/2 \, n_1/n} + \underbrace{\frac{|a_{n_0} - a| + \ldots + |a_{n-1} - a|}{n}}_{\frac{n-n_0}{n} \cdot \varepsilon/2 \, < \, \varepsilon/2}$$

$< \varepsilon \Rightarrow$ iii) $\checkmark$ ▨

s. Kapitel 16.? im Königsberger für Vertiefung

Notation

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-periodisch & lokal Riemann-intgbar. Man kann definieren:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx \in \mathbb{C}$$

$$\text{mit: } \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx} \leq \sup_{|x| \leq \pi} |f(x)|$$

Dieses Hermitesche innere Produkt besitzt folgende Eigenschaften:

- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$
- $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$
- $\langle \lambda f, g \rangle = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$
- $\langle f, \lambda g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$
- $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
- f stetig & 2π-per. $\Rightarrow$ $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$

Bsp. 6) $e_k(x) = e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \|e_k\| = 1$

$\Rightarrow \langle e_k, e_\nu \rangle = \begin{cases} 1, & k = \nu \\ 0, & k \neq \nu \end{cases}$

$\Rightarrow \langle e_k, f \rangle = \hat{f}(k)$

$\Rightarrow S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k$

SATZ 5 (Parseval)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-per. & lokal Riemann-intgbar. Es gilt:

i) $\|f\|^2 = \|S_n f\|^2 + \|f - S_n f\|^2$

mit $\|S_n f\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2$

ii) $\lim_{n \to \infty} \|f - S_n f\| = 0$

iii) $\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$

Beweis:

i) $\|S_n f\|^2 = \langle S_n f, S_n f \rangle = \langle \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k, \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) e_\nu \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{\nu=-n}^{n} \overline{\hat{f}(k)} \cdot$

$\hat{f}(\nu) \langle e_k, e_\nu \rangle = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2$

$\langle S_n f, f \rangle = \langle \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k, f \rangle = \langle \sum_{k=-n}^{n} \overline{\hat{f}(k)} \underbrace{\langle e_k, f \rangle}_{\hat{f}(k)} = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 =$

$= \langle S_n f, S_n f \rangle$

$\Rightarrow \langle S_n f, f - S_n f \rangle = 0 \Rightarrow \|f - S_n f\|^2 = \langle f - S_n f, f - S_n f \rangle$

$= \langle f, f - S_n f \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, S_n f \rangle = \langle f, f \rangle - \langle S_n f,$

$S_n f \rangle = \|f\|^2 - \|S_n f\|^2 \Rightarrow$ i) ✓

ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (2π-per. & lokal Riemann-intgbar)

Schritt 1: $\exists g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (2π-per. & stetig) s.d. $\|f - g\| \leq \varepsilon/4$

Schritt 2: $\exists$ Fourier-Polynom $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s.d. $\|g - h\| < \varepsilon/4$

zu Schritt 1: O.B.d.A.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wähle $M > 0$ s.d. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ K7 $\Rightarrow \exists P = \{ t_0 (= -\pi) < t_1 < \ldots < t_N (= \pi) \}$ mit $t_k = -\pi + \frac{2\pi k}{N}$

s.d. $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon^2 \pi / 16M$.

Definiere $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(t) := f(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} (f(t_k) - f(t_{k-1}))$

mit $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ g ist stetig & 2π-period.

$\Rightarrow -M \leq \inf_{[t_{k-1}, t_k]} f \leq g(t) \leq \sup_{[t_{k-1}, t_k]} f \leq M, \ \forall k \in \mathbb{Z} \ \forall t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\Rightarrow \underline{S}(f,P) \leq \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx \leq \overline{S}(f,P)$$

$$\Rightarrow |f(t) - g(t)| \leq \sup_{[t_{k-1}, t_k]} f - \inf_{[t_{k-1}, t_k]} f \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k]$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|\,dt \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon^2 \pi / 16M$$

$$\Rightarrow \|f - g\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2\,dt \leq \frac{M}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|\,dt < \varepsilon^2/16$$

$$\Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon/4$$

zu Schritt 2: Nach Satz 4 gilt: $\lim_{n \to \infty} \sup_{|t| \leq \pi} |g(t) - (g * F_n)(t)| = 0$

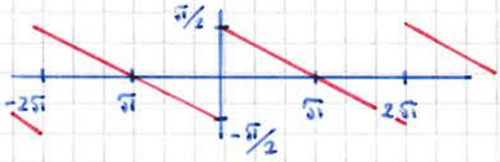
Wähle h s.d. $h = g * F_n$ mit n hinreichend gross, s.d. $\|g - h\| < \varepsilon/4$

Schritt 1 & 2 $\Rightarrow$ *ii)*: $\|f - S_n f\| \leq \underbrace{\|f - h\|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{\|h - S_n h\|}_{= 0} + \underbrace{\|S_n h - S_n f\|}_{\leq \|h - f\| < \varepsilon/2} < \varepsilon$ für n hinreichend gross $\Rightarrow$ *ii)* ✓.

iii) $\|f\|^2 = \underbrace{\|f - S_n f\|^2}_{ii):\ \xrightarrow{n \to \infty} 0} + \underbrace{\|S_n f\|^2}_{i):\ = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2}$

$\Rightarrow \|f\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \Rightarrow$ *iii)* ✓. ▨

Bsp. 7) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}\ ,\quad 0 \leq x < 2\pi$



$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\left(e^{-ikx} - e^{ikx}\right)dx$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{(\pi - x)}_{f}\ \underbrace{\sin(kx)}_{g'}\,dx = \frac{i}{2\pi k}(\pi - x)\cos(kx)\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\frac{i}{2k\pi}\cdot \int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx}_{=0} = -\frac{i}{2k}\ ,\ k \neq 0 \quad (\hat{f}(0) = 0)$$

$$S_n f(x) = \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} -\frac{i}{2k}e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2ik}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$$

D.h. (zusammenfassend): $\hat{f}(k) = \frac{-i}{2k}\ ,\ S_n f(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$

$$\overset{S5}{\Longrightarrow}\quad \|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}$$

$$\text{bzw. } \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx = \pi^2/12$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}k^{-2} = \pi^2/6 \quad (\text{per } S5)$$

Nun: $S_n f(\pi/2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$

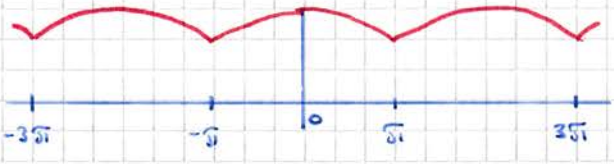
$\to$ konvergiert! $\quad S4 \Longrightarrow f(\pi/2) = \lim_{n\to\infty} S_n f(\pi/2) = \pi/4$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$$

"Leibnitz-Reihe"

Bsp. 8) Es sei $a > 0,\ a \notin \mathbb{Z}\ ,\ f(x) = \cos(ax)\ ,\ -\pi \leq x \leq \pi$

$f(x + 2\pi) := f(x) \Longrightarrow f$ stetig & 2π-per.



$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ax)\cdot e^{-ikx}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ax) \, \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \, dx = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(kx) \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos((a+k)x) + \cos((a-k)x) \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin((a+k)\pi)}{a+k} + \frac{\sin((a-k)\pi)}{a-k} \right) = \frac{\sin(a\pi)}{2\pi} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right)$$

$$= \frac{\sin(a\pi)}{\pi} (-1)^k \frac{a}{a^2-k^2}$$

$\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} (-1)^k \frac{a}{a^2-k^2} \Rightarrow \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$|\hat{f}(k)| \leq c/k^2 \Rightarrow S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k$ konv. glm. gegen f.

$\Rightarrow \hat{f}(k) = \hat{f}(-k) \Rightarrow$ Für $-\pi \leq x \leq \pi$ gilt: (gilt für $a<0$ & $a>0$)

$\cos(ax) = \hat{f}(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)\cos(kx) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \Big(\frac{1}{a} + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot$

$\frac{a}{a^2-k^2} \cos(kx) \Big) \overset{k=\pi}{\Longrightarrow} \frac{\pi \cos(a\pi)}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-k^2}$

$\overset{t=a}{\Longrightarrow}$ Für $-1 < t < 1$: $\frac{\pi\cos(t\pi)}{\sin(t\pi)} = 1/t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2-k^2}$ mit glm.

Konvergenz für $|t| \leq r < 1$

Definiere $g, g_n : [-r, r] \to \mathbb{R}$ durch: $g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2t}{t^2-k^2}$

und $g(t) := \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{\pi\cos(t\pi)}{\sin(t\pi)} - \frac{1}{t}, & t \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow g_n$ konv. glm. gegen g

$\Rightarrow G_n(x) := \int_0^x g_n(t)\,dt$ konv. glm. gegen $G(t) := \int_0^x g(t)\,dt$,

wobei $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \log\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right)$

und $G(t) = \log\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) \xleftarrow{n \to \infty}$

$\overset{\exp}{\Longrightarrow} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$ für $0 < |x| < 1$

$\Rightarrow$ daraus ergibt sich:

SATZ 6 (Euler)

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

Beweis: s. Bsp. 8) (▨)

Ende : Analysis I

Analysis II

Kapitel 9: Lineare Operatoren

Erinnerung: Sei X ein reeller VRm. Eine Normfunktion auf X ist eine Abbildung $X \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0 \;\wedge\; (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
ii) $\forall x \in X \; \forall \lambda \in \mathbb{R} : \; \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
iii) $\forall x, y \in X : \; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Jede solche Norm bestimmt eine Abstandsfkt. (Metrik) durch: $d : X \times X \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \|x-y\|$ für $x, y \in X$ $(*)$.

Ein Banachraum ist ein normierter VRm $(X, \|.\|)$, der mit der Abstandsfunktion $(*)$ ein vollst. metr. Raum ist, d.h. jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Bsp. 1) $X = \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (p = 2 \rightsquigarrow \text{eukl. Norm})$$

$$\|x\|_\infty := \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \}$$

Bsp. 2) $I = [a,b]$, $a < b$

$$X = C(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

$(C(I), \|.\|_\infty)$ ist ein Banachraum (K5/S3)

$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$ (K7/S8)

↳ nicht vollst. / Kein Banachraum

<u>Def.:</u> Zwei Normen $\|.\|$, $\|.\|'$ heissen äquivalent, wenn:
$\exists\, c \geq 1 \;\; \forall x \in X$: $1/c \, \|x\| \leq \|x\|' \leq c\|x\|$
Notation: $\|.\| \sim \|.\|'$ (Äquivalenzrelation)

<u>Bem.:</u> "Äquivalenz von Normen" ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normfkt. auf X, d.h. sie ist reflexiv ($\|.\| \sim \|.\|$), symmetrisch ($\|.\| \sim \|.\|' \iff \|.\|' \sim \|.\|$) und transitiv ($\|.\| \sim \|.\|'$, $\|.\|' \sim \|.\|'' \Rightarrow \|.\| \sim \|.\|''$) $\forall \|.\|, \|.\|', \|.\|''$ auf X.

<u>Bem.:</u> $(X, \|.\|)$: norm. VRm.
Eine Teilmenge $U \subset X$ heisst offen, wenn:
$\forall x \in U \; \exists\, \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(x; \|.\|) := \{ y \in X \mid \|x-y\| < \varepsilon \} \subset U$
$\mathcal{U}(X, \|.\|) := \{ U \subset X \mid U$ ist offen bzgl. $\|.\| \}$

Es gilt: $\|.\| \sim \|.\|' \Rightarrow (\mathcal{U}(X, \|.\|) = \mathcal{U}(X, \|.\|'))$

<u>SATZ 1</u>

Sei X ein endlich dimensionaler reeller VRm. Dann sind je zwei Normen auf X äquivalent.

<u>Beweis:</u>
1. In K6/S6 wird gezeigt, dass jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur eukl. Norm ist.
2. Nach Bem. 1 sind je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ zueinander äquivalent
3. Da X isomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, sind je zwei Normen auf X äquivalent.

▨

Korollar 1: Jeder endlich dimensionale norm. VRm $(X, \|.\|)$ ist vollständig.

Bew.: $\dim X = n$

1. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ ist vollst. (K4/S4)
2. $\mathbb{R}^n$ ist mit jeder Norm vollständig (S1)
3. X ist mit jeder Norm vollständig.

$\blacksquare$

Korollar 2: $(X, \|.\|)$ endl.-dim. norm. VRm, $K \subset X$. Dann gilt: K kmpkt $\iff$ K ist abg. & beschränkt.

Bew.:
1. Dies gilt für $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$. (Heine-Borel, K5/S20)
2. Nach S1 gilt dies für jede Norm auf $\mathbb{R}^n$
3. Dies gilt für jede Norm auf X.

$\blacksquare$

Insbesondere gilt:

$(X, \|.\|)$ endlich-dim. $\iff$ $\overline{B} := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ ist kmpkt.

Korollar 3: $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ norm. VRme
Sei $A: X \to Y$ linear. X sei endl.-dim.
$\Rightarrow \exists c \geq 0 \; \forall x \in X: \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$

Bew.: Definiere eine Abb. $X \to \mathbb{R}: x \mapsto \|x\|_A$
durch $\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ für $x \in X$
Dies ist eine Norm auf X
$\overset{S1}{\Rightarrow} \exists c \geq 1 \; \forall x \in X$ gilt: $\|x\|_A \leq c\|x\|_X$
mit $\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_Y \Rightarrow \forall x \in X$:
$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$

$\blacksquare$

Def.: $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ seien reelle norm. VRme. $A: X \to Y$ sei ein linearer Operator.

1. A heisst beschränkt, wenn: $\exists\, c \geq 0\ \forall x \in X$: $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$ $(**)$

2. Ist A beschränkt, so heisst die kleinste Zahl $c \geq 0$, für die $(**)$ gilt, Operatornorm von A und wird mit
$$\|A\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$ bezeichnet.

Notation: $\mathcal{L}(X,Y) := \{A : X \to Y \mid A \text{ ist ein beschr., lin. Operator}\}$

SATZ 2

$(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$: norm. VRme. Sei $A: X \to Y$ ein lin. Operator. Äquivalent sind:

i) A ist beschränkt
ii) A ist stetig
iii) A ist stetig an der Stelle $x = 0$

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii): A sei beschränkt, $c \geq 0$ sei wie in $(**)$

$\Rightarrow \forall x, x' \in X$: $\|Ax - Ax'\|_Y = \|A(x-x')\|_Y$
$\leq c\,\|x - x'\|_X = c\, d_X(x,x')$, wobei: $\|Ax - Ax'\|_Y = d_Y(Ax, Ax')$
$\Rightarrow$ A ist Lipschitz-stetig ✓

ii) $\Rightarrow$ iii): trivial

iii) $\Rightarrow$ i): A sei stetig an d. Stelle $x = 0$

$\overset{\text{Def.}}{\underset{\varepsilon=1}{\Rightarrow}} \exists\, \delta > 0\ \forall x \in X: (\|x\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax\|_Y < 1)$
$\Rightarrow \forall x \in X: (\|x\|_X \leq \delta \Rightarrow \|Ax\|_Y \leq 1)$
$\Rightarrow \forall x \in X \setminus \{0\}$ gilt: $\left\| \frac{\delta}{\|x\|_X} x \right\|_X = \delta$ und daher $\left\| A\left(\frac{\delta}{\|x\|_X} x\right) \right\|_Y \leq 1$ und daher

$$\frac{\delta}{\|x\|_X} \|Ax\|_Y \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in X: \|Ax\|_Y \leq 1/\delta \|x\|_X$$

$\blacksquare$

<u>Bem.:</u> Sei X ein reeller VRm. Seien $\|.\|, \|.\|'$ Normen auf X. Betrachten wir folgende Eigenschaft:

$\exists\, c \geq 0\ \forall x \in X: \|x\|' \leq c\|x\|$

$\Leftrightarrow$ der lin. Operator $id: (X, \|.\|) \to (X, \|.\|')$ ist beschränkt.

$\overset{S2}{\Longleftrightarrow}$ der lin. Operator $id: (X, \|.\|) \to (X, \|.\|')$ ist stetig

$\underset{S17}{\overset{K5}{\Longleftrightarrow}}$ $\mathcal{U}(X, \|.\|') \subset \mathcal{U}(X, \|.\|)$

$\rightsquigarrow$ $\|.\| \sim \|.\|' \iff \mathcal{U}(X, \|.\|) = \mathcal{U}(X, \|.\|')$

<u>Bem.:</u> X, Y: norm. VRme. $\mathcal{L}(X,Y) := \{A: X \to Y \mid A$ ist ein lin. beschr. Operator$\}$

$$\|A\| := \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \quad A \in \mathcal{L}(X,Y)$$

$\mathcal{L}(X,Y)$ ist mit der Operatornorm ein norm. VRm.

1) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{L}(X,Y)$

$\|A\| = 0 \Rightarrow \|Ax\|_Y \leq 0 \cdot \|x\|_X = 0 \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow Ax = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow A = 0$

2) $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$; $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

3) $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\|Ax\|_Y \leq \|A\|\,\|x\|_X$ per def.

$$\left.\begin{aligned} \|(A+B)x\|_Y &= \|Ax + Bx\|_Y \\ &\leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \\ &\leq \|A\|\,\|x\|_X + \|B\|\,\|x\|_X \\ &\leq (\|A\| + \|B\|)\,\|x\|_X \end{aligned}\right\} \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \forall x \in X\setminus\{0\}: \frac{\|(A+B)x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \checkmark$$

SATZ 3

X: norm. reeller VRm. Y: Banachraum.
$\Rightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ ist ein Banachraum

Beweis: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(X,Y)$.
Es gilt $\forall\, n,m \in \mathbb{N}$:
$\big|\,\|A_n\| - \|A_m\|\,\big| \leq \|A_n - A_m\|$
$\|A_n x - A_m x\|_Y \leq \|A_n - A_m\|\,\|x\|_X$
$\Rightarrow$ Die Folge $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y ist Cauchy $\forall x \in X$
Die Folge $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist Cauchy
$\overset{Y \text{ vollst.}}{\Rightarrow}$ Die Folge $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. $\forall x \in X$
Definiere $A: X \to Y$ durch $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$ für $x\in X$. Noch nachzuprüfen:
i) A ist linear (Übg.)
ii) A ist beschr. ($\rightsquigarrow \|Ax\|_Y = \lim_{n\to\infty}\|A_n x\|_Y \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty}\|A_n\|}_{<\infty\;=:\,c}\|x\|_X$)
iii) $\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$
($\hookrightarrow \|A_n - A\| = \lim_{m\to\infty}\|A_n - A_m\|$)

$\blacksquare$

Def.: Eine reelle Banachalgebra besteht aus einem reellen Banachraum $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, einer Abbildung : $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}: (x,y)\mapsto xy$ (Produkt) und einem Element $\mathbb{1}\in\mathcal{A}$ (Einselement), mit folgenden Eigenschaften:

i) Das Produkt ist assoziativ, d.h. $\forall x,y,z\in\mathcal{A}$ gilt:
$x(yz) = (xy)z$
ii) Das Produkt ist bilinear, d.h. $\forall x,y,z\in\mathcal{A}\ \forall \lambda\in\mathbb{R}$:
$x(y+z) = xy + xz$; $x(\lambda z) = \lambda(xz)$
$(x+y)z = xz + yz$; $(\lambda x)z = \lambda(xz)$
iii) $\forall x\in\mathcal{A}$: $x\cdot\mathbb{1} = \mathbb{1}\cdot x = x$
iv) $\forall x,y\in\mathcal{A}$: $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$

Bem.:
- Produkt muss nicht kommutativ sein.
- Nicht jedes El't $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ muss ein inverses Element besitzen.

Def.: Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra. Ein Element $x \in \mathcal{A}$ heisst invertierbar, wenn ein El't $y \in \mathcal{A}$ existiert, s.d.:

$$xy = yx = \mathbb{1} \quad (*)$$

$$\mathcal{A}^* = \{ x \in \mathcal{A} \mid x \text{ ist invertierbar} \}$$

Bem.: Für jedes El't $x \in \mathcal{A}$ hat die Gleichung $(*)$ höchstens eine Lösung. Seien $y, y' \in \mathcal{A}$ zwei Lösungen. Dann gilt: $y' = y'\mathbb{1} = y'(xy) = (y'x)y = \mathbb{1}y = y$.

Def.: Für $x \in \mathcal{A}^*$ heisst die Lösung der Gleichung $(*)$ das inverse Element von x und wird mit x^{-1} bezeichnet.

Bem.:
i) $\mathbb{1} \in \mathcal{A}^*$ und $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}$
ii) $x \in \mathcal{A}^* \Rightarrow x^{-1} \in \mathcal{A}^*$ & $(x^{-1})^{-1} = x$
iii) $x, y \in \mathcal{A}^* \Rightarrow xy \in \mathcal{A}^*$ & $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

Bsp. 1) $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathbb{C}$

Bsp. 2) Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{A} := \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$ eine Banachalgebra mit Komposition und Operatornorm (S3)

Bsp. 3) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n \times n}$
Eine Matrix-Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Normfunktion $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \|A\|$, s.d. $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

z.B.: $A = (a_{ij})_{i,j}^{n}$. Sei $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$

Übg.: $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ und $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$

Bsp. 4) (X, d) : kmpkt., metr. Raum

$C(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

übliche Multiplikation, $\mathbb{1}$-Funktion

$\Rightarrow$ Banachalgebra

Bsp. 5) $\mathcal{A} = l^1 := \{ x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \mid \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty \}$

Produkt = Faltung : $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $y = (y_l)_{l \in \mathbb{N}_0} \in l^1$

$$(x * y)_k := \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i} \, , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

mit $\|x\| := \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$, $\mathbb{1}$: $\delta = (1, 0, 0, 0, \dots) =$

$\delta_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \|x * y\| \leq \|x\| \, \|y\|$ (K4 / S15)

Reihen im Banachraum

Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. $x_0, x_1, x_2, \dots$: Folge in X

Def.: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ heisst konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$ konvergiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert mit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \in X$$

Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ heisst absolut summierbar, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. In diesem Fall sagen wir auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert absolut.

S4 $\longrightarrow$

SATZ 4

Sei X ein Banachraum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine absolut summierbare Folge.
$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert.

Beweis: Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \in X$, $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \in \mathbb{R}$$

Nach Vorraussetzung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchy
D.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > m \geq n_0 : a_n - a_m < \varepsilon$
$\Rightarrow$ $\forall n > m \geq n_0$ gilt: $\|s_n - s_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\|$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = a_n - a_m < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchy-Folge in X
$\Rightarrow$ X Banachraum: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. ▨

Potenzreihen

$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ (1). Konvergenzradius $\rho = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$ (2)

↳ K4/S10: Die Reihe (1) konvergiert absolut für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$

SATZ 5

$\mathcal{A}$: Banachalgebra, P, ρ wie in (1), (2) mit $\rho > 0$. $B_\rho := \{x \in \mathcal{A} \mid \|x\| < \rho\}$. Sei $Q(z) := P'(z) \overset{K6/S8}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ (3). Dann gilt:

i) Für jedes $x \in B_\rho$ konvergiert die Reihe $P_{\mathcal{A}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathcal{A}$ (4) in $\mathcal{A}$ absolut.
ii) Die Abbildung $P_{\mathcal{A}} : B_\rho \to \mathcal{A}$ ist stetig.

iii) Für jedes $x \in \mathcal{A}$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $|t|\,\|x\| < \varrho$ gilt:

$$\frac{d}{dt} P_{\mathcal{A}}(tx) := \lim_{h \to 0} \frac{P_{\mathcal{A}}((t+h)x) - P_{\mathcal{A}}(tx)}{h} = x\, Q_{\mathcal{A}}(tx) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k t^{k-1}$$

Beweis:

i): $\|a_k x^k\| = |a_k|\,\|x^k\| \leq |a_k|\,\|x\|^k$; $k = 1, 2, 3, \ldots$, $\|x\| < \varrho$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k x^k\| < \infty \overset{S4}{\Rightarrow}$ absolute Konvergenz ✓.

ii): Sei $0 < r < \varrho$. Seien $x, y \in \mathcal{A}$ mit $\|x\| \leq r$ und $\|y\| \leq r$

$\|P_{\mathcal{A}}(x) - P_{\mathcal{A}}(y)\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x^k - y^k)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,\|x^k - y^k\|$

Mittels Beh.: $\|x^k - y^k\| \leq k r^{k-1} \|x - y\| \to \leq \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1}}_{< \infty,\ \text{da } r < \varrho}\Big) \cdot \|x - y\|$

↳ Bew. d. Beh.: via Induktion

IV bei $n = 2$: $\|x^2 - y^2\| \leq \|x^2 - xy\| + \|xy - y^2\| \leq \underbrace{\|x\|}_{\leq r} \|x - y\| + \|x - y\| \underbrace{\|y\|}_{\leq r} \leq 2r \|x - y\|$

IA & IS: nicht gemacht.

iii): Wähle $\delta > 0$ s.d.: $r := \|x\| (|t| + \delta) < \varrho$. Definiere:

$c := \frac{\|x\|^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |a_k| r^{k-2} < \infty$. Beh.: $\|P_{\mathcal{A}}((t+h)x) - P_{\mathcal{A}}(tx) - h x Q_{\mathcal{A}}(tx)\|$ (*) $\leq c h^2$ für $|h| < \delta$

Bew.: $(*) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left((t+h)^k x^k - t^k x^k - hkt^{k-1} x^k \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \Big(\underbrace{(t+h)^k - t^k - hkt^{k-1}}_{} \Big) a_k x^k$

$= \frac{h^2}{2} k(k-1) \xi^{k-2}$ (K6, S9), wobei $|\xi| \leq |t| + \delta$; $\xi \in [t, t+h]$ oder $\xi \in [t-h, t]$

$\|(*)\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|\,\|x\|^k k(k-1) (|t| + \delta)^{k-2} \cdot h^2/2$

$\leq \frac{\|x\|^2 h^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k(k-1) \big(\underbrace{\|x\| (|t| + \delta)}_{= r} \big)^{k-2}$

$\leq c h^2$ ▨

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad ; \quad z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$$

SATZ 6

$\mathcal{A}$: reelle Banachalgebra

i) $x \in \mathcal{A},\ \|x\| < 1 \Rightarrow \mathbb{1} - x \in \mathcal{A}^*$ und $(\mathbb{1}-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

ii) $x \in \mathcal{A}^*,\ y \in \mathcal{A}$: $\|x-y\|\|x^{-1}\| < 1 \Rightarrow y \in \mathcal{A}^*$ und

$$y^{-1} = x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{1} - yx^{-1})^k, \quad \|y^{-1} - x^{-1}\| \leq \frac{\|x^{-1}\|^2 \|x-y\|}{1 - \|x^{-1}\|\|x-y\|}$$

iii) $\mathcal{A}^*$ ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{A}$ und die Abb. $\mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$: $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig.

Beweis: i) Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ folgt aus Satz 5.

$$(\mathbb{1}-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \mathbb{1} - x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k (\mathbb{1}-x)$$

$$n \to \infty \quad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$(\mathbb{1}-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \mathbb{1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k (\mathbb{1}-x)$$

ii) $\|\mathbb{1} - yx^{-1}\| = \|(x-y)x^{-1}\| \leq \|x-y\|\|x^{-1}\| < 1$

$\overset{i)}{\Rightarrow} yx^{-1} \in \mathcal{A}^*$ und

$$xy^{-1} = (yx^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{1} - yx^{-1})^k \Rightarrow y \in \mathcal{A}^*$$

$$y^{-1} = x^{-1}(yx^{-1})^{-1} = x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{1} - yx^{-1})^k$$

$$\Rightarrow \|y^{-1} - x^{-1}\| = \|x^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{1} - yx^{-1})^k\|$$

$$\leq \|x^{-1}\| \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbb{1} - yx^{-1}\|^k = \|x^{-1}\| \frac{\|\mathbb{1} - yx^{-1}\|}{1 - \|\mathbb{1} - yx^{-1}\|}$$

$$\leq \|x^{-1}\| \frac{\|x^{-1}\|\|x-y\|}{1 - \|x^{-1}\|\|x-y\|}$$

iii) folgt aus ii) ∎

Bsp.) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n\times n}$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar

$\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\exists\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.d. $AB = BA = \mathbb{1}$

$\overset{\text{def.}}{\iff}$ Die lin. Abb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$ ist bijektiv

$\iff$ $\det(A) \neq 0$

$\mathcal{A}^* = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0 \} = GL(n, \mathbb{R})$

Korollar: $GL(n,\mathbb{R})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$ und die Abb. $GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}) : A \mapsto A^{-1}$ ist stetig

Bew.: weggelassen

Def.: $\mathcal{A}$ sei eine reelle Banachalgebra. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist definiert durch:

$$\exp(x) := e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

SATZ 7

i) Diese Abbildung ist stetig

ii) $x \in \mathcal{A}$, $x_n \in \mathcal{A}$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$

$\Rightarrow \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n$

iii) $x, y \in \mathcal{A}$, $xy = yx \Rightarrow e^{x+y} = e^x e^y$

iv) $\forall x \in \mathcal{A}$ gilt: $\exp(x) \in \mathcal{A}^*$, $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$

v) $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{A}^* \Rightarrow \exp(yxy^{-1}) = y \exp(x)\, y^{-1}$

vi) $\forall x \in \mathcal{A}$ ist die Abb. $\mathbb{R} \to \mathcal{A} : t \mapsto \exp(tx)$ diff'bar und $\frac{d}{dt}\exp(tx) = x\exp(tx)$

Beweis: i) Satz 5 (ii)

ii) K5/S7 wie in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

iii) $xy = yx$

$\hookrightarrow \left(\mathbb{1} + x/n\right)^n \left(\mathbb{1} + y/n\right)^n = \left(\mathbb{1} \; \frac{x + y + xy/n}{n}\right)$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$$

iv) $y = -x$

$$\Rightarrow \exp(-x)\exp(x) = \mathbb{1} = \exp(0)$$

$$\exp(x)\exp(-x) = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \exp(x) \in \mathcal{A}^* \ \& \ \exp(x)^{-1} = \exp(-x)$$

v) $(yxy^{-1})^k = yx^ky^{-1}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yxy^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yx^ky^{-1})}{k!}$$

$$\hookrightarrow \exp(yxy^{-1}) = y\exp(x)y^{-1}$$

vi) $P(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}$

$Q(z) = P'(z) = P(z)$

Nach Satz 5 : $\frac{d}{dt} P_A(tx) = x\, Q_A(tx)$ ∎

Bsp.) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathcal{A}$

$$\hookrightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

Nach S7(vi) ist die Abb. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} : t \mapsto e^{At}$ diff'bar und $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und definiere $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ durch $x(t) := x_0 e^{At}$ für $t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ x ist diff'bar : $\dot{x}(t) = Ae^{At}x_0 = Ax(t)$

$\Rightarrow$ (1) : $\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$

(2) : $x(t) = e^{At}x_0$ ist Lösung von (1) (K8/S1)

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$$

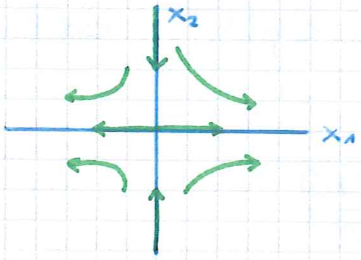
$$\hookrightarrow \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t)$$

$$\vdots$$

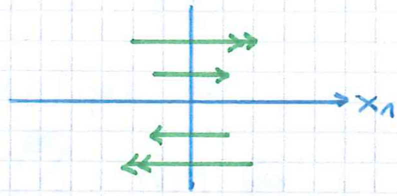
$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots \cdot a_{nn}x_n(t)$$

Bsp. 1) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \dot{x}_i = \lambda_i x_i$

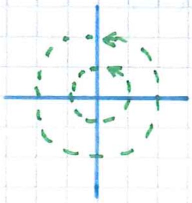
$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad n = 2: \quad \begin{matrix} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, & \lambda_1 > 0 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, & \lambda_2 < 0 \end{matrix}$$



Bsp. 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

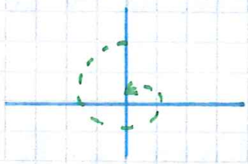


Bsp. 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$



Bsp. 4) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$

für $a < 0$:



Bsp. 5) $\exp(Q\Lambda Q^{-1}) \overset{\text{S7 (V)}}{=} Q e^{\Lambda t} Q^{-1}$

SATZ 8

Seien P, Q Potenzreihen mit reellen Koeffizienten und positiven Konvergenzradien ($\varrho_P > 0$ und $\varrho_Q > 0$):

$$P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad Q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^\nu \quad (\text{insbesondere } P(0) = 0)$$

Wähle $0 < \varrho \leq \varrho_P$ s.d. $\forall z \in \mathbb{C}: |z| < \varrho \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |z|^k < \varrho_Q$

Definiere $R : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varrho\} \to \mathbb{C}$ durch $R(z) := Q(P(z))$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \varrho$. Dann gilt:

i) R ist eine Potenzreihe $R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit Konvergenzradius $\varrho_r \geq \varrho$

ii) Die c_k sind gegeben durch $c_0 = b_0$ und

$$c_k = \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ \sum i m_i = k}} \frac{(\sum m_i)!}{\prod (m_i)!} \left(b_{\sum m_i} \right) \prod_i a_i^{m_i}$$

iii) $\mathcal{A}$: reelle Banachalgebra

$x \in \mathcal{A}$, $\|x\| < \varrho \Rightarrow \|P_{\mathcal{A}}(x)\| < \varrho_Q$ und $R_{\mathcal{A}}(x) = Q_{\mathcal{A}}(P_{\mathcal{A}}(x))$

<u>Beweis:</u> s. Manuskript: Banachräume & lin. Operatoren

Bsp.) $Q(z) = \exp(z)$, $P(z) = L(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \dots$

$\hookrightarrow \exp(L(z)) = 1 + z \qquad = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k}, \; \varrho_L = 1$

(K5/S9)

<u>Korollar:</u> $\mathcal{A}$: Banachalgebra, $x \in \mathcal{A}$ mit $\|x\| < 1$

$$\Rightarrow \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \right) = \mathbb{1} + X$$

Insbesondere gilt dies für Matrizen $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|x\| < 1$.

<u>Def.:</u> Ein metrischer Raum (X, d) heisst zusammenhängend, wenn für alle $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{U}, \mathcal{V} : \text{offen} \\ \mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X \\ \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{U} = \emptyset \\ \text{oder } \mathcal{V} = \emptyset \end{array}$$

Äquivalente Bedingung: $\mathcal{U} \subset X$ offen & abg. $\Rightarrow \mathcal{U} = \emptyset$ oder $\mathcal{U} = X$

Def.: Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines metr. Raumes (X,d) heisst zusammenhängend, wenn der metr. Rm (Y, d_Y) mit
$$d_Y := d\big|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$$
zushgnd ist.

Def.: Die von d_Y erzeugte Topologie auf Y heisst Relativtopologie. Eine Teilmenge $V \subset Y$ heisst Y-offen, wenn sie offen ist bzgl. der Relativtopologie.
Eine Teilmenge $B \subset Y$ heisst Y-abgeschlossen, wenn sie abg. ist bzgl. der Relativtopologie.

Lemma 1

(X,d): metr. Rm, $Y \subset X$

i) Sei $V \subset Y$. Dann gilt: V ist Y-offen $\iff \exists\, \mathcal{U} \subset X$ offen s.d. $\mathcal{U} \cap Y = V$

ii) Sei $B \subset Y$. Dann gilt: B ist Y-abg. $\iff \exists\, A \subset X$ abg. s.d. $A \cap Y = B$

Beweis: i) "$\Rightarrow$": $V \subset Y$ sei Y-offen

$\Rightarrow \forall y \in V \ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ s.d. $B_{\varepsilon(y)}(y;Y) = \{z \in Y \mid d(z,y) < \varepsilon(y)\} \subset V$

Sei $\mathcal{U} := \bigcup_{y \in V} B_{\varepsilon(y)}(y;X)$. $B_{\varepsilon(y)}(y;X) = \{x \in X \mid d(x,y) < \varepsilon(y)\} \rightsquigarrow B_{\varepsilon(y)}(y;X) \cap Y = B_{\varepsilon(y)}(y;Y)$

$\Rightarrow \mathcal{U}$ ist offen in X

$\mathcal{U} \cap Y = \bigcup_{y \in V} (B_{\varepsilon(y)}(y;X) \cap Y) = V$

"$\Leftarrow$": $\mathcal{U} \subset X$ offen s.d. $\mathcal{U} \cap Y = V$. Sei $y \in V$

$\mathcal{U}$ offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(y;X) \subset \mathcal{U}$

$\Rightarrow B_\varepsilon(y;Y) = B_\varepsilon(y;X) \cap Y \subset \mathcal{U} \cap Y = V$

ii) Sei $B \subset Y$, B ist Y-abgeschl. $\iff Y \setminus B$ ist Y-offen

$\overset{i)}{\iff} \exists\, \mathcal{U} \subset X$ offen s.d. $\mathcal{U} \cap Y = Y \setminus B$

$\iff A := X \setminus \mathcal{U}$ ist abg. & $A \cap Y = Y \setminus \mathcal{U} = B$ ∎

Bsp.) $X = \mathbb{R}$, Std.-Metrik: $d(x,y) = |x-y|$

$Y := [a,b]$, $a < b$

$V := [a, c)$ Y-offen für $a < c < b$

SATZ 9

$X = \mathbb{R}$ mit Std.-Metrik. Sei $I \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

I ist zushngnd $\Leftrightarrow$ I ist ein Intervall.

Beweis: "$\Rightarrow$": Annahme: I ist kein Intervall

$\Rightarrow \exists\, a,b,c \in \mathbb{R}$ s.d. $a < c < b$ und $a, b \in I$, $c \notin I$

$A := \{x \in I \mid x < c\}$, $B := \{x \in I \mid x > c\}$

$= I \cap (-\infty, c)$ $\qquad = I \cap (c, \infty)$

$\Rightarrow A \cup B = I$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ I ist nicht zushngnd. $\perp$

"$\Leftarrow$": $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Annahme: I sei nicht zushngnd $\Rightarrow \exists\, A, B \subset I$ beide I-offen und I-abg.

$A \cup B = I$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

Wähle $a \in A$ und $b \in B$. O.B.d.A.: $a < b$

$c := \sup \{x \in A \mid a \leq x \leq b\} \Rightarrow c \in [a,b] \subset I$

$\Rightarrow \exists\, a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, s.d. $a_k \leq c$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k \to \infty} a_k = c$

$\Rightarrow$ A ist I-abg.: $c \in A \Rightarrow c \notin B \Rightarrow c < b$

$\Rightarrow (c, b] \subset B \Rightarrow c = \lim_{n \to \infty} \underbrace{(c + 1/n)}_{\in B}$

$\Rightarrow$ Da aber $c \notin B$: B ist nicht I-abg. $\Rightarrow \perp$ ▨

SATZ 10

$(X, d_X), (Y, d_Y)$: metr. Rme, $f: X \to Y$ stetig.

X zushngnd $\Rightarrow f(X) \subset Y$ ist zushngnd

Beweis: Sei $B \subset f(X)$ offen & abgeschl. bzgl. der Relativtopologie.
$\Rightarrow \exists\, \mathcal{U} \subset Y$ offen $\exists\, A \subset Y$ abg. s.d. $\mathcal{U} \cap f(X) = A \cap f(X) = B$
$\Rightarrow f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} = f^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(A)$
$\Rightarrow f^{-1}(B) \subset X$ ist offen & abg.
$\Rightarrow X$ zushngnd: $f^{-1}(B) = \emptyset$ oder $f^{-1}(B) = X$
$\Rightarrow B = \emptyset$ oder $B = f(X)$

■

Korollar (Zwischenwertsatz)

(X,d): metr. Rm, zusammenh., $f: X \to \mathbb{R}$ stetige Abb. $x, y \in X$ und $c \in \mathbb{R}$ s.d. $f(x) < c < f(y)$
$\Rightarrow \exists\, z \in X$ s.d. $f(z) = c$

Bew.: (X,d): zushngnd $\overset{S10}{\Longrightarrow} f(X) \subset \mathbb{R}$ zushngnd
$\overset{S9}{\Longrightarrow} f(X)$ ist ein Intervall $\overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} c \in f(X)$

■

Def.: Sei (X,d) ein metr. Rm. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heisst wegzusammenh., wenn für alle $y_0, y_1 \in Y$ eine stetige Abbildung $\gamma: [0,1] \to Y$ existiert, s.d. $y_0 = \gamma(0)$ und $\gamma(1) = y_1$

SATZ 11

i) Sei (X,d) ein metr. Rm und $Y \subset X$. Dann gilt:
Y wegzush. $\Rightarrow$ Y zush.

ii) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein norm. VRm und $\mathcal{U} \subset X$ offen. Dann gilt: $\mathcal{U}$ zush. $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ weg-zush.

Beweis: i) Sei $Y \subset X$ wegzush. Annahme: Y ist nicht zush.
$\Rightarrow \exists\, Y_0, Y_1 \subset Y$ offen & abg. bzgl. Relativtopologie, $Y_0 \cup Y_1 = Y$, $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$, $Y_0 \neq \emptyset$, $Y_1 \neq \emptyset$

Wähle $y_0 \in Y_0$, $y_1 \in Y_1$

$\Rightarrow \exists\, \gamma : [0,1] \to Y$ stetig s.d. $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = y_1$

$\mathcal{U}_0 := \{ t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in Y_0 \} = \gamma^{-1}(Y_0)$

$\mathcal{U}_1 := \{ t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in Y_1 \} = \gamma^{-1}(Y_1)$

$\Rightarrow 0 \in \mathcal{U}_0$, $1 \in \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$, $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 = [0,1] \Rightarrow \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ offen & abg. bzgl. der Relativtopologie von $[0,1] \Rightarrow \perp$, da $[0,1]$ zush per S9

ii) $(X, \|\cdot\|)$: norm. VRm

$\mathcal{U} \subset X$ sei offen & zush.. Sei $\mathcal{U} \neq \emptyset$ und wähle $x_0 \in \mathcal{U}$. Definiere:

$\mathcal{U}_0 := \{ x \in \mathcal{U} \mid \exists$ stet. Abb. $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x \}$

Beh.: • $\mathcal{U}_0 \neq \emptyset \;\to\; \checkmark$, da $x_0 \in \mathcal{U}_0$

• $\mathcal{U}_0$ ist offen
• $\mathcal{U}_0$ ist $\mathcal{U}$-abg. $\Big\}$ Übg.

$\Rightarrow \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$, da $\mathcal{U}$ zush. ∎

Bsp. 1) $K \subset \mathbb{R}^n$, K sei konvex, d.h. $y_0, y_1 \in K$ und $t \in [0,1]$

$\Rightarrow \gamma(t) = (1-t)y_0 + t y_1 \in K$

$\Rightarrow$ K ist wegzush.

$\overset{S11}{\Rightarrow}$ K ist zush.

Bsp. 2) $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wegzush für $n \geq 2$, nicht wegzush. für $n = 1$

Bsp. 3) $X = \mathbb{R}^2$, $Y := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x > 0 \text{ und } y = \sin(1/x) \\ \text{oder } x = 0 \text{ und } |y| \leq 1 \end{array} \right\}$

↳ Y zush., aber nicht wegzush. (Übg.)

Def.: (X,d): metr. Rm. x, y heissen äquivalent ($x \sim y$), wenn eine zush. Teilmenge $A \subset X$ existiert mit $x, y \in A$.

Übg. 1) Dies ist eine Äquivalenzrelation
Übg. 2) Jede Äquivalenzklasse ist zush.

Hinweis: (X,d): metr. Rm.
$A_i \subset X$ zush. $\forall i \in I$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \text{ zush.}$$

Def.: (X,d): metr. Rm, $x_0 \in X$.
Die Äquivalenzklasse $X_0 := \{x \in X \mid x \sim x_0\}$
heisst Zusammenhangskomponente von x_0

Bsp. 4) $X = \mathbb{R}^n$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$
↳ $X \setminus S^{n-1}$ hat 2 Zush.-komponenten für $n \geq 2$
3 Zush.- komponenten für $n = 1$

Bsp. 5) $X = \mathbb{Q}$, $d(x,y) = |x-y|$
Jede Zush.-komponente hat genau ein Element.
"total unzusammenhängend"

SATZ 12

Die Menge $GL^+(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) > 0\}$ ist weg-zusammenhängend.

Beweis: 1. Wenn $A \in GL(n,\mathbb{R})$ keine neg. EW hat, dann
gilt $A_t := (1-t)\mathbb{1} + tA \in GL(n,\mathbb{R})$ $\forall t\, [0,1]$
(falls $\det(A_t) = 0$ ist $0 < t < 1$ und $-\frac{1-t}{t}$ ist ein
EW von A)

2. $A \in GL^+(n,\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\, B, C \in GL(n,\mathbb{R})$ ohne neg. EW
s.d. $A = B^2 C$

s. zus. Manuskript:

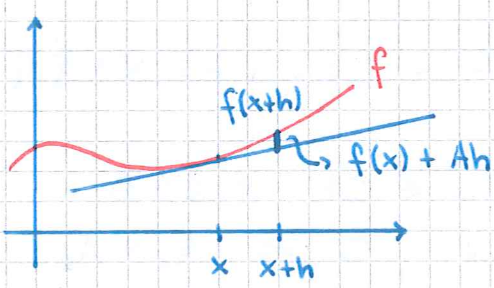
Kapitel 10: Differenzierbare Abbildungen

<u>Erinnerung:</u> Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst diff'bar an der Stelle $x \in \mathbb{R}$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: A$$

existiert, d.h.: $\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A \right| = 0$

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{h} \right| = \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|}$$



In mehreren Dimensionen: "Die Ableitung ist ein beschränkter linearer Operator" (eine lin. Abb.)

<u>Def.:</u> Seien $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ Banachräume, $U \subset X$ offen und $x \in U$. Eine Abbildung $f: U \to Y$ heisst diff'bar an der Stelle x, wenn ein beschränkter lin. Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ existiert, s.d.:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in X \setminus \{0\}}} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

D.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h \in X: \ 0 < \|h\|_X < \delta \Rightarrow$ $x + h \in U$ und

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} < \varepsilon \qquad (*)$$

Wir nennen dann A die Ableitung von f an d. Stelle x.

Lemma 1

Es existiert höchstens ein beschr. lin. Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, der die Bedingung (∗) erfüllt.

Beweis: Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$, die die Bedingung (∗) erfüllen. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0$ so dass (∗) für A_1 und A_2 gilt. Sei $h \in X$ mit $0 < \|h\|_X < \delta$

$$\begin{aligned}\|(A_1 - A_2)h\|_Y &= \|A_1 h - A_2 h\|_Y \\ &\leq \|A_1 h + f(x) - f(x+h)\|_Y + \|f(x+h) - f(x) \\ &\quad - A_2 h\|_Y < 2\varepsilon \|h\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\|(A_1 - A_2)h\|_Y}{\|h\|_X} < 2\varepsilon \quad \forall h \in X \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \|A_1 - A_2\| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \|A_1 - A_2\| = 0 \Rightarrow A_1 = A_2$$

∎

Def.: X, Y: Banachräume, $U \subset X$ offen und $x \in U$. Sei $f: U \to Y$ diff'bar an d. Stelle x. Die Ableitung von f an d. Stelle x ist der eind. beschr. lin. Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, der die Bed. (∗) erfüllt, und wird mit

$$df(x) := A : X \to Y \quad (\text{bzw. } Df(x),\ d_x f,\ D_x f,\ f'(x))$$

bezeichnet.

Lemma 2

f diff'bar an d. Stelle x $\Rightarrow$ f ist stetig an d. Stelle x

Beweis: $A := df(x) : X \to Y$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ s.d. (∗) gilt. Wähle

$$\rho := \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|A\|}\right\}$$

$\Rightarrow \forall h \in X$ mit $0 < \|h\|_X < \delta$ sowie $x+h \in U$ gilt.

$$\|f(x+h) - f(x)\|_Y \leq \underbrace{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_Y}_{< \varepsilon \|h\|_X} + \underbrace{\|Ah\|_Y}_{\leq \|A\| \|h\|_X}$$

$$< (\varepsilon + \|A\|) \|h\|_X < (\varepsilon + \|A\|) \delta \leq \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Bsp. 1) Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $b \in Y$. Definiere $f: X \to Y$ durch
$f(x) := Ax + b$ für $x \in X$
$f(x+h) - f(x) - Ah = 0 \quad \forall x, h \in X$
$\Rightarrow f$ ist diffbar und $df(x) = A \quad \forall x \in X$

Bsp. 2) $(X, \|.\|_2) \hat{=} \mathbb{R}^n$ mit eukl. Norm, $Y = \mathbb{R}$

$$f(x) := \tfrac{1}{2} x^T Q x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{Q}_{(q_{ij})_{ij}} = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} x_i q_{ij} x_j$$

$$f(x+h) - f(x) = \tfrac{1}{2}(x+h)^T Q (x+h) - \tfrac{1}{2} x^T Q x$$
$$= x^T Q h + \tfrac{1}{2} h^T Q h$$

$$|f(x+h) - f(x) - x^T Q h| = \tfrac{1}{2} |h^T Q h|$$
$$\leq \tfrac{1}{2} \|h\|_2 \|Qh\|_2$$
$$\leq \frac{\|Q\|}{2} \|h\|_2^2$$

$\Rightarrow f$ ist diff'bar: $\quad df(x)\xi = x^T Q \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$
$\qquad df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>Def.:</u> X, Y: Banachräume
$U \subset X$ offen, $x \in U$, $\xi \in X$, $f: U \to Y$
Die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung ξ ist der Grenzwert für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t} =: \partial_\xi f(x) \in Y, \text{ falls dieser existiert.}$$

Lemma 3

$f: U \to Y$ diff'bar an d. Stelle x. $\Rightarrow$ Für jedes $\xi \in X$ existiert die Richtungsableitung und es gilt $\partial_\xi f(x) = df(x)\xi \in Y$.

Beweis: Sei $\xi \in X \setminus \{0\}$, $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ s.d. $\forall h \in X \setminus \{0\}$ mit $\|h\|_X < \delta$ gilt, dass $x+h \in U$ und

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - df(x)h\|_Y}{\|h\|_X} < \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_X}$$

Sei $\delta := \varrho / \|\xi\|_X$. Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < |t| < \delta$

$$\Rightarrow 0 < \|t\xi\|_X < \varrho \Rightarrow \frac{\|f(x+t\xi) - f(x) - df(x)t\xi\|_Y}{\|t\xi\|_X} < \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_X}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{f(x+t\xi)-f(x)}{t} - df(x)\xi \right\| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Spezialfall / Def.:

$X = \mathbb{R}^n$, $\xi = e_i$

Def.: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, Y: Banachraum, $x \in U$.

Für $i = 1, \dots, n$ heisst die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \partial_i f(x) := \partial_{e_i} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n)$$

(falls sie existiert) die partielle Ableitung von f nach der i-ten Variablen an der Stelle x.

f heisst partiell diff'bar an der Stelle x, wenn die partiellen Ableitungen $\partial_i f(x)$, $i = 1, \dots, n$ existieren.

Es gilt: $U \subset \mathbb{R}^n$, $x \in U$, $f: U \to Y$, Y: Banachraum

$$\underset{\text{in } x}{f \text{ stetig}} \;\underset{\not\Rightarrow}{\overset{L2}{\Leftarrow}}\; \underset{\text{in } x}{f \text{ diff'bar}} \;\underset{\overset{\not\Leftarrow}{\text{Bsp.3}}}{\overset{L3}{\Rightarrow}}\; \underset{\text{existiert in } x}{\text{Richt.-abl.}} \;\underset{\overset{\not\Leftarrow}{\text{Bsp.4}}}{\Rightarrow}\; \underset{\text{an d. St. } x}{f \text{ partiell diff'bar}}$$

$$\underset{\text{Bsp 5}}{\not\Leftarrow}$$

Bsp. 3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & ; \ x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0 & ; \ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(tx) - f(0)}{t} = \frac{f(tx)}{t} = f(x) \quad \Rightarrow \quad f \text{ hat Richt.-abl.}$$

$$\partial_x f(0) = f(x)$$

$x \mapsto \partial_x f(0)$ ist nicht linear

$\Rightarrow$ f ist nicht diffbar an d. Stelle $x = 0$

Aber: f ist stetig an d. Stelle $x = 0$

Bsp. 4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & ; \ x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0 & ; \ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

1. $f(tx) = |t| f(x)$
2. f partiell diff'bar an der Stelle $x = 0$
3. Richtungsableitung $\partial_\xi f(0)$ existiert nicht wenn $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ und $\xi_1 \neq$ sowie $\xi_2 \neq 0$

Bsp. 5) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2} & ; \ \text{falls } x_2 \neq 0 \\ 0 & ; \ \text{falls } x_2 = 0 \end{cases}$$

$f(tx) = t f(x)$ $\Rightarrow$ alle Richtungsabl. von f an d. Stelle $x = 0$ existieren

$$f(\varepsilon, \varepsilon^3) = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^6}{\varepsilon^3} \geq 1/\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$$

f unstetig an d. Stelle $x = 0$

Vektorräume als Bildmengen

X: Banachrm , $Y = \mathbb{R}^m$ mit enkl. Norm, $U \subset X$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \text{ für } x \in U \ , \quad f_i: U \to \mathbb{R}$$

Lemma 4

Sei $x \in U$. Rest wie oben.

i) Sei $\xi \in X$ und $a = (a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t} = a \iff \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x+t\xi) - f_i(x)}{t} = a_i \text{ für } i = 1, \dots, m$$

ii) Sei $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} : X \to \mathbb{R}^m$ ein beschr. lin. Operator. Dann gilt:

f ist diff'bar an der Stelle x und $df(x) = A$ $\iff$ f_i ist diff'bar an der Stelle x und $df_i(x) = A_i$ für $i = 1, \dots, m$

Beweis:

i) $$\left\| \frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t} - a \right\|_{\mathbb{R}^m} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left| \frac{f_i(x+t\xi) - f_i(x)}{t} - a_i \right|^2}$$

ii) $$\frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_X} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{f_i(x+h) - f_i(x) - Ah}{\|h\|_X} \right)^2}$$

$\blacksquare$

Lemma 5

$X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $U \subset X$ offen, $x \in U$, $f: U \to \mathbb{R}^m$ diff'bar und stetig

$$\Rightarrow df(x)\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

"Jacobi-Matrix"

Beweis:

$\exists A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s.d. $df(x)\xi = A\xi$

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = Ae_j = df(x)e_j = \partial_{e_j} f(x) = \partial_j f(x)$$

$$\Rightarrow \dots \ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

$\blacksquare$

SATZ 1

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f: U \to \mathbb{R}$ sei partiell diff'bar. $x_0 \in U$. $\forall i = 1, \dots, n$: $\partial_i f: U \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle x_0.

$\Rightarrow$ f ist diff'bar an d. Stelle x_0 und $df(x_0)\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i f(x_0)$, wobei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, s.d. $\forall h \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow x_0 + h \in U$ und

$$|\partial_i f(x_0+h) - \partial_i f(x_0)| < \varepsilon/n \text{ für } i = 1, \dots, n \quad (*)$$

Schritt 1: $k \in \{1, \dots, n\}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $\|\xi\| + |t| < \delta \Rightarrow |f(x_0 + \xi + te_k) - f(x_0 + \xi) - t\partial_k f(x_0)| < \varepsilon/n \, |t|$

Bew.: (für $t > 0$). Definiere $\varphi: [0,t] \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(s) = f(x_0 + \xi + se_k) - s\,\partial_k f(x_0)$

$\Rightarrow \varphi$ ist diff'bar, $\varphi'(s) = \partial_k f(x_0 + \xi + se_k) - \partial_k f(x_0)$

$\Rightarrow |\varphi'(s)| < \varepsilon/n \;\; \forall s \in [0,t]$

Nach MWS (K6 / S3): $\exists s \in \mathbb{R}: 0 < s < t$ s.d. $\varphi'(s) = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$

$\Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(0)| < \varepsilon/n \, |t|$

$|f(x_0 + \xi + te_k) - t\,\partial_k f(x_0) - f(x_0 + \xi)|$

Schritt 2: $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$\|h\| < \delta \Rightarrow x_0 + h \in U$ und

$|f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k f(x_0)| \leq \varepsilon \|h\|$

Bew.: $x_1 := x_0 + h_1 e_1 \in \mathbb{R}^n$

$x_2 := x_0 + h_1 e_1 + h_2 e_2 \in \mathbb{R}^n$

$\vdots$

$x_n := x_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k e_k = x_0 + h \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k} h_i e_i = (x_{01}+h_1, \dots, x_{0k}+h_k,$$
$$x_{0k+1}, \dots, x_{0n})^T$$

$$\Rightarrow | f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k f(x_0) |$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} | f(\underbrace{x_k}_{= \underbrace{x_{k-1}}_{\hookrightarrow \xi} + \underbrace{h_k e_k}_{\hookrightarrow t}}) - f(x_{k-1}) - h_k \partial_k f(x_0) |$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} |h_k| \leq \varepsilon \|h\| \qquad \blacksquare$$

<u>Bem.:</u> Satz 1 gilt auch für Funktionen $f: U \to \mathbb{R}^m$.

<u>Bem.:</u> Satz 1 gilt sogar für Funktionen $f: U \to Y$ mit Werten in einem beliebigen Banachraum.
Dazu benötigt man: $\varphi: I = [0,t] \to Y$ diff'bar und $\|\varphi'(s)\|_Y \leq C \quad \forall s \in [0,t]$
$\Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(0)\|_Y \leq C|t|$

<u>Def.:</u> X, Y: Banachräume, $U \subset X$ offen. Eine Abb. $f: U \to Y$ heisst stetig diff'bar, wenn sie an jeder Stelle in U diff'bar ist und die Abb. $U \to \mathcal{L}(X,Y): x \mapsto df(x)$ stetig ist.

<u>Bem.:</u> $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^m$.
f ist stetig diff'bar $\overset{S1}{\Longleftrightarrow}$ f ist partiell diff'bar und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}: U \to \mathbb{R}$ ist stetig für $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$

<u>Satz 2</u> →

SATZ 2

X, Y: Banachräume, $U \subset X$ offen, $x \in U$, sowie $f, g : U \to Y$ diff'bar an der Stelle x.

$\Rightarrow$ i) $f+g : U \to Y$ ist diff'bar an d. Stelle x

ii) $Y = \mathbb{R} \Rightarrow fg : U \to \mathbb{R}$ diff'bar an d. Stelle x

iii) $Y = \mathbb{R}, g(x') \neq 0 \ \forall x' \in U \Rightarrow f/g : U \to \mathbb{R}$ diff'bar an d. Stelle x

Ableitungen: i) $d(f+g) = df(x) + dg(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$

ii) $d(fg)(x)\xi = f(x)dg(x)\xi + g(x)df(x)\xi \ \forall \xi \in X$ (Leibniz-Regel)

iii) $$d(f/g)(x)\xi = \frac{g(x)df(x)\xi - f(x)dg(x)\xi}{g(x)^2}$$

Beweis: i) $A := df(x)$, $B := dg(x)$. Sei $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall h \in X$ mit $0 < \|h\|_X < \delta$:

$\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_Y < \varepsilon/2$

$\|g(x+h) - g(x) - Bh\|_Y < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \|(f+g)(x+h) - (f+g)(x) - (A+B)h\|_Y < \varepsilon$ ✓

Fortsetzung folgt...

SATZ 3 (Kettenregel)

X, Y, Z: Banachräume, $U \subset X$, $V \subset Y$: offen, $f : U \to V$ diff'bar an d. Stelle $x_0 \in U$, $g : V \to Z$ diff'bar an der Stelle $y_0 := f(x_0) \in V$.

$\Rightarrow g \circ f : U \to Z$ ist diff'bar an der Stelle x_0 und

$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \cdot df(x_0)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "df(x_0)"] \arrow[rr, bend right, "d(fog)(x)"'] & Y \arrow[r, "dg(y_0)"] & Z \end{tikzcd}$$

Dieser Satz erlaubt es uns nun, den Rest des Satzes 2 zu beweisen...

Satz 3 $\Rightarrow$ Satz 2 (ii), (iii)

ii) $F: U \to \mathbb{R}^2$, $F(x') := (f(x'), g(x')) \in \mathbb{R}^2$, $x' \in U$

$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(y,z) := yz$

$fg = h \circ F : U \to \mathbb{R}$

Nach Lemma 4 ist F diff'bar an d. Stelle x. h ist diff'bar nach Bsp. 2)

$$dF(x) = \begin{pmatrix} df(x) \\ dg(x) \end{pmatrix} : X \to \mathbb{R}^2$$

$$dh(y,z) \cong (z,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$dh(y,z) \cdot \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = z\hat{y} + y\hat{z}$$

$\overset{S3}{\Rightarrow}$ $h \circ F = fg$ ist diff'bar an d. Stelle x und

$$d(fg)(x) = dh(f(x), g(x)) \circ dF(x) = g(x)\, df(x) + f(x) dg(x)$$

✓.

iii) $V := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \neq 0\}$, $F = (f,g) : U \to V$

$h: V \to \mathbb{R}$, $h(y,z) := y/z$, h partiell diff'bar:

$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{z}$, $\frac{\partial h}{\partial z} = -y/z^2$, stetig.

$\overset{S1}{\Rightarrow}$ h ist stetig diff'bar: $d(y,z)(\hat{y},\hat{z}) = \frac{\hat{y}}{z} - \frac{y\hat{z}}{z}$

$$= \frac{z\hat{y} - y\hat{z}}{z^2}$$

$\overset{S3}{\Rightarrow}$ $\frac{f}{g} = h \circ F : U \to \mathbb{R}$ ist diff'bar an der Stelle x

und $\forall \xi \in X$: $d\left(\frac{f}{g}\right)(x)\xi = dh(f(x), g(x)) \begin{pmatrix} df(x)\xi \\ dg(x)\xi \end{pmatrix}$

$$= \frac{g(x)\, df(x)\xi - dg(x)\xi f(x)}{g(x)^2}$$

✓.

Damit ist Satz 2 bewiesen. ▨

Beweis von Satz 3

$y_0 := f(x_0) \in V$, $A := df(x_0) : X \to Y$, $B := dg(y_0) : Y \to Z$

$\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$, $\|B\| = \sup\limits_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|By\|_Z}{\|y\|_Y}$

Beh.: $g \circ f : U \to Z$ diff'bar an d. Stelle x_0 und
$d(g \circ f)(x_0) = BA : X \to Z$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

1) $\exists \rho > 0 \; \forall y \in Y$ mit $\|y - y_0\|_Y < \rho$ gilt: $y \in V$ und
$\|g(y) - g(y_0) - B(y - y_0)\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \|A\|)} \|y - y_0\|_Y$

2) $\exists \delta > 0 \; \forall x \in X$ mit $\|x - x_0\|_X < \delta$ gilt: $x \in U$
und $\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|B\|)} \|x - x_0\|_X$

3) o.B.d.A.: $\delta < \frac{\rho}{1 + \|A\|}$

Sei $x \in X$ mit $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow x \in U$ und
$\|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_Y +$
$\|A(x - x_0)\|_Y$

$\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|B\|)}}_{<1} \|x - x_0\|_X + \|A\| \|x - x_0\|_X \leq (1 + \|A\|) \|x - x_0\|_X$
$< (1 + \|A\|)\, \delta < \rho$

$\Rightarrow$ Nach (1) mit $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ gilt:
$\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - B(f(x) - f(x_0))\|_Z$

$\leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \|A\|)} \|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \|A\|)} (1 + \|A\|) \|x - x_0\|_X$
$= \frac{\varepsilon}{2} \|x - x_0\|_X$

$\Rightarrow \|g(f(x)) - g(f(x_0)) - BA(x - x_0)\|_Z \leq \|g(f(x)) -$
$g(f(x_0)) - B(f(x) - f(x_0))\|_Z + \|B(f(x) - f(x_0) - A(x - x_0))\|_Z$
$\leq \varepsilon/2 \, \|x - x_0\|_X + \|B\| \underbrace{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_Y}_{\leq \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|B\|)} \|x - x_0\|_X}$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-x_0\|_X + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\frac{\|B\|}{\varepsilon+\|B\|}}_{\leq 1}\|x-x_0\|_X \leq \varepsilon\|x-x_0\|_X$$

$\Rightarrow g \circ f$ ist diff'bar an der Stelle x_0 und
$d(g\circ f)(x_0) = BA$

$\blacksquare$

<u>Bem.:</u> $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^l$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ \vdots \\ g_l(y) \end{pmatrix}$$

$$df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad dg(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

$$d(g\circ f)(x) = \left(\frac{\partial(g\circ f)_k}{\partial x_i}(x)\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,l}} \rightarrow \text{Jacobimatrix}$$

$$\frac{\partial(g\circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \Rightarrow dg(y)\cdot df(x)$$

Notation: $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} := \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, $\frac{\partial z_k}{\partial y_j} := \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x))$

$$\longrightarrow \frac{\partial z_k}{\partial x_i} := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z_k}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Bsp. 6) $I \subset \mathbb{R}$: offenes Intervall, $x = (x_1, \dots, x_n): I \to \mathbb{R}^n$ diff'bar, ebenso $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff'bar

Sei $\frac{d}{dt}x(t) =: \dot{x}(t)$. Dann: $\frac{d}{dt}f(x(t)) = df(x(t))\cdot\dot{x}(t)$

$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))\,\dot{x}_i(t) = \langle \nabla f(x(t)), \dot{x}(t)\rangle$, wobei:

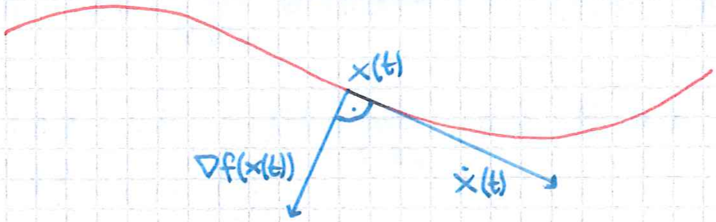
$\nabla f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^n$

„Gradient von f an der Stelle x"

Sei $f(x(t)) = \text{const.} \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow \langle \nabla f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \frac{d}{dt} f(x(t)) = 0$

Geometrisch: $\nabla f(x(t))$ steht senkrecht auf $\dot{x}(t)$



Bsp. 7) $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar

$\nabla V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig

$x: I \to \mathbb{R}^n$: 2-mal stetig diff'bar

(1) $\ddot{x}(t) = - \nabla V(x(t))$

Energie: $E(t) = \frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 + V(x(t))$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E(t) = \langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle + \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle$$
$$= \langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t) + \nabla V(x(t)) \rangle$$
$$= 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{const.}$$

<u>SATZ 4</u> (SF: Hahn-Banach)

X: Banachraum, $x_0 \in X \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \exists$ beschr. lin. Funktional $\Phi: X \to \mathbb{R}$ s.d.:

- $\|\Phi\| := \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\Phi(x)|}{\|x\|} = 1$
- $\Phi(x_0) = \|x_0\|$

<u>Beweis:</u> <u>Schritt 1:</u> Sei $Y \subset X$ ein linearer UR und $\varphi: Y \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $|\varphi(y)| \leq \|y\| \ \forall y \in Y$

Sei $\xi \in X \setminus Y$. $Z := Y \oplus \mathbb{R}\xi = \{ y + \lambda \xi \mid y \in Y, \lambda \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow \exists$ lin. Funktional $\psi: Z \to \mathbb{R}$ s.d. $\psi|_Y = \varphi$

und $|\psi(z)| \leq \|z\| \ \forall z \in Z$

Bew.: $\forall y, y' \in Y$ gilt: $\varphi(y) + \varphi(y') = \varphi(y+y')$

$\leq \|y+y'\| = \|y - \xi + \xi + y'\| \leq \|y-\xi\| + \|\xi + y'\|$

$\Rightarrow \forall y, y' \in Y: \varphi(y) - \|y-\xi\| \leq \|\xi + y'\| - \varphi(y')$

$\Rightarrow \sup_{y \in Y} (\varphi(y) - \|y - \xi\|) \leq \inf_{y' \in Y} (\|\xi + y'\| - \varphi(y'))$

Wähle $a \in \mathbb{R}$ s.d. $\sup_{y \in Y} (\varphi(y) - \|y - \xi\|) \leq a \leq \inf_{y' \in Y} (\|y' + \xi\| - \varphi(y'))$

Definiere $\psi: Z \to \mathbb{R}$ durch $\psi(y + \lambda\xi) := \varphi(y) + \lambda a$

Wir wissen: $\varphi(y) - a \leq \|y - \xi\| \quad \forall y \in Y$

$\varphi(y) + a \leq \|y + \xi\| \quad \forall y \in Y$

$z = y + \lambda\xi; \quad \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y$

$\lambda = 0$: $|\psi(z)| = |\varphi(y)| \leq \|y\| = \|z\|$

$\lambda > 0$: $\psi(z) = \varphi(y) + \lambda a = \lambda(\varphi(\frac{y}{\lambda}) + a)$

$\leq \lambda \| y/\lambda + \xi\| = \|y + \lambda\xi\| = \|z\|$

$\lambda < 0$: $z = y - \lambda\xi, \quad \lambda > 0$

$\psi(z) = \varphi(y) - \lambda a = \lambda(\varphi(\frac{y}{\lambda}) - a)$

$\leq \lambda \|y/\lambda - \xi\| = \|y - \lambda\xi\| = \|z\|$

$\Rightarrow \psi(z) \leq \|z\| \;\forall z \in Z \Rightarrow |\psi(z)| \leq \|z\| \;\forall z \in Z$

Schritt 2: $\mathcal{P} := \{ (Y, \varphi) \mid Y \subset X$ lin. UR, $\varphi: Y \to \mathbb{R}$: lin. Abb., $x_0 \in Y$, $\varphi(x_0) = \|x_0\|$, $|\varphi(y)| \leq \|y\| \;\forall y \in Y \}$:

partiell geordnete Menge: $(Y, \varphi) \leq (Z, \psi) :\Leftrightarrow Y \subset Z$ und $\psi|_Y = \varphi$

Jede nichtleere Kette in $\mathcal{P}$ besitzt ein Surpremum

$\Rightarrow$ LoZ: Die Menge $\mathcal{P}$ besitzt ein max. El't

$\Phi: Y \to \mathbb{R} \underset{\text{Schritt 1}}{\overset{\max}{\Longrightarrow}} Y = X$

$\blacksquare$

SATZ 5

X: Banachraum, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to X$ diff'bar in (a,b), $\|f'(t)\| \leq c \quad \forall t \in (a,b)$, $c \geq 0$
$\Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq c(b-a)$

Beweis: Annahme: $f(a) \neq f(b)$
Wähle $\Phi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X^*$ s.d. $\|\Phi\| = 1$ und
$\Phi(f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|$ (S4)

$\overset{S3}{\Rightarrow} g := \Phi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist diff'bar in (a,b)

$\overset{MWS}{\Rightarrow} \exists t \in (a,b)$ s.d. $g'(t) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b-a}$

$$\Rightarrow \|f(b) - f(a)\| = \Phi(f(b) - f(a)) = g(b) - g(a)$$
$$= g'(t)(b-a) \overset{S3}{=} \Phi(f'(t))\underbrace{(b-a)}_{>0} \leq \|f'(t)\|(b-a)$$
$$\leq c(b-a)$$

■

SATZ 6

X, Y: Banachräume, $U \subset X$ offen und zusammenhängend, $f: U \to Y$ diff'bar.
$df(x) = 0 \Rightarrow f$ konstant

Beweis: $U \neq \emptyset$
Sei $x_0 \in U$ und $V := \{x \in U \mid f(x) = f(x_0)\}$
1. $V \neq \emptyset$, denn $x_0 \in V$
2. V ist U-abg.: $x_n \in V$ Folge: $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x \in U$
   $\Rightarrow f(x_n) = f(x_0) \ \forall n \in \mathbb{N}$
   $\overset{f\,st.}{\Rightarrow} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow x \in V$
3. V ist offen: Sei $x \in V \subset U \Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d.
   $B_\delta(x) = \{x' \in X \mid \|x - x'\| < \delta\} \subset U$
   Sei $x' \in B_\delta(x)$. Definiere $\varphi: [0,1] \to Y$
   durch $\varphi(t) := f(x + t(x' - x))$

$\overset{S3}{\Rightarrow}$ φ ist diff'bar auf $(0,1)$ und $\varphi'(t) =$
$df(x+t(x'-x)) \cdot (x'-x) = 0$

$\underset{c=0}{\overset{S5}{\Rightarrow}}$ $\underset{\underset{\varphi(x')}{\|}}{\varphi(1)} = \varphi(0) = f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow f(x') = f(x_0) \ \forall x' \in B_\delta(x)$

$\Rightarrow B_\delta(x) \subset V$

$1, 2, 3 \underset{\text{zush.}}{\overset{U}{\Rightarrow}} V = U$

$\blacksquare$

SATZ 7 (Schrankensatz)

X, Y: Banachräume, $U \subset X$ offen, $f: U \to Y$ diff'bar und $c := \sup_{x \in U} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$

i) $K \subset U$ konvex $\Rightarrow \forall x, x' \in K: \|f(x) - f(x')\|_Y \leq c\|x - x'\|_X$

ii) $K \subset U$ kompakt $\Rightarrow \exists C = C_K > 0$ s.d. $\forall x, x' \in K$ gilt:
$\|f(x) - f(x')\|_Y \leq C\|x - x'\|_X$

Beweis: i) $x, x' \in K \subset U$ konvex $\Rightarrow x + t(x'-x) \in K \subset U$ $\forall t \in [0,1]$. Definiere $\varphi: [0,1] \to Y$ durch
$\varphi(t) := f(x + t(x'-x))$

$\overset{S3}{\Rightarrow}$ φ ist diff'bar, $\|\varphi'(t)\|_Y = \|f(x+t(x'-x)) \cdot (x'-x)\|_Y$
$\leq c\|x'-x\|_X$

$\overset{S5}{\Rightarrow} \underset{\underset{\|f(x') - f(x)\|_Y}{\|}}{\|\varphi(1) - \varphi(0)\|_Y} \leq c\|x'-x\|_X$ ✓

ii) Ann.: $\nexists C$ s.d. ...

$\Rightarrow$ AA: $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists a_k, b_k \in K$ s.d. $\|f(a_k) - f(b_k)\| > k\|a_k - b_k\|$. O.B.d.A.: $a_k \to a \in K$, $b_k \to b \in K$

Beh.: $a = b$

Bew.: $K \subset X$ kmpkt. $K \to \mathbb{R}: x \mapsto \|f(x)\|_Y$ stetig
$\overset{K5}{\Rightarrow} \exists D > 0$ s.d. $\|f(x)\|_Y \leq D \ \forall x \in K$

$$\Rightarrow \|a_k - b_k\|_X < \frac{\|f(a_k)-f(b_k)\|_Y}{k} \leq \frac{\|f(a_k)\|_Y + \|f(b_k)\|_Y}{k}$$

$$\leq \frac{2D}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow b = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k = a \in U$$

Wähle $\varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid \|x-a\| < \varepsilon\} \subset U$ konvex

$\overset{i)}{\Rightarrow} \forall x, x' \in B_\varepsilon(a)$ gilt: $\|f(x) - f(x')\|_Y \leq c\,\|x - x'\|_X$

Nach der Beh. $\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ k \geq k_0 \Rightarrow a_k, b_k \in B_\varepsilon(a) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$:

$\|a_k - b_k\| k < \|f(a_k) - f(b_k)\|_Y \leq c\,\|a_k - b_k\|_X$

$\Rightarrow \bot$ ▨

SATZ 8

X, Y: Banachräume, $U \subset X$ offen, $f_n: U \to Y$ stetig diff'bar. $f: U \to Y$, $A: U \to \mathcal{L}(X,Y)$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in U} \|df_n(x) - A(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$

$\Rightarrow f$ ist stetig diff'bar und $df(x) = A(x)\ \forall x \in U$

Beweis: Nach Kapitel 5 / Satz 1 ist die Funktion $A: U \to \mathcal{L}(X,Y)$ stetig.

Zu zeigen: $\forall x_0 \in U$: $f(x_0)$ diff'bar und $df(x_0) = A(x_0)$

Sei $x_0 \in U$ und $\varepsilon > 0$.

1. $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}: m \geq n \Rightarrow \sup_{x\in U} \|df_m(x) - A(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon/4$

2. $\exists \delta > 0\ \forall h \in X$ mit $\|h\|_X < \delta$: $x_0 + h \in U$ und $\|f_n(x_0+h) - f_n(x_0) - df_n(x_0)h\|_Y \leq \varepsilon/4\ \|h\|_X$

$\Rightarrow \|d(f_m - f_n)(x)\| \overset{S2}{=} \|df_m(x) - df_n(x)\| \leq \underbrace{\|df_m(x) - A(x)\|}_{<\varepsilon/4} + \underbrace{\|A(x) - df_n(x)\|}_{<\varepsilon/4} < \varepsilon/2$

$\overset{S7}{\Longrightarrow}$ $\forall h \in X$ mit $\|h\|_X < \delta$: $\| f_m(x_0+h) - f_n(x_0+h) - f_m(x_0) + f_n(x_0) \|_Y = \| (f_m - f_n)(x_0+h) - (f_m - f_n)(x_0) \|_Y \leq \varepsilon/2 \|h\|_X$

$\Rightarrow$ $\forall h \in X$ mit $\|h\|_X < \delta$: $\| f(x_0+h) - f_n(x_0+h) - f(x_0) + f_n(x_0) \|_Y \leq \varepsilon/2 \|h\|_X$

$\Rightarrow$ $\forall h \in X$ mit $\|h\|_X < \delta$: $\| f(x_0+h) - f(x_0) - A(x_0)h \|_Y$
$\leq \| f(x_0+h) - f_n(x_0+h) - f(x_0) + f_n(x_0) \|_Y + \| f_n(x_0+h) - f_n(x_0) - df_n(x_0)h \|_Y + \| df_n(x_0)h - A(x_0)h \|_Y$
$\leq \varepsilon \|h\|_X$

■

Differentiation von Potenzreihen

Sei $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ eine Folge. $\rho := \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}} > 0$

$\mathcal{A}$: Banachalgebra

$U := \{ x \in \mathcal{A} \mid \|x\| < \rho \}$

Definiere $f: U \to \mathcal{A}$ durch: $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x \in U$ (1)

SATZ 9

$f: U \to \mathcal{A}$ ist stetig diff'bar und für $x \in U$ ist $df(x): \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ gegeben durch:

$$df(x)\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \xi x^{k-1-i} \quad (2)$$

__Beweis:__ Sei $x \in \mathcal{A}$. Für $k = 1,2,3,\ldots$ definiere $L_k: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ durch $L_k(\xi) := \sum\limits_{i=0}^{k-1} x^i \xi x^{k-1-i}$ für $\xi \in \mathcal{A}$ (3) (L_k ist ein lin. Operator). Für $k = 2,3,\ldots$ definiere $R_k: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ durch $R_k(\xi) = (x+\xi)^k - x^k - L_k(\xi)$ für $\xi \in \mathcal{A}$ (4), wobei $R_k(\xi) = R_{x,k}(\xi)$ (genauso für $L_k(\xi) = L_{x,k}(\xi)$)

__Schritt 1:__ $\forall \xi \in \mathcal{A}$ gilt: $\|L_k(\xi)\| \leq k\|x\|^{k-1}\|\xi\|$

Bew.: $\|L_k(\xi)\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|x\|^i \|\xi\| \, \|x\|^{k-1-i}$ ✓.

Schritt 2: $R_{k+1}(\xi) = R_k(\xi)(x+\xi) + L_k(\xi)\xi$

Bew.: $R_k(\xi)(x+\xi) + L_k(\xi)\xi = (x+\xi)^{k+1} - x^k \cdot$
$(x+\xi) - L_k(\xi)(x+\xi) + L_k(\xi)\xi$
$= (x+\xi)^{k+1} - x^{k+1} - x^k\xi - L_k(\xi)x$
$= (x+\xi)^{k+1} - x^{k+1} - x^k\xi - \sum_{i=0}^{k-1} x^i \xi x^{k-i}$
$= R_{k+1}(\xi)$ ✓

Schritt 3: Für $k = 2,3,4,\ldots$ gilt: $\|R_k(\xi)\| \leq \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \cdot$
$\|\xi\|^j \, \|x\|^{k-j}$ (5)

Bew.: Vollst. Ind.

IV: $k=2$: $R_2(\xi) = (x+\xi)^2 - x^2 - x\xi - \xi x = \xi^2$
$\|R_2(\xi)\| \leq \|\xi\|^2$

IA: (5) gilt für $k \geq 2$

IS: $\|R_{k+1}(\xi)\| \leq \|R_k(\xi)\| \, \|x+\xi\| + \|L_k(\xi)\| \, \|\xi\|$

$$\leq \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \|\xi\|^j \|x\|^{k-j} \|x+\xi\| + k\|x\|^{k-1}\|\xi\|^2$$

$$\leq \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \|\xi\|^j \|x\|^{k+1-j} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \|\xi\|^{j+1} \|x\|^{k-j}$$

$$\cancel{+ k\|x\|^{k-1}\|\xi\|^2}$$

$$= \sum_{j=2}^{k} \left(\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right) \|\xi\|^j \|x\|^{k+1-j} + \|\xi\|^{k+1}$$

$$= \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} \|\xi\|^j \|x\|^{k+1-j}$$ ✓.

Schritt 4: Schr. 1-3 $\Rightarrow$ Die Fkt. $\begin{cases} g_k : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\ g_k(x) = x^k \end{cases}$ ist diff'bar und $dg_k(x) = L_{x,k}$

Bew.: $\|g_k(x+\xi) - g_k(x) - L_{x,k}(\xi)\| \overset{(4)}{=} \|R_{x,k}(\xi)\|$

$$\overset{\text{Schr. 3}}{\leq} \|\xi\|^2 \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \|\xi\|^{j-2} \|x\|^{k-j} \leq (1+\|x\|)^k,$$

falls $\|\xi\| \leq 1$ $\Rightarrow$ $\lim \frac{\|g_k(x+\xi) - g_k(x) - L_{x,k}(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$

✓.

Schritt 5: g_k ist stetig diff'bar, nämlich $\forall x, x' \in \mathcal{A}$ mit $\|x\|, \|x'\| \leq c$ gilt: $\|L_{x,k} - L_{x',k}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq k(k-1)c^{k-2} \|x - x'\|$

Bew.: Nach Schr. 1 & 4 gilt: $\|dg_k(x)\| \leq k\|x\|^{k-1} \leq kc^{k-1} \; \forall x \in \mathcal{A}$ mit $\|x\| \leq c$

$\overset{S7}{\Rightarrow} \forall x, h \in \mathcal{A}$ mit $\|x\| < c$, $\|x+h\| \leq c$ gilt: $\|(x+h)^k - x^k\| \leq kc^{k-1}\|h\|$

$$\Rightarrow \|L_{x+h,k}\xi - L_{x,k}\xi\| = \Big\|\sum_{i=0}^{k-1}(x+h)^i \xi (x+h)^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} x^i \xi x^{k-1-i}\Big\|$$

$$\leq \|((x+h)^{k-1} - x^{k-1})\xi\| + \|\xi((x+h)^{k-1} - x^{k-1})\| + \sum_{i=1}^{k-2}\|((x+h)^i - x^i)\xi(x+h)^{k-1-i}\| + \sum_{i=1}^{k-2}\|x^i\xi((x+h)^{k-1-i} - x^{k-1-i})\|$$

$$\leq 2\|\xi\|\,\|(x+h)^{k-1} - x^{k-1}\| + 2\|\xi\|\sum_{i=1}^{k-2}\|(x+h)^i - x^i\|c^{k-1-i}$$

$$\leq 2\|\xi\|(k-1)c^{k-2}\|h\| + 2\|\xi\|\sum_{i=1}^{k-2} ic^{k-2}\|h\|$$

$$= k(k-1)c^{k-1}\|h\|\,\|\xi\| \;\checkmark$$

Schritt 6: Schr. 1-5 $\Rightarrow$ $f_n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist stetig diff'bar und

$$df_n(x)\xi = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \xi x^{k-1-i}$$

Sei $0 < r < \varrho$. Dann konvergiert $df_n : \{x \in \mathcal{A} \mid \|x\| < r\} =: U_r \to \mathcal{L}(X,Y)$ glm. gegen $A : U_r \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, $A(x)\xi := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \xi x^{k-1-i}$ für $x \in U_r$ und $\xi \in \mathcal{A}$

Bew.: $\| A(x)\xi \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k \|x\|^{k-1} \|\xi\|$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1}}_{< \infty} \|\xi\|$$

und: $\| df_n(x) - A(x) \| \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1}}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0}$ für $x \in U_r$

D.h.: $df_n \xrightarrow{glm.} A$, $f_n(x) \longrightarrow f(x) \ \forall x \in U_r$

Da nun die Bedingungen von Satz 8 erfüllt sind, gilt: Satz 8 $\Rightarrow$ Satz 9 ▨

Höhere Ableitungen von Funktionen mehrerer Variablen

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, Z: Banachrm, $f: U \to Z$ partiell diff'bar, d.h.: $\forall i = 1, \dots, n$ existiert $\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+te_i) \ \forall x \in U$, bzw.:
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n)$,
wobei $\partial_i f: U \to Z$.

Eine Funktion f heisst zweimal partiell diff'bar, wenn f partiell diff'bar ist und $\partial_i f: U \to Z$ für $i = 1, \dots, n$ ebenfalls partiell diff'bar ist:

$$\partial_{ij} f(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \text{ wobei jedes } \partial_{ij} f(x): U \to Z$$

Frage: Ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}$?

Bsp.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$
$\hookrightarrow f$ ist stetig diff'bar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ $\Rightarrow$ s. nächste Seite!

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \,, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$$

$\hookrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ unstetig an der Stelle $(x,y) = (0,0)$

SATZ 10 (Schwarz)

Z: Banachraum, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to Z$ partiell diff'bar, $i,j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ existiert auf ganz U und ist stetig an der Stelle $x_0 \in U$ (Annahme)

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to Z$ ist an der Stelle x_0 nach x_j partiell diff'bar

und $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$

Beweis: Es genügt, sich auf Funktionen zweier reellen Variablen zu beschränken, d.h. es genügt die Untersuchung des Falles $n=2$:

$U \subset \mathbb{R}^2$ offen, Z: Banachraum, $f: U \to Z$ partiell diff'bar mit $\frac{\partial f}{\partial x}: U \to Z$, $\frac{\partial f}{\partial y}: U \to Z$ und sei $(x_0, y_0) \in U$.

<u>Annahme:</u> Die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) :=$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \text{ existiert}$$

für alle $(x,y) \in U$ und ist stetig an d. Stelle (x_0, y_0), mit $a_0 := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \in Z$

<u>Zu zeigen:</u> $\lim_{h \to 0} 1/h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) = a_0$

<u>Beweis:</u> Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ s.d. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta \Rightarrow (x,y) \in U$ und

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - a_0 \right\|_Z < \varepsilon \quad (*)$$

<u>Schritt 1</u>: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ gilt:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) - (x - x_0) a_0 \right\|_Z \leq \varepsilon |x - x_0|$$

Bew.: Definiere $\varphi : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to Z$ durch $\varphi(x) := \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - x a_0$. $\Rightarrow$ φ ist diff'bar und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - a_0 = \varphi'(x) \overset{(*)}{\Rightarrow} \|\varphi'(x)\|_Z < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\overset{SS}{\Rightarrow} \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|_Z \leq \varepsilon |x - x_0| \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|_Z = \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - x a_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + x_0 a_0 \right\|_Z \quad \checkmark$$

Schritt 2: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|y - y_0| < \delta$ gilt: $\|f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0) - (x-x_0)(y-y_0)a_0\|_Z \leq \varepsilon |x - x_0| |y - y_0|$

Bew.: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Definiere $\varphi : (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \to Z$ durch: $\varphi(y) := f(x,y) - f(x_0,y) - y(x - x_0)a_0$

$\Rightarrow$ φ ist diff'bar und $\varphi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) - (x - x_0)a_0 \quad \forall y$

$\overset{\text{Schr. 1}}{\Rightarrow} \|\varphi'(y)\|_Z \leq \varepsilon |x - x_0| \quad \forall y \in \mathbb{R}$ mit $|y - y_0| < \delta$

$\overset{\text{Satz}}{\Rightarrow} \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ gilt: $\|\varphi(y) - \varphi(y_0)\|_Z \leq \varepsilon |x - x_0| |y - y_0|$ $\checkmark$

Schritt 3: $\forall y \in \mathbb{R}$ mit $0 < |y - y_0| < \delta$ gilt:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0)a_0 \right\|_Z \leq \varepsilon |y - y_0|$$

Bew.: $\left\| \frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0} - \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} - (y - y_0)a_0 \right\|_Z \leq \varepsilon |y - y_0|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$\overset{x \to x_0}{\Rightarrow} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0)a_0 \right\|_Z \leq \varepsilon |y - y_0| \quad \checkmark$$

$$\overset{\text{Schr. 3}}{\Rightarrow} \left\| \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{y - y_0} - a_0 \right\|_Z \leq \varepsilon \quad \forall y \in \mathbb{R} \text{ mit } |y - y_0| < \delta$$

D.h. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = a_0$

$\blacksquare$

l-mal stetig diff'bare Abbildungen

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, Y: Banachraum. $f: U \to Y$ heisst zweimal stetig diff'bar, wenn f stetig diff'bar ist und $\partial_i f: U \to Y$ ebenfalls stetig diff'bar ist für $i = 1, \dots, n$.

f heisst l mal stetig diff'bar ($l \in \mathbb{N}$), wenn f stetig diff'bar ist und $\partial_i f: U \to Y$ $(l-1)$-mal stetig diff'bar ist für $i = 1, \dots, n$.

Notation: $C^l(U,Y)$: $\{f: U \to Y \mid f \text{ } l\text{-mal stetig diff'bar}\}$

Def.: $f: U \to Z$ heisst glatt oder C^∞, wenn f l-mal stetig diff'bar ist für jedes $l \in \mathbb{N}$.
Es gilt: $C^{l+1}(U,Y) \subset C^l(U,Y)$
Notation: $C^\infty(U,Y) := \{f: U \to Y \mid f \text{ ist glatt}\}$

$$= \bigcap_{l \in \mathbb{N}} C^l(U,Y)$$

Def.: $f \in C^l(U,Y)$; $i_1, i_2, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$. Dann:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_l}}: U \to Y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_{l-1}} \partial x_{i_l}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_{l-1}}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_l}}: U \to Y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_{i_{l-2}} \partial x_{i_{l-1}} \partial x_{i_l}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_{l-2}}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_{l-1}} \partial x_{i_l}}: U \to Y$$

usw... bis: $$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_l}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_l}}: U \to Y$$

Dies sind die l-ten partiellen Ableitungen von f.
Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir: $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und:

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\underbrace{(\partial x_1 \cdots \partial x_1)}_{\alpha_1} \cdots \underbrace{(\partial x_n \cdots \partial x_n)}_{\alpha_n}}(x)$$

Konvention: $\partial^{(0,\dots,0)} f := f$
"f null mal abgeleitet bleibt f"

Bsp.) $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\beta_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Definiere: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$

$\partial x_1 f(x) = \beta_1 x_1^{\beta_1 - 1} x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$, falls $\beta_1 \geq 1$

$\partial^2 x_1 f(x) = \beta_1 (\beta_1 - 1) x_1^{\beta_1 - 2} x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$, falls $\beta_1 \geq 2$

usw...

$$\frac{\partial^{\alpha_1} f}{\partial x_1^{\alpha_1}}(x) = \beta_1 (\beta_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (\beta_1 - \alpha_1 + 1) x_1^{\beta_1 - \alpha_1} x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n},$$

falls $\alpha_1 \leq \beta_1$ $= \beta_1! / \alpha_1! \, x_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(x) = \frac{\beta_1! \beta_2!}{(\beta_1 - \alpha_1)! (\beta_2 - \alpha_2)!} x_1^{\beta_1 - \alpha_1} x_2^{\beta_2 - \alpha_2} x_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$$

falls $\beta_i \geq \alpha_i$, $i = 1,2$

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i$ für $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}(x) = \frac{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!}{(\beta_1 - \alpha_1)! \cdot \ldots \cdot (\beta_n - \alpha_n)!} \cdot x_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n - \alpha_n} = \ldots$$

mit $\beta! := \beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!$: $\ldots = x^{\beta - \alpha} \cdot \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!}$

Lemma 6

i) $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} x^\beta = \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_i \leq \beta_i \; \forall i$

ii) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei $f(x) = \sum_{|\beta| \leq k} a_\beta x^\beta$ mit $a_\beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ ist C^∞ und $\partial^\alpha f(x) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\beta| \leq k \\ \beta_i \geq \alpha_i \forall i}} a_\beta \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha}$,

wobei $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

und $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$

iii) $\partial^\alpha f(0) = \alpha! \, a_\alpha$

iv) $f(x) = \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha$ (Beweis: s. obiges Beispiel)

<u>Def.:</u> $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, $f: U \to \mathbb{R}^m$ C^k-Funktion, $k \in \mathbb{N}$

Das Taylorpolynom der Ordnung k von f an der Stelle x_0 ist die Abbildung $T_{x_0}^k f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die durch $T_{x_0}^k f(x) := \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$, $|\alpha| \leq k$ def. ist.

SATZ 11

$f \in C^{l+1}(U, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$: offen. $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 + t\xi \in U$ $\forall t \in [0,1]$.

$$\Rightarrow \quad f(x_0+\xi) - \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha| \leq l}} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \xi^\alpha = \int_0^1 (l+1)(1-t)^l \cdot \sum_{|\alpha|=l+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0+t\xi)\xi^\alpha \, dt \qquad (1)$$

Lemma 7

$$\frac{d^k}{dt^k}\bigg|_{t=0} f(x_0+t\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0)\xi^\alpha \qquad (2)$$

Bew.: via Induktion

IV: $k = 1$: $\alpha = (0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0) = e_i$, $i = 1,\dots,n$

$\hookrightarrow \xi^\alpha = \xi^{e_i} = \xi_i$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x_0+t\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\xi_i = \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha f(x_0)\xi^\alpha \quad \checkmark$$

IA: $k \geq 1$: Sei (2) für k bewiesen

IS: $$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} f(x_0+t\xi) = \frac{d}{dt} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^\alpha f(x_0+t\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha k!$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \sum_{i=1}^n \partial_i \partial^\alpha f(x_0+t\xi)\xi_i \xi^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \sum_{i=1}^n \partial^{\alpha+e_i} f(x_0+t\xi)\xi^{\alpha+e_i}$$

$$= \sum_{|\beta|=k+1} \underbrace{\Bigg(\sum_{\substack{i=1 \\ \beta_i \geq 1}}^n \frac{k!}{(\beta-e_i)!} \Bigg)}_{\frac{(k+1)!}{\beta!}\ ?} \partial^\beta f(x_0+t\xi)\xi^\beta$$

$$\longrightarrow \frac{1}{(\beta_1-1)!\cdot\ldots\cdot\beta_n!} + \frac{1}{\beta_1!(\beta_2-1)!\cdot\ldots\cdot\beta_n!} + \frac{1}{\beta_1!\cdot\ldots\cdot(\beta_n-1)!}$$

$$= \frac{\beta_1+\ldots+\beta_n}{\beta_1!\cdot\ldots\cdot\beta_n!} = \frac{k+1}{\beta!}$$

Durch Multiplikation mit $k!$ ergibt sich obige Formel.

∎

Beweis von Satz 11:

Nach K7/S7 gilt für $u : [0,1] \to \mathbb{R}^m$:

$$u(1) - \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} u^{(k)}(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^l}{l!} u^{(l+1)}(t)\, dt \quad (3)$$

$$u(t) := f(x_0 + t\xi) \overset{L7}{\Rightarrow} u^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} f(x_0+t\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0+t\xi)\xi^\alpha$$

$$\Rightarrow f(x_0+t\xi) - \sum_{|\alpha|\leq l} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0)\xi^\alpha \overset{(2)}{=} u(1) - \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} u^{(k)}(0)$$

$$\overset{(3)}{=} \int_0^1 \frac{(1-t)^l}{l!} u^{(l+1)}(t)\, dt = \int_0^1 (l+1)!\,(1-t)^l \sum_{|\alpha|=l+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0+t\xi)\xi^\alpha\, dt$$

■

SATZ 12

$g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig. $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gegeben.

$$\Rightarrow \left\| \int_a^b g(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\|\, dt$$

Beweis: Nach Satz 4 und Voraussetzung, dass

$\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$, folgt: $\exists\, \Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ s.d. $\|\Phi\| = 1$

und $\Phi\left(\int_a^b g(t)\,dt\right) = \left\|\int_a^b g(t)\,dt\right\|$

$$\| \qquad \int_a^b \Phi(g(t))\,dt$$

$$\leq \int_a^b |\Phi(g(t))|\,dt \leq \int_a^b \|\Phi\|\,\|g(t)\|\,dt = \int_a^b \|g(t)\|\,dt$$

■

Korollar 1 : $f \in C^{l+1}(U, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\overline{B}_r(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r \} \subset U$ (eukl. Norm)

$\Rightarrow \exists\, c > 0\ \forall x \in \overline{B}_r(x_0)$:

$$\| f(x) - T^l_{x_0} f(x) \|_{\mathbb{R}^m} \leq c\, \|x - x_0\|^{l+1}_{\mathbb{R}^n}$$

Bew.: $c := \sup_{x \in \overline{B}_r(x_0)} \sum_{|\alpha| = l+1} \frac{\| \partial^\alpha f(x) \|_{\mathbb{R}^m}}{\alpha!} < \infty$

$$\Rightarrow \| f(x_0 + \xi) - T^l_{x_0} f(x_0 + \xi) \|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\overset{S11}{=} \| \int_0^1 (l+1)(1-t)^l \sum_{|\alpha| = l+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + t\xi) \xi^\alpha dt \|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\overset{S12}{\leq} \int_0^1 (l+1)(1-t)^l \sum_{|\alpha| = l+1} 1/\alpha! \| \partial^\alpha f(x_0 + t\xi) \xi^\alpha \|_{\mathbb{R}^m} dt$$

$$\leq \int_0^1 (l+1)(1-t)^l \underbrace{\sum_{|\alpha| = l+1} \frac{\| \partial^\alpha f(x_0 + t\xi) \|_{\mathbb{R}^m}}{\alpha!}}_{\leq c} \cdot \| \xi \|^{l+1}_{\mathbb{R}^n} dt$$

$$\leq c \underbrace{\int_0^1 (l+1)(1-t)^l dt}_{=1} \| \xi \|^{l+1}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{für } \| \xi \| \leq r$$

■

Korollar 2: $f \in C^l(U, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in U$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - T^l_{x_0} f(x) \|_{\mathbb{R}^m}}{\| x - x_0 \|^l_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

Bew.: $\| f(x_0 + \xi) - T^l_{x_0} f(x_0 + \xi) \| = \| f(x_0 + \xi) - T^{l-1}_{x_0} f(x_0 + \xi) - \sum_{|\alpha| = l} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \xi^\alpha \|$

$$\leq \int_0^1 l(1-t)^{l+1} \sum_{|\alpha| = l} \frac{1}{\alpha!} \| \partial^\alpha f(x_0 + t\xi) - \partial^\alpha f(x_0) \| |\xi^\alpha| dt$$

$$\frac{\| f(x_0 + \xi) - T^l_{x_0} f(x_0 + \xi) \|}{\| \xi \|^l}$$

$$\leq \int_0^1 l(1-t)^{l-1} \sum_{|\alpha| = l} 1/\alpha! \overbrace{\| \partial^\alpha f(x_0 + t\xi) - \partial^\alpha f(x_0) \|_{\mathbb{R}^m}}^{< \varepsilon / c_l} dt \quad \Rightarrow \quad \overset{\varepsilon}{\vee\!/}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\| \xi \| < \delta$ gilt: $x_0 + \xi \in U \wedge \| \partial^\alpha f(x_0 + \xi) - \partial^\alpha f(x_0) \|_{\mathbb{R}^m} < \frac{\varepsilon}{c_l}$ $\forall |\alpha| = l$, mit $c_l := \sum_{|\alpha| = l} 1/\alpha!$

■

Korollar 3: $f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$. Wenn $\partial^\beta f = 0 \ \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| \geq k+1$

$\Rightarrow f = T_{x_0}^k f \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Bew.: weggelassen

Def.: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in U$
Die Reihe

$$T_{x_0}^\infty f(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} 1/\alpha! \, \partial^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha$$

heisst Taylorreihe von f an der Stelle x_0.

SATZ 13

Sei $r > 0$ und $\mathbb{N}_0^n \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto a_\alpha$ eine Abbildung, s.d.
$\sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \right) r^k < \infty$. Ausserdem: $B_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$
$\overline{B}_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$
(eukl. Normen)

$\Rightarrow$ i) Die Reihe $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha$ konvergiert absolut und gleichmässig in $\overline{B}_r$

ii) Die Funktion $f: B_r \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha$ ist C^∞

iii) $\partial^\beta f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} a_\alpha x^{\alpha - \beta} \ \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n$, wobei $\alpha_i \geq \beta_i \ \forall i$

iv) $T_0^\infty f = f$

Beweisskizze: 1) Beh.: f ist stetig
$f_N(x) := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$ konvergiert glm. auf B_r gegen f
$\overset{KS/S1}{\Rightarrow} f$ ist stetig

2) Nach Lemma 6 gilt:

$$\partial_i f_N(x) = \sum_{|\alpha|\leq N} \sum_{\substack{i \\ \alpha_i \geq 1}} \alpha_i a_\alpha x^{\alpha - e_i}$$

$$\xrightarrow{\text{glm}} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\alpha!}{(\alpha-e_i)!} a_\alpha x^{\alpha-e_i} = \partial_i f \text{ stetig auf } B_r$$

$\Rightarrow f$ ist C^1

3) Vollständige Induktion $\Rightarrow$ iii)

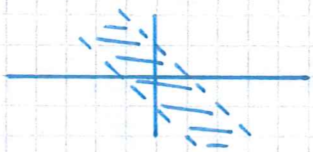
4) iii) $\Rightarrow$ via $\partial^\alpha f(0) = \alpha! a_\alpha \Rightarrow$ iv)

($\blacksquare$)

Bsp. 1) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1\}$

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x-y} = 1 + (x+y) + (x+y)^2 + \ldots$$

U:



Bsp. 2) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, $f(x,y) = x^y = e^{y \log(x)}$

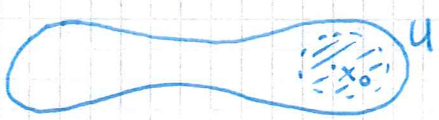
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (\log(x)) x^y$$

$$T^2_{(1,1)} f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1)$$

$$T^3_{(1,1)} f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \tfrac{1}{2}(x-1)^2(y-1)$$

$$T^2_{(1,0)} f(x,y) = 1 + (x-1)y$$

$$T^3_{(1,0)} f(x,y) = 1 + (x-1)y + \tfrac{1}{2}(x-1)^2 y$$



Def.: X: Banachraum,
$U \subset X$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$
Ein Element $x_0 \in U$ heisst (striktes) lokales Minimum von f, wenn: $\exists \delta > 0 \ \forall x \in X: 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow x \in U$ und $f(x) \geq f(x_0)$ bzw. im strikten Fall: $f(x) > f(x_0)$

Ein Element $x_0 \in U$ heisst (striktes) lokales Maximum von f, wenn: $\exists \delta > 0 \; \forall x \in X : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) < f(x_0)$ im strikten Fall, sowie $x \in U$

Ein Element $x_0 \in U$ heisst lokales Extremum von f, wenn es entweder ein lokales Minimum oder Maximum ist.

SATZ 14

Sei f diff'bar an der Stelle x_0. Wenn x_0 : lokales Extremum $\Rightarrow df(x_0) = 0$

Beweis: x_0: lokales Minimum (o.B.d.A!)
Wähle $\delta > 0$ s.d. $\forall x \in X : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow x \in U$ und $f(x) \geq f(x_0)$.
Sei $\xi \in X$. Wähle $\varepsilon > 0$ s.d. $\|\xi\| \cdot \varepsilon < \delta$
$\Rightarrow x_0 + t\xi \in U \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
Definiere $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x_0 + t\xi) \geq f(x_0) = \varphi(0)$ für $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \varepsilon$
$\Rightarrow$ K6/S2 & K10/S3 : $0 = \varphi'(0) = df(x_0)\xi$, wobei

$$\varphi'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h}, \quad df(x_0)\xi = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\xi) - f(x_0)}{h}$$

Analoges Argument gilt für x_0: lokales Maximum ▨

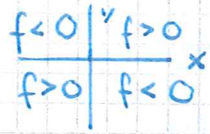
Def.: f sei diff'bar. Ein Punkt $x \in U$ heisst kritischer Punkt von f wenn $df(x) = 0$ ist

Bsp. 1) $X = \mathbb{R}^n = U$, $f(x) := \|x\|_2$
x_0 : globales Minimum für $x_0 = 0$, f jedoch nicht diff'-bar in $x_0 = 0$!

Bsp. 2) $n=2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2+y^2$
(x_0,y_0): globales Minimum für $(x_0,y_0) = (0,0)$

Bsp. 3) $n=2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto -x^2-y^2$
Ähnliche Situation wie in Bsp. 2.

Bsp. 4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy$
$\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. $(x_0,y_0) = (0,0)$: kritischer Pkt.,
aber kein lokales Extremum:



Bsp. 5) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy(x+y)$
$(x_0,y_0) = (0,0)$ kritischer Pkt., kein lokales Extremum!

Def.: $X = \mathbb{R}^n$, $U \subset X$: offen, $f: U \to \mathbb{R}$ C^2-Funktion

Die Matrix $d^2f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

heisst Hesse-Matrix von f an der Stelle $x \in U$

Bem.: Diese Matrix ist symmetrisch per Satz von Schwarz.

Bem.: $x_0 \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x_0 + \xi \in U$

$$T^2_{x_0} f(x_0+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0) \xi_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \xi_i^2$$

$$+ \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \xi_i \xi_j$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \xi_i \xi_j$$

$$= f(x_0) + df(x_0)\xi + \frac{1}{2} \xi^T d^2 f(x_0) \xi$$

SATZ 15

$X = \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ C^2-Fkt., $x_0 \in U$, $df(x_0) = 0$.

i) x_0: lok. Min. $\Rightarrow$ $\xi^T d^2f(x_0)\xi \geq 0 \;\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

ii) $\xi^T d^2f(x_0)\xi > 0 \;\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow x$ ist striktes lok. Min.

iii) x_0: lok. Max. $\Rightarrow$ $\xi^T d^2f(x_0)\xi \leq 0 \;\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

iv) $\xi^T d^2f(x_0)\xi < 0 \;\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow x_0$ ist striktes lok. Max.

Korollar 4: 1) $df(x_0) = 0$

2) $\exists \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi^T d^2f(x_0)\xi > 0$

3) $\exists \eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\eta^T d^2f(x_0)\eta < 0$

$\Rightarrow$ x_0 ist kein lok. Ex. von f

Beweis von Satz 15 :

i) $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) := f(x_0 + t\xi)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, $x_0 + t\xi \in U$

$\Rightarrow \varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ist C^2

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t\xi)\xi_i \Rightarrow \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t\xi)\xi_i\xi_j$$

$$= \xi^T d^2f(x_0 + t\xi)\xi$$

x_0 lok. Min. von f $\Rightarrow$ $t = 0$ lok. Min. von φ

$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) \geq 0$ (K6/S3 (MWS), Kor)

$\Rightarrow \xi^T d^2f(x_0)\xi = \varphi''(0) \geq 0$

ii) Schritt 1: $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pos. def., d.h. $\xi^T A \xi > 0 \;\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \;\forall \xi \in \mathbb{R}^n: \xi^T A \xi \geq \delta \|\xi\|_2^2$

Bew.: $S^{n-1} := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi\| = 1\}$ kmpkt.

$g: S^{n-1} \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \xi^T A \xi$ stetig

$\Rightarrow$ K5/S21: $\exists \xi_0 \in S^{n-1} \;\forall \xi \in S^{n-1}: g(\xi) \geq g(\xi_0)$

$\delta := g(\xi_0) = \xi_0^T A \xi_0 > 0$

$\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\frac{1}{\|\xi\|_2^2}\xi^T A \xi = g\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_2}\right) \geq g(\xi_0) = \delta$ ✓

Schritt 2: Bew. von ii). $x_0 \in U$, $df(x_0) = 0$, $d^2f(x_0)$ pos. def.

$\overset{S1}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 \;\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \xi^T d^2f(x_0)\xi \geq \varepsilon \|\xi\|_2^2$

Nach S11, K2: $\exists \delta > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$:
$0 < \|\xi\| < \delta \Rightarrow x_0 + \xi \in U$ und
$$\frac{|f(x_0+\xi) - T^2_{x_0}(x_0+\xi)|}{\|\xi\|_2^2} < \varepsilon/4$$

$\Rightarrow$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < \|\xi\| < \delta$ gilt:
$$f(x_0+\xi) - f(x_0) = f(x_0+\xi) - T^2_{x_0} f(x_0+\xi) + \tfrac{1}{2} \cdot \xi^T d^2 f(x_0) \xi \geq \underbrace{\tfrac{1}{2} \xi^T d^2 f(x_0) \xi}_{\geq \frac{\varepsilon}{2}\|\xi\|_2^2} - |f(x_0+\xi) - T^2_{x_0} f(x_0+\xi)|$$
$$\geq \frac{\varepsilon}{2}\|\xi\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{4}\|\xi\|_2^2 = \frac{\varepsilon}{4}\|\xi\|_2^2 \quad ✓$$

iii) & iv): Entweder analoges Argument oder gleiches mit $-f$.

▨

Bsp. 6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^4 + y^2$, $x_0 = y_0 = 0$: strikt. lok. Min.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$
$$\Rightarrow d^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bsp. 7) $f(x,y) := -x^4 + y^2 \Rightarrow d^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pos. semi-def.
$(0,0)$: kein lokales Extremum

Bsp. 8) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto y^2 - 3x^2 y + 2x^4$
$$= (y - x^2)(y - 2x^2)$$
$\varphi(t) := f(tx, ty) = y^2 t^2 - 3x^2 t^3 y + 2x^4 t^4$
$\varphi''(0) = 2y^2$, $t = 0$ str. lok. Min. von φ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
$f(x,y) < 0$ falls $x^2 < y < 2x^2$

<u>Def.:</u> $U \subset \mathbb{R}^n$: offen. Eine Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ heisst (strikt) konvex, wenn $\forall x_0, x_1 \in U$ mit $x_0 \neq x_1$ und $\{(1-t)x_0 + tx_1 \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset U$ folgendes gilt:

$0 < t < 1 \Rightarrow f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$,
bzw. "<" im Falle strikter Konvexität.

SATZ 16

$U \subset \mathbb{R}^n$: offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$: C^2-Funktion

i) $\forall x \in U\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n: \xi^T d^2 f(x) \xi \geq 0 \iff f$ konvex

ii) $\forall x \in U\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \xi^T d^2 f(x) \xi > 0 \Rightarrow f$ str. konvex

Beweis: i) "$\Rightarrow$": $x_0, x_1 \in U$, $x_0 \neq x_1$, $(1-t)x_0 + tx_1 \in U\ \forall$ $t \in [0,1]$. Definiere $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ durch
$\varphi(t) := f((1-t)x_0 + tx_1)$

$\Rightarrow \varphi$ ist C^2: $\varphi''(t) = (x_1 - x_0)^T d^2 f(x_0 + t(x_1 - x_0)) \cdot (x_1 - x_0)$ mit $\varphi(t) \underset{(<)}{\leq} (1-t)\varphi(0) + \varphi(1) \cdot t$

$$\varphi''(t) \begin{Bmatrix} \geq 0 \\ > 0 \end{Bmatrix} \overset{K6}{\underset{S3/K5}{\Longrightarrow}} \begin{cases} \varphi \text{ ist konvex} \\ \varphi \text{ ist strikt konvex} \end{cases} \Rightarrow \text{Beh.}$$

"$\Leftarrow$": genauso

ii) in i) gezeigt. ▨

Übg.: $U \subset \mathbb{R}^n$: offen & konvex, $f: U \to \mathbb{R}$ konvex, C^1, $x_0 \in U$ kritischer Pkt. von f

$\Rightarrow f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in U$

Bsp. 9) $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \neq 0) \vee (x > 1)\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} ax + b, & y \geq 0 \\ \varphi(x), & y < 0 \end{cases}$$

$$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \quad \varphi(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq 1 \\ 0, & x \leq -1 \end{cases}$$

$\varphi''(x) \geq 0\ \forall x \in U \quad \Rightarrow \quad a > 0,\ b < 0$

Eulergleichungen

$L: \mathbb{R}^n_1 \times \mathbb{R}^n_2 \to \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}^n_1$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $v \in \mathbb{R}^n_2$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, L ist C^2, genauso wie $x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und

$$S(x) := \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))\, dt, \quad x \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n) \quad (1)$$

Frage: Welche Funktionen $x \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n)$ minimieren das Funktional (1) unter der Bedingung $x(a) = x_0$, $x(b) = x \in \mathbb{R}$?

SATZ 17

$L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, beide C^2-Funktionen, mit $S(x) \leq S(x+\xi)$ $\forall \xi \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $\xi(a) = \xi(b) = 0$.

$\Rightarrow$ x erfüllt die Eulergleichungen:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t)) \quad \forall t \in [a,b], \; i = 1, \dots, n$$

SATZ 18

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: I \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $s \in I$ und $t \in [a,b]$ stetig. Definiere $F: I \to \mathbb{R}^n$ durch

$$F(s) := \int_a^b f(s,t)\,dt \text{ für } s \in I.$$

Dann gilt folgendes:

i) F ist stetig

ii) f sei nach s partiell diff'bar und $\frac{\partial f}{\partial s}: I \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig $\Rightarrow$ F ist stetig diff'bar und $\frac{d}{ds} F(s) = F'(s) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,dt \quad \forall s \in I$

Beweis: i) Sei $s_0 \in I$. Wähle $r > 0$ s.d. $[s_0 - r, s_0 + r] \subset I$

$$\overset{K5}{\underset{S22}{\Rightarrow}} f\big|_{[s_0-r,\, s_0+r] \times [a,b]} \text{ ist glm. stetig.}$$

Sei $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\exists \delta \in (0, r]$ $\forall s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ $\forall t \in [a,b]$ gilt: $\| f(s,t) - f(s_0,t) \|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon / b-a$

$$\Rightarrow \forall s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta): \| F(s) - F(s_0) \| = \left\| \int_a^b (f(s,t) - f(s_0,t))\,dt \right\| \overset{S12}{\leq} \int_a^b \| f(s,t) - f(s_0,t) \|\,dt \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ ✓.

ii) Sei $s_0 \in I$ und $r > 0$ s.d. $[s_0 - r, s_0 + r] \subset I$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta \in (0, r]$ s.d. $\forall s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$
$\forall t \in [a,b] : \left\| \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) - \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t) \right\| \leq \varepsilon / b-a$

Sei $s \in (s_0, s_0 + \delta)$ und $t \in [a,b]$. Dann:

$$\left\| \frac{f(s,t) - f(s_0,t)}{s - s_0} - \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t) \right\| = \frac{1}{s-s_0} \left\| \int_{s_0}^{s} \frac{\partial f}{\partial s}(\sigma,t) - \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t) d\sigma \right\|$$

$$\overset{S12}{\leq} \frac{1}{s-s_0} \int_{s_0}^{s} \left\| \frac{\partial f}{\partial s}(\sigma,t) - \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t) \right\| ds \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \forall s \in (s_0, s_0 + \delta) : \left\| \frac{F(s,t) - F(s_0,t)}{s - s_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t) dt \right\|$$

$$= \left\| \int_a^b \left(\frac{f(s,t) - f(s_0,t)}{s - s_0} - \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t) \right) dt \right\|$$

$$\overset{S12}{\leq} \int_a^b \left\| \frac{f(s,t) - f(s_0,t)}{s - s_0} - \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t) \right\| dt \leq \varepsilon$$

▨

Notation: $C_0^\infty([a,b], \mathbb{R}^n) = \{ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid \varphi$ ist glatt und $\exists \delta > 0$ s.d. $\varphi|_{[a,a+\delta]} = 0$ und $\varphi|_{[b-\delta,b]} = 0 \}$

SATZ 19

$f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. $\int_a^b \langle f(t), \varphi(t) \rangle dt = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow f(t) = 0 \ \forall t \in [a,b]$

Beweis: Annahme: $\exists t_0 \in [a,b]$ s.d. $f(t_0) \neq 0$
O.B.d.A.: $a < t_0 < b$. Definiere $g : [a,b] \to \mathbb{R}$
durch $g(t) := \langle f(t), f(t_0) \rangle \Rightarrow g$ ist stetig und
$g(t_0) = \|f(t_0)\| > 0$.
Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} g(t_0) > 0 \overset{g}{\underset{\text{stetig}}{\Rightarrow}} \exists \delta > 0$ s.d. $a < t_0 - \delta <$
$t_0 + \delta < b$ und $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ gilt: $|g(t) - g(t_0)| \leq \varepsilon$
$\Rightarrow \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ gilt: $g(t) \geq \underbrace{g(t_0)}_{=2\varepsilon} - \underbrace{|g(t) - g(t_0)|}_{\leq \varepsilon}$
$\Rightarrow g(t) \geq \varepsilon$
Wähle $\beta : [a,b] \to [0,1]$, $\beta : C^\infty$ s.d.

$$\beta(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t_0 - t| \leq \delta/2 \\ 0, & \text{für } |t_0 - t| \geq \delta \end{cases}$$

Definiere $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ durch $\varphi(t) := \beta(t) f(t_0)$

$\Rightarrow$ 1. $\varphi \in C_0^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$

2. $\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \beta(t) g(t) \geq 0 \quad \forall t$

3. $\langle f(t), \varphi(t) \rangle \geq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2]$

$$\Rightarrow \int_a^b \langle f(t), \varphi(t) \rangle dt \geq \int_{t_0 - \frac{\delta}{2}}^{t_0 + \frac{\delta}{2}} \underbrace{\langle f(t), \varphi(t) \rangle}_{\geq \varepsilon} dt \geq \delta \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow \perp$

■

__Beweis von Satz 17:__

Sei $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^2-Fkt. s.d. $S(x + \xi) \geq S(x)$ $\forall \xi \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $\xi(a) = \xi(b) = 0$.

Sei nun $\xi \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $\xi(a) = \xi(b) = 0$ fix.

Definiere $u : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, wobei $s \in \mathbb{R}$ und $t \in [a,b]$, durch $u(s,t) := (x(t) + s\xi(t), \dot{x}(t) + s\dot{\xi}(t)) \Rightarrow u$ ist C^2 und

$\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) = (\xi(t), \dot{\xi}(t)) \Rightarrow L \circ u : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$ ist C^2

Definiere $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\Phi(s) := \int_a^b L \circ u(s,t)\, dt =$

$$= \int_a^b L(x(t) + s\xi(t), \dot{x}(t) + s\dot{\xi}(t))\, dt = S(x + s\xi) \geq S(x) = \Phi(0) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$\overset{S18}{\Rightarrow} \Phi$ ist stetig diff'bar $\overset{K5/S3}{\Rightarrow} 0 = \Phi'(0) \overset{S18}{=} \int_a^b \frac{\partial (L \circ u)}{\partial s}(0,t)\, dt$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t)) \xi_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) \dot{\xi}_i(t) \right) dt$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) \right) \xi_i(t)\, dt \quad \forall \xi \in C_0^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$$

$\overset{S19}{\Rightarrow}$ (2)

■

Bem. $\rightarrow$

Bem.: Energie

Sei $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^2-Lsg. von (2). Definiere:

$$E(t) := \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{- Energie,}$$

wobei $a \leq t \leq b$ (3)

Beh.: $E(t) = \text{const.}$

Bew.: $\frac{d}{dt} E(t) = \sum_{i=1}^{n} \ddot{x}_i(t) \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t)) + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}($

$x(t), \dot{x}(t)) - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t)) - \sum_{i=1}^{n} \ddot{x}_i(t) \frac{\partial L}{\partial v_i}($

$x(t), \dot{x}(t)) = 0$

Bsp. 1) Newton

$L(x,v) := \frac{1}{2} \|v\|_2^2 - V(x)$, mit $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial L}{\partial v_i} = v_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}$

$\hookrightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t)) \cdot (-1)$

$\hookrightarrow \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}_i(t)$

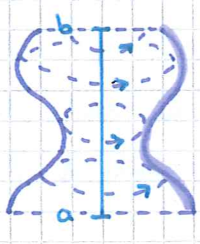
(2) $\iff \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \dots, n$

$\hookrightarrow$ (4) : $\ddot{x} = -\nabla V(x)$

$$\Rightarrow E(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial v_i}(x, \dot{x}) - L(x, \dot{x}) = \|\dot{x}\|^2 - \frac{1}{2}\|\dot{x}\| + V(x)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2}_{T} + \underbrace{V(x)}_{U}$$

Bsp. 2) Rotationsflächen



$x : [a,b] \to (0, \infty)$

Flächeninhalt: $A(x) = 2\pi \int_a^b x(t)(1 + \dot{x}(t)^2)^{1/2} dt$

$$L(x,v) := x\,(1+v^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{xv}{(1+v^2)^{1/2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = (1+v^2)^{1/2}$$

↳ Eulergleichung: $\frac{d}{dt}\frac{x\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{1/2}} = (1+\dot{x}^2)^{1/2} \quad (*)$

$$E = \dot{x}\,\frac{x\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{1/2}} - x(1+\dot{x}^2)^{1/2} = \frac{-x}{(1+\dot{x}^2)}, \quad c := \frac{x}{(1+\dot{x}^2)^{1/2}} > 0$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow c\ddot{x} = (1+\dot{x}^2)^{1/2} = \frac{x}{c}, \quad \ddot{x} = \frac{x}{c^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2}c\alpha e^{t/c} + \tfrac{1}{2\alpha}\cdot c\, e^{-t/c}$$

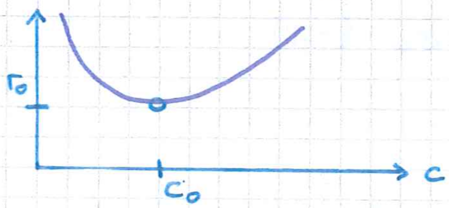
$$\frac{x}{(1+\dot{x}^2)^{1/2}} = c \quad \forall \alpha > 0$$

Spezialfall : $a = -1,\ b = 1$ mit $x(1) = x(-1) = r$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c\alpha/2\, e^{1/c} + c/2\alpha\, e^{-1/c} &= r \\ c\alpha/2\, e^{-1/c} + c/2\alpha\, e^{1/c} &= r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow x(t) = c\left((e^{t/c} + e^{-t/c})/2\right) = c\cosh(t/c)$$

$$\Rightarrow c\cdot\cosh(1/c) = r$$

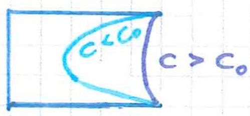


$r < r_0$: keine Lösung

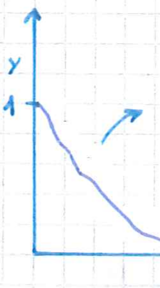
$r = r_0$: 1 Lösung

$r > r_0$: 2 Lösung

$\Rightarrow$



Das Brachistochrone Problem



$f: [0,1] \to [0,1],$
$f \in C^2$

Problem: Man lasse eine Kugel entlang der Kurve hinunterrollen. Für welche Wahl von f kommt sie am schnellsten unten an? f hat die Bedingungen : $f' \leq 0$ und $f(0) = 1$ sowie $f(1) = 0$ (Bernoulli 1696)

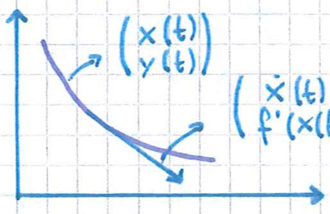
Es gilt jedoch: kürzeste Strecke $\neq$ schnellster Weg

Schritt 1: Bewegungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T]$$

Anfangsbedingungen: $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Energie: $E = f(x(t)) + \frac{1}{2}\left(\dot{x}(t)^2 + f'(x(t))^2 \cdot \dot{x}(t)^2\right) = \text{const.}$

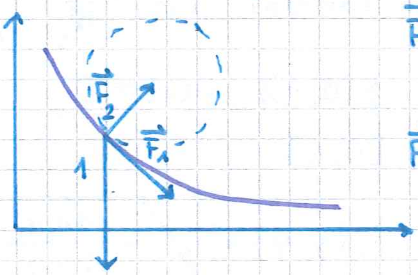


$t = 0$: $E = 1$

$$\Rightarrow 1 = f(x(t)) + \frac{1}{2}\left(1 + f'(x(t))^2\right) \cdot \dot{x}(t)^2$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2(1 - f(x(t)))}{1 + f'(x(t))^2}} \qquad (1)$$

Bem.: Welche Kräfte wirken?



$\vec{F}_1$: tangentiale Komp. der Gravitationskraft

$\vec{F}_2$: Zentripetalkraft

$\vec{F}_1$:

- tangentialer Vektor $\tau(x) = \frac{1}{(1 + f'(x(t))^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x(t)) \end{pmatrix}$
- $\downarrow 1$ $\quad \cos(\alpha) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau(x) \right\rangle$

$$= \frac{-f'(x(t))}{(1 + f'(x(t))^2)^{1/2}} \Rightarrow |\vec{F}_1| = \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1(x) = \frac{-f'(x(t))}{1 + f'(x(t))^2} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x(t)) \end{pmatrix}$$

$\vec{F}_2$:

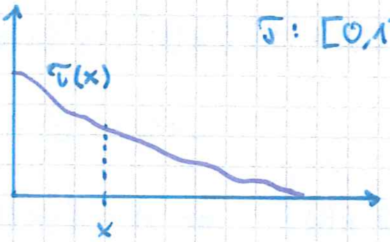
- normaler Vektor: $\nu(x) = \frac{1}{(1 + f'(x(t))^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -f'(x(t)) \\ 1 \end{pmatrix}$
- "$F = v^2/R$" $\rightsquigarrow$ $\exists$ Schmiegekreis mit Radius:

$$\rho(x) = \frac{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)}$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\rho(x)} = \frac{\dot{x}(t)^2 f''(x)}{(1+f'(x(t))^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2(x,\dot{x}(t)) = \frac{\dot{x}(t)^2 f''(x(t))}{1+f'(x(t))^2} \begin{pmatrix} -f'(x(t)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Zeitdauer T



$$\tau : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \tau(x(t)) = t$$

$$\tau'(x(t)) = \frac{1}{\dot{x}(t)} \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{1+f'(x(t))^2}{2(1-f(x(t)))}}$$

$$\tau(0) = 0$$

$$T = \tau(1) = \int_0^1 \tau'(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+f'(x(t))^2}{2(1-f(x))}}\,dx$$

Schritt 3: Variationsproblem

Zu minimieren ist das Integral $T(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{1-y}}\,dx$ (2)

↳ $y: [0,1] \to [0,1]$; $y(0)=1$, $y(1)=0$,

wobei $x \in \mathrm{dom}(y) = [0,1]$

Lagrange-Funktion: $L(y,v) = \sqrt{\frac{1+v^2}{1-y}}$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-y}{1+v^2}} \cdot \frac{1+v^2}{(1-y)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+v^2}{1-y} \cdot \frac{1}{((1+v^2)(1-y))^{1/2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-y}{1+v^2}}\; 2v \frac{1}{1-y} = \frac{v}{((1+v^2)(1-y))^{1/2}}$$

Euler-Gleichung: $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial v}(y,\dot{y}) = \frac{\partial L}{\partial y}(y,\dot{y})$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}(x)}{((1-y)(1+\dot{y}^2))^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\dot{y}^2}{1-y}\cdot\frac{1}{((1-y)(1+\dot{y}^2))^{1/2}} \quad (3)$$

Energieerhaltung: $\text{const.} = \dot{y}\frac{\partial L}{\partial v}(y,\dot{y}) - L(y,\dot{y})$

$$= \ldots = \frac{-1}{((1-y)(1+\dot{y}^2))^{1/2}}$$

$$\Rightarrow (1-y)(1+\dot{y}^2) = 1+c, \quad c = \text{const.} \geq 0 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \dot{y}^2 = \frac{y+c}{1-y} \Leftrightarrow \dot{y} = -\sqrt{\frac{y+c}{1-y}} \quad (5)$$

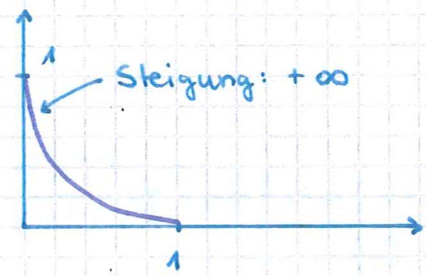
Bem.: Mit (4) ist (3) äquivalent zu:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot y}{(1+c)^{1/2}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1+\dot y^2}{1-y}\cdot\frac{1}{(1+c)^{1/2}} \iff \ddot y = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\dot y^2}{1-y} \qquad (6)$$

Übg.: Jede Lösung von (5) löst auch (6)

Schritt 4: Lösen der Eulergleichung

$y : [0,1] \to [0,1]$ löst (5); $y(0)=1$, $y(1)=0$



Umkehrfunktion:
$x : [0,1] \to [0,1]$
$x(0) = 1$, $x(1) = 0$

$$\dot x(y) = \frac{1}{\dot y(x)} \overset{(5)}{=} \sqrt{\frac{1-y}{y+c}}\,(-1)$$

$$\hookrightarrow\; x(y) - x(0) = \int_0^y \dot x(\eta)\,d\eta \iff x(y) = 1 - \int_0^y \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta+c}}\,d\eta$$

$$s = \sqrt{\frac{1-\eta}{c+\eta}} \iff \frac{1-s^2c}{s^2+1} = \eta$$

$$\Rightarrow \frac{d\eta}{ds} = \ldots = -(c+1)\frac{2s}{(1+s^2)^2}$$

$$\Rightarrow x(y) = 1 - \int_0^y \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta+c}}\,d\eta = 1 - (c+1)\int_{\sqrt{1/c}}^{\sqrt{\frac{1-y}{y+c}}} s\cdot\frac{-2s}{(1+s^2)^2}\,ds$$

$$\overset{PI}{=} 1 - (c+1)\left[s\,\frac{1}{1+s^2}\right]_{(1/c)^{1/2}}^{((1-y)/(y+c))^{1/2}} + (c+1)\int_{\sqrt{1/c}}^{\sqrt{\frac{1-y}{y+c}}} \frac{1}{1+s^2}\,ds = 1 - (c+1)\left[\frac{s}{1+s^2} - \arctan(s)\right]_{(1/c)^{1/2}}^{((1-y)/(y+c))^{1/2}}$$

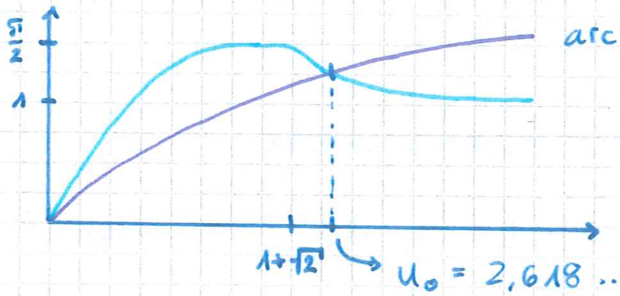
$$= \ldots = 1 - \sqrt{(1-y)(y+c)} + \sqrt{c} + (c+1)\arctan\left(\sqrt{\frac{1-y}{y+c}}\right) - (c+1)\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)$$

$\hookrightarrow\; x(0) = 1$ ✓

$$x(1) = 0 \iff \frac{1+\sqrt{c}}{c+1} = \arctan\left(\sqrt{1/c}\right) \qquad (7)$$

mittels $u := \sqrt{\frac{1}{c}}$: (7) $\iff \frac{1+1/u}{1/u^2+1} = \arctan(u)$

$\iff \frac{u^2+u}{1+u^2} = \arctan(u)$



$\hookrightarrow u_0 = 2{,}618\ldots \Rightarrow c = 1/u_0^2 = 0{,}14583\ldots$

Zusammenfassung

- $x(y) = -\sqrt{(1-y)(c+y)} + (c+1)\arctan\left(\sqrt{\frac{1-y}{y+c}}\right)$, wobei $c > 0$ eindeutige Lsg. von (7)
- $y(x)$: Umkehrfunktion
- Zeit: $T \overset{(2)}{=} 1/\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{1-y}}\, dx \overset{(4)}{=} \sqrt{\frac{1+c}{2}} \int_0^1 \frac{dx}{1-y(x)}$

$$\overset{\text{Subst.}}{=} \sqrt{\frac{1+c}{2}} \int_0^1 \frac{dy}{(1-y)(y+c)} \overset{\text{Subst.}}{=} \sqrt{2(c+1)} \int_0^{\sqrt{1/c}} \frac{ds}{1+s^2}$$

$$= \sqrt{2(1+c)}\arctan\left(\sqrt{1/c}\right) \approx 1{,}8256\ldots$$

Kapitel 11: Implizite Funktionen

Def.: X, Y: Banachräume, $U \subset X$ offen, $f: U \to Y$ diff'bar. $df: U \to \mathcal{L}(X,Y)$. f ist stetig diff'bar, wenn df stetig ist. f heisst zweimal stetig diff'bar, wenn f diff'bar ist und df stetig diff'bar. f heisst ℓ-mal stetig diff'bar, wenn f diff'bar ist und df $\ell-1$ mal stetig diff'bar ist, wobei $\ell \in \mathbb{N}$. f heisst glatt oder C^∞, wenn f für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ ℓ-mal stetig diff'bar ist. In den beiden vorhergehenden Fällen nennt man f auch C^2 bzw. C^ℓ.

Bsp. 1) $f(x) = y_0 \quad \forall x \in U$

$\Rightarrow$ f ist diff'bar: $df(x) = 0 \in \mathcal{L}(X,Y)$

$\Rightarrow$ f ist glatt

Bsp. 2) $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $U = X$. $f(x) = Ax \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow$ f ist diff'bar: $df(x) = A \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow$ gemäss Bsp. 1: f ist glatt

Bsp. 3) X_1, X_2, Y: Banachräume, $\beta: X_1 \times X_2 \to Y$: beschr. bilin., d.h. $\exists c \geq 0 \ \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$: $\|\beta(x_1,x_2)\|_Y \leq c \cdot \|x_1\|_{X_1} \cdot \|x_2\|_{X_2}$ $\Rightarrow$ β ist diff'bar

$X := X_1 \times X_2$: Banachraum, $x := (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$

$\hookrightarrow \|x\| := \|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}$

$d\beta(x_1,x_2): X_1 \times X_2 \to Y$: beschr. und linear

$d\beta(x_1,x_2)(\xi_1, \xi_2) = \beta(x_1, \xi_2) + \beta(x_2, \xi_1)$

$d\beta: X \to \mathcal{L}(X,Y)$: beschr. und linear

$\Rightarrow$ Bsp. 2: $d\beta$ ist glatt bzw. C^∞

$\Rightarrow$ β ist glatt bzw. C^∞

(s. Serie 3)

Lemma 1

X, Y_1, Y_2, Z: Banachräume, $\beta: Y_1 \times Y_2 \to Z$: bilinear & beschr.
$U \subset X$ offen, $f_1: U \to Y_1$, $f_2: U \to Y_2$: beide C^l.
Definiere $g: U \to Z$ durch $g(x) := \beta(f_1(x), f_2(x))$ für $x \in U$
$\Rightarrow g$ ist C^l und $dg(x)\xi = \beta(df_1(x)\xi, f_2(x)) + \beta(f_1(x), df_2(x)\xi)$ (*)

Beweis: $l=1$: Übg. in Kap. 10 (IV)

Definiere $\gamma: \mathcal{L}(X, Y_1) \times Y_2 \to \mathcal{L}(X, Z)$, wobei $y_2 \in Y_2$ und $A_1 \in \mathcal{L}(X, Y_1)$ durch $\gamma(A_1, y_2): X \to Z: \xi \mapsto \beta(A_1\xi, y_2)$.
Definiere $\delta: Y_1 \times \mathcal{L}(X, Y_2) \to \mathcal{L}(X, Z)$ durch:
$\delta(y_1, A_2): X \to Z: \xi \mapsto \beta(y_1, A_2\xi)$ für $y_1 \in Y_1$, $A_2 \in \mathcal{L}(X, Y_2)$.
$\Rightarrow dg(x) = \gamma(df_1(x), f_2(x)) + \delta(f_1(x), df_2(x))$ (**)

IA: $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$: Lemma 1 sei für $l-1$ bewiesen

Seien f_1, f_2 C^l-Abb. $\Rightarrow df_1, df_2$ sind C^{l-1}-Abb.
und: $\Rightarrow$ (**) & IA: dg ist C^{l-1} $\overset{\text{def.}}{\Rightarrow}$ g ist C^l

$\blacksquare$

Lemma 2

X, Y, Z: Banachräume, $U \subset X$, $V \subset Y$: beide offen, $f: U \to V$,
$g: V \to Z$: beide C^l-Abb. für $l \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow h := g \circ f: U \to Z$ ist C^l

Beweis: $l=1$: Satz 3, Kapitel 10 (IV)
$dh(x) = dg(f(x)) \cdot df(x): X \to Z$

IA: Lemma 2 gelte für $l-1$, $l \in \mathbb{N}$ und $l \geq 2$

Seien f, g: C^l-Abb. $\Rightarrow$ $df: U \to \mathcal{L}(X, Y)$
$dg: V \to \mathcal{L}(Y, Z)$
sind C^{l-1}

$\Rightarrow$ IA: $dg \circ f : U \to \mathcal{L}(Y,Z)$ ist C^{k-1}

Sei $\beta : \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(Y,Z) \to \mathcal{L}(X,Z)$, wobei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$ durch $\beta(A,B) := B \circ A$

$\Rightarrow dh(x) = \beta(df(x), dg(f(x))) \overset{L1}{\Rightarrow} dh$ ist C^{k-1}

$\overset{def.}{\Rightarrow} h$ ist C^k ▨

Bsp. 4) $\mathcal{A}$: Banachalgebra. Die Abb. $\mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^* : x \mapsto x^{-1}$ ist glatt. (Beh.)

Bew.: $f : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^* : x \mapsto x^{-1} \overset{K10}{\Rightarrow} f$ ist diff'bar und $df : \mathcal{A}^* \to \mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ ist gegeben durch $df(x)\xi = -x^{-1}\xi x^{-1}$ für $x \in \mathcal{A}^*$ und $\xi \in \mathcal{A}$.

Sei $\beta : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{A})$, $\beta(y,z)\xi := -y\xi z \Rightarrow \beta$ ist bilinear & beschränkt.

$df = \beta(f(x), f(x))$, f sei C^{k-1}

$\Rightarrow$ L1: df ist $C^{k-1} \Rightarrow f$ ist C^k

$\Rightarrow f$ ist C^∞

(▨)

Def.: X,Y: Banachräume

Eine beschr. lineare Abb. $A : X \to Y$ heisst invertierbar, wenn eine beschr. lineare Abb. $B : Y \to X$ existiert, s.d. $B \circ A = id_X$ und $A \circ B = id_Y$

Bem.: A invertierbar $\Leftrightarrow$ A ist bijektiv und $A^{-1} : Y \to X$ ist ein beschr. lin. Operator $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ A ist bijektiv (s. Funktionalanalysis)

Def.: $\mathrm{Inv}(X,Y) := \{A \in \mathcal{L}(X,Y) \mid A \text{ ist invertierbar}\}$

Lemma 3

X,Y: Banachräume. Die Abb. $\mathrm{Inv}(X,Y) \to \mathrm{Inv}(Y,X) : A \mapsto A^{-1}$ ist glatt.

Beweis: Sei $A_0 \in \mathrm{Inv}(X,Y)$. $\mathcal{A} := \mathcal{L}(X,X)$, $\mathcal{A}^* := \mathrm{Inv}(X,X)$

Sei $\mathrm{Inv}(X,Y)$ offen in $\mathcal{L}(X,Y)$. Betrachte:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Inv}(X,Y) \arrow[r, "\text{lin. beschr.}"] & \mathcal{A}^* \arrow[r, "B \mapsto B^{-1}"] & \mathcal{A}^* \arrow[r, "\text{lin. beschr.}", "C^\infty"'] & \mathrm{Inv}(Y,X) \\
A \arrow[r, mapsto, "C^\infty"'] \arrow[rrr, bend right, "C^\infty"'] & A_0^{-1}A \arrow[r, mapsto, "C^\infty"'] & C \arrow[r, mapsto] & CA_0^{-1}
\end{tikzcd}$$

Komposition ist glatt gemäss Lemma 2 $(A \mapsto A^{-1})$ ▨

Def.: X, Y: Banachräume, $U \subset X$, $V \subset Y$ offen. Eine Abbildung $f: U \to V$ heisst C^r-Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und $f: U \to V$ und $f^{-1}: V \to U$ r-mal stetig differenzierbar sind.

Lemma 4

$f: U \to V$: C^r-Diffeo.

$\Rightarrow$ Für jedes $x \in U$ ist der beschr. lin. Operator $df(x)$: $X \to Y$ invertierbar und $df(x)^{-1} = d(f^{-1})(f(x))$

Beweis: Sei $g := f^{-1}: V \to U$. Sei $x_0 \in U$ und $y := f(x_0) \in V$

$\Rightarrow g \circ f = id_U$, $f \circ g = id_V$

$\overset{K10/S3}{\Rightarrow} dg(y_0) \circ df(x_0) = id_X$, $df(x_0) \circ dg(y_0) = id_Y$

$\Rightarrow df(x_0) \in \mathrm{Inv}(X,Y)$ und $df(x_0)^{-1} = dg(y_0)$ ▨

Korollar 1: $\dim X$ und $\dim Y < \infty$, $U \subset X$, $V \subset Y$ nicht leer und offen, $f: U \to V$: C^1-Diffeo

$\Rightarrow \dim X = \dim Y$

Bsp. 5) $U = \mathbb{R}$, $V = (0, \infty)$

$f = \exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$

$x \mapsto e^x$

$\rightarrow f$ ist ein C^∞-Diffeo.

Bsp. 6) $U = V = X = Y = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 \to$ glatt & bijektiv

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to$ nicht diff'bar an d. Stelle $x = 0$

Bsp. 7) $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|$: eukl. Norm, $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$,

$V = \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$, C^∞ - Diffeo.

$f^{-1}: \mathbb{R}^n \to U : y \mapsto \frac{y}{\sqrt{1 + \|\cdot\|^2}}$

Bsp. 8) $\mathcal{A}$: Banachalgebra, $U = V = \mathcal{A}^*$

$f: \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ sei $f(x) = x^{-1}$ für $x \in \mathcal{A}^*$

f ist glatt nach Bsp. 4

$f \circ f(x) = (x^{-1})^{-1} = x \to f \circ f = id_{\mathcal{A}^*}$

f bij. und $f^{-1} = f$

$\Rightarrow f$ ist ein C^∞ - Diffeo.

Lemma 5

X, Y: Banachräume, $U \subset X$, $V \subset Y$: offen. $f: U \to V$ sei ein C^1 - Diffeo. und $r \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow f$ ist C^r und f^{-1} ist C^r

Beweis: Nach L4 gilt: $d(f^{-1})(y) = df(f^{-1}(y))^{-1}$ für $y \in V$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "df^{-1}"'] & U \arrow[r, "df", "C^{r-1}"'] & Inv(X,Y) \arrow[r, "inv", "C^\infty"'] & Inv(Y,X) \end{tikzcd}$$

Sei f^{-1} C^k, $1 \leq k \leq r-1 \overset{L2}{\Rightarrow} df^{-1}$ ist C^k

$\Rightarrow f$ ist C^{k+1} ∎

SATZ 1 (Inverse Funktionen)

X, Y: Banachräume, $\Omega \subset X$ offen, $x_0 \in \Omega$, $f: \Omega \to Y$ stetig diff'bar. $df(x_0): X \to Y$ sei invertierbar.

$\Rightarrow \exists\, U \subset \Omega$ offen s.d. $x_0 \in U$ und

1. $V := f(U)$ ist offen in Y
2. $f|_U : U \to V$ ist bijektiv
3. $(f|_U)^{-1} : V \to U$ ist stetig diff'bar

$\Big\}$ d.h. $f|_U : U \to V$ ist ein C^1-Diffeo.

Bsp. 1) $X = Y = \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$, $x_0 = 0$ & $U = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f'(0) = \cos(0) = 1 \Rightarrow V = (-1, 1)$

Bsp. 2) $\Omega = X = Y = \mathcal{A}$: Banachalgebra

$f = \exp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x_0 = 0$, $df(0) = \mathrm{id} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists\, U, V \subset \mathcal{A}$ offen, $0 \in U$, $\mathbb{1} \in V$ s.d.

$\exp : U \to V$: C^1-Diffeo.

$V = \{ y \in \mathcal{A} \mid \|y - \mathbb{1}\| < 1 \}$

$f^{-1}(y) = \log(y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbb{1} - y)^k}{k}$

SATZ 2

X : Banachraum, $r > 0$, $0 < \alpha < 1$, $x_0 \in X$, $B_r(x_0) = \{ x \in X \mid \|x - x_0\| < r \}$. $\psi : B_r(x_0) \to X$ stetig diff'bar, $\|d\psi(x) - \mathbb{1}\| \leq \alpha \;\; \forall x \in B_r(x_0)$

$\Rightarrow$ 1. ψ ist injektiv

2. $\psi(B_r(x_0)) = \{ \psi(x) \mid x \in X$ und $\|x - x_0\| < r \}$ ist offen
3. $B_{r(1-\alpha)}(\psi(x_0)) \subset \psi(B_r(x_0)) \subset B_{r(1+\alpha)}(\psi(x_0))$
4. $\psi^{-1} : \psi(B_r(x_0)) \to B_r(x_0)$ ist stetig diff'bar.

Satz 2 $\Rightarrow$ Satz 1 :

$A := df(x_0) : X \to Y$ invertierbar. Definiere $\psi : \Omega \to X$ durch $\psi(x) := A^{-1} f(x)$ für $x \in \Omega$

$\Rightarrow \psi(x)$ ist C^1-Abb. und $d\psi(x) - \mathbb{1} = A^{-1} df(x) - \mathbb{1}$

$= A^{-1}(df(x) - df(x_0))$

$\varepsilon := \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \overset{df}{\underset{\text{stetig}}{\Rightarrow}} \exists\, \delta > 0\ \forall x \in X$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ gilt:

$x \in \Omega$ und $\|df(x) - df(x_0)\| < \varepsilon = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$

$\Rightarrow \forall x \in B_\delta(x_0) \subset \Omega$ gilt: $\|d\psi(x) - \mathbb{1}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|df(x) - df(x_0)\| \leq \|A^{-1}\|\,\varepsilon = 1/2$

$\overset{S2}{\Rightarrow}$ $\psi(B_\delta(x_0))$ ist offen, $\psi^{-1} : \psi(B_\delta(x_0)) \to B_\delta(x_0)$ ist C^1

Definiere: $U := B_\delta(x_0) \subset \Omega$

$V := A\psi(B_\delta(x_0)) \subset Y$ offen

$\Rightarrow V$ offen, $V = \{\underbrace{A\psi(x)}_{f(x)} \mid x \in U\} = f(U)$, $\underset{\text{bijektiv}}{f|_U = A\psi : U \to V}$

$f^{-1}(y) = \psi^{-1}(A^{-1}y)$, $y \in V \overset{K10/S3}{\Rightarrow} (f|_U)^{-1} : V \to U$ ist stetig diff'bar

$\Rightarrow d(f^{-1})(y) = d(\psi^{-1})(A^{-1}y)A^{-1}$ stetig ▨

<u>Korollar 2</u> (Offenheitssatz)

X, Y: Banachräume, $U \subset X$ offen, $f: U \to Y$ C^1-Abb.,
$df(x): X \to Y$ invertierbar $\forall x \in U$
$\Rightarrow f(U)$ ist offen in Y

<u>Bew.:</u> Sei $y_0 \in f(U) \Rightarrow \exists\, x_0 \in U$ mit $f(x_0) = y_0$

$\overset{S1}{\Rightarrow} \exists\, U_0 \subset X$ offen s.d. $x_0 \in U_0$ und $V_0 := f(U_0)$ offen,
$y_0 = f(x_0) \in V_0$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ s.d. $B_\delta(y_0) \subset V \subset f(U)$ ▨

<u>Korollar 3</u> (Diffeomorphiesatz)

X, Y: Banachräume, $U \subset X$ offen, $f: U \to Y$ ist C^1, $df(x)$:
$X \to Y$ inv'bar für alle $x \in U$, f sei injektiv
$\Rightarrow V := f(U)$ ist offen & $f: U \to V$ ist ein C^1-Diffeomorphismus

Bew.: V offen (Kor. 1), f bijektiv (Vorraus) $\overset{S1}{\Rightarrow}$ f^{-1} st. diff'bar ▨

Beweis von Satz 2:

Definiere $\varphi: B_r(x_0) \to X$ durch $\varphi(x) := x - \psi(x)$ für $x \in B_r(x_0)$ $\Rightarrow$ φ ist stetig diff'bar und $d\varphi(x) = \mathbb{1} - d\psi(x)$
$\Rightarrow \|d\varphi(x)\| \leq \alpha \quad \forall\, x \in B_r(x_0)$

$$\overset{K10/S7}{\Rightarrow} \quad \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq \alpha \|x - x'\| \quad \forall\, x, x' \in B_r(x_0) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \|\psi(x) - \psi(x')\| &= \|x - x' - \varphi(x) + \varphi(x')\| \\ &\leq \|x - x'\| + \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \\ &\leq (1+\alpha)\|x - x'\| \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\psi(x) - \psi(x')\| &\geq \|x - x'\| - \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \\ &\geq (1-\alpha)\|x - x'\| \quad (3) \quad \Rightarrow \psi \text{ ist injektiv} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \psi(B_r(x_0)) \subset B_{r(1+\alpha)}(\psi(x_0))$

Es gilt auch: $\|\psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(y')\| \overset{(3)}{\leq} \frac{1}{1-\alpha}\|y - y'\| \quad \forall\, y, y' \in \psi(B_r(x_0))$, d.h. $\psi^{-1}: \psi(B_r(x_0)) \to B_r(x_0)$ ist stetig

Beh. 1: $B_{r(1-\alpha)}(\psi(x_0)) \subset \psi(B_r(x_0))$

Beh. 2: $\psi(B_r(x_0))$ ist offen

Beh. 3: $\psi^{-1}: \psi(B_r(x_0)) \to B_r(x_0)$ ist stetig diff'bar und $d(\psi^{-1})(y) = d\psi(\psi^{-1}(y))^{-1}$

Bew. 1: Sei $y \in B_{r(1-\alpha)}(\psi(x_0))$

Definiere $\varepsilon := r - \|y - \psi(x_0)\| \frac{1}{1-\alpha} > 0 \quad (4)$

$K := \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r - \varepsilon\}$, $f_y: K \to X$, $f_y(x) := y + \varphi(x)$

$\hookrightarrow$ a) $x \in K \Rightarrow f_y(x) \in K$

b) $\|f_y(x) - f_y(x')\| = \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq \alpha \|x - x'\| \quad \forall\, x, x' \in K$

Sei $x \in K \Rightarrow \|f_y(x) - x_0\| = \|y + \varphi(x) - x_0\| = \|\varphi(x) - \varphi(x_0) + y - x_0 + \varphi(x_0)\| \leq \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| + \|y - \psi(x_0)\| \underset{(4)}{\overset{(1)}{\leq}} \alpha \underbrace{\|x - x_0\|}_{\leq r-\varepsilon} + (r-\varepsilon)(1-\alpha) \leq r - \varepsilon \Rightarrow f_y(x) \in K$

aus a, b, K8/S2 $\Rightarrow \exists!\, x \in K$ s.d. $f_y(x) = x$, wobei
$f_y(x) = y + x - \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = y$ ✓

<u>Bew. 2:</u> Sei $y_1 \in \varphi(B_r(x_0))$. Wähle $x_1 \in B_r(x_0)$ s.d. $\varphi(x_1) = y_1$.
Definiere $\varepsilon := r - \|x_1 - x_0\|$
$\Rightarrow B_\varepsilon(x_1) \subset B_r(x_0)$
$\overset{\text{Beh.1}}{\Rightarrow} B_{\varepsilon(1-\alpha)}(y_1) \subset \varphi(B_\varepsilon(x_1)) \subset \varphi(B_r(x_0))$ ✓

<u>Bew. 3:</u> Die Abb. $\varphi(B_r(x_0)) \longrightarrow \mathcal{L}(X,X) : y \mapsto d\varphi(\varphi^{-1}(y))^{-1}$
ist stetig.

$$\begin{tikzcd} \varphi(B_r(x_0)) \arrow[r, "\varphi^{-1}", "\text{stetig}"'] \arrow[rrr, bend right, "\text{stetig}"'] & B_r(x_0) \arrow[r, "d\varphi", "\text{stetig}"'] & \mathrm{Inv}(X,X) \arrow[r, "\text{inv.}", "C^\infty"'] & \mathrm{Inv}(X,X) \end{tikzcd}$$

Sei $x_1 \in B_r(x_0)$ und $y_1 := \varphi(x_1)$, $\Psi := d\varphi(x_1) \in \mathrm{Inv}(X,X)$
<u>Beh.:</u> φ^{-1} diff'bar an der Seite y_1 und $d\varphi^{-1}(y_1) = \Psi^{-1}$
<u>Bew.:</u> $\|\mathbb{1} - \Psi\| \leq \alpha < 1$. Daher ist Ψ invertierbar &

$$\Psi^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{1} - \Psi)^k$$

$$\Rightarrow \|\Psi^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbb{1} - \Psi\|} \leq \frac{1}{1-\alpha}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\rho > 0$ s.d. $B_\rho(x_1) \subset B_r(x_0)$
und $\forall\, x \in B_\rho(x_1)$:
$$\|\varphi(x) - \varphi(x_1) - \Psi(x - x_1)\| \leq \varepsilon(1-\alpha)^2 \|x - x_1\| \tag{6}$$

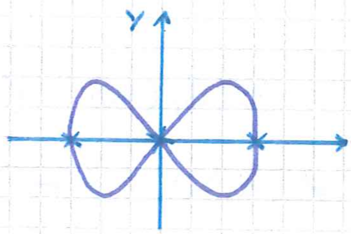
$\overset{\text{Beh.1}}{\Rightarrow} B_{\rho(1-\alpha)}(\overbrace{\varphi(x_1)}^{y_1}) \subset \varphi(B_\rho(x_1))$
$\delta := \rho(1-\alpha)$
Sei $y \in B_\delta(y_1) \Rightarrow \exists\, x \in B_\rho(x_1)$ mit $\varphi(x) = y$
$\hookrightarrow \|\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y_1) - \Psi^{-1}(y - y_1)\|$
$= \|x - x_1 - \Psi^{-1}(\varphi(x) - \varphi(x_1))\|$
$= \|\Psi^{-1}(\varphi(x) - \varphi(x_1)) - \Psi(x - x_1)\|$
$\leq \|\Psi^{-1}\| \cdot \|\varphi(x) - \varphi(x_1) - \Psi(x - x_1)\| \overset{(6)}{\leq} \|\Psi^{-1}\| \cdot$
$\varepsilon(1-\alpha)^2 \|x - x_1\| \overset{(5)}{\leq} \varepsilon(1-\alpha)\|x - x_1\| \overset{(3)}{\leq} \varepsilon \cdot$
$\|\varphi(x) - \varphi(x_1)\| = \varepsilon \|y - y_1\| \Rightarrow$ ✓

Bsp.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 - y^2 - x^4$

Gleichung: $f(x,y) = 0 \iff y^2 = x^2 - x^4$

$\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}, \quad -1 \leq x \leq 1$

Als Graph:



Ausnahmepunkte:

$(x,y) = \underbrace{(0,0), (-1,0), (1,0)}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$

Allgemeine Situation

$\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$: offen, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$

$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$

$df(x,y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$: lineare Abbildung. Jacobi-Matrix:

$$df(x,y) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x,y) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y) \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

Wobei: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x,y) \right)_{\substack{k=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x,y) \right)_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$

Bem.: Für $\xi \in \mathbb{R}^n$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + t\xi, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\xi,y) - f(x,y)}{t}$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\xi_i$

Für $\eta \in \mathbb{R}^m$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x, y + t\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,y+t\eta) - f(x,y)}{t}$

$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(x,y)\eta_j$

Umformulierung

X, Y, Z: Banachräume, $\Omega \subset X \times Y$: offen, $f: \Omega \to Z$ stetig diff'bar.
Wir definieren beschränkte lineare Operatoren:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y): X \to Z \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y): Y \to Z$$

Für $\xi \in X$ und $\eta \in Y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\xi := d^X f(x,y)\xi := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+t\xi, y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\xi,y) - f(x,y)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\eta := d^Y f(x,y)\eta := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x, y+t\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,y+t\eta) - f(x,y)}{t}$$

Es gilt: $df(x,y): X\times Y \to Z$: $df(x,y)(\xi,\eta) = d^X f(x,y)\xi + d^Y f(x,y)\eta$

SATZ 3 (Implizite Funktionen)

X, Y, Z: Banachräume, $\Omega \subset X \times Y$, $f: \Omega \to Z$ C^1-Abb.,
$(x_0, y_0) \in \Omega$, $d^Y f(x_0,y_0): Y \to Z$ invertierbar, $z_0 := f(x_0,y_0) \in Z$
$\Rightarrow \exists$ offene Mengen $U \subset X$, $V \subset Y$, $W \subset Z$ $\exists$ C^1-Abb.: $g: U \times W \to V$
s.d.:

a) $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, $z_0 \in W$, $U \times V \subset \Omega$

b) $g(x_0, z_0) = y_0$

c) $\forall x \in U \ \forall y \in V \ \forall z \in W$:

$$z = f(x,y) \iff y = g(x,z) \quad (1)$$

d) $\forall x \in U \ \forall z \in W$ gilt: $y := g(x,z) \in V$, $d^Y f(x,y) \in \mathrm{Inv}(Y,Z)$

und:
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ d^X g(x,z) = -d^Y f(x,y)^{-1} d^X f(x,y) \in \mathcal{L}(X,Y) \\ \bullet\ d^Z g(x,z) = d^Y f(x,y)^{-1} \in \mathcal{L}(Z,Y) \end{array}\right\} (2)$$

Bem.:
1) Im Allgemeinen: $f(U \times V) \not\subset W$
2) g ist eindeutig durch (1) bestimmt
3) g ist nur "lokal" in einer Umgebung von (x_0, z_0) definiert

Korollar →

Korollar: $X, Y, Z, \Omega, f, x_0, y_0, z_0$ wie in Satz 3

$\Rightarrow \exists$ offene Mengen $U \subset X$, $V \subset Y$ $\exists$ C^r-Abb. $g_0 : U \to V$ s.d.:

a) $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, $U \times V \subset \Omega$

b) $g_0(x_0) = y_0$

c) $\forall x \in U\ \forall y \in V : f(x,y) = z_0 \Leftrightarrow g_0(x) = y$

d) $\forall x \in U$ gilt: $dg_0(x) = -d^Y f(x, g_0(x))^{-1} d^X f(x, g_0(x))$

Bew.: Satz 3 mit $g_0(x) := g(x, z_0)$ ($\blacksquare$)

Beweis von Satz 3:

$A_0 := d^X f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X,Z)$, $B_0 := d^Y f(x_0, y_0) \in \mathrm{Inv}(Y,Z)$

Definiere $F : \Omega \to X \times Z$ durch $F(x,y) := (x, f(x,y))$ für $(x,y) \in \Omega$ $\Rightarrow$ F ist eine C^r-Abb. und die Ableitung $dF(x_0,y_0) : X \times Y \to X \times Z$ ist der beschränkte lineare Operator $dF(x_0,y_0)(\xi, \eta) = (\xi, A_0\xi + B_0\eta)$ für $\xi \in X$ und $\eta \in Y$

$\Rightarrow$ $dF(x_0,y_0)$ bijektiv und $dF(x_0,y_0)^{-1}(\xi, \zeta) = (\xi, B_0^{-1}(\zeta - A_0\xi))$ für $\zeta \in Z$

$\Rightarrow$ $dF(x_0,y_0)^{-1}$ ist beschränkt, $dF(x_0,y_0) \in \mathrm{Inv}(X \times Y, X \times Z)$

$\Rightarrow$ S1: $\exists\ \Omega_0 \subset \Omega$, Ω_0: offen, s.d.:

- $(x_0, y_0) \in \Omega_0$
- $F(\Omega_0) \subset X \times Z$ offen
- $F : \Omega_0 \to F(\Omega_0)$ bijektiv
- $F^{-1} : F(\Omega_0) \to \Omega_0$ ist eine C^r-Abb.

Definiere $\pi_Y : X \times Y \to Y$ durch $\pi_Y(x,y) := y$ für $(x,y) \in X \times Y$
Diese Abbildung ist glatt.

$\Rightarrow$ $g := \pi_Y \circ F^{-1} : F(\Omega_0) \to Y$ ist eine C^r-Abb. und $F^{-1}(x,z) = (x, g(x,z))$ $\forall (x,z) \in F(\Omega_0)$

$\Rightarrow$ 1. $g(x_0, z_0) = y_0$

2. $\forall (x,z) \in F(\Omega_0)$ gilt: $(x, g(x,z)) \in \Omega_0$ und $f(x, g(x,z)) = z$

3. $\forall (x,y) \in \Omega_0$ gilt: $(x, f(x,y)) \in F(\Omega_0)$ und $g(x, f(x,y)) = y$

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0, X) \times B_\varepsilon(y_0, Y) \subset \Omega_0$
$B_\varepsilon(x_0, X) \times B_\varepsilon(z_0, Z) \subset F(\Omega_0)$

Wähle $\delta \in (0, \varepsilon]$ s.d. $g(B_\delta(x_0, X) \times B_\delta(z_0, Z)) \subset B_\varepsilon(y_0, Y)$

Definiere $U := B_\delta(x_0, X)$, $W := B_\delta(z_0, Z)$ und $V := B_\varepsilon(y_0, Y)$

$\Rightarrow$ · $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, $z_0 \in W$ sowie $U \times V \subset \Omega_0 \subset \Omega$

· $g : U \times W \to V$ ist C^r und $g(x_0, z_0) = y_0$

· $x \in U$, $y \in V$, $z := f(x,y) \in W$

$\Rightarrow (x, z) \in F(\Omega_0)$ und $g(x, z) = g(x, f(x,y)) = y$

· $x \in U$, $z \in W$

$\Rightarrow y := g(x, z) \in V$, $(x, y) \in \Omega_0$ und $f(x,y) = f(x, g(x,z))$
$= z$

· Sei $x \in U$, $z \in W$, $y := g(x, z) \in V$

$A := d^X f(x,y) \in \mathcal{L}(X, Z)$, $B := d^Y f(x,y) \in \mathcal{L}(Y, Z)$

$f(x, g(x,z)) = z$, $g(x, f(x,y)) = y$

$\Rightarrow B d^Z g(x,z) = 1\!\!1_Z$, $d^Z g(x,z) B = 1\!\!1_Y$

$\underbrace{d^X f(x,y)}_{A} + B d^X g(x,z) = 0$, $d^X g(x,z) + d^Y g(x,z) A = 0$

$\Rightarrow B$ inv'bar und $d^Z g(x,z) = B^{-1}$, $d^X g(x,z) = -B^{-1} A$

∎

Bsp.) $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $x : I \to \mathbb{R}^n$, L ist C^∞

Eulergleichung: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))$ (3)

Definiere $y : I \to \mathbb{R}^n$ durch $y(t) := \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t))$ (4)

$\frac{\partial L}{\partial v} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial L}{\partial v}(x, v) =: y$ $\to$ nach v auflösen

Annahme: $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$: $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x_0, v_0) \right)_{i,j=1}^n \neq 0$ (5)

Sei $y_0 := \frac{\partial L}{\partial v}(x_0, v_0) \overset{S3}{\Rightarrow} \exists\, U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\exists\, C^\infty$-Abb. $g : U \times W \to V$ s.d.:

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x, g(x,y)) = y \quad \forall x \in U \ \forall y \in W, \quad g(x_0, y_0) = v_0 \quad (6)$$

Definiere $H: U \times W \to \mathbb{R}$ durch $H(x,y) := \langle y, g(x,y) \rangle - L(x, g(x,y))$ (7) $\Rightarrow$ H ist C^∞

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \langle y, \frac{\partial y}{\partial x_i}(x,y) \rangle - \frac{\partial L}{\partial x_i}(x, g(x,y)) - \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial v_j}(x, g(x,y))}_{y_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x,y)$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, g(x,y)) \quad (8)$$

$\frac{\partial H}{\partial y_j}(x,y) = g_j(x,y)$, $x: I \to U$ Lsg. von (1), $\dot{x}(t) \in V \ \forall t \in I$

$$y(t) \overset{(2)}{:=} \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \in W \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \dot{x}_i(t) \overset{(4)}{=} g_i(x(t), y(t)) \overset{(7)}{=} \frac{\partial H}{\partial y_i}(x(t), y(t))$$

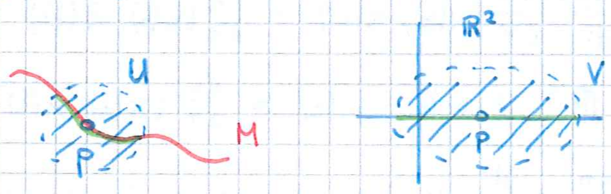
$$\dot{y}_i(t) = \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), g(x(t), y(t)))$$

$$\overset{(6)}{=} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), y(t))$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i}(x,y) \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,y) \end{aligned}\right\} \text{Hamilton'sche DGL} \to H(x(t), y(t)) = \text{const.}$$

(Energieerhaltung)

<u>Def.:</u> X: n-dim. Banachraum, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heisst d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von X, wenn $\forall p \in M \ \exists U \subset X$ offen, $p \in U$, $\exists V \subset \mathbb{R}^n \ \exists C^k$-Diffeo. $\varphi: U \to V$, s.d. $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$



φ heisst Karte

$U \cap M$ heisst Kartengebiet

$\varphi_i: U_i \to V_i$ Karte, $i \in I$,

$M = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap M) \to \{\varphi_i\}_{i \in I}$ heisst Atlas

Eine C^∞-Untermannigfaltigkeit wird auch glatt genannt.

Beispiele $\to$

Bsp. 1) $M = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, $\|x\| = \|x\|_2$

S^{n-1} ist eine glatte $(n-1)$-dimensionale Untermf. von $\mathbb{R}^n$

$U_i^{\pm} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_i > 0, \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_j^2 < 1\}$

$\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_i^{\pm}(x) := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i \neq j} x_j^2} \mp x_i)$

Bsp. 2) X, Y: Banachräume, $\dim X = d$, $\dim Y = m$, $\Omega \subset X$: offen, $g : \Omega \to Y$ C^k-Abb.

$M := \mathrm{graph}(g) = \{(x,y) \in \Omega \times Y \mid y = g(x)\}$

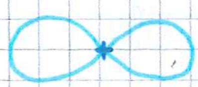
↳ C^k-Untermf. von $X \times Y$

$U := \Omega \times Y$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $n = d + m$

$\Phi : X \to \mathbb{R}^d$, $\Psi : Y \to \mathbb{R}^m$ Isomorphismen

$\varphi(x,y) := (\Phi(x), \Psi(y - g(x))) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$

Bsp. 3) $d = n$, $\dim X = n$, $M \subset X$. M ist eine n-dim. Untermf. von $X \iff M$ ist offen

Bsp. 4)  $\subset \mathbb{R}^2 \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 - x^4\}$

↳ Keine Untermannigfaltigkeit!

SATZ 4

X: n-dim. Banachraum, $M \subset X$, $0 \leq d \leq n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Äquivalent sind:
- i) M ist eine d-dim. C^k-Untermannigfaltigkeit
- ii) $\forall p \in M$ $\exists U \subset X$ offen mit $p \in U$ $\exists f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ C^k-Abb. s.d.:
  - a) $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$
  - b) $df(x) : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ surjektiv $\forall x \in U \cap M$

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii): Sei $p \in M$, sei $U \subset X$ offen, $p \in U$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi : U \to V$ ein C^k-Diffeo. s.d. $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$

$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$.

Definiere $f: U \to \mathbb{R}^{n-d}$ durch $f(x) := (\varphi_{d+1}(x), \dots, \varphi_n(x))$

$\Rightarrow f$ ist C^ν, $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$

Sei $x \in U$: $df(x): X \to \mathbb{R}^n$ ist bijektiv, d.h. $d\varphi_i(x)$: $X \to \mathbb{R}$ Basis von $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$

$\Rightarrow d\varphi_{d+1}(x), \dots, d\varphi_n(x)$ sind lin. unabh. in X^*

$\Rightarrow df(x): X \to \mathbb{R}^{n-d}: \xi \mapsto \begin{pmatrix} d\varphi_{d+1}(x)\xi \\ \vdots \\ d\varphi_n(x)\xi \end{pmatrix}$ ist surjektiv.

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $p \in M$ und sei $f: U \to \mathbb{R}^{n-d}$ C^ν wie in ii).

$f = (f_1, \dots, f_{n-d})$, $f_i: U \to \mathbb{R}$ C^ν

$df_1(p), \dots, df_{n-d}(p)$ lin. unabh. in $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_d \in X^*$ s.d. $\lambda_1, \dots, \lambda_d, df_1(p), \dots, df_{n-d}(p)$

s.d. diese eine Basis von X^* bilden.

Definiere $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ durch $\varphi(x) := (\lambda_1(x), \dots, \lambda_d(x), f_1(x), \dots f_{n-d}(x))$

$\hookrightarrow d\varphi(p): X \to \mathbb{R}^n: \xi \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) \\ \vdots \\ \lambda_d(\xi) \\ df_1(p)\xi \\ \vdots \\ df_{n-d}(p)\xi \end{pmatrix}$ bijektiv

$\overset{S1}{\Rightarrow} \exists\, U_0 \subset U$ offen s.d. $p \in U_0$, $\varphi(U_0) =: V_0$ offen

und $\varphi: U_0 \to V_0$ ist ein C^ν-Diffeo., sowie:

$\varphi(U_0 \cap M) = V_0 \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$

<u>Def.:</u> X, Y: Banachräume, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, $\Omega \subset X$ offen, $f: U \to Y$ C^ν-Abb., $\nu \in \mathbb{N}$. Ein Element $c \in Y$ heisst regulärer Wert von f, wenn $\forall\, x \in \Omega$ gilt: $f(x) = c$ $\Rightarrow df(x): X \to Y$ ist surjektiv

SATZ 5

$c \in Y$: regulärer Wert von f, $m \leq n$.

$\Rightarrow M := f^{-1}(c) = \{x \in \Omega \mid f(x) = c\}$ ist eine C^ν-Untermf. von X mit $\dim M = \dim X - \dim Y = n - m$

<u>Beweis:</u> Wähle einen VRm-Isom. : $\Phi : Y \to \mathbb{R}^m$, $d := n-m$.
Definiere $g : \Omega \to \mathbb{R}^{n-d}$ durch $g(x) := \Phi(f(x) - c)$
für $x \in \Omega$.
$\Rightarrow$ a) $M = f^{-1}(c) = g^{-1}(0)$
b) $dg(x) = \Phi \circ df(x) : X \to \mathbb{R}^{n-d}$ surjektiv $\forall x \in g^{-1}(0)$
$\overset{S4}{\Rightarrow}$ Behauptung

$\blacksquare$

<u>Bem.:</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^ℓ-Abb., $\ell \geq 1$, $\ell \geq n-m+1$
$\overset{\text{Satz von Sard}}{\Rightarrow}$: "Fast jedes" Element von $\mathbb{R}^m$ ist ein regulärer Wert von f.

Bsp. 5) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = A^T$, $A \neq 0$
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x^T A x$: C^∞-Abb.
Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist ein regulärer Wert von f
$\hookrightarrow df(x)\xi = 2x^T A \xi = 2 \langle Ax, \xi \rangle$
$f(x) = c \Rightarrow x^T A x = c \neq 0 \Rightarrow Ax \neq 0 \Rightarrow df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
ist surjektiv.
$\overset{S5}{\Rightarrow}$ $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = c\}$ ist eine glatte Untermf.
von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$
a) $A = \mathbb{1}$, $f(x) = \|x\|^2$, $f^{-1}(1) = S^{n-1}$
b) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \|x-y\|^2$, $r > 0$
$M := f^{-1}(r^2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|x-y\| = r\}$
c) $A = \begin{pmatrix} 1/r_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/r_n^2 \end{pmatrix}$, $E = f^{-1}(1) = \{x \mid \sum_i \frac{x_i^2}{r_i^2} = 1\}$

Bsp. 6) $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = \mathbb{1}\}$ $\to$ Dies ist eine glatte Untermf. von $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

$X := \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y := \mathcal{S}_n = \{S \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid S = S^T\}$, $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$
$f : X \to Y : A \mapsto A^T A$, $O(n) = f^{-1}(\mathbb{1})$

<u>Beh.:</u> $\mathbb{1}$ ist ein regulärer Wert von f

Bew.: $df(A): \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathcal{S}_n$, $A \in O(n)$

$df(A)X = X^TA + A^TX$. Sei $S \in \mathcal{S}_n$. $X := \frac{1}{2}AS$

$\Rightarrow df(A)X = X^TA + A^TX = \frac{1}{2}(AS)^TA + \frac{1}{2}A^TAS$

$= \frac{1}{2}S^T + \frac{1}{2}S = S \Rightarrow df(A)$ ist surjektiv

$\blacksquare$

Übg.: $M \subset X$, $M' \subset X'$: C^k-Untermf.

$\dim M = d$, $\dim M' = d'$

$\Rightarrow M \times M'$ ist eine $(d+d')$-dim. C^k-Untermf. von $X \times X'$

Bsp. 7) $S^1 = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2+y^2 = 1\} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

Übg.: $\mathbb{T}^n := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1}_{(n\text{-mal})}$ ist eine n-dim.

Untermf. von $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$,

$\mathbb{T}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| = 1 \ \forall i\} \subset \mathbb{C}^n$

"n-Torus"

Bsp. 8) $\varphi: (a,b) \to (0,\infty)$ sei C^∞

Rotationsfläche: $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a < z < b,\ x^2+y^2 = \varphi(z)^2\}$

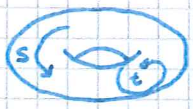
$U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a < z < b\}$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - \varphi(z)^2$ hat 0 als regulären Wert.

Bsp. 9) 2-Torus: $0 < r < 1$, $M = f^{-1}(0)$, 0 regulärer Wert von f.

$f(x,y,z) = (x^2+y^2+r^2-z^2-1)^2 - 4(x^2+y^2)(r^2-z^2)$

$S^1 \times S^1 \to M : (e^{is}, e^{it}) \mapsto \begin{pmatrix} (1+\cos(s)r)\cos(t) \\ (1+r\cos(s))\sin(t) \\ r\sin(s) \end{pmatrix}$



$\to$ 2-Torus

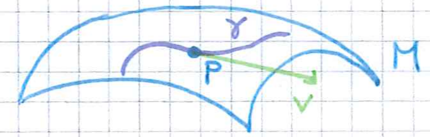
Bsp. 10) $M := \{(x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy) \mid x,y,z \in \mathbb{R},\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$

$\hookrightarrow$ 2-dim. Untermf. von $\mathbb{R}^6$, $\nexists f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$, f C^∞, s.d.

0 regulärer Wert von f und $f^{-1}(0) = M$ (kein Beweis)

$R := \{(yz, zx, xy) \mid x,y,z \in \mathbb{R},\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ "Römerfläche"

Def.: X: endl.-dimensionaler Banachraum, $M \subset X$: d-dimensionale Untermannigfaltigkeit.
Sei $p \in M$. Ein Vektor $v \in X$ heisst Tangentialvektor an M im Punkte p, wenn eine C^1-Abb. $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ existiert s.d. $\dot{\gamma}(0) = v$ und $\gamma(0) = p$



Die Menge $T_pM := \{v \in X \mid v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in Punkt } p\}$ heisst Tangentialraum von M im Punkte p.

Bem.: $v \in T_pM \Rightarrow \exists \gamma: \mathbb{R} \to M$ C^1 mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$

Bew.: Nach Definition $\exists \beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ C^1, mit $\beta(0) = p$ und $\dot{\beta}(0) = v$. Definiere $\gamma: \mathbb{R} \to M$ durch

$$\gamma(t) := \beta\left(\frac{t\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + t^2}}\right) \Rightarrow \gamma(0) = \beta(0) = p$$
$$\dot{\gamma}(0) = \dot{\beta}(0) = v$$ ▨

SATZ 6

X: n-dim. Banachraum, $M \subset X$: d-dim. C^k-Untermf., $p \in M$.

i) $U \subset X$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: U \to V$ C^k-Diffeom. s.d. $p \in U$, $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$
$\Rightarrow T_pM = d\varphi(p)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$

ii) $U \subset X$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^{n-d}$ C^k-Abb., $U \cap M = f^{-1}(0)$, $df(p): X \to \mathbb{R}^{n-d}$ surjektiv.
$\Rightarrow T_pM = \text{Kern}(df(p))$

iii) T_pM ist ein d-dim. linearer Unterraum von X.

Beweis: Wir zeigen: $d\varphi(p)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subset T_pM \subset \text{Kern}(df(p))$ (*)

1.) $v \in d\varphi(p)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \Rightarrow d\varphi(p)v \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$, $\xi := d\varphi(p)v$
$x := \varphi(p) \in \mathbb{R}^d \times \{0\} \Rightarrow x + t\xi \in (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
$\Rightarrow \gamma(t) := \varphi^{-1}(x + t\xi) \in M \cap U$ für $-\varepsilon < t < \varepsilon$, γ ist C^1

$$\gamma(0) = \varphi^{-1}(x) = p$$
$$\dot\gamma(0) = d(\varphi^{-1})(x)\xi = d\varphi(p)^{-1}\xi = v \implies v \in T_pM.$$

2.) $v \in T_pM \implies \exists\, C^1$- Abb. $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ s.d. $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$.

O.B.d.A. : $\gamma(t) \in U \;\forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon) \implies f(\gamma(t)) = 0 \;\forall t$

$$\implies 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = df(\gamma(0))\dot\gamma(0) = df(p)v$$

$$\implies d\varphi(p)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = T_pM = \mathrm{Kern}\,(df(p))$$
$$\implies i),\ ii),\ iii)$$

$\blacksquare$

zu Bsp. 5) $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^TAx = c\}$

$T_xQ = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid x^TA\xi = 0\} = (Ax)^\perp$, $Ax \neq 0$

S^{n-1}, $A = \mathbb{1} \to T_xS^{n-1} = x^\perp$

zu Bsp. 6) $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^TA = \mathbb{1}\}$

<u>Beh.:</u> $T_AO(n) = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B^TA + A^TB = 0\}$

<u>Bew.:</u> $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathcal{S}_n : f(A) := A^TA$

$df(A)B = A^TB + B^TA$, $df(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathcal{S}_n$ surjektiv $\forall A \in O(n)$

$\overset{S6}{\implies} T_AO(n) = \mathrm{Kern}\, df(A) = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid df(A)B = 0\}$

$\blacksquare$

$$T_{\mathbb{1}}O(n) = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B^T + B = 0\}$$

<u>Übg.:</u>
- $B \in T_{\mathbb{1}}O(n) \implies \exp(tB) \in O(n) \;\forall t \in \mathbb{R}$
- $B_1, B_2 \in T_{\mathbb{1}}O(n) \implies [B_1,B_2] = B_1B_2 - B_2B_1 \in T_{\mathbb{1}}O(n)$

Extrema mit Nebenbedingungen

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$: C^1-Funktion, $h: U \to \mathbb{R}^m$, $m<n$, ebenfall C^1-Abb.

$0 \in \mathbb{R}^m$ sei ein regulärer Wert von h. Nach Satz 5 ist $M := \{x \in U \mid h(x) = 0\}$ eine $(n-m)$ dimensionale C^1-Untermf. von $\mathbb{R}^n$.

Gesucht: $x_0 \in M$ s.d. $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in M$

Notation: $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$, $h = (h_1, \dots, h_m)$

$\hookrightarrow \nabla h_i(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_i}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$

SATZ 7 (Lagrange)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$, $h = (h_1, \dots, h_m): U \to \mathbb{R}^m$ C^1-Abb., $0 \in \mathbb{R}^m$: regulärer Wert von h, $M := h^{-1}(0) \ni x_0$, $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in M$.

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ s.d. $\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x_0)$

λ_i heissen Lagrange-Multiplikatoren

Beweis: Sei $\xi \in T_{x_0}M$

Beh.: $\nabla f(x_0) \perp \xi$

Bew.: Nach Definition $\exists$ C^1-Abb. $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ s.d. $\gamma(0) = x_0$, $\dot\gamma(0) = \xi$

$\Rightarrow f(\gamma(t)) \geq f(\gamma(0))$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = df(\gamma(0))\dot\gamma(0) = df(x_0)\xi$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\xi_i = \langle \nabla f(x_0), \xi \rangle \Rightarrow \nabla f(x_0) \perp \xi$$

$\nabla f(x_0) \perp T_{x_0}M = \text{Kern}(h(x_0)) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid dh(x_0)\xi = 0 \in \mathbb{R}^m\}$

$= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid dh_i(x_0)\xi = 0,\ i = 1, \dots, m\}$

$= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla h_i(x_0), \xi \rangle$

$$\Rightarrow T_{x_0}M = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \perp \nabla h_i(x_0),\ i = 1, \dots, m\}$$
$$= \langle \nabla h_1(x_0), \dots, \nabla h_m(x_0) \rangle^\perp$$
$$\Rightarrow T_{x_0}M^\perp = \langle \nabla h_1(x_0), \dots, \nabla h_m(x_0) \rangle \ni \nabla f(x_0)$$

Bsp. 1) $f(x) := x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\ \forall i = 1, \dots, n\}$

$h(x) := x_1 + \ldots + x_n - 1$

$M = h^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\ \forall i,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$

$\exists a \in M$ s.d. $f(a) \geq f(x)\ \forall x \in M$

$\overset{S7}{\Rightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.d. $\nabla f(a) = \lambda \nabla h(a)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}_{\substack{\| \\ a_1 \cdot \ldots \cdot a_{i-1} a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_n \\ \| \\ \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_i}}} = \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \lambda$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}{(y_1 + \ldots + y_n)^n} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \prod_i y_i \leq \left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow (y_1 \cdot \ldots \cdot y_n)^{1/n} \leq 1/n\,(y_1 + \ldots + y_n)$$

Bsp. 2) $M \subset \mathbb{R}^n$, $\dim M = d$, C^1-Untermf, $a \in \mathbb{R}^n \setminus M$.

Sei $x_0 \in M$ s.d. $\|x_0 - a\| \leq \|x - a\|\ \forall x \in M$

$f(x) := \|x - a\|^2 = (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2$

$f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in M$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\substack{\| \\ 2(x_0 - a)}} \perp T_{x_0}M$$

Bsp. 3) $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(x) := 1/2\, x^T A x$, $h(x) := 1/2\,(\|x\|^2 - 1)$

$\nabla f(x) = Ax$, $h^{-1}(0) = S^{n-1}$

$\exists v_1 \in S^{n-1}$ s.d. $f(v_1) \leq f(x)\ \forall x \in S^{n-1}$

$\overset{S7}{\Rightarrow} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$ s.d. $\nabla f(v_1) = \lambda_1 \nabla h(v_1)$

$$\begin{array}{ccc} \nabla f(v_1) & = & \lambda_1 \nabla h(v_1) \\ \| & & \| \\ A v_1 & = & \lambda_1 v_1 \end{array}$$

$M_1 := \{ x \in S^{n-1} \mid \langle x, v_1 \rangle = 0 \} = h_1^{-1}(0) \cap h_2^{-1}(0)$

$h_2(x) = \langle x, v_1 \rangle$

$0 \in \mathbb{R}^2$: reg. Wert von $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists v_2 \in M_1$ s.d.: $f(v_2) \leq f(x) \ \forall x \in M_1$

$\overset{S7}{\Rightarrow} \exists \lambda_2 \in \mathbb{R} \ \exists \mu \in \mathbb{R}$ s.d.

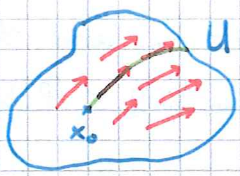
$$\begin{array}{ccccc} \nabla f(v_2) & = & \lambda_2 \nabla h_1(v_2) & + \mu & \nabla h_2(v_2) \\ \| & & \| & & \| \\ A v_2 & = & \lambda_2 v_2 & + \mu & v_1 \end{array}$$

$\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow A v_2 = \lambda_2 v_2$

usw. $\Rightarrow$ SPEKTRALSATZ !

Kapitel 12: Vektorfelder und Flüsse

Def.: $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig.



f heisst Vektorfeld

Wir wollen die dazugehörige Differentialgleichung lösen:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Erinnerung Kap. 8:

1. $f: U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipsch.-stetig $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall x_0 \in U \ \exists \varepsilon > 0 \ \exists c > 0$ s.d. $B_\varepsilon(x_0) \subset U$ und $\forall x, y \in B_\varepsilon(x_0)$: $\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\| \overset{\text{übg.}}{\Longleftrightarrow} \forall K \subset U$ kmpkt. $\exists c > 0 \ \forall x, y \in K$: $\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|$ (eukl. Normen)

2. $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f$ ist lokal Lipsch.-stetig (Schrankensatz - K10/S7)

3. f lokal Lipschitz-st. $\Rightarrow \forall x_0 \in U \ \exists$ Lsg. $x: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ von GL (1) (K8/S1)

4. f lokal Lipsch.-stetig. $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle mit $0 \in I \cap J$. $x: I \to U$, $y: J \to U$ Lsgen von (1)
$\Rightarrow x(t) = y(t) \;\forall t \in I \cap J$

<u>Def.:</u> Sei $x_0 \in U$ gegeben. Das maximale Existenzintervall von x_0 ist die Teilmenge (von $\mathbb{R}$):

$$I(x_0) := \bigcup \{ I \subset \mathbb{R} \mid I \text{ ist offen, } 0 \in I, \exists \text{ Lsg } x: I \to U \text{ von } (1) \}$$

Fakt 1:
- $\exists$ Lsg. $x: I(x_0) \to U$ von (1)
- $I(x_0)$ ist offen und $0 \in I(x_0)$

Fakt 2:
- Diese Lösung ist eindeutig

<u>Def.:</u> Sei $\Omega := \{ (t, x_0) \mid x_0 \in U, t \in I(x_0) \}$
Die Abbildung $\varphi: \Omega \to U : \varphi(t, x_0) := x(t)$, wobei $x: I(x_0) \to U$ die eindeutige Lösung von (1) ist, heisst Fluss des Vektorfeldes f.

<u>Lemma 1</u>

$x_0 \in U$, $t_0 \in I(x_0) \Rightarrow I(\varphi(t_0, x_0)) = I(x_0) - t_0$ und $\forall t \in I(\varphi(t_0, x_0))$ gilt $\varphi(s, \varphi(t_0, x_0)) = \varphi(t_0 + s, x_0)$

<u>Beweis:</u> Sei $J := I(x_0) - t_0$ und definiere $y: J \to U$ durch

$$y(s) := \varphi(\underbrace{t_0 + s}_{\in I(x_0)}, x_0)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(s) = f(y(s)) \;\forall s \in J$$
$$y(0) = \varphi(t_0, x_0)$$
$$\Rightarrow J \subset I(\varphi(t_0, x_0)) \;\&\; y(s) = \varphi(s, \varphi(t_0, x_0))$$

<u>Beh.:</u> $I(x_0) - t_0 = I(\varphi(t_0, x_0))$

<u>Bew.:</u> $\varphi(-t_0, y_0) = y(-t_0) = \varphi(0, x_0) = x_0$

$$\Rightarrow \underbrace{I(y_0) - (-t_0)}_{= I(\varphi(t_0, x_0)) + t_0} \subset \underbrace{I(\varphi(-t_0, x_0))}_{= I(x_0)}$$

$$I(\varphi(t_0, x_0)) + t_0 \subset I(x_0)$$

∎

Bsp.1) $U = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$

Lsg. von (1) ist $x(t) = e^{At}x_0$

$\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

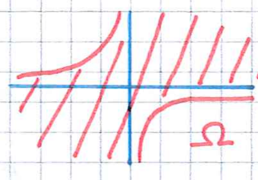
$\varphi(t,x_0) = e^{At}x_0$

Bsp.2) $U = \mathbb{R}$, d.h. $n=1$, $f(x) = -x^2$

Lsg. von (1): $x(t) = (t + x_0^{-1})^{-1}$

$\Omega := \{(t,x_0) \mid t > -(x_0)^{-1}$ falls $x_0 > 0$ / $t \in \mathbb{R}$ falls $x_0 = 0$ / $t < -(x_0)^{-1}$ falls $x_0 < 0\}$

$\varphi(t,x_0) = \dfrac{x_0}{1+tx_0}$

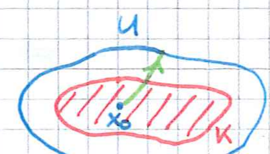


Lemma 2

$x_0 \in K \subset U$, K: kmpkt., $I(x_0) \cap [0,\infty) = [0,b)$, $b < \infty$,

$x: I(x_0) \to U$ Lsg. von (1), d.h. $x(t) = \varphi(t,x_0)$

$\Rightarrow \exists\, t > 0$ s.d. $x(t) \notin K$



Beweis: Die Funktion $K \to \mathbb{R}: x \mapsto \|f(x)\|$ ist stetig $\Rightarrow c := \sup_{x\in K} \|f(x)\| < \infty$

Annahme: $x(t) \in K \;\forall t \in [0,b)$

$$\Rightarrow \|x(t)-x(s)\| = \left\|\int_s^t \dot{x}(r)\,dr\right\| = \left\|\int_s^t f(x(r))\,dr\right\|$$

$$\leq \int_s^t \underbrace{\|f(x(r))\|}_{\leq c}\,dr \leq c\,(t-s), \quad \text{wobei } 0 \leq s < t < b$$

$\Rightarrow \forall\, t,s \in [0,b)$ gilt: $\|x(t)-x(s)\| \leq c\,|t-s|$

$\Rightarrow$ Für jede Folge $t_i \in [0,b)$ mit $b = \lim_{i\to\infty} t_i$ ist $(x(t_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge

$\Rightarrow x_1 := \lim_{t\to b} x(t) \in K$ existiert

Sei $y: (-\delta,\delta) \to U$ eine Lösung von $\dot{y}(t) = f(y(t))$, $y(0) = x_1$. Definiere $z: [0, b+\delta) \to U$ durch:

$$z(t) := \begin{cases} x(t), & \text{für } 0 \leq t < b \\ y(t-b), & \text{für } b \leq t < b+\delta \end{cases}$$

$$x(t) = z(t) = x_0 + \int_0^t f(z(s))\,ds \quad \text{für } 0 \leq t < b$$

$$\overset{t \to b}{\Longrightarrow} \quad z(b) = x_1 = x_0 + \int_0^b f(z(s))\,ds$$

$$\Rightarrow \text{Für } b < t < b+\delta: \quad x_0 + \int_0^t f(z(s))\,ds = x_0 + \int_0^b f(z(s))\,ds$$

$$+ \int_b^t f(z(s))\,ds$$

$$= x_1 + \int_b^t f(z(s))\,ds = x_1 + \int_0^{t-b} f(z(t+s))\,ds = \underbrace{x_1}_{y(0)} +$$

$$\int_0^{t-b} \underbrace{f(y(s))}_{\dot{y}(s)}\,ds = y(t-b) = z(t)$$

$$\Rightarrow z(t) = x_0 + \int_0^t f(z(s))\,ds \quad \forall t \in [0, b+\delta)$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = f(z(t)) \quad \forall t \in [0, b+\delta), \quad z(0) = x_0 \quad \Rightarrow \perp$$

■

SATZ 1

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipsch.-st., $\varphi: \Omega \to U$ Fluss von f

$\Rightarrow \Omega \subset \mathbb{R} \times U$ ist offen, $\varphi: \Omega \to U$ ist lokal Lipsch.-st.

Lemma 3 (Gronwall)

$I \subset \mathbb{R}$: Intervall, $0 \in I$, $g: I \to [0, \infty)$ stetig, $A, B \geq 0$,

$$g(t) \leq A + B \left| \int_0^t g(s)\,ds \right| \quad \forall t \in I \quad (2)$$

$$\Rightarrow g(t) \leq A e^{Bt} \quad \forall t \in I \quad (3)$$

Beweis (nur für $t \geq 0$): $G(t) := A + B \int_0^t g(s)\,ds, \quad t \in I \cap [0, \infty)$

$G: I \cap [0, \infty) \to [0, \infty)$

$\Rightarrow g(t) \leq G(t) \quad \forall t \in I \cap [0, \infty)$

G ist stetig diff'bar

$\dot{G}(t) = B g(t) \leq B G(t) \quad \forall t \in I \cap [0,\infty)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-Bt} G(t)\right) = e^{-Bt}\left(-BG(t) + \dot{G}(t)\right) \leq 0$

$\Rightarrow e^{-Bt} G(t) \leq G(0) = A \quad \forall t \in I \cap [0,\infty)$

$\Rightarrow G(t) \leq A e^{Bt} \quad \forall t \in I \cap [0,\infty)$

$\Rightarrow g(t) \leq A e^{Bt} \quad \forall t \in I \cap [0,\infty)$ ∎

Lemma 4

$K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, K: kmpkt, U: offen. Für $\varepsilon > 0$ definiere

$K_\varepsilon := \{ y \in \mathbb{R}^n \;\; \exists x \in K \text{ s.d. } \|x - y\| \leq \varepsilon \}$

$\Rightarrow$ i) $\forall \varepsilon > 0$ ist K_ε kmpkt.

ii) $\exists \varepsilon > 0$ s.d. $K_\varepsilon \subset U$

Beweis: i) K_ε ist beschränkt (Übg.)

K_ε ist abgeschlossen: Sei $y_i \in K_\varepsilon$ eine Folge $y_i \to y \in \mathbb{R}^n$ $\exists$ Folge $x_i \in K$ mit $\|x_i - y_i\| \leq \varepsilon$

O.B.d.A.: $x_i \to x \in K \Rightarrow \|x - y\| = \lim_{i \to \infty} \|x_i - y_i\| \leq \varepsilon \Rightarrow y \in K_\varepsilon$

ii) Annahme: $K_\varepsilon \not\subset U \;\; \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow K_{1/i} \not\subset U \;\; \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$ Folge $y_i \in K_{1/i}$ mit $y_i \notin U \Rightarrow \exists x_i \in K$ s.d. $\|x_i - y_i\| \leq 1/i$ o.B.d.A.:

$x_i \to x \in K \Rightarrow \lim_{i \to \infty} y_i = \lim_{i \to \infty} x_i = x \in K$

$\hookrightarrow y_i \in \mathbb{R}^n \setminus U$ abg.

$\Rightarrow x = \lim_{i \to \infty} y_i \in \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow x \in K, \; x \notin U$

$\Rightarrow K \not\subset U \Rightarrow \bot$ ∎

Beweis von Satz 1:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $\varphi: \Omega \to U$: Fluss von f, $\Omega \subset \mathbb{R} \times U$, φ: Lsg. von $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$

$\Rightarrow \Omega$ offen, φ lokal Lipsch.-st. (z.z.)

Schritt 1: $K \subset U$ kmpkt.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d. i) $K_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in K \text{ s.d. } \|x-y\| \leq \varepsilon\} \subset U$

ii) $\forall x \in K$ gilt: $[-\delta, \delta] \subset I(x)$ und $\varphi(t,x) \in K_\varepsilon \; \forall t \in [-\delta, \delta]$

Bew.: Wähle $\varepsilon > 0$ s.d. $K_\varepsilon \subset U$ (L4). $c := \sup_{y \in K_\varepsilon} \|f(y)\| < \infty$ (da K_ε gem. L4 kmpkt ist). Sei $\delta := \varepsilon / c$

Beh.: mit diesem δ gilt ii)

$\hookrightarrow$ Annahme: $\exists x_0 \in K$ mit $[0,\delta] \not\subset I(x_0)$

Dann ist $I(x_0) \cap [0, \infty) = [0, \rho)$ mit $\rho \leq \delta$

$\overset{L2}{\Rightarrow} \exists t_1 \in [0, \rho)$ s.d. $\varphi(t_1, x_0) \notin K_\varepsilon$

$T := \sup \{t \in [0, \rho) \mid \varphi(s, x_0) \in K_\varepsilon \; \forall s \in [0,t]\}$

$\Rightarrow 0 < T \leq t_1$; $\varphi(T, x_0) - x_0$ kann geschrieben werden als:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \varphi(t, x_0) \, dt = \int_0^T f(\overbrace{\varphi(t, x_0)}^{K_\varepsilon}) \, dt$$

$$\|\varphi(T, x_0) - x_0\| = \left\| \int_0^T f(\varphi(t, x_0)) \, dt \right\|$$

$$\leq \int_0^T \overbrace{\|f(\varphi(t, x_0))\|}^{\leq c} \, dt \leq Tc < \rho c \leq \delta c = \varepsilon$$

$\Rightarrow \varphi(t, x_0) \in K_\varepsilon$ für $t > T$ mit $t - T$ hinreichend klein $\Rightarrow \perp \Rightarrow [0, \delta] \subset I(x_0) \; \forall x_0 \in K$

Das gleiche Argument zeigt: $\varphi(t, x_0) \in K_\varepsilon \; \forall x_0 \in K \; \forall t \in [0, \delta]$.

Genauso: $\forall x_0 \in K$: $[-\delta, 0] \subset I(x_0)$ und $\varphi(t, x_0) \in K_\varepsilon \; \forall t \in [-\delta, 0] \Rightarrow$ Schritt 1 ✓.

Schritt 1 $\Rightarrow [-\delta, \delta] \times K \subset \Omega$

Schritt 2: K, ε, δ wie in Schritt 1 $\Rightarrow \varphi$ ist Lipsch.-stetig auf $[-\delta, \delta] \times K$

Bew.: $K_\varepsilon \subset U$ kmpkt., f lokal Lipsch.-st. $\Rightarrow \exists C > 0$

$\forall x, y \in K_\varepsilon : \| f(x) - f(y) \| \leq C \| x - y \|$

$c := \sup_{y \in K_\varepsilon} \| f(y) \|$. Sei $x_0, y_0 \in K$, $t \in [-\delta, \delta] \subset I(x_0) \cap I(y_0)$

$x(t) := \varphi(t, x_0)$, $y(t) := \varphi(t, y_0)$, $-\delta \leq t \leq \delta$

$\| x(t) - y(t) \| = \| x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds - y_0 - \int_0^t f(y(s)) ds \|$

$\leq \| x_0 - y_0 \| + \| \int_0^t (f(x(s)) - f(y(s))) ds \|$

$\leq \| x_0 - y_0 \| + | \int_0^t \underbrace{\| f(x(s)) - f(y(s)) \|}_{\leq C \| x(s) - y(s) \|} ds | \leq \| x_0 - y_0 \| +$

$C | \int_0^t \| x(s) - y(s) \| ds | \underset{\text{Gronwall}}{\overset{L3}{\Longrightarrow}} \| x(t) - y(t) \| \leq e^{C|t|}$.

$\| x_0 - y_0 \| \leq e^{C\delta} \| x_0 - y_0 \|$

$\Rightarrow \forall x_0, y_0 \in K \ \forall s, t \in [-\delta, \delta]$ gilt: $\| \varphi(s, x_0) - \varphi(t, y_0) \| = \| x(s) - y(t) \| \leq \| x(s) - x(t) \| + \| x(t) - y(t) \|$

$\leq c|s-t| + e^{C\delta} \| x_0 - y_0 \| \Rightarrow$ Schritt 2 ✓

Schritt 3: Ω ist offen und $\varphi : \Omega \to U$ ist lokal Lipsch.-stetig.

Bew.: Sei $(x_0, t_0) \in \Omega$ und $t_0 > 0$.

$\Gamma := \{ \varphi(t, x_0) \mid 0 \leq t \leq t_0 \} \subset U$, Γ ist kompakt.

Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $K := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \Gamma$ mit $\| x - y \| \leq \varepsilon \} \subset U$ und $V := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \Gamma$ s.d. $\| x - y \| < \varepsilon \}$ offen (K ist kmpkt.)

Nach Schritt 1: $\exists \delta > 0$ mit $[-\delta, \delta] \times K \subset \Omega$, d.h. $[-\delta, \delta] \subset I(y) \ \forall y \in K$.

Wähle $N \in \mathbb{N}$ s.d. $t_0 / N < \delta$, $t_0 / N := \tau$

$\Rightarrow \tau \in I(y) \ \forall y \in V \subset K$.

Definiere $\varphi_\tau : V \to U$ durch $\varphi_\tau(y) := \varphi(\tau, y)$ für $y \in V \Rightarrow$ Schritt 2: $\varphi_\tau : U \to V$ ist stetig.

Definiere offene Mengen $V =: V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_N \ni x_0$ wie folgt: $V_0 := V$; $V_1 := \varphi_\tau^{-1}(V_0) = \{ y \in V \mid \varphi_\tau(y) \in V \}$; $V_2 := \varphi_\tau^{-1}(V_1) = \{ y \in V \mid \varphi_\tau(y)$

$\in V$ und $\varphi_\delta(\varphi_\delta(y)) \in V$; $V_3 := \varphi_\delta^{-1}(V_2)$; usw...
bis: $V_N := \varphi_\delta^{-1}(V_{N-1}) = \{ y \in V \mid \varphi_\delta \circ \ldots \circ \varphi_\delta(y) \in V,$
φ_δ k-mal mit sich selbst verknüpft, $k = 1, \ldots, N \}$
$x_0 \in V_i \;\; \forall i = 0, \ldots, N.$

D.h. $V_k := \{ y \in V \mid \varphi(\frac{j t_0}{N}, y) \in V$ für $j = 1, \ldots, k \}$

$\hookrightarrow \varphi_\delta^k = \underbrace{\varphi_\delta \circ \ldots \circ \varphi_\delta(y)}_{k\text{-mal}} \underset{L1}{=} \varphi(k\delta, y)$

$\Rightarrow y \in V_N \Leftrightarrow \varphi(j\delta, y) \in V$ für $j = 1, 2, \ldots, N$

Sowieso: $x_0 \in V_N \subset V_{N-1} \subset \ldots \subset V_1 \subset V_0$

Für alle $x \in V_N$: $t_0 = N\delta \in I(x)$ und $\varphi(t_0, x) \in V$

$\Rightarrow [-\delta, \delta] \in I(\varphi(t_0, x)) \overset{L1}{=} I(x) - t_0$

$\Rightarrow [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I(x) \;\; \forall x \in V_N$

$\Rightarrow [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times V_N \subset \Omega$, $(t_0, x_0) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times V_N$

Es folgt: Ω ist offen

Nach Schritt 2 ist $\varphi|_{[-\delta,\delta] \times K}$ Lipschitz-stetig, d.h.

$\exists c > 0 \;\; \forall y, y' \in V \;\; \forall s, s' \in [-\delta, \delta]$: $\| \varphi(s,y) - \varphi(s',y') \|$
$\leq c|s - s'| + c\|y - y'\|$ (*)

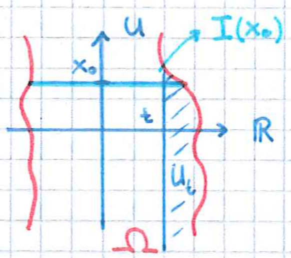
$\Rightarrow \forall x, x' \in V_N \;\; \forall t, t' \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ gilt: $\| \varphi(t,x) -$
$\varphi(t', x') \| = \| \varphi(t - t_0, \varphi_\delta^N(x)) - \varphi(t' - t_0, \varphi_\delta^N(x')) \|$
$\underset{(*)}{\leq} c|t - t'| + c \, \| \varphi_\delta^N(x) - \varphi_\delta^N(x') \| \overset{(*)}{\leq} c|t - t'| + c^2 \cdot$
$\| \varphi_\delta^{N-1}(x) - \varphi_\delta^{N-1}(x') \|$ ($\varphi_\delta^N(x) = \varphi_\delta(\underbrace{\varphi_\delta^{N-1}(x)}_{\in V})$)

$\overset{(*)}{\leq} c|t - t'| + c^{N+1} \|x - x'\|$, d.h. $\varphi|_{(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times V_N}$ ist
Lipschitz-stetig.

$\Rightarrow$ Schritt 3 ✓ $\Rightarrow$ Satz 1

■

Bem.:



$U_t := \{ x_0 \in U \mid t \in I(x_0) \}$ offen $\forall t \in \mathbb{R}$
nach Satz 1. Definiere $\varphi_t : U_t \to U$
durch $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$ für $x \in U_t$.

$\overset{L1}{\Rightarrow}$ • $\varphi_t(U_t) = U_{-t}$

• $\varphi_t : U_t \to U_{-t}$ ist ein Homöomorphismus : $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t} : U_{-t} \to U_t$ (Satz 1)

- $\varphi_0 = id$
- $\varphi_{t+s} = \varphi_s \circ \varphi_t$ auf $U_{t+s} \cap \{x \in U_t \mid \varphi_t(x) \in U_s\}$

Ziel: $f \in C^1 \Rightarrow \varphi \in C^1$

SATZ 2

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\nu \in \mathbb{N}$, $f: U \to \mathbb{R}^n$: C^ν-Vektorfeld, $\varphi: \Omega \to U$: Fluss von f.

$\Rightarrow$ φ ist eine C^ν-Abbildung.

Lemma 5

Sei φ stetig diff'bar. Sei $x_0 \in U$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $I := I(x_0)$. Definiere $x: I \to U$, $\xi: I \to \mathbb{R}^n$ durch $x(t) := \varphi_t(x_0)$, $\xi(t) := d\varphi_t(x_0)\xi_0$

$\Rightarrow$ $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $\dot{\xi}(t) = df(x(t))\xi(t)$, $x(0) = x_0$, $\xi(0) = \xi_0$

Beweis: Übung

Lemma 6

$I \subset \mathbb{R}$: offen, $0 \in I$, $A: I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig

$\Rightarrow$ Das Anfangswertproblem $\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t)$, $\xi(0) = \xi_0$ (1) besitzt $\forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\xi: I \to \mathbb{R}^n$ (stetig diff'bar)

Bem.: $\|x\| := \|x\|_2$; $\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Beweis (L6): $T \in I$, $T > 0$, $c := 2 \sup_{0 \le t \le T} \|A(t)\| < \infty$

$\xi \in \mathcal{X} := C([0,T], \mathbb{R}^n)$: Banachraum

$\|\xi\|_c := \sup_{0 \le t \le T} e^{-ct} \|\xi(t)\|$

$\mathcal{F}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{F}(\xi)(t) := \xi_0 + \int_0^t A(s)\xi(s)ds$

Beh.: $\forall \xi, \eta \in \mathcal{X} : \| \mathcal{F}(\xi) - \mathcal{F}(\eta) \|_c \leq \frac{1}{2} \| \xi - \eta \|_c$

Bew.: $\mathcal{F}(\xi)(t) - \mathcal{F}(\eta)(t) \rightarrow \| \mathcal{F}(\xi)(t) - \mathcal{F}(\eta)(t) \| =$

$$= \left\| \int_0^t A(s)(\xi(s) - \eta(s))\, ds \right\| \leq \int_0^t \|A(s)\| \cdot \|\xi(s) - \eta(s)\| \, ds = \int_0^t e^{cs} \underbrace{\|A(s)\|}_{\leq \frac{1}{2} \cdot c} \underbrace{e^{-cs} \|\xi(s) - \eta(s)\|}_{\leq \|\xi - \eta\|_c} ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^t c e^{cs} ds \, \|\xi - \eta\|_c = \frac{1}{2}(e^{ct} - 1) \|\xi - \eta\|_c$$

$$\leq \frac{1}{2} e^{ct} \|\xi - \eta\|_c$$

$$\Rightarrow e^{-ct} \| \mathcal{F}(\xi)(t) - \mathcal{F}(\eta)(t) \| \leq \frac{1}{2} \|\xi - \eta\|_c$$

$\forall t \in [0,T] \Rightarrow$ Beh. ✓

Beh. $\Rightarrow$ Banachscher Fixpunktsatz: $\exists! \, \xi \in \mathcal{X}$ mit $\mathcal{F}(\xi) = \xi \Rightarrow \xi$ ist C^1 und $\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t)$, $\xi(0) = \xi_0$, $0 \leq t \leq T$.

Für $T < 0$ genauso. ▨

Beweis von Satz 2: Induktion über k

$k = 1$: z.z.: $f \in C^1 \Rightarrow \varphi \in C^1$

↳ Sei $x_0 \in U$ und $t_0 \in I(x_0) =: I$. Definiere $x : I \to U$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ durch:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &:= \varphi(t, x_0) \in U \\ A(t) &:= df(\varphi(t, x_0)) \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned} \right\} (2)$$

$\rightarrow A$ ist stetig, da $f \in C^1$

Nach Lemma 6 existiert eine eind. Lösung (C^1): $\Phi : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ der DGL $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = \mathbb{1}$ (3)

Beh.: $d\varphi_t(x_0) = \Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \forall t \in I$

Sei $T \in I$, $T > 0$. Wir beweisen: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n \; \forall t \in [0,T] : \|\xi_0\| < \delta \Rightarrow x_0 + \xi \in U_t$ und $\|\varphi_t(x_0 + \xi_0) - \varphi_t(x_0) - \Phi(t)\xi_0\| \leq \varepsilon \|\xi_0\|$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$.

a) Wähle $r > 0$ s.d. $[0,T] \times \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\} \subset \Omega$

b) Nach Satz 1 gilt: $\exists c > 0$ s.d. $\| \varphi_t(x_0 + \xi_0) - \varphi_t(x_0)\|$
$\leq c \|\xi_0\| \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi_0\| \leq r$,
$\|df(x(t))\| \leq c \quad \forall t \in [0,T]$

c) Wähle $\varrho > 0$ s.d. $\forall h \in \mathbb{R}^n : \|h\| < \varrho,\ 0 \leq t \leq T$
$\Rightarrow \| df(x(t)+h) - df(x(t))\| \leq e^{-cT}\varepsilon$ & $x(t)+h \in U$
(K5 / S22)

d) Wähle $\delta > 0$ s.d. $\delta \leq r,\ c\delta \leq \varrho$

e) Für $t \in [0,t]$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| \leq \varrho$ definiere
$R(t,h) := f(x(t)+h) - f(x(t)) - df(x(t))h$

$$= \int_0^1 \big(df(x(t)+sh) - df(x(t))\big) h \, ds$$

$$\Rightarrow \|R(t,h)\| \leq \int_0^1 \underbrace{\|df(x(t)+sh) - df(x(t))\|}_{\leq e^{-cT}\varepsilon} \|h\| \, ds$$

$$\overset{(c)}{\leq} e^{-cT}\varepsilon \|h\| \quad (*)$$

Sei $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi_0\| < \delta$. Sei $\eta(t) := \varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0) - \Phi(t)\xi_0 \Rightarrow \dot\eta(t) = f(\varphi_t(x_0+\xi_0)) - f(\varphi_t(x_0))$
$- A(t)\Phi(t)\xi_0 = f(\varphi_t(x_0+\xi_0)) - f(\varphi_t(x_0)) - df(\varphi_t(x_0))$
$(\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)) + df(\varphi_t(x_0))\eta(t)$
$= R(t, \varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)) + df(x(t))\eta(t)$
$\Rightarrow \|\dot\eta(t)\| \leq \|R(t, \varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0))\| + c\|\eta(t)\| *$,
wobei gilt: $\|\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)\| \underset{(b)}{\leq} c\|\xi_0\| \leq c\delta \underset{(d)}{\leq} \varrho$

$$* \overset{(*)}{\leq} e^{-cT}\varepsilon \|\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)\| + c\|\eta(t)\|$$

$$\overset{(b)}{\leq} e^{-cT}\varepsilon c\|\xi_0\| + c\|\eta(t)\| \leq e^{-cT}\varepsilon c\|\xi_0\| + c\int_0^t \|\dot\eta(s)\| ds$$

$$\overset{L3}{\Rightarrow} \|\dot\eta(t)\| \leq e^{-cT}\varepsilon c\|\xi_0\| e^{ct}$$

$$\Rightarrow \|\eta(t)\| \leq \int_0^t \|\dot\eta(s)\| ds \leq e^{-cT}\varepsilon\|\xi_0\| \underbrace{\int_0^t c e^{cs} ds}_{e^{ct} - 1}$$

$$\leq \varepsilon \|\xi_0\| \quad \checkmark$$

Gezeigt ist: $\varphi_t : U_t \to \mathbb{R}^n$ ist an d. Stelle x_0 diff'bar und $d\varphi_t(x_0) = \Phi(t)$

Beh.: Die Abb. $\Omega \to \mathbb{R}^{n\times n} : (t,x) \mapsto d\varphi_t(x)$ ist stetig

Bew.: Sei $x_0 \in U$, $T \in I(x_0)$, $T > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $0 < \varepsilon \leq 1$

a) $\exists c > 0$ s.d. $\|A(t)\| + 1 \leq c$ & $\|\Phi(t)\| \leq c$ $\forall t \in [0,T]$

b) $\exists \varrho > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n \ \forall t \in [0,T] : \|y - \varphi_t(x_0)\| \leq \varrho$ $\Rightarrow y \in U$ und $\|df(y) - df(\varphi_t(x_0))\| \leq e^{-cT}\varepsilon$

c) $\exists \delta > 0 \ \forall y_0 \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - y_0\| < \delta \Rightarrow y_0 \in U$, $T \in I(y_0)$ und $\|\varphi_t(x_0) - \varphi_t(y_0)\| \leq \varrho \ \forall t \in [0,T]$

z.z.: $\|y_0 - x_0\| < \delta \Rightarrow \|d\varphi_t(x_0) - d\varphi_t(y_0)\| \leq \varepsilon \ \forall t \in [0,T]$

↳ Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0 - y_0\| < \delta$,

$B(t) := df(\varphi_t(y_0)) \quad (0 \leq t \leq T)$

$\dot{\Psi}(t) := B(t)\Psi(t)$, $\Psi(0) = \mathbb{1}$

$\|\varphi_t(x_0) - \varphi_t(y_0)\| \underset{(c)}{\leq} \varrho \ \forall t \in [0,T]$

$\overset{(b)}{\Rightarrow} \|A(t) - B(t)\| \leq e^{-cT}\varepsilon \Rightarrow \|B(t)\| \leq \|A(t)\| + 1$

$\overset{(a)}{\leq} c \Rightarrow \|\dot{\Psi}(t) - \dot{\Phi}(t)\| = \|B(t)\Psi(t) - A(t)\Phi(t)\|$

$\leq \|B(t)(\Psi(t) - \Phi(t))\| + \|(B(t) - A(t))\Phi(t)\|$

$\overset{(a)}{\leq} c\|\Psi(t) - \Phi(t)\| + ce^{-cT}\varepsilon$

$\leq ce^{-cT}\varepsilon + c\int_0^t \|\dot{\Psi}(s) - \dot{\Phi}(s)\|\,ds$

$\overset{L3}{\Rightarrow} \|\dot{\Psi}(t) - \dot{\Phi}(t)\| \leq e^{-cT}\varepsilon c e^{cT} \overset{\int_0^t}{\Rightarrow} \underbrace{\|\Psi(t) - \Phi(t)\|}_{= \|d\varphi_t(y_0) - d\varphi_t(x_0)\|}$

$\leq e^{-cT}\varepsilon(e^{ct} - 1) \leq \varepsilon$

$k \geq 2$: Annahme: Satz 2 sei für $k-1$ bewiesen

Sei $f \in C^k$. Definiere $\tilde{U} = U \times \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ durch $\tilde{f}(x,\xi) := (f(x), df(x)\xi)$, $\tilde{\Omega} = \{(t,x,\xi) \mid x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n, t \in I(x)\}$, $\tilde{\varphi} : \tilde{\Omega} \to \tilde{U}$ durch $\tilde{\varphi}(t,x_0,\xi_0) := (\underbrace{\varphi_t(x_0)}_{x(t)}, \underbrace{d\varphi_t(x_0)\xi_0}_{\xi(t)})$

stetig und Fluss von $\tilde{f}$

↳ $\dot{x} = f(x)$, $\dot{\xi} = df(x)\xi$, $x(0) = x_0$, $\xi(0) = \xi_0$

$\tilde{f} \in C^{k-1} \Rightarrow \tilde{\varphi} \in C^{k-1} \Rightarrow \varphi \in C^k$ (Salopp) ▨

Bsp. 3) $f: \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A,B) := (0, AB)$

$\hookrightarrow \dot{A} = 0$, $\dot{B} = AB$

$\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $\varphi(t, A, B) = (A, e^{At} B)$

f ist $C^\infty \overset{S2}{\Rightarrow} \varphi$ ist C^∞

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{R}^{n\times n} &\to \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \\ A &\mapsto \varphi(1, A, \mathbb{1}) = (A, e^A) \end{aligned}\right\} C^\infty$$

Korollar: $\exp: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist C^∞

Bew.: Bsp. 3)

Kapitel 13: Mehrfache Integrale

Ziel: Definition des Riemannschen Integrals

$$\int_B f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

für $B \subset \mathbb{R}^n$, $f: B \to \mathbb{R}$ (unter gew. Vorauss.)

Fall $n = 1$: $B \subset \mathbb{R}$ Intervall $\to$ Kapitel 7!

Topologische Begriffe

(X, d): metr. Rm, $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$ mit $x_0 \in X$ & $\varepsilon > 0$.

Sei nun $A \subset X$.

- Der Abschluss von A ist die Menge $\overline{A} := \{x \in X \mid B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0\}$
- Das Innere von A ist die Menge $\mathring{A} := \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ s.d. } B_\varepsilon(x) \subset A\}$
- Der Rand von A ist die Menge $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ und } B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$

Bsp.) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

↳ $A := [a,b) \subset \mathbb{R}$; $\overline{A} = [a,b]$, $\mathring{A} = (a,b)$, $\partial A = \{a,b\}$

↳ $A := \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\overline{A} = \mathbb{R}$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\partial A = \mathbb{R}$

Eigenschaften:

1. $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$
2. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists x_\nu \in A$ Folge s.d. $x = \lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu$
3. $\overline{A} = A \cup \partial A$, $\mathring{A} = A \setminus \partial A$
4. $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$
5. $\overline{A}$ ist abgeschlossen und $B \subset X$ abg.: $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset B$, d.h. $\overline{A}$ ist die kleinste abg. Teilmenge von X, die A enthält, d.h.:
$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{B \subset X \text{ abg.} \\ A \subset B}} B$$
6. $\mathring{A}$ ist offen und $U \subset X$ offen: $U \subset A \Rightarrow U \subset \mathring{A}$, d.h. $\mathring{A}$ ist die grösste offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist, d.h.
$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subset X \text{ offen} \\ U \subset A}} U$$
7. $A \subset X$ abg. $\Leftrightarrow A = A \Leftrightarrow \partial A \subset A$
8. $A \subset X$ offen $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$

Übg. 1) Diese Aussagen beweisen

Übg. 2) Finden Sie ein Bsp. eines metr. Rmes (X,d), $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ s.d. $\overline{B}_\varepsilon(x_0) := \{x \in X \mid d(x,x_0) \leq \varepsilon\} \supsetneq \overline{B_\varepsilon(x_0)}$

Partitionen

- Seien $a,b \in \mathbb{R}^n$, $(a_1,\dots,a_n) = a$, $b = (b_1,\dots,b_n)$ mit $a_i < b_i$ für $i = 1,\dots,n$. Die Menge $Q(a,b) := \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i$ für $i = 1,\dots,n\} = (a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \dots \times (a_n,b_n)$

heisst (achsenparalleler) offener Quader. Das n-dim. Volumen von $Q(a,b)$ ist die Zahl:

$$\mathrm{Vol}_n(Q(a,b)) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

<u>Bem.:</u> Diese Menge $Q(a,b)$ ist offen und $\overline{Q(a,b)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, n\} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ heisst abg. Quader.

Jener hat das Volumen $\mathrm{Vol}_n(\overline{Q(a,b)}) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Allgemeiner definieren wir: $\mathrm{Vol}_n(B) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ für $Q(a,b) \subset B \subset \overline{Q(a,b)}$

- Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt. Eine Partition von B ist eine endliche Menge $P := \{P_1, \dots, P_k\}$ von achsenparallelen offenen Quadern $P_i \subset \mathbb{R}^n$ s.d.:

  i) $B = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$

  ii) $P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$

Wir definieren: $\mathcal{P}(B) := \{$ Menge aller Partitionen von $B\}$

<u>Bem.:</u>
- Nicht jede Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine Partition
- Wenn $\mathcal{P}(B) \neq \emptyset \Rightarrow B$ kmpkt.
- $B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Für $n \geq 2$ gilt: $\mathcal{P}(B) = \emptyset$

<u>Def.:</u> $B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt., $\mathcal{P}(B) \neq \emptyset$, $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Sei $P = \{P_1, \dots, P_k) \in \mathcal{P}(B)$

- Die Obersumme von (f,P) ist die Zahl $\overline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{k} \sup_{P_i} f \cdot \mathrm{Vol}_n(P_i)$

- Die Untersumme von (f,P) ist die Zahl $\underline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{k} \inf_{P_i} f \cdot \mathrm{Vol}_n(P_i)$

Def.: f heisst Riemann-integrierbar, wenn:

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(B)} \underline{S}(f,P) = \inf_{Q \in \mathcal{P}(B)} \overline{S}(f,Q)$$

In diesem Fall ist das Integral von f über B die Zahl

$$\int_B f(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \sup_{P \in \mathcal{P}(B)} \underline{S}(f,P) = \inf_{Q \in \mathcal{P}(B)} \overline{S}(f,Q)$$

SATZ 1

$\forall\, P, Q \in \mathcal{P}(B): \quad \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$

Lemma 1

$B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt., $P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$, $Q = \{Q_1, \ldots, Q_l\} \in \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow$ i) $P \wedge Q := \{P_i \cap Q_j \mid i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l;\ P_i \cap Q_j \neq \emptyset\}$
$\in \mathcal{P}(B)$

ii) $\{P_i \cap Q_j \mid i = 1, \ldots, k;\ P_i \cap Q_j \neq \emptyset\} \in \mathcal{P}(\overline{Q_j})$

iii) $\{P_i \cap Q_j \mid j = 1, \ldots, l;\ P_i \cap Q_j \neq \emptyset\} \in \mathcal{P}(\overline{P_i})$

Beweis: Beh.: $x \in \overline{P_i} \Rightarrow \exists j$ s.d. $x \in \overline{P_i \cap Q_j}$

Bew.: Sei $x \in \overline{P_i} \subset B \Rightarrow \exists$ Folge $x_\nu \in P_i$ mit $x = \lim_{\nu \to \infty} x_\nu$ und $x_\nu \in B = \overline{Q_1} \cup \ldots \cup \overline{Q_l}$

$\Rightarrow \exists j$ s.d. $\#\{\nu \in \mathbb{N} \mid x_\nu \in \overline{Q_j}\} = \infty$

O.B.d.A.: $x_\nu \in \overline{Q_j} \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ (Teilfolge)

Wähle $\varepsilon_\nu > 0$ s.d. $B_{\varepsilon_\nu}(x_\nu) \subset P_i$. Wähle $y_\nu \in B_{\varepsilon_\nu}(x_\nu) \cap Q_j \cap B_{1/\nu}(x_\nu)$

$\Rightarrow \|x_\nu - y_\nu\| < 1/\nu \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \cdot\ y_\nu = \underbrace{x_\nu}_{\to x} + \underbrace{y_\nu - x_\nu}_{\to 0} \longrightarrow x$

$\cdot\ y_\nu \in P_i \cap Q_j$ ✓

Beh. $\Rightarrow \overline{P_i} = \bigcup_{j=1}^{l} \overline{P_i \cap Q_j}$, $\overline{Q_j} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{P_i \cap Q_j}$

$\Rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{P_i} = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{l} \overline{P_i \cap Q_j}$ ▨

Lemma 2

$Q = Q(a,b)$: achsenparalleler offener Quader, $B := \overline{Q}$, $P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}_n(Q) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i)$$

Beweis von Satz 1 via L1 & L2:

$P = \{P_1, \ldots, P_k\}$, $Q = \{Q_1, \ldots, Q_l\}$

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{k} (\inf_{P_i} f)\, \mathrm{Vol}_n(P_i) \overset{L1\&2}{=} \sum_{i=1}^{k} (\inf_{P_i} f) \sum_{j=1}^{l} \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j)$$

$$\leq \sum \sum (\inf_{P_i \cap Q_j} f)\, \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) = \underline{S}(f, P \wedge Q)$$

$$\leq \overline{S}(f, P \wedge Q) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} (\sup_{P_i \cap Q_j} f)\, \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{l} (\sup_{Q_j} f) \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j)}_{\mathrm{Vol}_n(Q_j)} = \overline{S}(f,Q)$$

$\blacksquare$

Beweis von Lemma 2: Trick von Neumann: Zählen von Pkten

auf Komb. Weise: (Sehr dünnes Gitter) $\Lambda_\varepsilon := \varepsilon \mathbb{Z}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i / \varepsilon \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, n\}$

Fakt: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$: $b - a - \varepsilon \leq \varepsilon \cdot \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap (a,b))$

$\leq \varepsilon \cdot \#(\varepsilon \mathbb{Z} \cap [a,b]) \leq b - a + \varepsilon$ (*)

$Q = Q(a,b) = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$

$\overline{Q} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} b_i - a_i - \varepsilon \leq \varepsilon \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap (a_i, b_i)) \leq \varepsilon \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap [a_i, b_i])$

$\leq b_i - a_i + \varepsilon$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - \varepsilon) \leq \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q) \leq \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap \overline{Q})$$

$$\leq \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + \varepsilon)$$

$\overset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Vol}_n(Q) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap \overline{Q})$

Es gilt: $\varepsilon^n \sum_i \#(\Lambda_\varepsilon \cap P_i) \leq \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q) \leq \varepsilon^n \sum_i \#(\Lambda_\varepsilon \cap \overline{P_i})$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\sum_i \mathrm{Vol}_n(P_i) \leq \mathrm{Vol}_n(Q) \leq \sum_i \mathrm{Vol}_n(P_i)$$

■

Korollar 1

$\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt., $\mathcal{P}(B) \neq \emptyset$. $a \in \mathbb{R}$. Sei $f: B \to \mathbb{R}$ die Konstante Funktion $f(x) = a \;\; \forall x \in B$.

$\Rightarrow$ f ist Riemann int'bar und für jede Partition $P = \{P_i\}_{i=1}^k \in \mathcal{P}(B)$ gilt: $\int_B a\, dx_1 \dots dx_n = a \sum_i \mathrm{Vol}_n(P_i)$

Bew.: $\sup_{x\in \overline{P_i}} f(x) = a = \inf_{x\in\overline{P_i}} f(x)$

$\Rightarrow$ $\underline{S}(f,P) = \sum_i a \mathrm{Vol}_n(P_i) = \overline{S}(f,P)$ $(*)$

$\Rightarrow$ $\forall P, Q \in \mathcal{P}(B)$: $\overline{S}(f,P) \overset{(*)}{=} \underline{S}(f,P)$
$\overset{(S1)}{\leq} \overline{S}(f,Q)$
$= \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$

$\Rightarrow$ $\overline{S}(f,P) = \underline{S}(f,P) = \overline{S}(f,Q) = \underline{S}(f,Q)$

■

Def.: Das Volumen von $B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt, $B \neq \emptyset$, ist die Zahl:

$$\mathrm{Vol}_n(B) := \sum_i \mathrm{Vol}_n(P_i) = \int_B 1 \cdot dx_1 \dots dx_n$$

für $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$

Beachte: $\sum_i \mathrm{Vol}_n(P_i)$ ist unabhängig von P!

Korollar 2 →

Korollar 2

$\forall P, Q \in \mathcal{P}(B)$ $\forall$ beschr. Fkten $f: B \to \mathbb{R}$ gilt:

$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f, P \wedge Q) \leq \overline{S}(f, P \wedge Q) \leq \overline{S}(f, Q)$

Bew.: s. Bew. von Satz 1

Korollar 3

$f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Äquivalent sind:

i) f ist Riemann-int'bar

ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P \in \mathcal{P}(B)$ s.d. $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

Bew.: i) $\Rightarrow$ ii): Sei $\varepsilon > 0$.

$$c := \int_B f(x)\, dx_1 \dots dx_n = \sup_{P \in \mathcal{P}(B)} \underline{S}(f,P) = \inf_{Q \in \mathcal{P}(B)} \overline{S}(f,Q)$$

$$\Rightarrow \exists P \in \mathcal{P}(B) \text{ s.d. } \underline{S}(f,P) > c - \varepsilon/2$$

$$\exists Q \in \mathcal{P}(B) \text{ s.d. } \overline{S}(f,Q) < c + \varepsilon/2$$

$$\overset{K2}{\Rightarrow} \overline{S}(f, P \wedge Q) - \underline{S}(f, P \wedge Q)$$

$$\leq \overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,P)$$

$$< (c + \varepsilon/2) - (c - \varepsilon/2) = \varepsilon \quad \checkmark$$

ii) $\Rightarrow$ i): Für $\varepsilon > 0$ sei $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(B)$ s.d. $\overline{S}(f,P_\varepsilon) - \underline{S}(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$

$$\Rightarrow \inf_{Q \in \mathcal{P}(B)} \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f, P_\varepsilon)$$

$$< \underline{S}(f, P_\varepsilon) + \varepsilon$$

$$\leq \sup \underline{S}(f,P) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \inf \overline{S}(f,Q) \leq \sup \underline{S}(f,P)$$

$\Rightarrow$ "$\geq$" nach Satz 1 $\Rightarrow$ "$=$" $\Rightarrow$ i) $\checkmark$

$\blacksquare$

Def.: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst (Jordansche) Nullmenge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Quader $W_1, \dots, W_N \subset \mathbb{R}^n$ existieren s.d.:

$$A \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} W_\nu \,, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \varepsilon$$

Eigenschaften der Nullmengen

i) A Nullmenge $\Rightarrow$ A beschränkt

ii) $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$: Nullmengen $\Rightarrow$ $A = \bigcup_i A_i$ Nullmenge

iii) A Nullmenge $\Rightarrow$ $\overline{A}$ Nullmenge

Bew.: Wähle offene Quader $W_1, \dots, W_N \subset \mathbb{R}^n$ s.d.:

$$A = \bigcup_{\nu=1}^{N} W_\nu \,, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \varepsilon/2$$

Wähle offene Quader $W_1', \dots, W_N'$ s.d. $\forall \nu$:

$\overline{W_\nu} \subset W_\nu'$, $\mathrm{Vol}_n(W_\nu') \leq 2\,\mathrm{Vol}_n(W_\nu)$

$$\Rightarrow \overline{A} \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} \overline{W_\nu} \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} W_\nu'$$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}_n(W_\nu') \leq 2 \sum \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Bsp. 1) $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ beschr. $\Rightarrow$ $A := K \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge

Bew.: Wähle $R > 0$ s.d. $K \subset (-R, R)^{n-1}$. Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta > 0$ s.d. $2^n R^{n-1} \delta < \varepsilon$

$\Rightarrow A \subset W = (-R, R)^{n-1} \times (-\delta, \delta)$

$\mathrm{Vol}_n(W) = (2R)^{n-1} 2\delta < \varepsilon$ ✓

Bsp. 2) $Q \subset \mathbb{R}^n$ offener Quader $\Rightarrow$ ∂Q ist eine Nullmenge

Bsp. 3) $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ keine Nullmenge

$A = [0,1]$ keine Nullmenge

Bsp. 4) $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ U keine Nullmenge (Übg.)

Bsp. 5) $K \subset \mathbb{R}$: Kantormenge $\Rightarrow$ K ist eine Nullmenge

Def.: $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$, $P_i = (a_{i1}, b_{i1}) \times \dots \times (a_{in}, b_{in})$

$\delta(P_i) := \max\limits_{j=1,\dots,n} (b_{ij} - a_{ij})$: max. Seitenlänge

$\delta(P) := \max\limits_{i=1,\dots,k} \delta(P_i)$: "Feinheit von P"

Übg.) $\forall \delta_0 > 0 \; \exists P \in \mathcal{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$

Lemma 3

$B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\mathcal{P}(B) \neq \emptyset$, $A \subset B$, A: Nullmenge.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_0 > 0 \; \forall P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B) : \delta(P) < \delta_0 \Rightarrow$

$$\sum_{\overline{P_i} \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) < \varepsilon$$

Beweis: $\overline{A}$: Jordansche Nullmenge, kmpkt.
Wähle offene Quader $W_1, \dots, W_N \subset \mathbb{R}^n$ s.d.

$$\overline{A} = \bigcup_{\nu=1}^{N} W_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \varepsilon$$

Beh. 1: $\exists \varrho > 0 \; \forall a \in \overline{A} \; \exists \nu \in \{1, \dots, N\}$ s.d. $B_\varrho(a) \subset W_\nu$

Bew. 1: Annahme: dies gilt nicht. $\Rightarrow \forall \varrho > 0 \; \exists a \in \overline{A}$
$\forall \nu \in \{1, \dots, N\} : B_\varrho(a) \not\subset W_\nu$
$\Rightarrow \varrho = 1/k : \forall k \in \mathbb{N} \; \exists a \in \overline{A} \; \forall \nu \in \{1, \dots, N\} :$
$B_{1/k}(a) \not\subset W_\nu$
AAA
$\Rightarrow \exists$ Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\overline{A}$ s.d. $\forall \nu \in \{1, \dots, N\}$
$\forall k \in \mathbb{N} : B_{1/k}(a_k) \not\subset W_\nu$
$\Rightarrow \overline{A}$ kmpkt. : $\exists$ konv. TF $(a_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ mit
$a_{k_i} \xrightarrow{i \to \infty} a \in \overline{A}$
Wähle $\nu \in \{1, \dots, N\}$ s.d. $a \in W_\nu$. Wähle $\delta > 0$
s.d. $B_\delta(a) \subset W_\nu$. Wähle $i_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall i \in \mathbb{N}$
mit $i \geq i_0$ gilt: $\|a_{k_i} - a\|_2 < \delta/2$, $1/k_i < \delta/2$
$\Rightarrow \forall i \geq i_0 : B_{1/k_i}(a_{k_i}) \subset B_{\delta/2}(a_{k_i}) \subset B_\delta(a) \subset W_\nu$ $\perp$

Beh. 2: δ wie in Beh. 1. $\delta_0 := \varrho / \sqrt{n}$. Sei $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$.
$\overline{P_j} \cap \overline{A} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \nu \in \{1, \dots, N\} : \overline{P_j} \subset W_\nu$

Bew. 2: Sei $a \in \overline{A} \cap \overline{P_j}$. Nach Beh. 1 $\exists \nu \in \{1, \dots, N\}$ s.d. $B_\varrho(a) \subset W_\nu$

$$x \in \overline{P_j} \Rightarrow \|x - a\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2} \leq$$

$$\sqrt{n\, \delta(P_j)^2} < \sqrt{n\, \delta_0^2} = \sqrt{n}\, \delta_0 = \varrho$$

$$\Rightarrow x \in B_\varrho(a) \subset W_\nu \quad ✓$$

Beh. 3: Lemma 3 gilt mit diesem δ_0

Bew. 3: Sei $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$

$J_A := \{ j \in \{1, \dots, k\} \mid \overline{P_j} \cap \overline{A} \neq \emptyset \}$

$J_\nu := \{ j \in \{1, \dots, k\} \mid \overline{P_j} \subset W_\nu \}$

Nach Beh. 2 gilt:

$$J_A \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} J_\nu \Rightarrow \sum_{j \in J_A} \mathrm{Vol}_n(P_j) \leq \sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{\sum_{j \in J_\nu} \mathrm{Vol}_n(P_j)}_{\overset{L2}{\leq} \mathrm{Vol}_n(W_\nu)}$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \varepsilon$$

▨

SATZ 2

$A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq B$: kmpkt., $\mathcal{P}(B) \neq \emptyset$, A: J.-Nullmenge, $f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt.

i) $f\big|_{B \setminus A} = 0 \Rightarrow f$ ist Riemann-int'bar und $\int_B f(x)\,dx_1 \dots dx_n = 0$

ii) $f\big|_{B \setminus A}$ stetig $\Rightarrow f$ ist Riemann-int'bar

Beweis: Wähle $M > 0$ s.d. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in B$ (1). Sei $\varepsilon > 0$
$\Rightarrow$ Nach L3 $\exists P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$ s.d.

$$\sum_{\overline{P_i} \cap \overline{A} \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) < \varepsilon/4M \quad (2)$$

<u>1. Fall:</u> $\tilde{f}(x) = \tilde{0} \quad \forall x \in \bar{B} \setminus A$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,P) = \sum_{\overline{P_i} \cap A \neq \emptyset} \sup_{\overline{P_i}} f \, \mathrm{Vol}_n(P_i) \overset{(1)}{\leq} M \sum_{\overline{P_i} \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i)$$

$$\overset{(2)}{<} \varepsilon/4$$

Genauso: $\underline{S}(f,P) > -\varepsilon/2 \Rightarrow i)$

<u>2. Fall:</u> $f|_{B \setminus A}$ stetig, $\|.\| := \|.\|_2$, $K := \bigcup_{P_i \cap A = \emptyset} P_i$ kmpkt.

$f|_K$ stetig $\Rightarrow f$ glm. stetig (K5/S22)

$$V := \sum_i \mathrm{Vol}_n(P_i) = \mathrm{Vol}_n(B)$$

$\Rightarrow \exists \, \delta_0 > 0 \; \forall x,y \in K : \|x-y\| < \sqrt{n}\,\delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2V$

Wähle $Q = \{Q_1, \dots, Q_\nu\} \in \mathcal{P}(B)$ mit $\delta(Q) < \delta_0$

$\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, \nu\} \; \forall x,y \in \overline{Q_j} : \|x-y\| \leq \sqrt{n}\,\delta(Q)$
$< \sqrt{n}\,\delta_0$

$\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, \nu\} \; \forall x,y \in \overline{Q_j} \cap K$ gilt $|f(x) - f(y)|$
$\leq \varepsilon/2V$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\}$ mit $\overline{P_i} \cap A = \emptyset \; \forall j \in \{1, \dots, \nu\}$:

$$\sup_{\overline{P_i \cap Q_j}} f - \inf_{\overline{P_i \cap Q_j}} f \leq \varepsilon/2V$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f, P \wedge Q) - \underline{S}(f, P \wedge Q) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\nu} \overbrace{\left(\sup_{P_i \cap Q_j} f - \inf_{P_i \cap Q_j} f\right)}^{< \varepsilon/2V} \cdot$$

$$\mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \leq \varepsilon/2V \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i)}_{= V} + 2M \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i)}_{< \varepsilon/4M}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

▨

<u>SATZ 3</u>

$B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt., $\mathcal{P}(B) \neq \emptyset$, $f: B \to \mathbb{R}$ beschr., $c \in \mathbb{R}$. Äquivalent sind:

i) f ist Riemann-int'bar und $c = \int_B f(x)\,dx_1 \dots dx_n$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists P \in \mathcal{P}(B)$ s.d. $c - \varepsilon < \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) < c + \varepsilon$

iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}(B): \ \delta(P) < \delta_0 \Rightarrow c - \varepsilon < \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) < c + \varepsilon$

iv) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 \ \forall P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B) \ \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n, x_i \in \overline{P_i}:$

$$\delta(P) < \delta_0 \Rightarrow |c - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \operatorname{Vol}_n(P_i)}_{\text{Riemannsche Summen}}| < \varepsilon$$

<u>Lemma 4</u>

$B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt, $\mathcal{P}(B) \neq \emptyset$, sei $f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt, $Q \in \mathcal{P}(B)$, $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \exists \delta_0 > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$: $\underline{S}(f,P) > \underline{S}(f,Q) - \varepsilon$ und $\overline{S}(f,P) < \overline{S}(f,Q) + \varepsilon$

<u>Lemma 4 $\Rightarrow$ Satz 3</u> :

<u>iii) $\Rightarrow$ iv):</u> $\forall x_i \in P_i, \ i = 1, \dots, k,$: $\inf_{\overline{P_i}} f \leq f(x_i) \leq \sup_{\overline{P_i}} f$

$$\Rightarrow \underline{S}(f,P) \leq \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \operatorname{Vol}_n(P_i) \leq \overline{S}(f,P)$$

<u>iv) $\Rightarrow$ iii):</u> Sei $\delta_0 > 0$ wie in iv). Sei $P \in \mathcal{P}(B)$, $P = \{P_1, \dots, P_k\}$, mit $\delta(P) < \delta_0$.

$$\overline{S}(f,P) = \sup_{x_i \in \overline{P_i}} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \operatorname{Vol}_n(P_i)}_{< c + \varepsilon} \leq c + \varepsilon$$

$$\underline{S}(f,P) = \inf_{x_i \in \overline{P_i}} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \operatorname{Vol}_n(P_i)}_{> c - \varepsilon} \geq c - \varepsilon$$

<u>i) $\Rightarrow$ iii):</u> $f: B \to \mathbb{R}$ Riemann int'bar, $c := \int_B f(x) \, dx_1 \dots dx_n$

$\overset{K3}{\Rightarrow} \exists Q \in \mathcal{P}(B)$ s.d. $\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < \varepsilon/2$, $\underline{S}(f,Q) \leq c \leq \overline{S}(f,Q) \Rightarrow \overline{S}(f,Q) < c + \varepsilon/2$, $\underline{S}(f,Q) > c - \varepsilon/2$

Wähle $\delta_0 > 0$ wie in Lemma 4 mit $\varepsilon/2$ statt ε.

Sei $P \in \mathcal{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0 \Rightarrow \underline{S}(f,P) > \underline{S}(f,Q) - \varepsilon/2 > c - \varepsilon$

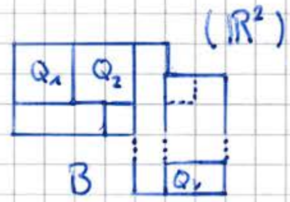
$$\overline{S}(f,P) < \overline{S}(f,Q) + \varepsilon/2 < c + \varepsilon$$

<u>iii) => ii) :</u> Existenz von $P \in \mathcal{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$ (Übg.)

<u>ii) => i) :</u> per definitionem ■

<u>Beweis von Lemma 4</u> :

Gegeben sind: $Q = \{Q_1, \dots, Q_\nu\} \in \mathcal{P}(B)$, $f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt, $\varepsilon > 0$. $M := \sup_{x \in B} |f(x)| < \infty$



Nach Lemma 3 existiert ein $\delta_0 > 0$ s.d. $\forall\ P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$ gilt:

$$\delta(P) < \delta_0 \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{P_i} \cap A \neq \emptyset}}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i) < \varepsilon/2M$$

↳ $A := \bigcup_{j=1}^{\nu} \partial Q_j$ (J.NM)

Sei $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0 \Rightarrow \underline{S}(f,Q) \overset{K2}{\leq} \underline{S}(f, P \wedge Q) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\nu} \inf_{P_i \cap Q_j} f \, \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{P_i} \cap A = \emptyset}}^{k} \inf_{P_i} f \, \mathrm{Vol}_n(P_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{P_i} \cap A \neq \emptyset}}^{k} \sum_{j=1}^{\nu} \underbrace{\inf_{P_i \cap Q_j} f}_{\leq M} \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \leq \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{P_i} \cap A = \emptyset}}^{k} \inf_{P_i} f \cdot \mathrm{Vol}_n(P_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{P_i} \cap A \neq \emptyset}}^{k} M \underbrace{\sum_{j=1}^{\nu} \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j)}_{\overset{L2}{=} \mathrm{Vol}_n(P_i)}$

$= \underline{S}(f,P) - \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{P_i} \cap A = \emptyset}}^{k} \inf f \, \mathrm{Vol}_n(P_i) + M \sum_{\substack{i=1 \\ \overline{P_i} \cap A \neq \emptyset}}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i) \leq \underline{S}(f,P) + 2M \cdot \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ \overline{P_i} \cap A \neq \emptyset}}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i)}_{< \varepsilon/2M} < \underline{S}(f,P) + \varepsilon$

Für Obersummen verwende man das analoge Argument. ■

Notation: $B \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}(B) \neq \emptyset$, $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(B)$

- $\mathrm{Vol}_n(B) := \int_B 1 \, dx_1 \dots dx_n = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i)$
- $\mathcal{R}(B) := \{ f : B \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Riemann-int'bar} \}$
- $\|f\| := \sup_{x \in B} |f(x)| \in [0, \infty)$
- Abkürzung: $\int_B f := \int_B f(x) \, dx_1 \dots dx_n$

SATZ 4

$i)$ $\mathcal{R}(B)$ ist ein Vektorraum und die Abbildung $\mathcal{R}(B) \to \mathbb{R}$:

$f \mapsto \int_B f$ ist linear.

$ii)$ $f, g \in \mathcal{R}(B) \Rightarrow fg, |f|, \max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \mathcal{R}(B)$

$iii)$ $\forall f, g \in \mathcal{R}(B)$ mit $f \leq g \Rightarrow \int_B f \leq \int_B g$

$iv)$ $\forall f \in \mathcal{R}(B)$: $\left| \int_B f \right| \leq \int_B |f| \leq \|f\| \cdot \mathrm{Vol}_n(B)$

$v)$ $(\mathcal{R}(B), \|.\|)$ ist ein Banachraum

(D.h.: $f_\nu \in \mathcal{R}(B)$, $\nu \in \mathbb{N}$. $f_\nu \xrightarrow{\text{glm.}} f : B \to \mathbb{R} \Rightarrow f \in \mathcal{R}(B)$,

$\int_B f = \lim_{\nu \to \infty} \int f_\nu$)

Beweis: $i)$: $f, g \in \mathcal{R}(B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$a := \int_B f$, $b := \int_B g \overset{S3}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}(B)$:

$a - \varepsilon/2 < \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) < a + \varepsilon/2$

$b - \varepsilon/2 < \underline{S}(g,P) \leq \overline{S}(g,P) < b + \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}(B)$: $a + b - \varepsilon < \underline{S}(f,P) + \underline{S}(g,P) \leq$

$\underline{S}(f+g, P) \leq \overline{S}(f+g, P) \leq \overline{S}(f,P) + \overline{S}(g,P) < a + b + \varepsilon$

$\overset{S3}{\Rightarrow} f + g \in \mathcal{R}(B)$ und $\int_B (f+g) = a + b$

$\hookrightarrow$ bzgl. λ: einfach, verwende S3/ii) $\Rightarrow$ ✓.

ii): Für fg: $\overline{S}(fg,P) - \underline{S}(fg,P) \leq \|f\| (\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P)) + \|g\| (\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P))$

$$\hookrightarrow \sup_{x \in \overline{P_i}} f(x)g(x) - \inf_{y \in \overline{P_i}} f(y)g(y) \; ; \; f(x)g(x) - f(y)g(y) =$$

$$= f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)$$

$$\leq \|f\| \left(\sup_{\overline{P_i}} g - \inf_{\overline{P_i}} g \right) + \|g\| \left(\sup_{\overline{P_i}} f - \inf_{\overline{P_i}} f \right)$$

Für $|f|$: $\overline{S}(|f|,P) - \underline{S}(|f|,P) \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)$

$$\left.\begin{aligned} &\hookrightarrow \max\{f,g\} = \tfrac{1}{2}(f + g + |f-g|) \\ &\hookrightarrow \min\{f,g\} = \tfrac{1}{2}(f - g - |f-g|) \end{aligned}\right\} \overset{i)}{\Rightarrow} \underline{\checkmark}$$

iii): $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in B$

$$\Rightarrow \sup_{\overline{P_i}} f \leq \sup_{\overline{P_i}} g \Rightarrow \underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(g,P) \;\; \forall P \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Rightarrow \int_B f \leq \int_B g \quad \Rightarrow \underline{\checkmark}$$

iv): $-|f| \leq f \leq |f|$

$$\overset{iii)}{\Rightarrow} -\int_B |f| \leq \int_B f \leq \int_B |f| \Rightarrow \left| \int_B f \right| \leq \int_B |f|$$

$$\hookrightarrow \int_B |f| \leq \int_B \underbrace{\|f\|}_{\text{konst. Fkt.}} \overset{K1}{=} \|f\| \operatorname{Vol}_n(B)$$

v): f_ν: Cauchy-Folge in $(\mathcal{R}(B), \|.\|)$

$\Rightarrow |f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)| \leq \|f_\nu - f_{\nu'}\|$, d.h. $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge $\forall x \in B$

$\Rightarrow (f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ Konvergiert für jedes $x \in B$. Definiere $f: B \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x)$ für $x \in B$

<u>Übg.:</u> f_ν konv. glm. gegen f

$c_\nu := \int_B f_\nu \in \mathbb{R} \Rightarrow |c_\nu - c_{\nu'}| = \left| \int_B (f_\nu - f_{\nu'}) \right| \leq$

$\|f_\nu - f_{\nu'}\| \operatorname{Vol}_n(B) \Rightarrow (c_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Der Grenzwert $c := \lim_{\nu\to\infty} c_\nu$ existiert.

<u>Beh.:</u> $f \in \mathcal{R}(B)$ und $c = \int_B f$

<u>Bew.:</u> Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\nu \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_\nu - f\| < \varepsilon/3\operatorname{Vol}_n(B)$ (1) $\Rightarrow |c_\nu - c| < \varepsilon/3$ (2)

$$\hookrightarrow |c_\nu - c| = \lim_{\nu'\to\infty} |c_\nu - c_{\nu'}|$$
$$\leq \lim_{\nu'\to\infty} \|f_\nu - f_{\nu'}\| \cdot \operatorname{Vol}_n(B)$$
$$= \|f_\nu - f\| \operatorname{Vol}_n(B) \overset{(1)}{<} \varepsilon/3\operatorname{Vol}_n(B) \cdot \operatorname{Vol}_n(B) = \varepsilon/3$$

Wähle $P \in \mathcal{P}(B)$ s.d. $c_\nu - \varepsilon/3 < \underline{S}(f_\nu, P) \leq \overline{S}(f_\nu, P) < c_\nu + \varepsilon/3$ (3)

$$\Rightarrow c - \varepsilon \overset{(2)}{<} c_\nu - 2\varepsilon/3 \overset{(3)}{<} \underline{S}(f_\nu, P) - \varepsilon/3 \overset{(1)}{<} \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \overset{(1)}{<} \overline{S}(f, P) + \varepsilon/3 \overset{(3)}{<} c_\nu + 2\varepsilon/3 \overset{(2)}{<} c + \varepsilon$$

$\overset{S3}{\Rightarrow}$ Beh.

▨

<u>SATZ 5</u> (Fubini)

$p, q \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$, beide kompakt, $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset \neq \mathcal{P}(B)$.

- $f: A \times B \to \mathbb{R}$ Riemann-int'bar
- Für jedes $x \in A$ sei die Funktion $f_x: B \to \mathbb{R}$, $f_x(y) := f(x,y)$ $\forall y \in B$ Riemann-int'bar
- Definiere die Funktion $F: A \to \mathbb{R}$ durch $F(x) := \int_B f_x(y)\, dy_1 \ldots dy_q$

$\Rightarrow$ F ist Riemann-int'bar und:

$$\int_A F(x)\, dx_1 \ldots dx_p = \int_{A\times B} f(x,y)\, dx_1 \ldots dx_p\, dy_1 \ldots dy_q \quad (1)$$

Notation: • $\int_B f_x := \int_B f_x(y)\,dy := \int_B f_x(y)\,dy_1 \dots dy_q$

• $\int_{A\times B} f := \int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy := \int_{A\times B} f(x,y)\,dx_1 \dots dx_p\,dy_1 \dots dy_q$

Dann können wir (1) in der Form

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx$$

Bsp. 1) $A = B = [0,1]$, $K \subset [0,1]$: Kantormenge

$$f(x,y) := \begin{cases} 1; & x \in K,\ y \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}$$

$f: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $K \times [0,1]$: Nullmenge, $f = 0$ auf $([0,1] \setminus K) \times [0,1]$, $f_x: [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-int'bar für $x \notin K$ und nicht für $x \in K$

Beweis von Satz 5:

Schritt 1: Seien $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(A)$ und $Q = \{Q_1, \dots, Q_l\} \in \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow$ i) $P \times Q := \{P_i \times Q_j \mid i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, l\} \in \mathcal{P}(A \times B)$

und $\delta(P \times Q) = \max\{\delta(P), \delta(Q)\}$

ii) $\underline{S}(f, Q \times P) \leq \underline{S}(F, P) \leq \overline{S}(F, P) \leq \overline{S}(f, P \times Q)$ (2)

Bew.: i): $\overline{P_i \times Q_j} \stackrel{!}{=} \overline{P_i} \times \overline{Q_j}$

$$\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{l} \overline{P_i \times Q_j} = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{l} \overline{P_i} \times \overline{Q_j} = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{P_i} \right) \times B = A \times B$$

$$\delta(P_i \times Q_j) = \max\{\delta(P_i), \delta(Q_j)\}$$

ii): Für $i \in \{1, \dots, k\}$ und $x \in \overline{P_i}$ gilt:

$$F(x) = \int_B f_x \leq \overline{S}(f_x, Q) = \sum_{j=1}^{l} \sup_{y \in \overline{Q_j}} f(x,y)\, \mathrm{Vol}_q(Q_j)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{l} \sup_{\overline{P_i \times Q_j}} f \cdot \mathrm{Vol}_q(Q_j)$$

$$\Rightarrow \sup_{\overline{P_i}} F \leq \sum_{j=1}^{l} \sup_{\overline{P_i \times Q_j}} f \cdot Vol_q(Q_j)$$

$$\Rightarrow \overline{S}(F,P) = \sum_{i=1}^{k} \sup_{\overline{P_i}} F \; Vol_p(P_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \sup_{\overline{P_i \times Q_j}} f \cdot \underbrace{Vol_p(P_i) Vol_q(Q_j)}_{Vol_{p+q}(P_i \times Q_j)} = \overline{S}(f, P \times Q)$$

Schritt 2: Sei $c := \int_{A \times B} f(x,y)dxdy$ und $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists P \in \mathcal{P}(A)$ s.d. $c - \varepsilon < \underline{S}(F,P) \leq \overline{S}(F,P) < c + \varepsilon$

Bew.: Nach Schritt 1 gilt $\mathcal{P}(A \times B) \neq \emptyset$. Nach Satz 3 $\exists \delta_0 > 0$ s.d. $\forall R \in \mathcal{P}(A \times B)$ gilt:
$\delta(R) < \delta_0 \Rightarrow c - \varepsilon < \underline{S}(f,R) \leq \overline{S}(f,R) < c + \varepsilon$ (3)
Wähle $P \in \mathcal{P}(A)$, $Q \in \mathcal{P}(B)$ s.d. $\delta(P) < \delta_0$, $\delta(Q) < \delta_0$
$\Rightarrow$ Schritt 1: $P \times Q \in \mathcal{P}(A \times B)$, $\delta(P \times Q) < \delta_0$
$\Rightarrow c - \varepsilon \overset{(3)}{<} \underline{S}(f, P \times Q) \overset{(2)}{\leq} \underline{S}(F,P) \leq \overline{S}(F,P) \overset{(2)}{\leq} \overline{S}(f, P \times Q) \overset{(3)}{<} c + \varepsilon$

$\Rightarrow$ Schritt 2 und Satz 3: $F \in \mathcal{R}(A)$ und $\int_A F = c$ ▨

Bsp. 2) $g \in \mathcal{R}(A)$, $h \in \mathcal{R}(B)$. Definiere $f: A \times B \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := g(x)h(y) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(A,B)$ und:

$$\int_{A \times B} f = \int_A g \int_B h$$

Weil: Definiere $f_1, f_2 : A \times B \to \mathbb{R}$ durch $f_1(x,y) := g(x)$ und $f_2(x,y) := h(y)$ für $x \in A$ und $y \in B$
Übg.): $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(A \times B)$
$\overset{S4}{\Rightarrow} f = f_1 f_2 \in \mathcal{R}(A \times B)$
$\overset{S5}{\Rightarrow} \int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B g(x)h(y)dy \right) dx \overset{S4}{=} \int_A g(x) \left(\int_B h(y)dy \right)$

$$\cdot dx \overset{S4}{=} \left(\int_A g(x)dx\right)\left(\int_B h(y)dy\right)$$

Bsp. 3) $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $B := [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Definiere $f_{n,m} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ durch:

$$f_{n,m}(x) := \begin{cases} (1-x_1-x_2-\dots-x_n)^m; & \text{falls } x_1+\dots+x_n \leq 1 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>$m=0$:</u> $f_{n,0}$ ist unstetig auf $A := \{x \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$

Übg.): A ist eine Jordan'sche Nullmenge

Nach Satz 2 ist $f_{n,0}$ Riemann-int'bar

<u>$m \geq 1$:</u> $f_{n,m}$ stetig

<u>Beh.:</u>

$$\int_{[0,1]^n} f_{n,m}(x)dx_1\dots dx_n = \frac{1}{(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+n)} = \frac{m!}{(m+n)!} \quad (*)$$

<u>Bew.:</u> Vollst. Induktion über n

<u>IV:</u> $n=1$: $\int_0^1 f_{1,m}(x)dx = \int_0^1 (1-x)^m dx = \frac{1}{m+1}$

<u>IA:</u> $(*)$ gilt für $n-1$ und alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

<u>IS:</u> $\int_{[0,1]^n} f_{n,m} = \int_{[0,1]^{n-1}} \left(\int_0^1 f_{n,m}(x_1,\dots,x_n)dx_n\right) \cdot dx_1 \dots dx_n$

$$= \frac{1}{m+1} \int_{[0,1]^{n-1}} f_{n-1,m+1}(x_1,\dots,x_{n-1})dx_1\dots dx_{n-1}$$

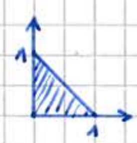
$$= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{(m+1)!}{(m+n)!} = \frac{m!}{(m+n)!}$$

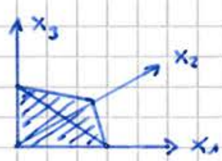
■

Geometrische Interpretation $(m=0)$:

$$f_{n,0} = \begin{cases} 1; & \sum_i x_i \leq 1 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases} ; \quad \Delta^n := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i; \ \sum_i x_i \leq 1\right\}$$

$\underline{n=1}$: $\Delta^1 = [0,1]$; 

$\underline{n=2}$: Δ^2: 

; $n=3$: 

Δ^n: "Standard Simplex", $f_{n,0} := \begin{cases} 1, & x \in \Delta^n \\ 0, & x \notin \Delta^n \end{cases}$

$\hookrightarrow \int_{[0,1]^n} f_{n,0}(x)\,dx = \int_{\Delta^n} 1\, dx_1 \dots dx_n = \mathrm{Vol}_n(\Delta^n) = \frac{1}{n!}$

<u>Def.:</u> Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂B eine Jordansche Nullmenge ist.

<u>Def.:</u> Für $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst die Funktion $1_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $1_B(x) := \begin{cases} 1; & x \in B \\ 0; & x \notin B \end{cases}$, charakteristische Fkt. von B

<u>Bem.:</u> $B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow 1_B$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n \setminus \partial B$ und unstetig auf ∂B

$\overset{S2}{\Rightarrow}$ Falls B Jordan-messbar, dann ist 1_B auf jedem abg. Quader Riemann-int'bar

$\overset{S4}{\Rightarrow}$ Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abg. Quader mit $B \subset Q$. Sei $f \in \mathcal{R}(Q)$. Dann ist die Funktion $1_B f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-int'bar.

<u>Def.:</u> $B \subset Q \subset \mathbb{R}^n$, B: Jordan messbar, Q: abg. Quader, $f \in \mathcal{R}(Q)$. Das Integral von f über B ist definiert durch: $\int_B f := \int_B f(x)\,dx_1 \dots dx_n := \int_Q 1_B f$

Hierbei ist die Zahl $\mathrm{Vol}_n(B) := \mu_n(B) := \int_B 1 = \int_Q 1_B$ das Jordan-Mass der Menge B.
(oder auch: Volumen)

Bem.: Nach Bsp. 3) ist Δ^n Jordan-messbar und hat das Volumen bzw. das Jordan-Mass:

$$\mathrm{Vol}_n(\Delta^n) = \mu_n(\Delta^n) = \frac{1}{n!}$$

Bem.:
1. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beide Jordan-messbar
   $\Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$ Jordan-messbar
   Weil: $\partial(A \cup B), \partial(A \cap B), \partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$ (Übg.)

2. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar
   i) $A \subset B \Rightarrow \mu_n(A) \leq \mu_n(B)$
   ii) $\mu_n(A \cup B) + \mu_n(A \cap B) = \mu_n(A) + \mu_n(B)$

3. A, B heissen "fast disjunkt", wenn $A \cap B$ eine Jordansche Nullmenge ist.

Lemma 5

$A, B \subset Q \subset \mathbb{R}^n$, Q: abg. Quader, A, B Jordan-messbar und fast disjunkt, $f \in \mathcal{R}(Q)$

$$\Rightarrow \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Beweis:

$$\int_A f + \int_B f - \int_{A \cup B} f \overset{S4}{=} \int_Q (1_A + 1_B - 1_{A \cup B}) f =$$

$$= \int_Q 1_{A \cap B} f \quad ; \quad 1_{A \cap B} f \text{ stetig auf } Q \setminus \overline{A \cap B}$$

$\hookrightarrow$ Jordansche NM

$$\Rightarrow 1_{A \cap B} f = 0 \text{ auf } Q \setminus \overline{A \cap B}$$

$\blacksquare$

Def.: $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Eine Funktion $f: B \to \mathbb{R}$ heisst Riemann-int'bar, wenn die erweiterte Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x); & x \in B \\ 0; & x \notin B \end{cases},$$

über jeden abg. Quader, der B enthält, Riemann-int'bar ist. Die Zahl:

$$\int_B f := \int_B f(x)\,dx_1 \dots dx_n := \int_Q \tilde{f}(x)\,dx_1 \dots dx_n \quad \text{mit } Q \subset \mathbb{R}^n \text{ abg. Quader, } B \subset Q$$

heisst Integral von f über B. Es ist unabhängig von der Wahl von Q (Übg.).

Notation: $\mathcal{R}(B) := \{ f : B \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Riemann-int'bar} \}$

SATZ 5' (Fubini)

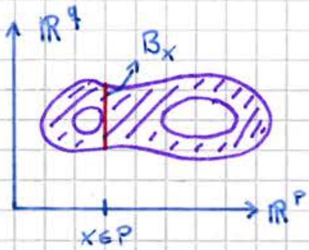
$n = p + q$; $p, q \in \mathbb{N}$; $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$: abg. Quader; $B \subset P \times Q$; $f : B \to \mathbb{R}$.

Annahme 1: B Jordan-messbar, $f \in \mathcal{R}(B)$

Annahme 2: Für jedes $x \in P$ sei die Menge $B_x := \{ y \in Q \mid (x,y) \in B \} \subset \mathbb{R}^q$ Jordan-messbar und $f_x : B_x \to \mathbb{R} : f_x(y) := f(x,y)$ für $y \in B_x$ sei Riemann-int'bar.

Definiere $F : P \to \mathbb{R}$ durch:

$$\int_{B_x} f_x =: F(x)$$



$\Rightarrow F \in \mathcal{R}(B)$ und $\int_P F = \int_B f$

Beweis: Definiere $\tilde{f} : P \times Q \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y); & x \in P,\ y \in Q \\ 0; & (x,y) \notin B \end{cases}$$

Für $x \in P$ definiere $\tilde{f}_x : Q \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}_x(y) := \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f_x(y); & y \in B_x \\ 0; & y \notin B_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_x \in \mathcal{R}(Q)\ \forall x \in P, \quad \tilde{f} \in \mathcal{R}(P \times Q)$$

$$F(x) := \int_{B_x} f_x = \int_Q \tilde{f}_x \overset{S5}{\Rightarrow} F \in \mathcal{R}(P) \quad \text{und}$$

$$\int_P F = \int_{P \times Q} \tilde{f} = \int_B f$$

▨

Korollar 4

$B \subset P \times Q$ Jordan-messbar, $B_x := \{ y \in Q \mid (x,y) \in B \}$ Jordan-messbar $\forall x \in P$.

$\Rightarrow$ Die Funktion $P \to \mathbb{R} : x \mapsto \mu_q(B_x)$ ist Riemann-int'bar

und $\mu_n(B) = \int_P \mu_q(B_x)\, dx$

Bew.: Satz 5' mit $f = 1$ (▨)

Def.: Eine kmpkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst Quadergebäude wenn entweder $B = \emptyset$ oder endlich viele abg. achsenparallele Quader $Q_1, \dots, Q_\nu \subset \mathbb{R}^n$, jeweils mit positiven Volumina, existieren s.d.

$$B = \bigcup_{j=1}^{\nu} Q_j$$

Übg.) $B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt., $B \neq \emptyset$

B ist ein Quadergeb. $\Leftrightarrow \mathcal{P}(B) \neq \emptyset$

SATZ 6

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Äquivalent sind:

i) B ist Jordan-messbar

ii) Die charakteristische Funktion $1_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist über jedem abg. Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$, der B enthält, Riemann-int'bar

iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$ s.d. $B_0 \subset B \subset B_1$ und $\mu_n(B_1) - \mu_n(B_0) < \varepsilon$

Bem.: B_0, B_1 in iii) können so gewählt werden, dass alle Ecken Vektoren der Form

$$x = \left(\frac{k_1}{2^m}, \dots, \frac{k_n}{2^m} \right);\ m \in \mathbb{N},\ k_i \in \mathbb{Z} \text{ sind.}$$

Korollar 5

$B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. B J.NM $\Leftrightarrow$ B ist J.-messbar und $\mu_n(B) = 0$

Bew.: "$\Leftarrow$": Satz 6 mit $B_0 = \emptyset$

"$\Rightarrow$": B NM $\Rightarrow \overline{B}$ NM, $\partial B \subset \overline{B} \Rightarrow \partial B$ NM

Korollar 6

$Q \subset \mathbb{R}^n$ abg. Quader, $f: Q \to [0, \infty)$ sei Riemann-int'bar, $B :=$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in Q, y \in \mathbb{R} ; 0 \leq y \leq f(x)\}$

$\Rightarrow$ B ist Jordan-messbar und $\mu_{n+1}(B) = \int_Q f$

Bew.: $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(Q)$, $B_0(P) := \bigcup_{i=1}^{k} \{(x,y) \mid x \in \overline{P_i} ;$
$0 \leq y \leq \inf_{P_i} f\}$, $B_1(P) := \bigcup_{i=1}^{k} \{(x,y) \mid x \in \overline{P_i} ; 0 \leq y \leq \sup_{\overline{P_i}} f\}$

$\Rightarrow B_0(P) \subset B \subset B_1(P)$

$\Rightarrow \mu_{n+1}(B_0(P)) = \underline{S}(f,P)$, $\mu_{n+1}(B_1(P)) = \overline{S}(f,P)$

Korollar 7

$n = p+q$; $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$: Jordan-messbar

$\Rightarrow$ $A \times B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $\mu_n(A \times B) = \mu_p(A) \mu_q(B)$

Bew.: Wähle abg. Quader $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ mit $A \subset P$, $B \subset Q$.

Definiere $g := 1_A : P \to \mathbb{R}$, $h := 1_B : Q \to \mathbb{R}$

$\overset{S6}{\Rightarrow}$ $g \in \mathcal{R}(P)$, $h \in \mathcal{R}(Q)$

$\overset{Bsp. 2)}{\Rightarrow}$ Die Funktion $f: Q \times P \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := g(x) h(y) =$
$1_A(x) 1_B(y) = 1_{A \times B}(x,y)$ ist Riemann-int'bar und

$$\int_{P \times Q} f = \left(\int_P g \right) \left(\int_Q h \right) = \mu_p(A) \mu_q(B)$$

$\overset{S6}{\Rightarrow}$ $A \times B$ ist Jordan-messbar, $\mu_n(A \times B) = \int_{P \times Q} 1_{A \times B} = \mu_p(A) \mu_q(B)$

Beweis von Satz 6:

i) => ii) : Satz 2

ii) => iii) : Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$, $Q = [-L, L]^n$, ein abg. Quader mit $B \subset Q \overset{ii)}{\Rightarrow} 1_B : Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann-int'bar.

Sei $\varepsilon > 0 \overset{S3}{\Rightarrow} \exists \delta_0 > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}(Q)$ mit $\delta(P) < \delta_0$:
$\overline{S}(1_B, P) - \underline{S}(1_B, P) < \varepsilon$

Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $2^{-m} < \delta_0$. Wähle $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(Q)$ mit Eckpunkten in $2^{-m}\mathbb{Z}^n$.

$\delta(P) = 2^{-m} < \delta_0$.

$I_0 := \{ i \in \{1, \dots, k\} \mid \overline{P_i} \subset B \}$, $I_1 := \{ i \in \{1, \dots, k\} \mid \overline{P_i} \cap B \neq \emptyset \}$, $I_0 \subset I_1$

$$\Rightarrow B_0 := \bigcup_{i \in I_0} \overline{P_i} \subset B \subset B_1 := \bigcup_{i \in I_1} \overline{P_i}$$

$$\mu_n(B_1) - \mu_n(B_0) = \int_Q 1_{B_1} - \int_Q 1_{B_0} = \sum_{i \in I_1} \mathrm{Vol}_n(P_i) - \sum_{i \in I_0} \mathrm{Vol}_n(P_i) = \overline{S}(1_B, P) - \underline{S}(1_B, P) < \varepsilon$$

iii) => i) : Sei $\varepsilon > 0$. Seien $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$ Quadergebäude mit $B_0 \subset B \subset B_1$, $\mu_n(B_1) - \mu_n(B_0) < \varepsilon/2$

$A := B_1 \setminus \mathring{B}_0$ kmpkt., Jordan-messbar

$\partial B = \overline{B} \setminus \mathring{B} \subset A$, Q abg. Quader mit $B_1 \subset Q$

$$\Rightarrow \int_Q 1_A = \mu_n(A) = \mu_n(B_1) - \mu_n(B_0) < \varepsilon/2 \quad (L5)$$

$\Rightarrow \exists$ Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{P}(Q)$ s.d. $\overline{S}(1_A, P) < \varepsilon/2$

$I := \{ i \in \{1, \dots, k\} \mid \overline{P_i} \cap A \neq \emptyset \}$

$$\Rightarrow \sum_{i \in I} \mathrm{Vol}_n(P_i) = \overline{S}(1_A, P) < \varepsilon/2$$

Wähle offene Quader $W_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, s.d. $\overline{P_i} \subset W_i$, $\mathrm{Vol}_n(W_i) \leq 2\,\mathrm{Vol}_n(P_i)$

$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} W_i \ , \ \sum_{i \in I} Vol_n(W_i) \leq 2 \sum_{i \in I} Vol_n(P_i) < \varepsilon$$

$\blacksquare$

SATZ 7

i) • $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ kmpkt.
• Für jedes $y \in \mathbb{R}^q$ sei die Menge $A^y := \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x,y) \in A\}$ eine Jordansche Nullmenge.
$\Rightarrow$ A ist eine Jordansche Nullmenge

ii) $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset U$ kmpkte Jordan-NM, $f: U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig
$\Rightarrow f(A)$ ist eine Jordansche NM

iii) $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $B \subset U$ kmpkt., $g: U \to \mathbb{R}^n$ lok. Lipsch.-stetig, $d < n$
$\Rightarrow g(B)$ ist eine Jordansche Nullmenge

Bsp. 4) $\exists g: [0,1] \to [0,1]^2$, g stetig & surjektiv
$d = 1$, $n = 2$, $g([0,1]) = [0,1]^2$: keine NM

Bsp. 5) Zylinder: $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $h > 0$
$\overset{K}{\Rightarrow} Z = B \times [0,h] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist Jordan-messbar
$\mu_{n+1}(Z) = \mu_n(B) \cdot h$

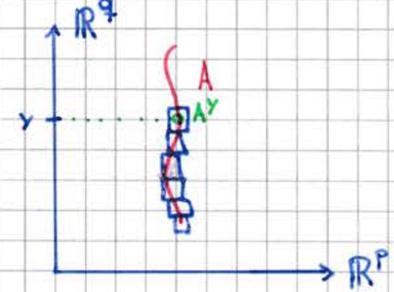
Bsp. 6) $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $\lambda > 0$, $\lambda B := \{\lambda x \mid x \in B\}$
$\Rightarrow \lambda B$ ist Jordan-messbar & $\mu_n(\lambda B) = \lambda^n \mu_n(B)$

Bsp. 7) Kegel: $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $h > 0$
$K := \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq h, x \in (1 - \frac{y}{h})B\}$
$\partial K = (\overline{B} \times \{0\}) \cup A$, $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq y \leq h, x \in (1 - y/h)\partial B\}$ $\Rightarrow$ K ist Jordan-messbar und es gilt:

$$Vol_n(K_B) := \int_0^h (1 - y/h)^n \mu_n(B)\, dy = \frac{h}{n+1} \mu_n(B)$$

Beweis vom Satz 7:

i)



1. $E \subset \mathbb{R}^p$, $F \subset \mathbb{R}^q$ seien abg. Quader mit positivem Volumen s.d. $A \subset \mathring{E} \times \mathring{F}$
   $V := \mathrm{Vol}_q(F)$
2. Sei $\varepsilon > 0$. Für $y \in F$ wähle $P(y) = \{P_1(y), \dots P_{k(y)}(y)\} \in \mathcal{P}(E)$ s.d.:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \overline{P_i(y)} \cap A^y \neq \emptyset}}^{k(y)} \mathrm{Vol}_p(P_i(y)) < \varepsilon / V \quad (L3) \quad ; \quad I(y) := \{ i \in \{1, \dots, k(y)\} \mid \overline{P_i(y)} \cap A \neq \emptyset \}$$

$$J(y) := \{ i \in \{1, \dots, k(y)\} \mid \overline{P_i(y)} \cap A = \emptyset \}$$

3. Definiere $B := \{ y \in F \mid A^y \neq \emptyset \} \subset \mathring{F}$, B kmpkt. Für $y \in B$ definiere
   $\mathcal{U}(y) := \{ y' \in \mathbb{R}^q \mid \overline{P_i(y)} \cap A^{y'} = \emptyset \ \ \forall i \in J(y) \}$
   $\Rightarrow$
   - $y \in \mathcal{U}(y)$
   - $\mathcal{U}(y)$ ist offen (da A kmpkt.)
   - $\forall y \in B$ wähle $r(y) > 0$ s.d. $B_{2r(y)}(y) \subset \mathcal{U}(y)$
4. Es gilt:

$$B \subset \bigcup_{y \in B} B_{r(y)}(y) \overset{B \text{ kmpkt.}}{\Longrightarrow} \exists y_1, \dots, y_N \in B \text{ s.d. } B \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} B_{r(y_\nu)}(y_\nu)$$

5. Wähle $Q = \{Q_1, \dots, Q_\ell\} \in \mathcal{P}(F)$ s.d. $\delta(Q) < \min\limits_{\nu=1,\dots,N} \dfrac{r(y_\nu)}{\sqrt{q}}$

<u>Beh.</u>: $\forall j \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $\overline{Q_j} \cap B \neq \emptyset$ $\exists \nu \in \{1, \dots, N\}$ s.d. $\overline{Q_j} \subset \mathcal{U}(y_\nu)$

<u>Bew.</u>: $\overline{Q_j} \cap B \neq \emptyset$. Wähle $\eta \in \overline{Q_j} \cap B$. Wähle $\nu \in \{1, \dots, N\}$ s.d.
$\eta \in B_{r(y_\nu)}(y_\nu) \cap \overline{Q_j}$
$\Rightarrow \forall y \in \overline{Q_j}: \ \|y - \eta\| \leq \sqrt{q}\, \delta(Q) < r(y_\nu)$
$\Rightarrow \overline{Q_j} \subset B_{r(y_\nu)}(\eta) \subset B_{2r(y_\nu)}(y_\nu) \subset \mathcal{U}(y_\nu)$

6. $J := \{ i \in \{1, \dots, \ell\} \mid \overline{Q_i} \cap B \neq \emptyset \}$. Wähle eine Abb. $J \to \{1, \dots, N\}$:
   $j \mapsto \nu(j)$ s.d. $\forall j \in J: \ \overline{Q_j} \subset \mathcal{U}(y_{\nu(j)})$
   $\Rightarrow \forall j \in J \ \forall y \in \overline{Q_j}: \ A^y \cap \bigcup\limits_{i \in J(y_{\nu(j)})} \overline{P_i(y_{\nu(j)})} = \emptyset$

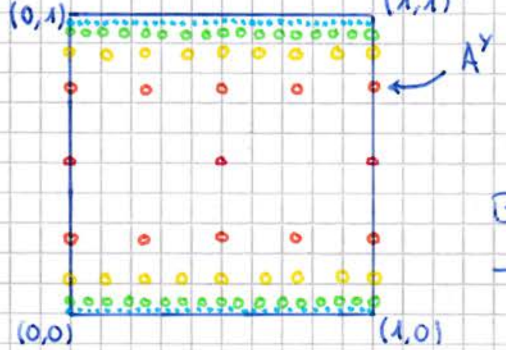
$\Rightarrow \forall j \in J \; \forall y \in Q_j$:

$$A^y \subset \bigcup_{i \in I(y_{\nu(j)})} \overline{P_i(y_{\nu(j)})} \Rightarrow A \subset \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I(y_{\nu(j)})} \overline{P_i(y_{\nu(j)})} \times \overline{Q_j}$$

$$\Rightarrow \sum_{j \in J} \underbrace{\sum_{i \in I(y_{\nu(j)})} \mathrm{Vol}_p(P_i(y_{\nu(j)}))}_{< \varepsilon / V} \cdot \mathrm{Vol}_q(Q_j) < \varepsilon/V \underbrace{\sum_{j \in J} \mathrm{Vol}_q(Q_j)}_{\leq V} < \varepsilon$$

✓.

Zwischenbeispiel) $A \subset \mathbb{R}^2$:



A^y: NM $\forall y \in [0,1]$

$\hookrightarrow \overline{A} = [0,1]^2, \; \mathring{A} = \emptyset$

$\Vert$

$\partial A \rightarrow A$ keine NM

Beachte: A nicht kmpkt.

$\rightarrow$ Kmpktheit muss gefordert werden!

ii) $\Rightarrow$ iii) : $U := V \times \mathbb{R}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$, $A := B \times \{0\} \subset U$: kmpkte JNM.

$f(x_1, \dots, x_n) := g(x_1, \dots, x_d)$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lip.-st.

$\overset{ii)}{\Rightarrow} f(A) = g(B)$ NM.

✓.

ii) 1. $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist Lipsch.-st., d.h.: $\exists c > 0 \; \forall x, y \in A : \|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|$

2. Ein abg. Würfel ist ein abg. Quader der Form: $Q = [a_1, a_1 + s] \times [a_2, a_2 + s] \times \dots \times [a_n, a_n + s] \subset \mathbb{R}^n$, $s := s(Q)$: Seitenlänge von Q

3. Nach Lemma 3 $\exists$ abg. Würfel $Q_1, \dots, Q_k \subset \mathbb{R}^n$ s.d. $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} Q_j$,

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(Q_j) < \frac{\varepsilon}{(3c\sqrt{n})^n} \; ; \; s_j := s(Q_j)$$

$\Rightarrow \mathrm{Vol}_n(Q_j) = s_j^n \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, k\} \; \forall x, y \in \overline{Q_j} : \|x - y\| \leq \sqrt{n} s_j$

$\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, k\} \; \forall x, y \in \overline{Q_j} \cap A : \|f(x) - f(y)\| \leq c \sqrt{n} s_j$

$\Rightarrow \exists$ off. Würfel $W_j \in \mathbb{R}^n$ s.d. $\forall j \in \{1, \dots, \nu\}$ gilt: $f(Q_j \cap A)$ $\subset W_j$ und $s(W_j) \leq 3c\sqrt{n}\, s_j$

$$\Rightarrow f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\nu} W_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Vol}_n(W_j) \leq \sum_{j=1}^{n} (3c\sqrt{n}\, s_j)^n < \varepsilon$$

■

Bsp. 8a) $E \subset \mathbb{R}^n$: lin. UR mit $\dim E = d < n$, $a \in \mathbb{R}^n$, K kmpkt., $K \subset a + E = \{a + x \mid x \in E\}$

$\Rightarrow K$ ist JNM (Beh.)

Bew.: Wähle Basis $e_1, \dots, e_d$ von E. Definiere $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ durch $g(x_1, \dots, x_d) :=$

$$a + \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \Rightarrow g(\mathbb{R}^d) = a + E$$

$B := g^{-1}(K) \Rightarrow B$ kmpkt., $B \subset \mathbb{R}^d$, $K = g(B)$

$\overset{S7}{\Rightarrow} K$ ist JNM

■

Bsp. 8b) $\Delta^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ \forall i ; \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\}$

$\partial \Delta^n$ = Vereinigung endlich vieler Mengen wie in a)

$\Rightarrow \partial\Delta^n$: JNM $\Rightarrow \Delta^n$: Jordan-messbar

$\hookrightarrow \mu_n(\Delta^n) = 1/n!$

Bsp. 9) $M \subset \mathbb{R}^n$: d-dim. C^1-Untermf., $d < n$, $A \subset M$ kmpkt.

Beh.: $\Rightarrow A$ ist JNM

Bew.: $\forall x \in A \ \exists$ off. Mengen $U_x, V_x \subset \mathbb{R}^n \ \exists \ C^1$-Diffeom. $\varphi_x: U_x \to V_x$ s.d. $x \in U_x$, $\varphi_x(U_x \cap M) = V_x \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$

Für $x \in A$ wähle kmpkte Menge $K_x \subset \mathbb{R}^n$ s.d. $x \in \mathring{K}_x$ $\subset K_x \subset U_x$. Definiere $B_x := \varphi_x(K_x \cap A) \subset V_x \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. B_x kmpkt $\overset{S7}{\Rightarrow} \varphi_x^{-1}(B_x) = K_x \cap A$ ist JNM

$A \subset \bigcup_{x \in A} \mathring{K}_x \overset{A \text{ kmpkt.}}{\Rightarrow} \exists x_1, \dots, x_n \in A$ s.d. $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} (K_{x_i}$ $\cap A) \Rightarrow A$ ist JNM

■

Bsp. 10) $f: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ stetig diff'bar, "eigentlich", d.h. $f^{-1}(K)$ ist kmpkt für jede kmpkte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$

Sei $c > 0$ ein regulärer Wert von $f \Rightarrow M := f^{-1}(c)$ ist eine kmpkte C^1-Untermf von $\mathbb{R}^n$

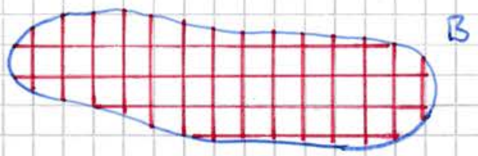
$\overset{\text{Bsp. 9)}}{\Rightarrow}$ M ist JNM

$B := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c \} = f^{-1}([0,c])$ ist kmpkt.

$\partial B = M$ JNM $\Rightarrow$ B ist Jordan-messbar

Spezialfall: $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $c = 1$, $B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$ Jordan-messbar, $\partial B = S^{n-1}$ ist JNM

Def.: $B \subset \mathbb{R}^n$: Jordan-messbar. Eine Jordan-Partition von B ist eine endliche Menge $Z = \{B_1, \ldots, B_k\}$ von Jordan-messbaren, kmpkten Teilmengen (B ist ebenfalls kmpkt) $B_i \subset B$ s.d.:



- $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$
- $B_i \cap B_j$ ist JNM für $i \neq j$

Notation: $\mathcal{P}_{\text{Jord}}(B) =: P_J(B) =: \{$ Jordan-Part. von $B \}$

Analog zu Quader-Partitionen:

- $\delta(B_i) := \sup\limits_{x,y \in B_i} \|x - y\|_\infty$; $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$
- $\delta(Z) := \max\{\delta(B_1), \ldots, \delta(B_k)\}$

Bem.: $f \in \mathcal{R}(B)$, $Z = \{B_1, \ldots, B_k\} \in \mathcal{P}_J(B)$

$$\overset{\text{LS}}{\Rightarrow} \int_B f = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} f \quad ; \quad \mu_n(B) = \sum_{i=1}^{k} \mu_n(B_i)$$

Def.: $B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt. & Jordan-messbar, $Z = \{B_1, \ldots, B_k\} \in \mathcal{P}_J(B)$, $f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wir definieren:

- $\overline{S}(f,Z) := \sum_{i=1}^{k} \sup_{B_i} f \cdot \mu_n(B_i)$
- $\underline{S}(f,Z) := \sum_{i=1}^{k} \inf_{B_i} f \cdot \mu_n(B_i)$

SATZ 8

$B \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt. & Jordan-messbar, $f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt, $c \in \mathbb{R}$.
Äquivalent sind:

i) $f \in \mathcal{R}(B)$ und $\int_B f = c$

ii) $c = \inf\limits_{Z \in \mathcal{P}_J(B)} \overline{S}(f,Z) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{P}_J(B)} \underline{S}(f,Z)$

iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 \ \forall Z \in \mathcal{P}_J(B): \ \delta(Z) < \delta_0 \Rightarrow c - \varepsilon \leq \underline{S}(f,Z) \leq \overline{S}(f,Z) \leq c + \varepsilon$

iv) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 \ \forall Z = \{B_1, \dots, B_k\} \in \mathcal{P}_J(B): \ (\delta(Z) < \delta_0 \wedge x_i \in B_i)$

$$\Rightarrow \left| c - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mu_n(B_i)}_{\text{verallg. Riemannsche Summe}} \right| \leq \varepsilon$$

Beweis: s. Manuskript: "Mehrfache Integrale"
wie Satz 3

($\blacksquare$)

SATZ 9

$B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\Rightarrow \Phi(B) := \{\Phi x \mid x \in B\}$ ist Jordan-messbar und $\mu_n(\Phi(B)) = |\det(\Phi)| \cdot \mu_n(B)$

Bsp. 11) $B = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(\Phi) = 1$

$A := \Phi(B) = \{(x + \lambda y, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$

$$A^y = [\lambda y, \lambda y + 1] \overset{S7}{\Rightarrow} \partial A \text{ ist JNM}$$

$$\hookrightarrow \mu_2(A) \overset{S5'}{=} \int_0^1 \mu_1(A^y)\,dy = 1 = |\det(\Phi)|\,\mu_2(B)$$

Bsp. 12) $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

$$E(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\} = \Phi(B)$$

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}, \quad \Phi = \operatorname{diag}(a_i)$$

$$\overset{S9}{\Rightarrow} \mu_n(E(a)) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n\, \mu_n(B)$$

Lemma 6

$B \subset \mathbb{R}^n$: Jordan-messbar, $v \in \mathbb{R}^n$, $s > 0$.

$\Rightarrow$ i) $B + v := \{x + v \mid x \in B\}$ ist Jordan-messbar und $\mu_n(B+v) = \mu_n(B)$

ii) $sB := \{sx \mid x \in B\}$ ist Jordan-messbar und $\mu_n(sB) = s^n \mu_n(B)$

Beweis: Übg. (verwende S6)

Beweis von Satz 9:

Schritt 1: $\det(\Phi) = 0 \Rightarrow \Phi(B)$ ist eine JNM

Bew.: $E := \{\Phi x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ lin. UR. von $\mathbb{R}^n$, $d = \dim E$, $d < n$, $\Phi(B) \subset E$ beschr. $\overset{\text{Bsp.8)}}{\Rightarrow}$ Schritt 1 ✓.

Schritt 2: $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow \Phi(B)$ ist Jordan-messbar.

Bew.: 1. Fall: $\det(\Phi) = 0$: s. Schritt 1

2. Fall: $\det(\Phi) \neq 0$: $\Rightarrow \Phi(\underbrace{\partial B}_{\text{JNM}}) = \partial(\Phi(B))$

$\overset{S7}{\Rightarrow} \partial(\Phi(B))$ ist eine JNM. ✓.

<u>Schritt 3:</u> $W_0 := [0,1]^n$. Für $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiere $\lambda := \lambda(\Phi) := \mu_n(\Phi(W_0)) \Rightarrow \forall \Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\forall$ Jordan-messbaren Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt: $\mu_n(\Phi(B)) = \lambda(\Phi)\mu_n(B)$

<u>Bew.:</u> Sei $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda := \lambda(\Phi) = \mu_n(\Phi(W_0))$

1. Fall: B = Würfel, $s > 0$. $W = [a_1, a_1+s] \times [a_2, a_2+s] \times \ldots \times [a_n, a_n+s] \Rightarrow W = a + sW_0$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$

$\overset{L6}{\Rightarrow} \mu_n(W) = \mu_n(sW_0) = s^n \mu_n(W_0) = s^n$

$\mu_n(\Phi(W)) = \mu_n(\Phi a + s\Phi(W_0)) \overset{L6}{=} \mu_n(s\Phi(W_0))$

$= s^n \mu_n(\Phi(W_0)) = \lambda \mu_n(W)$

2. Fall: B: bel. Jordan-messb. Menge, $c := \mu_n(B)$

$\overset{S6}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Quadergebäude (mit Würfelpartitionen) $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$ s.d. $B_0 \subset B \subset B_1$, $\mu_n(B_1) - \mu_n(B_0) < \varepsilon$, $\mu_n(B_0) \leq c \leq \mu_n(B_1)$

$\Rightarrow c - \varepsilon \leq \mu_n(B_0) \leq \mu_n(B_1) \leq c + \varepsilon$

$\Rightarrow \lambda c - \lambda\varepsilon \leq \lambda\mu_n(B_0) \leq \lambda\mu_n(B_1) \leq \lambda c + \lambda\varepsilon$

$P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in \mathcal{P}(B_0)$, P_i: off. Würfel

$$\lambda\mu_n(B_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda\mu_n(\overline{P_i}) \overset{1.\ \text{Fall}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu_n(\Phi(\overline{P_i})) = \mu_n(\Phi(B))$$

$\Rightarrow \lambda c - \lambda\varepsilon \leq \lambda\mu_n(B_0) = \mu_n(\Phi(B_0)) \leq \mu_n(\Phi(B)) \leq \mu_n(\Phi(B_1)) = \lambda\mu_n(B_1) \leq \lambda c + \lambda\varepsilon$

$\Rightarrow \lambda c - \lambda\varepsilon \leq \mu_n(\Phi(B)) \leq \lambda c + \lambda\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \mu_n(\Phi(B)) = \lambda c = \lambda\mu_n(B)$ ✓

<u>Schritt 4:</u> Sei $\lambda: \mathbb{R}^{n\times n} \to [0,\infty)$ wie in Schritt 3. Dann gilt:
a) $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(\Phi) = 0 \Rightarrow \lambda(\Phi) = 0$
b) $\lambda(s\mathbb{1}) = s^n \quad \forall s \geq 0$
c) $\lambda(\Phi\Psi) = \lambda(\Phi)\lambda(\Psi) \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$

<u>Bew.:</u> a) Schritt 1 ; b) Lemma 6

c) $\lambda(\Phi\Psi) := \mu_n(\Phi(\Psi(W_0))) \overset{\text{Schritt 3}}{=} \lambda(\Phi)\mu_n(\Psi(W_0))$

$= \lambda(\Phi)\lambda(\Psi)$

<u>Schritt 5:</u> $\lambda(\Phi) = |\det(\Phi)| \quad \forall \Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Bew.: 1. Fall: Φ Permutationsmatrix, $\sigma: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ bijektiv.

$$\Phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi(W_0) = W_0 \Rightarrow \lambda(\Phi) = \mu_n(\Phi(W_0)) = 1 = |\det(\Phi)|$$

2. Fall: Φ Diagonalmatrix, $\Phi = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{i=1}^n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\Phi(W_0) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für } i = 1,\dots,n \right\} = I_1 \times I_2 \times I_3 \times \dots \times I_n, \text{ wobei } I_i := \begin{cases} [0, \lambda_i]; & \lambda_i \geq 0 \\ [\lambda_i, 0]; & \lambda_i \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow |I_i| = |\lambda_i|$: Länge des Intervalls

$$\mu_n(\Phi(W_0)) = \operatorname{Vol}_n(\Phi(W_0))$$
$$\lambda(\Phi) = \prod_{i=1}^n |I_i| = \prod_{i=1}^n |\lambda_i| = |\det(\Phi)|$$

3. Fall: Φ: Scherung, $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Phi(W_0) = P \times Q$,

$P = \{(x_1 + \lambda x_2, x_2) \mid x_1, x_2 \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$

$Q = [0,1]^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-2}$

$$\overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} \lambda(\Phi) = \mu_n(P \times Q) = \mu_2(P)\,\mu_{n-2}(Q) \overset{\text{Bsp. 11)}}{=} 1 = |\det(\Phi)|$$

LinAlg: Jede Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen (d.h. obige 3 Fälle), d.h.

$\Phi = \Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_N$

$$\Rightarrow \lambda(\Phi) \overset{\text{Schritt 4}}{=} \prod_{i=1}^N \lambda(\Phi_i) = \prod_{i=1}^N |\det(\Phi_i)|$$
$$= |\det(\Phi)|$$

∎

SATZ 10 (Transformationsformel)

$U \subset \mathbb{R}^n$: offen, $A \subset U$: kmpkt. & Jordan-messbar, $N \subset A$: kmpkt. & JNM, $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar. $\varphi|_{A\setminus N}$ injektiv, $\det(d\varphi(x)) \neq 0$ $\forall x \in A\setminus N$.

$\Rightarrow$ i) $B := \varphi(A)$ ist Jordan-messbar

ii) Sei $f \in \mathcal{R}(B)$. Dann ist die Funktion $(f \circ \varphi)|\det(d\varphi(x))|$: $A \to \mathbb{R}$ ist Riemann-int'bar und

$$\int_A (f(\varphi(x))|\det(d\varphi(x))|\,dx = \int_{\varphi(A)} f(y)\,dy \quad (1)$$

Beweis: i): $A \setminus \partial A = \mathring{A}$ offen $\Rightarrow A \setminus (\partial A \cup N)$ offen

$\hookrightarrow \det(d\varphi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in A \setminus (\partial A \cup N)$

$\overset{K11}{\Rightarrow} \varphi(A \setminus (\partial A \cup N))$ offen, $\varphi(A \setminus (\partial A \cup N)) \subset B$

$\Rightarrow \varphi(A \setminus (\partial A \cup N)) \subset \mathring{B} \Rightarrow \partial B = B \setminus \mathring{B} \subset \varphi(\underbrace{\partial A \cup N}_{JNM})$

$\overset{S7,\ \text{Schr.-Satz}}{\Rightarrow} \partial B$ JNM

$\Rightarrow B$ Jordan-messbar ✓.

Bem.: $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$d_\infty(x,y) := \|x - y\|_\infty$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

$\|\Phi\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\Phi x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$W_r := \overline{B}_r(0; d_\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq r\} = [-r, r]^n$

Lemma 7

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset U$ kmpkt., $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$: C^1-Abb., $\det(d\varphi(x)) \neq 0 \ \forall x \in K$. Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in \mathbb{R}^n \ \forall s > 0$ mit $0 < s < \delta$, $W := \overline{B}_s(a; d_\infty) \subset K$

$\Rightarrow |\mu_n(\varphi(W)) - |\det(d\varphi(a))| \cdot \mu_n(W)| < \varepsilon \mu_n(W)$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. $K \to \mathbb{R}$: $\left.\begin{array}{l} x \mapsto |\det(d\varphi(x))| \\ x \mapsto \|d\varphi(x)^{-1}\|_\infty \end{array}\right\}$ sind stetig

1. $\exists c > 0 \ \forall x \in K : |\det(d\varphi(x))| \leq c$, $\|d\varphi(x)^{-1}\|_\infty \leq c$
2. $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ s.d. $((1+\alpha)^n - 1)c < \varepsilon$ sowie $(1 - (1-\alpha)^n)c < \varepsilon$
3. $\exists \delta > 0$ s.d.: $x, y \in K$ mit $\|x - y\|_\infty \Rightarrow \|d\varphi(x) - d\varphi(y)\|_\infty < \alpha/c$

Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $0 < s < \delta$, $W = [a_1 - s, a_1 + s] \times \ldots \times [a_n - s, a_n + s] \subset K$, $\Phi := d\varphi(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Rightarrow \|x - a\|_\infty < \delta \quad \forall x \in W$

$\overset{3.}{\Rightarrow} \| d\varphi(x) - \Phi \| < \alpha/c \overset{1.}{\leq} \alpha / \|\Phi^{-1}\|_\infty$

$\Rightarrow \| \Phi^{-1} d\varphi(x) - \mathbb{1} \|_\infty \leq \|\Phi^{-1}\|_\infty \| d\varphi(x) - \Phi\|_\infty < \alpha$
$\forall x \in W$

Definiere $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ durch $\psi(x) := \Phi^{-1} \varphi(x)$

$\Rightarrow \psi$ ist C^1 und $d\psi(x) = \Phi^{-1} d\varphi(x)$, $\| d\psi(x) - \mathbb{1}\|_\infty < \alpha \quad \forall x \in W \underset{S2}{\overset{K12}{\Rightarrow}} (1-\alpha)(W - a) \subset \psi(W) - \psi(a) \subset (1+\alpha) \cdot$

$(W - a) \Rightarrow (1-\alpha)\Phi(W-a) \subset \varphi(W) - \varphi(a) \subset (1+\alpha)\Phi(W-a)$

$\Rightarrow (1-\alpha)^n \mu_n(\Phi(W)) \leq \mu_n(\varphi(W)) \leq (1+\alpha)^n \mu_n(\Phi(W))$

$\overset{2.}{\leq} (1 + \varepsilon/c) |\det \Phi| \mu_n(W)$; $(1 - \varepsilon/c)|\det \Phi| \mu_n(W) \overset{2.}{\leq} (1-\alpha)^n \cdot \mu_n(\Phi(W))$

$\Rightarrow (1 - \varepsilon/c) |\det \Phi| \mu_n(W) \overset{2.}{\leq} (1 + \varepsilon/c)|\det \Phi| \mu_n(W) \overset{1.}{=} |\det \Phi| \cdot \mu_n(W) + \varepsilon \mu_n(W)$

$\blacksquare$

Beweis von 10 ii):

Schritt 1: A: Quadergebäude, $N = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu_n(\varphi(A)) = \int_A |\det(d\varphi(x))| \, dx \quad (2)$$

Schritt 2: Die Formel (2) gilt immer

Schritt 3: Bew. von (1)

Bew. von 1: Sei $\varepsilon > 0$. Nach L7 mit $K = A$ $\exists \delta > 0 \ \forall a \in A \ \forall 0 < s < \delta$:

$W = \prod_{i=1}^n [a_i - s, a_i + s] \subset A \Rightarrow \big| \mu_n(\varphi(W)) - |\det(d\varphi(a))| \cdot \mu_n(W) \big| < \varepsilon \mu_n(W) \quad (*)$

Nach Satz 3 $\exists P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in \mathcal{P}(A)$ s.d.

- $\delta(P) < \delta_0$
- P_i: off. Würfel mit Mittelpunkt $x_i \ \forall i$

$$\cdot \left| \int_A |\det(d\varphi)| - \sum_{i=1}^{k} \det|d\varphi(x_i)| \mu_n(P_i) \right| < \varepsilon \quad (**)$$

$\Rightarrow$ Für $i = 1, \dots, n$ gilt: $\left| \mu_n(\varphi(P_i)) - |\det(d\varphi(x_i))| \mu_n(P_i) \right| \overset{(*)}{<} \varepsilon \mu_n(P_i)$

$$\Rightarrow \left| \mu_n(\varphi(A)) - \int_A |\det(d\varphi)| \right| = \left| \sum_{i=1}^{k} \mu_n(\varphi(\overline{P_i})) - \int_A |\det(d\varphi)| \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left| \mu_n(\varphi(\overline{P_i})) - |\det(d\varphi(x_i))| \mu_n(P_i) \right|}_{< \varepsilon \mu_n(\overline{P_i})}$$

$$+ \underbrace{\left| \sum_{i=1}^{k} |\det(d\varphi(x_i))| \mu_n(P_i) - \int_A |\det(d\varphi)| \right|}_{\overset{(**)}{<} \varepsilon}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_n(P_i) + 1 \right) \varepsilon = (\mu_n(A) + 1) \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_A |\det(d\varphi)| = \mu_n(\varphi(A)) \quad \checkmark$$

Bew. von 2: Sei $\varepsilon > 0$

1. Wähle $c > 0$ $\forall x, y \in A: \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty \leq c \|x - y\|_\infty$
2. Wähle $C > 0$ s.d. $\forall x \in A: |\det(d\varphi(x))| \leq C$
3. Wähle Quadergebäude mit Würfelpartitionen A_0, A_1, $A_0 \subset A \setminus N$, $A \setminus A_0 \subset A_1$
   $\mu_n(A \setminus A_0) = \mu_n(A) - \mu_n(A_0) < \varepsilon$, $\mu_n(A_1) < 2\varepsilon$

$\hookrightarrow \int_{A \setminus A_0} |\det(d\varphi)| \leq C \mu_n(A \setminus A_0) < C \varepsilon$

$\int_{A_0} |\det(d\varphi)| \overset{\text{Schritt 1}}{=} \mu_n(\varphi(A_0))$

$$\left| \mu_n(\varphi(A)) - \int_A |\det(d\varphi)| \right| = \left| \mu_n(\varphi(A) \setminus \varphi(A_0)) - \int_{A \setminus A_0} |\det(d\varphi)| \right| \leq \underbrace{\mu_n(\varphi(A) \setminus \varphi(A_0))}_{\overset{!}{\leq} 2(2c)^n \varepsilon} + \underbrace{\int_{A \setminus A_0} |\det(d\varphi)|}_{\leq C \varepsilon}$$

$\hookrightarrow A \setminus A_0 \subset A_1 = \bigcup_{i=1}^{L} W_i$: Würfelpartition

$W_i = B_{s_i/2}(x_i; d_\infty)$, $W_i \cap W_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$\|x - x_i\|_\infty \leq s_i \quad \forall x \in W_i$

$\Rightarrow \|\varphi(x) - \varphi(x_i)\|_\infty \leq c s_{i/2} \quad \forall x \in W_i$

$\Rightarrow \varphi(W_i) \subset W_i'$: Würfel mit Seitenlänge $2cs_i$

$$\varphi(A_1) = \bigcup_{i=1}^{l} \varphi(W_i) \subset \bigcup_{i=1}^{l} W_i'$$

$$\mu_n(\varphi(A_1)) \leq \sum_{i=1}^{l} \mu_n(W_i') = \sum_{i=1}^{l} (2cs_i)^n = (2c)^n \cdot$$

$$\mu_n(A_1) < 2(2c)^n \varepsilon \ ; \ \sum_i \mu_n(W_i) = \sum_i s_i^n = \mu_n(A_1)$$

<u>Bew. von 3:</u> Sei $\varepsilon > 0$

1. Wähle $M > 0$ s.d. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in A$
2. Wähle $c > 0$ s.d. $\|\varphi(x) - \varphi(x')\|_\infty \leq c\|x - x'\|$ $\forall x, x' \in A$
3. (Satz 8) Wähle $\delta_0 > 0 \ \forall Z = \{B_1, \dots, B_k\} \in \mathcal{P}_J(B)$
   $$\delta(Z) < \delta_0 < y_i \in B_i \Rightarrow \left| \int_B f - \sum_{i=1}^{k} f(y_i)\mu_n(B_i) \right| < \frac{\varepsilon}{1 + M\mu_n(A)}$$
4. Wähle δ_0 so klein, dass $\forall x, x' \in A$:
   $$\|x - x'\|_\infty < \delta_0 \Rightarrow |\det(d\varphi(x)) - \det(d\varphi(x'))| < \frac{\varepsilon}{1 + M\mu_n(A)}$$

<u>Beh.:</u> Sei $Y = \{A_1, \dots, A_k\} \in \mathcal{P}_J(A)$ mit $\delta(Y) < \delta_0$. Dann gilt $\forall x_i \in A_i$:

$$\left| \int_B f - \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(x_i)) |\det(d\varphi(x_i))| \mu_n(A_i) \right| < \varepsilon$$

(Daraus folgt Schritt 3 nach Satz 8)

<u>Bew.:</u> Sei $x_i \in A_i$, $y_i := \varphi(x_i) \Rightarrow \forall i \ \forall x, x' \in A_i$ gilt:
$\|x - x'\| < \delta_0$ also $\|\varphi(x) - \varphi(x')\| < c\,\delta_0$

$B_i := \varphi(A_i)$: Jordan-messbar $\forall i$, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \varphi(A)$

$Z := \{B_1, \dots, B_k\} \in \mathcal{P}_J(B)$. $\delta(Z) < c\,\delta_0$

$$\overset{3.}{\Rightarrow} \left| \int_B f - \sum_{i=1}^{k} f(y_i)\mu_n(B_i) \right| < \frac{\varepsilon}{1 + M\mu_n(A)}$$

$$\Rightarrow \left| \int_B f - \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(x_i))\, |\det(d\varphi(x_i))|\, \mu_n(A_i) \right|$$

$$\leq \left| \int_B f - \sum_{i=1}^{k} f(y_i)\mu_n(B_i) \right| + \sum_{i=1}^{k} |f(y_i)| \cdot \Big| |\det(d\varphi(x_i)|\mu_n(A_i) - \underbrace{\mu_n(B_i)}_{\overset{\text{Schritt 2}}{=} \int_A |\det(d\varphi)|} \Big|$$

$$< \frac{\varepsilon}{1+M\mu_n(A)} + \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{A_i} \Big(|\det(d\varphi(x_i))| - |\det(d\varphi(x))| \Big) dx \right| M + \frac{\varepsilon}{1+M\mu_n(A)} + M \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \underbrace{|\det(d\varphi(x_i)) - \det(d\varphi(x))|}_{\leq \frac{\varepsilon}{1+M\mu_n(A)}} dx \leq \varepsilon$$

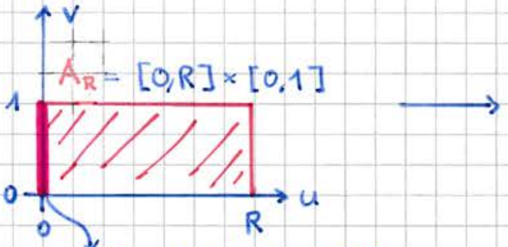
$\blacksquare$

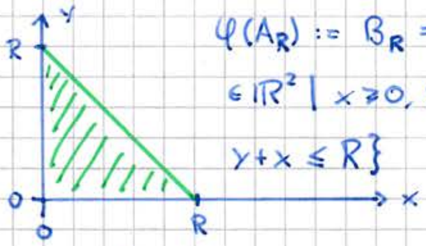
Bsp. 13) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \longmapsto (x,y)$

$\varphi(u,v) := (u-uv,\ uv)$; $x = u - uv$, $y = uv$

$\Rightarrow \quad u = x+y, \quad v = \frac{y}{x+y}$

$d\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix} \Rightarrow \det(d\varphi(u,v)) = u$





$\varphi(A_R) := B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ y+x \leq R\}$

$N = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = 0,\ 0 \leq v \leq 1\}$

$f: B_R \to \mathbb{R}$: Riemann-int'bar ; $(f\circ\varphi)|\det(d\varphi)|: A_R \to \mathbb{R} \overset{S10}{\Longrightarrow} \int_{B_R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{A_R} f(u-uv,\ uv)\,u\,du\,dv$

Lokale Riemann-Integrierbarkeit

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f: U \to \mathbb{R}$ heisst lokal Riemann-int'bar, wenn die Restriktion $f|_K : K \to \mathbb{R}$ für jede Jordan-messbare kompakte Teilmenge $K \subset U$ Riemann-int'bar ist.

$\mathcal{K}(U) := \{ K \subset U \mid K$ kmpkt. und Jordan-messbar$\}$
$\mathcal{R}_{loc}(U) := \{ f: U \to \mathbb{R} \mid f$ lokal Riem.-int'bar$\}$

Def.: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{R}_{loc}(U)$.
f heisst Riemann-int'bar, wenn

$$\sup_{K \in \mathcal{K}(U)} \int_K |f| < \infty$$

Übg.) $U \subset \mathbb{R}^n$ offen
$\Rightarrow \exists$ Folge $K_i \in \mathcal{K}(U)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, s.d.

$$\left. \begin{array}{l} K_i \subset \mathring{K}_{i+1} \text{ sowie} \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = U \end{array} \right\} (*)$$

SATZ 11

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$: Riemann-int'bar.
$\Rightarrow \exists!\ c \in \mathbb{R}$ s.d.

i) Für jede Folge $K_i \in \mathcal{K}(U)$, $i \in \mathbb{N}$, mit $(*)$, gilt:

$$c = \lim_{i \to \infty} \int_{K_i} f(x)\, dx_1 \ldots dx_n$$

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists K_0 \in \mathcal{K}(U)\ \forall K \in \mathcal{K}(U): K_0 \subset K \Rightarrow$

$$\left| c - \int_K f(x)\, dx_1 \ldots dx_n \right| < \varepsilon$$

Def.: Diese Zahl $c \in \mathbb{R}$ heisst Integral von f über U:

$$c := \int_U f(x)\, dx_1 \ldots dx_n =: \int_U f \quad (\leftarrow \text{Bezeichnung})$$

Bsp. 14) $p, q > 0$, $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) := x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y}$

$$\int_{[1/R,\,R]^2} f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{1/R}^{R} x^{p-1} e^{-x}\,dx \int_{1/R}^{R} y^{q-1} e^{-y}\,dy$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow R \to \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \qquad\qquad \Gamma(p)\,\Gamma(q)$$

$$\Rightarrow \int_{(0,\infty)^2} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y}\,dx\,dy = \Gamma(p)\,\Gamma(q)$$

$$\uparrow i \to \infty \quad \text{Bsp. 13)}$$

$$\int_{1/i}^{1-1/i} \int_{1/i}^{i} (u - uv)^{p-1} (uv)^{q-1} e^{-u}\, u\,du\,dv$$

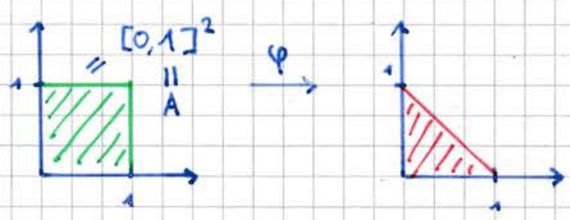
$$\|$$

$$\int_{1/i}^{1-1/i} (1-v)^{p-1} v^{q-1}\,dv \underbrace{\int_{1/i}^{i} u^{p+q-1} e^{-u}\,du}_{\xrightarrow{i\to\infty}\ \Gamma(p+q)}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1}\,dt = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad ; \ p, q > 0$$

Bsp. 15) $p, q > 0$, $f(x,y) := x^{p-1} y^{q-1}$

$B := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1 \} = \Delta^2$



$$\overset{S10}{\Rightarrow} \int_{\Delta^2} x^{p-1} y^{q-1}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 (u - uv)^{p-1} (uv)^{q-1}\,du\,dv$$

$$= \int_0^1 (1-v)^{p-1} v^{q-1}\,dv \int_0^1 u^{p+q-1}\,du = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \frac{1}{p+q}$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

Bsp. 16) $\varphi: (0,\infty)^2 \to (0,\infty)^2 : (\xi,\eta) \mapsto (x,y)$

$$\varphi(\xi,\eta) := (\underbrace{a\xi^{1/\alpha}}_{= x}, \underbrace{b\eta^{1/\beta}}_{= y}) \; ; \; a,\alpha,b,\beta > 0$$

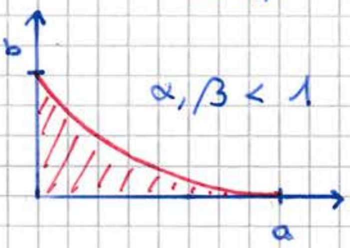
$$\Rightarrow \xi = (x/a)^\alpha, \quad \eta = (y/b)^\beta$$

$$\Rightarrow d\varphi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} a/\alpha \, \xi^{1/\alpha - 1} & 0 \\ 0 & b/\beta \, \eta^{1/\beta - 1} \end{pmatrix}$$

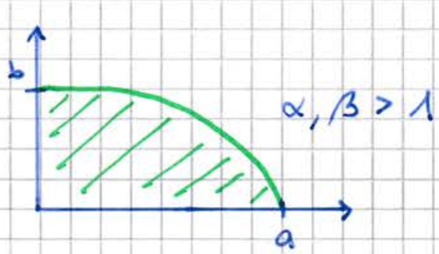
$$\Rightarrow \det(d\varphi(\xi,\eta)) = \frac{ab}{\alpha\beta} \xi^{1/\alpha - 1} \eta^{1/\beta - 1}$$

$$\Delta = \{(\xi,\eta) \mid \xi,\eta > 0, \; \xi + \eta = 1\}$$

$$\varphi(\Delta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y > 0, \; (\tfrac{x}{a})^\alpha + (\tfrac{y}{b})^\beta < 1\} =: \Delta^{a,b}_{\alpha,\beta}$$



;



$$f(x,y) = x^{p-1} y^{q-1}$$

$$\int_{\Delta^{a,b}_{\alpha,\beta}} x^{p-1} y^{q-1} \, dx\,dy \overset{S10}{=} \int_\Delta (a\xi^{1/\alpha})^{p-1} (b\eta^{1/\beta})^{q-1} \cdot \frac{ab}{\alpha\beta} \xi^{1/\alpha - 1} \eta^{1/\beta - 1} \, d\xi\, d\eta = \frac{a^p b^q}{\alpha\beta} \int_\Delta \xi^{p/\alpha - 1} \eta^{q/\beta - 1} \, d\xi\, d\eta$$

$$\overset{S15}{=} \frac{a^p b^q}{\alpha\beta} \cdot \frac{\Gamma(p/\alpha)\Gamma(q/\beta)}{\Gamma(p/\alpha + q/\beta + 1)}$$

Bsp. 17) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(-\|x\|^2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)$

$$\hookrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \ldots e^{-x_n^2} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\, dt \right)^n$$

φ ist C^∞-Diffeom.

<u>n = 2:</u> $\varphi: (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty,0] \times \{0\}$

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \mathrel{\hat{=}} (x,y)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = {}_0\int^{\infty} {}_{-\pi}\int^{\pi} f(r\cos\Theta, r\sin\Theta)\, r\, d\Theta\, dr$$

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \;;\; d\varphi(r,\Theta) = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -r\sin\Theta \\ \sin\Theta & r\cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\,dy = {}_0\int^{\infty} {}_{-\pi}\int^{\pi} e^{-r^2} r\, d\Theta\, dr$$

$$= \pi \, {}_0\int^{\infty} e^{-r^2} 2r\,dr = \pi \, {}_0\int^{\infty} e^{-s}\, ds = \pi = \left({}_{-\infty}\int^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2$$

$$\Rightarrow {}_{-\infty}\int^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \;\Rightarrow\; \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx_1 \ldots dx_n = \pi^{n/2}$$

Bsp. 18) $A = A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, A: pos. def.

$f(x) := e^{-x^T A x}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Lin Alg: $\exists\, B = B^T \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ pos. def. s.d.

$B^2 = A$

Definiere $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(x) := Bx$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow d\varphi = B$, $\det(B) \neq 0$

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|Bx\|^2} \det(B)\, dx$$

$$= \det(B) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^T B^T B x} dx = \sqrt{\det(A)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^T A x} dx$$

$\Rightarrow \forall$ pos. def., symm. Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^T A x} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}$$

<u>Beweis von Satz 11:</u>

(i): <u>Schritt 1:</u> Sei $(K_i) \subset \mathcal{K}(U)$ eine Folge, die die in i) geforderten Eigenschaften besitzt. Sei $K \subset U$ kmpkt.

$\Rightarrow \exists\, i \in \mathbb{N}$ s.d. $K \subset K_i$

Bew.: Annahme: $\forall i \in \mathbb{N}: K \not\subset K_i$

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x_i) \in K$ s.d. $x_i \not\in K_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists$ konv. TFolge (x_{i_ν}) mit $x_0 := \lim\limits_{\nu \to \infty} x_{i_\nu} \in K \subset U$

$\overset{\text{Bedingung}}{\Rightarrow} \exists i_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $x_0 \in K_{i_0} \subset \mathring{K}_{i_0+1}$

$\Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \geq \nu_0: \ x_{i_\nu} \in \mathring{K}_{i_0+1}$

Wähle $\nu \geq \nu_0$ und $i_\nu \geq i_0 + 1$

$\Rightarrow x_{i_\nu} \in K_{i_0+1} \subset K_{i_\nu} \Rightarrow \bot \Rightarrow$ Schritt 1 ✓.

Schritt 2: Sei $(K_i) \subset \mathcal{K}(U)$ wie in i) vorausgesetzt.

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} \int_{K_i} |f| = \sup_{K \in \mathcal{K}(U)} \int_K |f| =: C$$

Bew.: "$\leq$": trivial

"$\geq$": Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists K \in \mathcal{K}(U)$ s.d. $\int_K |f| > C - \varepsilon$

$\overset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow} \exists i \in \mathbb{N}$ s.d. $K \subset K_i$ und daher:

$$\int_K |f| \leq \int_{K_i} |f| \Rightarrow \lim_{i \to \infty} \int_{K_i} |f| \geq \int_K |f| \geq C - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} \int_{K_i} |f| \geq C \Rightarrow \text{Schritt 2} ✓.$$

Schritt 3: $(K_i) \subset \mathcal{K}(U)$: Folge wie in i) vorausgesetzt.

$\Rightarrow$ Die Folge $c_i := \int_{K_i} f \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, ist Cauchy

Bew.: Sei $\varepsilon > 0 \overset{\text{Schritt 2}}{\Rightarrow} \exists i_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\int_{K_{i_0}} |f| > C - \varepsilon$

$\Rightarrow$ Für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $j > i \geq i_0$ gilt: $|c_j - c_i| =$

$$\left| \int_{K_j} f - \int_{K_i} f \right| = \left| \int_{K_j \setminus K_i} f \right| \leq \int_{K_j \setminus K_i} |f|$$

$$= \int_{K_j} |f| - \int_{K_i} |f| \leq C - \int_{K_{i_0}} |f| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Schritt 3 ✓.

Schritt 3 $\Rightarrow$ Der Grenzwert $c := \lim_{i\to\infty} \int_{K_i} f$ existiert.

Wir zeigen zunächst *ii)* und kommen dann auf *i)* zurück.

ii): <u>Schritt 4:</u> $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_0 \subset \mathcal{K}(U) \ \forall K \subset \mathcal{K}(U): K_0 \subset K$

$\Rightarrow \left| c - \int_K f \right| < \varepsilon$ (*ii*). *ii)* gilt mit dieser Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

<u>Bew.:</u> Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

- $\int_{K_{i_0}} |f| > C - \varepsilon/2$
- $\forall i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq i_0 : \left| c - \int_{K_i} f \right| < \varepsilon/2$

Sei $K \in \mathcal{K}(U)$ mit $K_{i_0} \subset K$.

$\overset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow} \exists i \in \mathbb{N}$ s.d. $K \subset K_i$, $i \geq i_0 \Rightarrow \left| c - \int_K f \right| =$

$$\left| c - \int_{K_{i_0}} f - \int_{K \setminus K_{i_0}} f \right| \leq \left| c - \int_{K_{i_0}} f \right| + \int_K |f| - \int_{K_{i_0}} |f|$$

$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow$ Schritt 4 ✓

i): <u>Schritt 5:</u> *ii)* $\Rightarrow$ *i)*.

<u>Bew.:</u> Sei $(K_i') \subset \mathcal{K}(U)$ wie in *i)* vorausgesetzt. Sei $\varepsilon > 0$.

$\overset{ii)}{\Rightarrow} \exists K_0 \in \mathcal{K}(U)$ s.d. $\forall K \in \mathcal{K}(U): K_0 \subset K \Rightarrow$

$\left| c - \int_K f \right| < \varepsilon$. Nach Schritt 1: $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$K_0 \subset K'_{i_0}$, d.h. $\forall i \in \mathbb{N}: i \geq i_0 \Rightarrow K_0 \subset K_i'$

$\Rightarrow \left| c - \int_{K_i'} f \right| < \varepsilon \Rightarrow c = \lim_{i\to\infty} \int_{K_i'}$

$\Rightarrow$ Schritt 5 ✓

▨

Erinnerung: (Transformationsformel)

$U, V \subset \mathbb{R}^n$: offen, $\varphi: U \to V$ C^1-Diffeom., $A \subset U$ kmpkt. & Jordan-messbar, $f: \varphi(A) \to \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)\,|\det(d\varphi)|$$

$$f = 1: \quad \mu_n(\varphi(A)) = \int_A |\det(d\varphi)|$$

Def.: Ein C^1-Diffeom. $\varphi: U \to V$ heisst volumentreu, wenn $\mu_n(\varphi(A)) = \mu_n(A)$ für jede kmpkte & Jordan-messbare Menge $A \subset U$

Übg.) φ ist volumentreu $\Leftrightarrow |\det(d\varphi(x))| = 1 \;\; \forall x \in U$

Kap. 12: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$: C^1-VF, $\Omega := \{(t, x_0) \mid x_0 \in U, t \in I(x_0)\}$, (1): $\dot{x}(t) = f(x(t))$ & $x(0) = x_0$, $\varphi: \Omega \to U$: Fluss von f, $\varphi(t, x_0) := x(t)$, $x: I(x_0) \to U$ Lsg. v. (1), $U_t := \{x_0 \in U \mid t \in I(x_0)\}$, $\varphi_t: U_t \to U_{-t}$, $\varphi_t(x_0) := \varphi(t, x_0)$, φ_t ist ein C^1-Diffeom.

Frage: Wann ist φ_t volumentreu?

Lemma 8

Sei $\Phi(t) := d\varphi_t(x_0) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$, $\Phi: I(x_0) \to \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ ist C^1 und $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = \mathbb{1}$ (2), $A(t) := df(\varphi_t(x_0))$. Es sei nun: $I \subset \mathbb{R}$: offenes Intervall, $A: I \to \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ stetig, $\Phi: I \to \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ eine Lösung der obigen DGL (2).

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\det(\Phi(t)) = \mathrm{Spur}(A(t))\det(\Phi(t)), \quad \det(\Phi(0)) = 1$$

Beweis: $\rho: \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}: \Phi \mapsto \det(\Phi)$

Beh.: Für $\Phi \in GL_n(\mathbb{R})$: $d\rho(\Phi)\hat{\Phi} = \mathrm{Spur}(\Phi^{-1}\hat{\Phi})\det(\Phi)$

Bew.: Mittels Fallunterscheidung:

1. Fall: $\Phi = \mathbb{1}$

$\hookrightarrow$ $d\varrho(\mathbb{1})A = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varrho(e^{At})$, e_i: i-ter, kanon. Basisvektor

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(e^{At}e_1, \dots, e^{At}e_n)$

$= \det(Ae_1, \dots, e_n) + \det(e_1, Ae_2, \dots, e_n) + \dots + \det(e_1, \dots, e_{n-1}, Ae_n) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Spur}(A)$

2. Fall: $\Phi \in \text{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$, $\det(\Phi) \neq 0$, $\hat{\Phi} \in \text{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$,
$A := \Phi^{-1}\hat{\Phi}$

$\hookrightarrow$ $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varrho(\Phi e^{At}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varrho(\Phi)\varrho(e^{At})$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varrho(\Phi e^{At}) = d\varrho(\Phi)\hat{\Phi}$

$\overset{1.\text{Fall}}{=} \varrho(\Phi)\,\text{spur}(A)$

$= \det(\Phi)\,\text{Spur}(\Phi^{-1}\hat{\Phi})$ ▨

Antwort: Lemma 8 $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\det(d\varphi_t(x_0)) = \text{Spur}(df(\varphi_t(x_0)))\det(d\varphi_t(x_0))$ $\forall x_0 \in U$ $\forall t \in I(x_0)$ (3) (s. Def. unten!)

Def.: $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: C^1-VF. Die Divergenz von f ist die Funktion $\text{div}(f): U \to \mathbb{R}$, die durch $\text{div}(f)(x) := \text{Spur}(df(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$ für $x \in U$ definiert ist.
f heisst divergenzfrei, wenn $\text{div}(f) = 0$ ist.

SATZ 12

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$: C^1-VF & $\varphi_t: U_t \to U_{-t}$ der Fluss von f. Äquivalent sind:

i) f ist divergenzfrei
ii) $\det(d\varphi_t(x)) = 1$ $\forall x \in U$ $\forall t \in I(x)$
iii) φ_t ist volumentreu $\forall t \in \mathbb{R}$

Beweis: i) $\Leftrightarrow$ ii): folgt aus (3) und $\det(d\varphi_0(x_0)) = 1 \ \forall x_0 \in U$

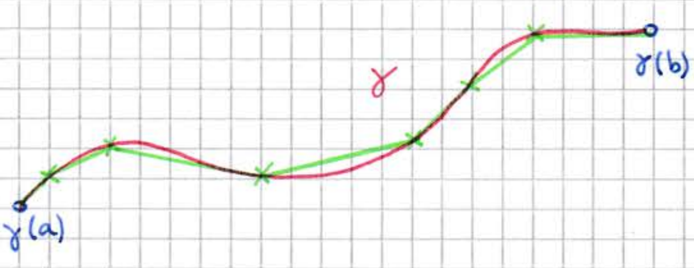
ii) $\Rightarrow$ iii): Transformationsformel / Satz 10

iii) $\Rightarrow$ ii): vorherige Übg. + Zwischenwertsatz

$\blacksquare$

Kapitel 14: Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Länge einer Kurve



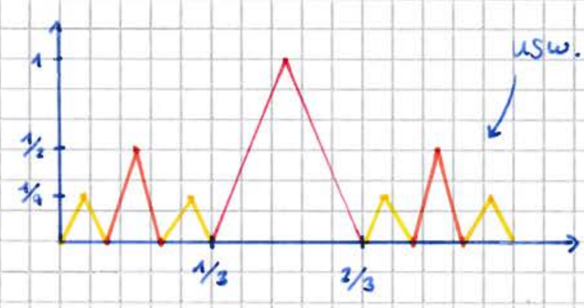
$\gamma: I := [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\mathcal{P}(I) = \{$ Partitionen $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ von $I = [a,b]\}$

$P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\} \in \mathcal{P}(I)$; $\quad L(\gamma, P) := \sum_{i=1}^{N} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|_2$

$L(\gamma) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} L(\gamma, P) \in [0, \infty]$

Bsp.) $n = 1$, $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}$



$\to$ Funktion ist stetig

$\to$ Länge geht gegen ∞

Def.: Eine stetige Funktion $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heisst rektifizierbar, wenn $L(\gamma) < \infty$ ist. $L(\gamma)$ heisst in diesem Fall Länge von γ.

Lemma 1

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig diff'bar.

$\Rightarrow$ γ ist rektifizierbar und $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt$

Beweis: 1. γ ist rektifizierbar und $L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt$

Bew.: Sei $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_N = b\} \in \mathcal{P}(I)$.

$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t) \, dt\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(t)\| \, dt$

$\overset{\sum_i}{\Rightarrow} L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(t)\| \, dt$

$= \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt$

2. $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$, $\dot\gamma$ gleichmässig stetig

$\Rightarrow \exists \, \delta > 0 \ \forall s, t \in I$ gilt: $|s - t| < \delta \Rightarrow \|\dot\gamma(s) - \dot\gamma(t)\|$ $< \frac{\varepsilon}{b-a}$. Wähle $P = \{t_0, \dots, t_N\} \in \mathcal{P}(I)$ mit $|t_i - t_{i-1}|$ $< \delta \ \forall i \Rightarrow \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$:

$\|\dot\gamma(t) - \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\| = \|\dot\gamma(t) - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(s) \, ds\|$

$= \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\dot\gamma(t) - \dot\gamma(s)) \, ds\| \leq \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(s)\| \, ds$

$< \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \|\dot\gamma(t)\| \leq \frac{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \ \forall i$

$\Rightarrow \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(t)\| \, dt \leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1})$

$\overset{\sum_i}{\Rightarrow} \int_a^b \dot\gamma(t) \, dt \leq L(\gamma, P) + \varepsilon \leq L(\gamma) + \varepsilon$

$\Rightarrow \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt \leq L(\gamma) \Rightarrow$ Gleichheit

Lemma 2

$\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar, $\varphi: [a', b'] \to I$ C^1-Diffeom.

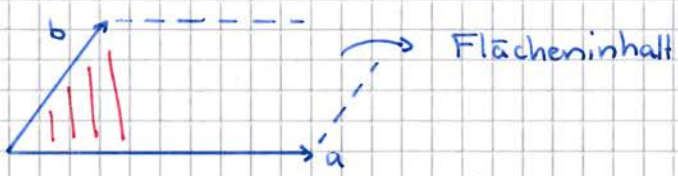
$\Rightarrow L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$

<u>Beweis:</u> $\frac{d}{dt'}(\gamma \circ \varphi)(t') = \dot\gamma(\varphi(t'))\,\dot\varphi(t)$

$$\Rightarrow L(\gamma \circ \varphi) = \int_{a'}^{b'} \|\dot\gamma(\varphi(t'))\|\,|\dot\varphi(t')|\,dt' \overset{TF}{=} \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt \quad \blacksquare$$

d-dimensionales Volumen

$a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$,
$b = (b_1, \dots, b_n)$



Flächeninhalt:
$\sqrt{\|a\|^2 \|b^2\| - \langle a, b\rangle^2}$; $\|a\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

Sei nun $d \in \{1, \dots, n\}$, $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$, $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$

$P(a_1, \dots, a_d) := \{ \sum_{i=1}^d t_i a_i \mid 0 \le t_i \le 1 \}$ "Parallelepiped"

Was ist das d-dimensionale Volumen von $P(a_1, \dots, a_d)$?

<u>Gesucht:</u> Funktion $V_d : (\mathbb{R}^n)^d \to [0, \infty)$, die jedem d-Tupel $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$ das Volumen $\mathrm{Vol}_d(P(a_1, \dots, a_d)) := V_d(a_1, \dots, a_d)$ zuordnet.

<u>Axiome:</u> V1) $\forall \lambda_i > 0 \ \forall a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, d$, gilt:
$V_d(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots, \lambda_d a_d)$ "Skalierung"
$= \prod_{i=1}^d \lambda_i \cdot V_d(a_1, \dots, a_d)$

V2) $V_d(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \dots, a_d)$ "Scherung"
$= V_d(a_1, \dots, a_d) \ \forall a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n \ \forall i \neq j$

V3) $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$, $\|a_i\| = 1 \ \forall i$, $\langle a_i, a_j\rangle = 0 \ \forall i \neq j$
$\Rightarrow V_d(a_1, \dots, a_d) = 1$ "Normalisierung"

Lemma 3

Sei $1 \le d \le n$. $\exists! \ V_d : (\mathbb{R}^n)^d \to [0, \infty)$, die V1-V3 erfüllt. Sie ist gegeben durch die Formel: $V_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det(A^T A)}$, wobei $A := (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{n \times d} \equiv \mathrm{Mat}_{nd}(\mathbb{R})$ und $A^T A = (\langle a_i, a_j \rangle)_{i,j=1}^{d}$. Es folgt sofort: $n = 1$: $V_1(a) = \|a\|$

$$n = 2: \quad V_2(a,b) = \sqrt{\det\begin{pmatrix} \|a\|^2 & \langle a,b \rangle \\ \langle b,a \rangle & \|b\|^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a,b \rangle^2}$$

Beweis: Übung

($\blacksquare$)

Lemma 4

Sei $d = n-1$, $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_1, \dots, a_{n-1})$, $A_k :=$ A mit der k-ten Zeile weggelassen, $A_k \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$, $\alpha_k := (-1)^{k-1} \cdot \det(A_k)$.

$$\Rightarrow V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2}$$

Notation: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T =: a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$

Beweis: Sei $x := (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. $\det(x, a_1, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_k = \langle x, \alpha \rangle \Rightarrow \langle \alpha, a_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n-1$

Die Matrix $B = (\alpha, a_1, \dots, a_{n-1}) = (\alpha, A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat Determinante $\det(B) = \|\alpha\|^2$

$$\Rightarrow B^T B = \begin{pmatrix} \alpha^T \\ A^T \end{pmatrix} (\alpha, A) = \begin{pmatrix} \|\alpha\|^2 & 0 \\ 0 & A^T A \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(B)^2 = \det(B^T B) = \|\alpha\|^2 \det(A^T A)$$

$$\Rightarrow \det(A^T A) = \|\alpha\|^2, \text{ da } \det(B)^2 = \|\alpha\|^4$$

$\blacksquare$

Lemma 5

Alle $\lambda_i > 0$, $Q := \bigtimes_{i=1}^{d} [0, \lambda_i] \subset \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $AQ = \{Ax \mid x \in Q\}$

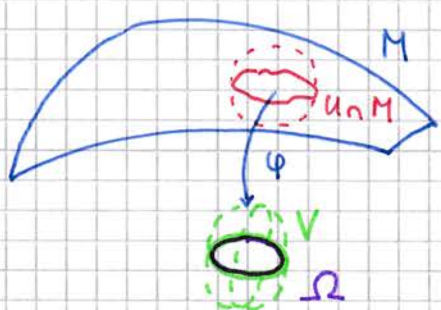
$$\Rightarrow \mathrm{Vol}_d(AQ) = (\det(A^T A))^{1/2} \cdot \mu_d(Q)$$

Beweis: $A = (a_1, \dots, a_d)$, $AQ = \{\sum_{i=1}^{d} t_i a_i \mid 0 \le t_i \le \lambda_i\}$
$= P(\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_d a_d)$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}_d(AQ) = v_d(\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_d a_d)$$
$$= \prod_{i=1}^{d} \lambda_i \, v_d(a_1, \dots, a_d) = \mu_d(Q) \cdot \sqrt{\det(A^T A)}$$

Integrale über Kartengebiete

$M \subset \mathbb{R}^n$: d-dim. Untermannigfaltigkeit, $U, V \subset \mathbb{R}^n$: offen.



$\varphi: U \to V$ sei eine Karte, d.h. ein C^1-Diffeom. s.d. $\varphi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Sei $\Omega := \{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0) \in V \}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen

Definiere $\psi: \Omega \to U \cap M$ durch

$\psi(x_1, \dots, x_d) := \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$

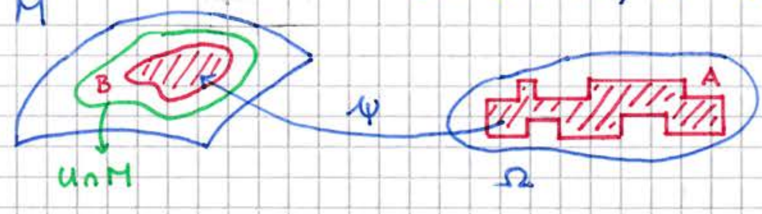
$\Rightarrow$
- ψ ist stetig diff'bar
- ψ^{-1} lässt sich fortsetzen zu einer C^1-Abb.: $U \to \mathbb{R}^d$
- $\psi: \Omega \to U \cap M$ ist ein Homöomorphismus.

Def.: Jede solche Menge $M \cap U$ heisst Kartengebiet und jedes solche $\psi: \Omega \to U \cap M$ heisst C^1-Parametrisierung eines Kartengebietes

Ziel: Für geeignete TMengen $B \subset U \cap M \subset \mathbb{R}^n$ sowie geeignete Funktionen $f: M \to \mathbb{R}$ das Integral von f über B definieren:

$$\int_B f \, dS$$

Etwas Heuristik: $\psi: \Omega \subset \mathbb{R}^d \to U \cap M$, $B = \psi(A)$, $A \subset \Omega$, $B \subset U \cap M$, A: Quadergebäude.



Wir wählen $Q_i \subset \mathbb{R}^d$: abg. Quader mit:

- $\mathring{Q}_i \cap \mathring{Q}_j = \emptyset$ für $i \neq j$
- $A = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$

Definiere $B := \varphi(A) = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi(Q_i) \to \mathrm{Vol}_d(\varphi(Q_i)) \approx \mathrm{Vol}_d(d\varphi(x_i)Q_i)$, $x_i \in Q_i$: Mittelpkt.

$\overset{LS}{\Rightarrow} \mathrm{Vol}_d(d\varphi(x_i)Q_i) = (\det(d\varphi(x_i)^T d\varphi(x_i)))^{1/2} \cdot \mu_d(Q)$

Sei $f: M \to \mathbb{R}$. Dann sei:

$$\int_{\varphi(A)} f \, dS \sim \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(x_i)) \mathrm{Vol}_d(\varphi(Q_i))$$
$$= \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(x_i)) (\det(d\varphi(x_i)^T d\varphi(x_i)))^{1/2} \mu_d(Q_i)$$
$$\sim \int_A f(\varphi(x)) (\det(d\varphi(x)^T d\varphi(x)))^{1/2} dx_1 \ldots dx_d$$

<u>Def.:</u> Annahmen:

i) $M \subset \mathbb{R}^n$: d-dim. Untermf.

ii) $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^d \to U \cap M$ C^1-Parametrisierung

iii) $A \subset \Omega$: kmpkt. & Jordan-messbar

iv) $B := \varphi(A)$, $f: M \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion s.d. $f \circ \varphi|_A : A \to \mathbb{R}$ Riemann-int'bar ist.

Dann definieren wir:

1) Das Integral von f über B ist die Zahl
$$\int_B f \, dS := \int_A f(\varphi(x)) \cdot (\det(d\varphi(x)^T d\varphi(x)))^{1/2} dx_1 \ldots dx_d$$

2) Das d-dimensionale Volumen von B ist die Zahl
$$\mathrm{Vol}_d(B) := \int_B 1 \, dS = \int_A (\det(d\varphi(x)^T d\varphi(x)))^{1/2} dx_1 \ldots dx_d$$

<u>Lemma 6</u>

Das Integral $\int_B f \, dS$ ist unabhängig von der Wahl des Kartengebietes $U \cap M$ mit $B \subset U \cap M$ und von der Wahl der C^1-Parametrisierung $\varphi: \Omega \to U \cap M$.

Beweis:

$$\begin{tikzcd} \Omega' \supset A' \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \\ \Omega \supset A \arrow[r, "\psi"] & U \cap M \end{tikzcd};$$

$g^{\psi}(x) = \left(\det(d\psi(x)^T d\psi(x))\right)^{1/2}$

φ: C^1 - Diffeom.

$\Rightarrow \psi \circ \varphi = \psi'$

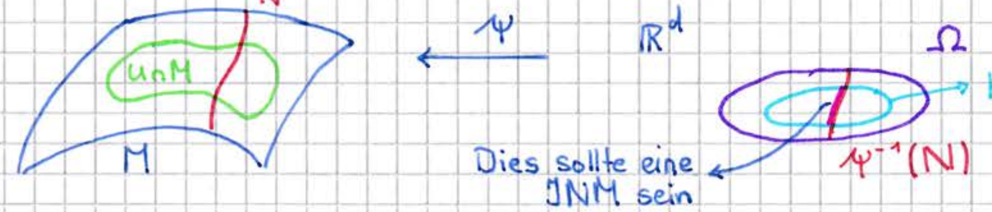
$$\hookrightarrow \int_{A'} (f \circ \psi')\, g^{\psi'} = \int_{A'} (f \circ \psi \circ \varphi)(g^{\psi} \circ \varphi)\,|\det(d\varphi)|$$

$$\overset{TF}{=} \int_{A = \varphi(A')} (f \circ \psi)\, g^{\psi} \quad \text{(Beweisskizze)}$$

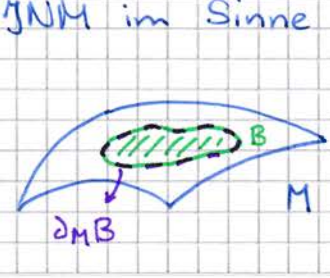
(▨)

Fragen:
1) Wie können wir das Integral von f über TMengen $B \subset M$ definieren, wenn B nicht in einem Kartengebiet enthalten ist?
2) Was für kmpkte TMengen $B \subset M$ können wir zulassen?
3) Was für Bedingungen an f müssen wir stellen?

Def.: Eine kmpkte TMenge $N \subset M$ heisst d-dimensionale JNM bzgl. M, wenn, für jede C^1-Parametrisierung $\psi : \Omega \to U \cap M$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ & $U \subset \mathbb{R}^n$ und jede kmpkte TMenge $K \subset \Omega$, wenn die Menge $K \cap \psi^{-1}(N) = \{x \in K \mid \psi(x) \in N\}$ eine JNM ist.



Eine kmpkte TMenge $B \subset M$ heisst Jordan-messbar bzgl. M, wenn die Menge $\partial_M B = \{x \in M \mid \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus B) \neq \emptyset\}$ eine JNM im Sinne der obigen Definition bzgl. M ist.

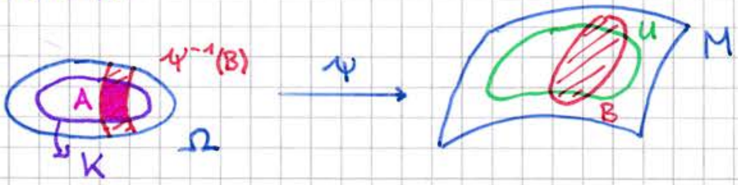


(M, d_M) ist ein metrischer Raum, wobei $d_M : M^2 \to [0,\infty)$ $d_M(x,y) := \|x-y\|_{\mathbb{R}^n}$ ist. In diesem Sinne gilt dann: $\partial_M B$ ist der Rand von B als TMenge des metrischen Raumes (M, d_M).

Lemma 7

Sei $B \subset M$ kmpkt. & Jordan-messbar bzgl. M, $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to U (\subset \mathbb{R}^n) \cap M$ C^1-Parametrisierung, $K \subset \Omega$ kmpkt. & Jordan-messbar in $\mathbb{R}^d$.

$\Rightarrow$ $A := K \cap \varphi^{-1}(B)$ ist eine kmpkte Jordan-messbare TMenge von $\mathbb{R}^d$



Beweis: 1. A kmpkt.

2. $\partial A \subset \underbrace{\partial K}_{\text{JNM}} \cup \underbrace{(K \cap \varphi^{-1}(\partial_M B))}_{\text{JNM}}$

Es bleibt zu zeigen: $\forall x \in \partial A : x \in \partial K \vee x \in (K \cap \varphi^{-1}(\partial_M B))$.

Sei $x \in \partial A \setminus \partial K \Rightarrow x \in K \setminus \partial K = \mathring{K}$, $\exists (x_i) \subset \Omega \setminus A$ s.d. $x_i \to x$. O.B.d.A.: $x_i \in \mathring{K}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x_i \notin A$: $\varphi(x_i) \notin B$ $\forall i \in \mathbb{N}$; $\varphi(x_i) \in M \setminus B \to \varphi(x)$

$\Rightarrow \varphi(x) \in \partial_M B \Rightarrow x \in K \cap \varphi^{-1}(\partial_M B)$ ▨

SATZ 1 (Partition der Eins)

$K \subset \mathbb{R}^n$ kmpkt, $U_1, \ldots, U_l \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset \bigcup_{i=1}^{l} U_i$

$\Rightarrow \exists$ C^∞-Abb. $g_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, l$, s.d.: $\operatorname{supp}(g_i) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \neq 0\}}$ ist kmpkt. und $\operatorname{supp}(g_i) \subset U_i$ für $i = 1, \ldots, l$, sowie $\forall x \in K$: $\sum_{i=1}^{l} g_i(x) = 1$

Beweis: **Schritt 1:** $\exists\, \varphi: \mathbb{R}^n \to [0,1]$, C^∞, s.d. $\varphi(x) = 0$ falls $\|x\| \geq 1$ und $\varphi(x) > 0$ falls $\|x\| < 1$.

Bew.: $\varphi(x) := \begin{cases} \exp(-1/1-\|x\|^2); & \|x\| < 1 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}$ ✓

Schritt 2: $\exists\, x_1, \dots, x_m \in K\ \exists\, \delta_1, \dots, \delta_m > 0\ \exists\, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, l\}$ s.d.:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{\delta_j}(x_j),\ \overline{B_{2\delta_j}(x_j)} \subset U_{i_j}\ \forall j = 1, \dots, m$$

Bew.: 1. $\forall x \in K\ \exists\, i(x) \in \{1, \dots, l\}$ s.d. $x \in U_{i(x)}$

2. $\forall x \in K\ \exists\, \delta(x) > 0$ s.d. $\overline{B_{2\delta(x)}(x)} \subset U_{i(x)}$

$\rightsquigarrow$ beide Schritte ohne AA!

3. $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\delta(x)}(x)$

$\overset{K \text{ kompkt.}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, x_1, \dots, x_m \in K$ s.d. $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{\delta(x_j)}(x_j)$

$\delta_j := \delta(x_j)$, $i_j := i(x_j)$ ✓

Schritt 3: $\exists\, C^\infty$-Fkt. $\varphi_0: \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ s.d. $\varphi_0(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j B_{2\delta_j}(x_j)$; $\varphi_0(x) = 0$ $\forall x \in \bigcup_j B_{\delta_j}(x_j)$

Bew.: (Idee)

Definiere $\sigma_0: \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ durch $\sigma_0(x) := \inf_{y \in \bigcup \overline{B_{2\delta_j}(x_j)}} \|x - y\|$

$\Rightarrow$ σ_0 ist Lipschitz-stetig: $\|\sigma_0(x) - \sigma_0(x')\| \leq \|x - x'\|$

$\hookrightarrow$ $\forall y \in \bigcup_j B_{2\delta_j}(x_j)$: $\sigma_0(x') \leq \|x' - y\| \leq \|x' - x\| + \|x - y\| \Rightarrow \sigma_0(x') \leq \|x' - x\| + \sigma_0(x)$

Wähle $\delta := \min_{j=1,\dots,m} \delta_j$. Definiere $\varphi_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\varphi_0(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_0(\xi)\, \varphi\left(\frac{x - \xi}{\delta}\right) d\xi_1 \dots d\xi_n =$$

$$= \int_{B_\delta(x)} \sigma_0(\xi)\, \varphi\left(\frac{x - \xi}{\delta}\right) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

$$x \in B_{\delta_j}(x_j) \Rightarrow B_\delta(x) \subset B_{\delta+\delta_j}(x_j) \subset B_{2\delta_j}(x_j)$$
$$\Rightarrow \varphi_0(x) = 0$$
$$\Rightarrow \varphi_0(x) = 0 \ \forall x \in K \subset \bigcup_{j=1}^m B_{\delta_j}(x_j) \quad \&$$
$$\varphi_0(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{B_{2\delta_j}(x_j)} \quad \&$$
$$\varphi_0 \text{ ist } C^\infty \text{ (per Fubini \& K10)} \quad \checkmark$$

Schritt 4: Definiere $\varphi_j : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ durch

$$\varphi_j(x) := \varphi\left(\frac{x - x_j}{2\delta_j}\right),\ x \in \mathbb{R}^n,\ j = 1,\dots,m$$
$$\Rightarrow \mathrm{supp}(\varphi_j) = \overline{B_{2\delta_j}(x_j)} \subset U_{i_j}$$
$$\Rightarrow \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow \varphi_0(x) = 0 \ \forall x \in K$$

Für $i = 1,\dots,l$ sei $J_i := \{ j \in \{1,\dots,m\} \mid i_j = i \}$

$\hookrightarrow \bigcup_{i=1}^l J_i = \{1,\dots,m\}$, $\rho_i(x) := \dfrac{\sum_{j\in J_i} \varphi_j(x)}{\sum_j \varphi_j(x)}$ für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \rho_i \text{ ist } C^\infty,\ \rho_i : \mathbb{R}^n \to [0,1],$$
$$\mathrm{supp}(\rho_i) = \overline{\bigcup_{j\in J_i} B_{2\delta_j}(x_j)} \subset U_i \text{ kmpkt.}$$
$$\sum_{i=1}^m \rho_i(x) = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i(x)}{\sum_{j=0}^m \varphi_j(x)} = 1 \ \forall x \in K$$

▨

Def.: $M \subset \mathbb{R}^n$: d-dim. C^1-UMf., $B \subset M$: kmpkt. und Jordan-messbar bzgl. M, $N \subset M$: d-dimensionale, kmpkte JNM, $f: M \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig auf $M \setminus N$. Wähle $U_1, \dots, U_l \subset \mathbb{R}^n$ offen s.d.

$$B \subset \bigcup_{i=1}^l U_i,\quad U_i \cap M : \text{Kartengebiet } \forall i$$

und wähle $\rho_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ C^∞ s.d. $\mathrm{supp}(\rho_i)$ kmpkt.

$\operatorname{supp}(\varrho_i) \subset U_i$, $\sum_{i=1}^{k} \varrho_i(x) = 1 \quad \forall x \in B$.

Das Integral von f über B ist die Zahl

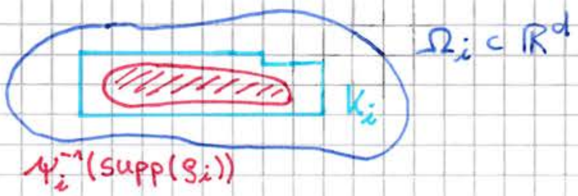
$$\int_B f \, dS := \sum_{i=1}^{k} \int_{B \cap U_i} \varrho_i f \, dS$$

Das d-dimensionale Volumen von B ist

$$\mathrm{Vol}_d(B) := \int_B 1 \, dS = \sum_{i=1}^{k} \int_{B \cap U_i} \varrho_i \, dS$$

Bem.: Der Summand $\int_{B \cap U_i} \varrho_i f \, dS$

Wähle eine C^1-Parametrisierung $\psi : \Omega_i \to U_i \cap M$, $\Omega_i \subset \mathbb{R}^d$. Wähle eine kmpkte Jordan-messbare Menge $K_i \subset \mathbb{R}^d$ s.d. $\psi_i^{-1}(\operatorname{supp}(\varrho_i)) \subset K_i \subset \Omega_i$



Weitere Mengen: $A_i := K_i \cap \psi_i^{-1}(B)$ kmpkt. & Jordan-messbar (L7), $N_i := K_i \cap \psi_i^{-1}(N)$ kmpkte JNM, $B_i := \psi_i(A_i)$, $(\varrho_i f) \circ \psi_i : A_i \to \mathbb{R}$ beschränkt, stetig auf $A_i \setminus N_i$

$$\Rightarrow \int_{B \cap U_i} \varrho_i f \, dS = \int_{B_i} \varrho_i f \, dS = \int_{A_i} \varrho_i(\psi_i(x)) f(\psi_i(x)) \cdot \sqrt{\det\left(d\psi_i(x)^T d\psi_i(x) \right)} \, dx$$

Bem.: Die Summe $\sum_{i=1}^{k} \int_{B \cap U_i} \varrho_i f \, dS$ ist unabhängig von der Wahl von U_i, ϱ_i.

Seien $V_1, \dots, V_m \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tau_1, \dots, \tau_m : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ C^∞, s.d. $M \cap V_j$: Kartengebiet, $M \cap \operatorname{supp}(\tau_j)$ kmpkt., $\operatorname{supp}(\tau_j) \subset V_j$, $B \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$, $\forall x \in B : \sum \tau_j(x) = 1$.

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{B\cap V_j} \tau_j f \, dS = \sum_{j=1}^{m} \int_{B\cap V_j} \Big(\sum_{i=1}^{l} \rho_i\Big) \tau_j f \, dS$$
$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \int_{B\cap V_j \cap U_i} \rho_i \tau_j f \, dS = \sum_{i=1}^{l} \int_{B\cap U_i} \sum_{j=1}^{m} \rho_i \cdot$$
$$\tau_j f \, dS = \sum_{i=1}^{l} \int_{B\cap U_i} \rho_i f \, dS$$

Bem.: $M \subset \mathbb{R}^n$: d-dim. C^1-UMf., $\mathcal{K}(M) := \{ K \subset M \mid K$ kmpkt. und Jordan-messbar bzgl. $M \}$, $f: M \to \mathbb{R}$ stetig.

Annahme: $\sup_{K \in \mathcal{K}(M)} \int_K |f| \, dS < \infty$

$\Rightarrow \exists!\, c \in \mathbb{R}$ s.d.:

i) Für jede Folge $(K_i) \subset \mathcal{K}(M)$ mit $K_i \subset \mathrm{int}_M(K_{i+1})$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = M$, gilt: $c = \lim_{i\to\infty} \int_{K_i} f \, dS$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists K_0 \in \mathcal{K}(M) \; \forall K \in \mathcal{K}(M)$: $K_0 \subset K \Rightarrow |c - \int_K f \, dS| < \varepsilon$

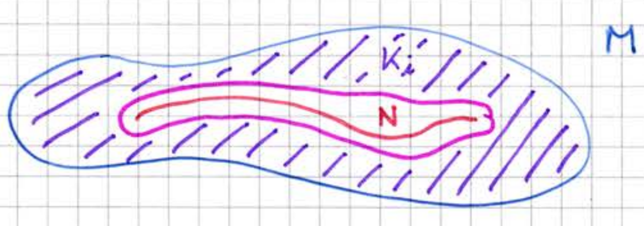
(Beweis: analog wie in K13/ Satz 11)

$c := \int_M f \, dS$ heisst Integral von f über M.

Bem.: $M \subset \mathbb{R}^n$: d-dim. kmpkte UMf., $N \subset M$: d-dim. NM, N kmpkt., $f: M \to \mathbb{R}$ stetig.

$\Rightarrow \int_M f \, dS = \int_{M\setminus N} f \, dS = \lim_{i\to\infty} \int_{K_i} f \, dS$

$\mathcal{K}(M\setminus N) \ni K_i$, $K_i \subset \mathrm{int}_{M\setminus N}(K_{i+1})$, $M \setminus N = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$

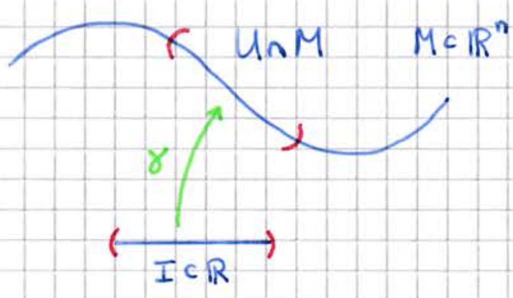


Bsp. 1) $d = 1$

$\varphi = \gamma : I \to U \cap M$

φ : C^1 - Parametrisierung

$I \subset \mathbb{R}$: off. Intervall



$$g^{\varphi}(t) = \left(\det (d\varphi(t)^T d\varphi(t)) \right)^{1/2}$$
$$= \left(\dot\gamma(t)^T \dot\gamma(t) \right)^{1/2}$$
$$= \| \dot\gamma(t) \|$$

$a, b \in I$, $a < b$, $B := \gamma([a,b])$

$$\int_{\gamma([a,b])} f \, dS = \int_a^b f(\gamma(t)) \| \dot\gamma(t) \| \, dt$$

$$\mathrm{Vol}_1 (\gamma([a,b])) = \int_a^b \| \dot\gamma(t) \| \, dt = L(\gamma|_{[a,b]})$$

$$\mathrm{Vol}_1 (\gamma(I)) = \int_I \| \dot\gamma(t) \| \, dt = L(\gamma)$$

Bsp. 2) $M = S^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

$\gamma : I \to M \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$

$\dot\gamma(t) := (-\sin(t), \cos(t)) \Rightarrow \| \dot\gamma(t) \| = 1$

$$\int_{S^1} f \, dS \overset{\text{Bem.}}{=} \int_{S^1 \setminus \{(-1,0)\}} f \, dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma([\varepsilon - \pi, \pi - \varepsilon])}$$

$$f \, dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi - \varepsilon} f(\cos(t), \sin(t)) \, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(t), \sin(t)) \, dt \Rightarrow \mathrm{Vol}_1(S^1) = \int_{S^1} 1 \, dS =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$$

Bsp. 3) $d = n - 1$

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1, $M := \{ (x, h(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \Omega \}$, $U = \Omega \times \mathbb{R}$, $U \cap M = M$, $\varphi : \Omega \to M$, $\varphi(x) := (x, h(x))$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega$

$\rightarrow$

$$d\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \\ \partial_1 h & \dots & & \partial_{n-1} h \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow g^{\varphi}(x) := \sqrt{\det(d\varphi(x)^T d\varphi(x))}$

$= \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)^2}$

$= \sqrt{1 + \|\nabla h(x)\|^2}$

$\Rightarrow \int_M f \, dS = \int_\Omega f(x, x(h)) \sqrt{1 + \|\nabla h(x)\|^2} \, dx_1 \dots dx_{n-1}$

Bsp. 4) Integral über S^{n-1}

$M_r := S_r^{n-1} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r \}$

$U_r := \{ x \in M_r \mid x_2 = 0 \Rightarrow x_1 > 0 \}$, $U_r \subset M_r$

$\hookrightarrow M_r \setminus U_r$ ist eine $(n-1)$-dim. NM

$\Omega := \{ \theta \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |\theta_1| < \pi, \ |\theta_i| < \pi/2$ für $i = 2, \dots, n-1 \}$

$\varphi_r : \Omega \to U_r$

$\hookrightarrow \varphi_r(\theta) := r \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \cdot \dots \cdot \cos(\theta_{n-1}) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \cdot \dots \cdot \cos(\theta_{n-1}) \\ \sin(\theta_2)\cos(\theta_3) \cdot \dots \cdot \cos(\theta_{n-1}) \\ \vdots \\ \sin(\theta_{n-1}) \end{pmatrix}$

$\cos(\theta_i) > 0$ für $i = 2, \dots, n-1$

$\Rightarrow \varphi_r$ ist bijektiv

$g^{\varphi_r}(\theta) = \sqrt{\det(d\varphi_r(\theta)^T d\varphi_r(\theta))} = r^{n-1} g(\theta)$

$g(\theta) = \cos(\theta_2)\cos^2(\theta_3)\cos^3(\theta_4) \cdot \dots \cdot \cos^{n-2}(\theta_{n-1}) > 0$

Sei $f : S_r^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \int_{S^{n-1}} f \, dS \overset{\text{Bem.}}{=} \int_{U_r} f \, dS$

$= \int_\Omega f(\varphi_r(\theta)) \, r^{n-1} g(\theta) \, d\theta = r^{n-1} \int_\Omega f(r \varphi_1(\theta)) \, g(\theta) \, d\theta$

$= r^{n-1} \int_{U_1} f(rx) \, dS(x) = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(rx) \, dS(x)$

$\Rightarrow \mathrm{Vol}_{n-1}(S_r^{n-1}) = r^{n-1} \, \mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1})$

Bsp. 5) $\omega_n := \mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1})$

$$= \int_\Omega g(\theta)\, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos(\theta_2)\, d\theta_2 \dots$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^{n-2}(\theta_{n-1})\, d\theta_{n-1} = 2\pi \prod_{k=1}^{n-2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^k(\theta)\, d\theta, \quad n \geq 3$$

$\hookrightarrow$ $\omega_1 = 2$

$\omega_2 = 2\pi$

$\omega_3 = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos(\theta)\, d\theta = 4\pi$

$\omega_4 = 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^2(\theta)\, d\theta = 2\pi^2$

Bsp. 6) $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq \|x\| \leq b\}, \quad 0 < a < b$

$\Psi : [a,b] \times \Omega \to \{x \in A \mid x_2 = 0 \Rightarrow x_1 > 0\} =: U$

$f : A \to \mathbb{R}$ stetig, $\Psi(r, \theta) := \Psi_r(\theta)$

$$\hookrightarrow \int_A f(x)\, dx_1 \dots dx_n = \int_U f(x)\, dx_1 \dots dx_n \overset{TF}{=}$$

$$\overset{TF}{=} \int_{[a,b]\times\Omega} f(\Psi_r(\theta)) \underbrace{|\det(d\Psi(r,\theta))|}_{r^{n-1} g(\theta)}\, d\theta\, dr$$

$$= \int_a^b \underbrace{\int_\Omega f(\Psi_r(\theta))\, r^{n-1} g(\theta)\, d\theta_1 \dots d\theta_n}_{\int_{S_r^{n-1}} f\, dS}\, dr$$

$$\Rightarrow \int_{a \leq \|x\| \leq b} f(x)\, dx_1 \dots dx_n = \int_a^b \left(\int_{S_r^{n-1}} f\, dS \right) dr$$

Fall: $f = 1$, $b = 1$, $a = \varepsilon \to 0$, $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

$$\mathrm{Vol}_n(B^n) = \int_{B^n} 1\, dx_1 \dots dx_n = \int_0^1 \mathrm{Vol}_{n-1}(S_r^{n-1})\, dr$$

$$= \int_0^1 r^{n-1} \omega_n\, dr = \frac{\omega_n}{n}$$

Man bezeichnet $\mathrm{Vol}_n(B^n)$ auch mit $\mathcal{K}_n$

Bsp. 7) $\omega_n := \mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1})$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq \|x\| \leq b, 0 < a < b \}$

$$\int_A f(x)dx = \int_a^b \left(\int_{S_r^{n-1}} f \, dS \right) dr$$

$h: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x) := h(\|x\|)$

$$\int_{S_r^{n-1}} f \, dS = h(r) \mathrm{Vol}_{n-1}(S_r^{n-1}) = r^{n-1} h(r) \omega_n$$

$$\Rightarrow \int_{a \leq \|x\| \leq b} h(\|x\|) \, dx = \int_a^b r^{n-1} h(r) \, dr \cdot \omega_n$$

$a \to 0, b \to \infty$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h(\|x\|) \, dx = \int_0^\infty r^{n-1} h(r) \, dr \cdot \omega_n$

Bsp. 8) $h(r) = e^{-r^2}$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx}_{= \pi^{n/2} \text{ (K13)}} = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr \cdot \omega_n = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} (r^2)^{n/2 - 1} 2r \, dr \cdot \omega_n$$

$\leadsto t = r^2$, $dt = 2r\,dr$: $\displaystyle = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{n/2 - 1} dt}_{\Gamma(n/2)} \cdot \omega_n$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \; ; \quad \omega_1 = 2, \; \omega_2 = 2\pi$$

$\Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$\Rightarrow \Gamma(k) = (k-1)!$, $\Gamma(2k+1/2) = \sqrt{\pi} \cdot 1/2 \cdot 3/2 \cdot \ldots \cdot 2k-1/2$

$$\omega_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}, \quad \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}$$

$\hookrightarrow \omega_3 = 4\pi$, $\omega_4 = 2\pi^2$, $\omega_5 = \frac{8\pi^2}{3}$, $\omega_6 = \pi^3$

$$\mathrm{Vol}_{2k}(B^{2k}) = \frac{\omega_{2k}}{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$$

Bsp. 9) Rotationsflächen

$f: [z_0, z_1] \to (0,\infty)$ stetig diff'bar

$M := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z_0 < z < z_1, \; x^2 + y^2 = f(z)^2 \}$: C^1-UMf.

<u>Beh.:</u> $\displaystyle F := \mathrm{Vol}_2(M) = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2} \, dz$

Bew.: $M^+ := \{(x,y,z) \in M \mid x > 0\}$

$h: \Omega := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z_0 < z < z_1,\ |y| < f(z)\} \to \mathbb{R}$

$h(y,z) := (f(z)^2 - y^2)^{1/2}$

$\to M^+ = \{(h(y,z), y, z) \in M \mid (y,z) \in \Omega\}$

$\overset{\text{Bsp. 3}}{\Rightarrow} \quad F/2 = \mathrm{Vol}_2(M^+) = \int_\Omega \sqrt{1 + \|\nabla h(y,z)\|^2}\, dy\, dz$

$\hookrightarrow \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{f(z)^2 - y^2}}$

$\hookrightarrow \dfrac{\partial h}{\partial z} = \dfrac{f(z) f'(z)}{\sqrt{f(z)^2 - y^2}}$

$\hookrightarrow 1 + \|\nabla h(y,z)\|^2 = \dfrac{y^2 + f(z)^2 f'(z)^2}{f(z)^2 - y^2} + 1 = \dfrac{1 + f'(z)^2}{1 - (y/f(z))^2}$

$$F/2 = \int_{z_0}^{z_1} \int_{-f(z)}^{f(z)} \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{1 - (y/f(z))^2}}\, dy\, dz \ ; \quad t := y/f(z)$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{1 - t^2}}\, f(z)\, dt\, dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2}\, dz \cdot$$

$\int_{-1}^{1} \dfrac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}$; $t = \sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

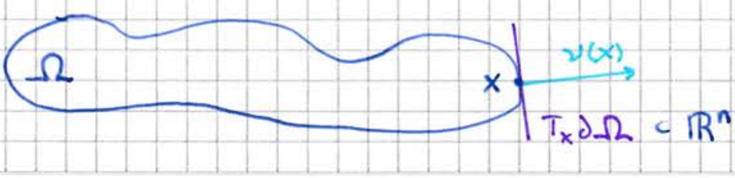
$dt/dx = \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - t^2}$

$\hookrightarrow \int_{-1}^{1} \dfrac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} dy = \pi$

Def.: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: offen & beschränkt.

1) Wir sagen Ω hat ein C^1-Rand (bzw. glatten Rand), wenn $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dim. C^1- (bzw. C^∞-) UMf. von $\mathbb{R}^n$ ist.

2) Ω habe einen C^1-Rand. Das äussere Einheitsnormalenfeld von Ω ist die (stetige) Abb. $\nu: \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ s.d. $\forall x \in \partial\Omega$: $\|\nu(x)\| = 1$, $\nu(x) \perp T_x\partial\Omega$, $x + t\nu(x) \notin \Omega$ für $t > 0$ hinreichend klein



Übg.) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen & beschränkt mit C^1-Rand

1. $\exists!$ äusseres Einheitsnormalenfeld $\nu : \partial\Omega \to S^{n-1}$
2. Dieses ist stetig
3. $\partial\Omega$ glatt $\Rightarrow$ $\nu(x)$ ist C^∞

Bsp.) $\Omega = B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$

$\hookrightarrow$ $\nu(x) = x$, $\partial\Omega = S^{n-1}$

Bsp.) $h : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ glatt & eigentlich, $c > 0$: reg. Wert

$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) < c\} \Rightarrow \partial\Omega = h^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = c\}$

$\hookrightarrow$ $\nu(x) = \dfrac{\nabla h(x)}{\|\nabla h(x)\|}$

SATZ 2 (Gauss)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: offen, beschränkt & mit C^1-Rand, $\nu : \partial\Omega \to S^{n-1}$: äusseres ENF, $(f_1, \dots, f_n)^T = f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: C^1-Vektorfeld,

$\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

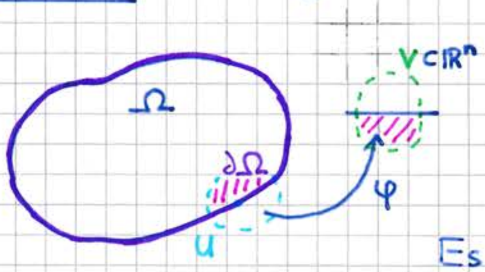
$$\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div}(f) = \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, dS$$

Beweis: Sei $x_0 \in \partial\Omega \Rightarrow \exists U \subset \mathbb{R}^n$: offen, $x_0 \in U$

$\exists V \subset \mathbb{R}^n$: offen

$\exists C^1$-Diffeom. $\varphi : U \to V$

s.d. $\varphi(U \cap \partial\Omega) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$



Es gilt: $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(x_0) \neq 0$ für ein i

O.B.d.A: $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x_0) > 0$ (Ansonsten: · x_i und x_n vertauschen
· x_n durch $-x_n$ ersetzen)

$\hookrightarrow$ $\varphi_n(x_0) = 0$, $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x_0) > 0$, $\varphi(U \cap \Omega) = \{y \in V \mid y_n < 0\}$

Notation: $x := (x_1, \dots, x_n)$, $x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x_0 := (x_{01}, \dots, x_{0n})$,
$x_0' := (x_{01}, \dots, x_{0n-1})$

Wähle $a, b \in \mathbb{R}$ s.d.:

- $a < x_{0n} < b$, $(x_0', x_n) \in U \ \forall x_n \in [a,b]$
- $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x_0', x_n) > 0 \quad \forall x_n \in [a,b]$

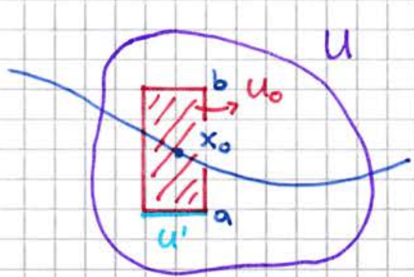
Es gilt: $\varphi_n(x_0', a) < 0 < \varphi_n(x_0', b)$

Wähle $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen s.d.:

- $x_0' \in U'$, $U' \times [a,b] \subset U$
- $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x', x_n) > 0 \quad \forall x' \in U' \ \forall x_n \in [a,b]$

Es gilt: $\varphi_n(x', a) < 0 < \varphi_n(x', b) \ \forall x' \in U'$

$U_0 := U' \times (a,b)$



$\Rightarrow \forall x' \in U' \ \exists! \ h(x') \in (a,b)$

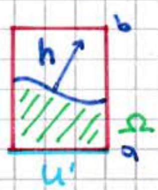
s.d. $\varphi_n(x', h(x')) = 0$

$h: U' \to (a,b)$: C^1 - Fkt. (K11/S3)

$\Rightarrow U_0 \cap \partial\Omega = \{(x', x_n) \mid x' \in U', \ x_n = h(x')\}$

$U_0 \cap \Omega = \{(x', x_n) \mid x' \in U', \ a < x_n < h(x')\}$

$\nu(x', h(x')) \in S^{n-1}$



$\hookrightarrow \nu_i(x', h(x')) = -\frac{\partial_i h(x')}{(1 + \|\nabla h(x')\|^2)^{1/2}}$, $i = 1, \ldots, n-1$

$\nu_n(x', h(x')) = \frac{1}{(1 + \|\nabla h(x')\|^2)^{1/2}}$

Annahme: $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}} \subset U_0$

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, dS = \int_{U'} \sum_{i=1}^{n} f_i(x', h(x')) \, \nu_i(x', h(x')) \cdot (1 + \|\nabla h(x')\|^2)^{\frac{1}{2}} \, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$= \int_{U'} \left(f_n(x', h(x')) - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x', h(x')) \, \partial_i h(x') \right) dx'$$

und: $$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f)(x) \, dx_1 \ldots dx_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{U'} \int_a^{h(x')} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x', x_n) \, dx_n \, dx'$$

<u>$i = n$:</u> $$\int_a^{h(x')} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x', x_n) \, dx_n = f_n(x', h(x')) - \underbrace{f_n(x', a)}_{=0} = f_n(x', h(x'))$$

$i \leq n-1 \rightarrow$

$\underline{i \leq n-1:}$ $\quad \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x', t+h(x'))\,dx' = 0 \; ; \; t \leq 0, \; i = 1, \dots, n-1$

(Fubini, FS d. D&I-R)

$$\Rightarrow 0 = \int_{-\infty}^{0} \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x', t+h(x'))\,dx'\,dt$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x', t+h(x'))\,dt\,dx'$$

$$= \int_{U'} \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x', t+h(x')) + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x', t+h(x')) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x') \right) dt\,dx'$$

$$= \int_{U'} \int_{a}^{h(x')} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x', x_n)\,dx_n\,dx' + \underbrace{\int_{U'} \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dt} f_i(x', t+h(x')) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x')\,dt\,dx'}$$

$$= \int_{U'} f_i(x', h(x')) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x')\,dx'$$

$\Rightarrow$ Gauss gilt $\forall f$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset U_0$

$\Rightarrow$ Jedes $x \in \overline{\Omega}$ hat eine offene Umgebung U s.d. Gauss $\forall f$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset U$ gilt

$\overset{\overline{\Omega} \text{ kompkt.}}{\Rightarrow}$ $\exists$ offene Mengen $U_1, \dots, U_l \subset \mathbb{R}^n$ s.d. $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ und Gauss gilt $\forall i \; \forall f$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset U_i$

$\overset{51}{\Rightarrow}$ $\exists\, \rho_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ glatt s.d. $\operatorname{supp}(\rho_i)$ kmpkt., $\operatorname{supp}(\rho_i) \subset U_i$ $\forall i = 1, \dots, l$ und $\sum_{i=1}^{l} \rho_i(x) = 1 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$

$$\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div}(f)\,dx = \sum_{i=1}^{l} \int_\Omega \operatorname{div}(\rho_i f) = \sum_{i=1}^{l} \int_{\partial\Omega} \langle \rho_i f, \nu \rangle\, dS$$

$$= \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle\, dS$$

$\blacksquare$

Bsp. 9) $f(x) = x$

$\hookrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{div}(f) = n$

$\Rightarrow n \cdot \operatorname{Vol}_n(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu(x) \rangle \, dS(x)$

Sei nun $\Omega = B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$

$\Rightarrow \partial\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \} = S^{n-1}$

$\Rightarrow \langle x, \nu(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 1 \quad \forall x \in S^{n-1}$

$\Rightarrow n \cdot \operatorname{Vol}_n(B^n) = \int_{S^{n-1}} 1 \, dS = \operatorname{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) = \omega_n$

$\Rightarrow \operatorname{Vol}_n(B^n) = \frac{\omega_n}{n}$ (s. Bsp. 5)

Bsp. 10) $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)^T$

$f(x) := \frac{x-a}{\|x-a\|^n}$, $x \neq a$; $f : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f_i(x) = \frac{x_i - a_i}{\|x-a\|^n} = (x_i - a_i)\left(\sum_j (x_j - a_j)^2 \right)^{-n/2}$

$\Rightarrow \partial_i f_i(x) = \frac{1}{\|x-a\|^n} - \frac{n(x_i-a_i)^2}{\|x-a\|^{n+2}}$

$\Rightarrow \operatorname{div}(f)(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i = \frac{n}{\|x-a\|^n} - \sum_{i=1}^n \frac{n(x_i-a_i)^2}{\|x-a\|^{n+2}} = 0$

Sei $a \in \Omega$ und wähle $r > 0$ s.d. $B_r(a) \subset \Omega$

$\Rightarrow 0 = \int_{\Omega \setminus \overline{B_r(a)}} \operatorname{div}(f) = \int_{\partial(\Omega \setminus \overline{B_r(a)})} \langle f, \nu \rangle \, dS$

$= \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, dS - \int_{\partial B_r(a)} \underbrace{\left\langle \frac{x-a}{\|x-a\|^n}, \frac{x-a}{\|x-a\|} \right\rangle}_{= \frac{1}{\|x-a\|^{n-1}} = (r^{n-1})^{-1}} dS(x)$

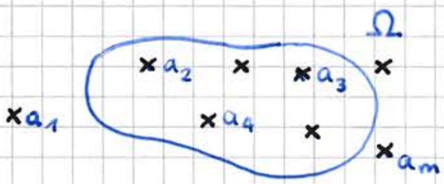
$= \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, dS - \underbrace{\frac{1}{r^{n-1}} \operatorname{Vol}_{n-1}(\partial B_r(a))}_{= \omega_n}$

$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \left\langle \frac{x-a}{\|x-a\|^n}, \nu(x) \right\rangle dS(x) = \begin{cases} \omega_n ; & a \in \Omega \\ 0 ; & a \notin \overline{\Omega} \end{cases}$

Bsp. 11) (Elektrodynamik)

$n = 3$; $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^3$; $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{R}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|^3}$$



Ladungsfluss: ($a_i \notin \partial\Omega \ \forall i$)

$$\int_{\partial\Omega} \langle E, \nu \rangle \, dS = \sum_{i=1}^{m} q_i \int_{\partial\Omega} \left\langle \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|^3}, \nu(x) \right\rangle dS(x)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ a_i \in \Omega}}^{m} 4\pi q_i = 4\pi \cdot \underbrace{q_{tot}}_{\substack{\text{Gesamtladung} \\ \text{in } \Omega}}$$

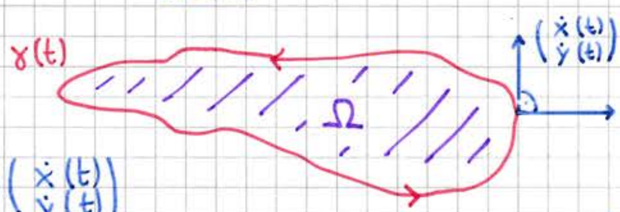
Bsp. 12) $n = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: offen & beschränkt, mit C^1-Rand

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$: C^1-Kurve, wobei $\gamma(t + T) = \gamma(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ und ein $T > 0$. $\gamma\big|_{[0,T)}$ injektiv, $\dot\gamma(t) \neq 0$,

$\gamma(\mathbb{R}) = \partial\Omega$

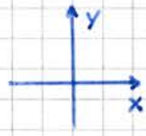
$\quad\ \ \| $

$\{\gamma(t) \mid 0 \leq t \leq T\}$



$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix}$

$\to \nu(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|} \begin{pmatrix} \dot y(t) \\ -\dot x(t) \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\mathbb{R}^2$:



$$\overset{\text{Bsp. 9)}}{\Longrightarrow} \mathrm{Vol}_2(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, dS \overset{\text{Bsp. 1)}}{=} \frac{1}{2} \int_0^T \langle f(\gamma(t)),$$

$$\nu(\gamma(t)) \rangle \, \|\dot\gamma(t)\| \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot y(t) \\ -\dot x(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)\dot y(t) - y(t)\dot x(t)) \, dt$$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}_2(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x\,dy - y\,dx)$$

Def: Sei V ein reeller VRm und $k \in \mathbb{N}$. Ein multilineares $\omega : V \times V \times \ldots \times V = V^k \to \mathbb{R}$ nennen wir eine alternierende k-Form, wenn:

$-\omega(v_1,\dots,v_k) = \omega(v_1,\dots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\dots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\dots,v_k)$
$\forall\, i,j \in \{1,\dots,k\}$ mit $i<j$ und $\forall\, v_1,\dots,v_k \in V$.
Eine alternierende 0-Form ist eine reelle Zahl.

$S_k := \{$Permutationen $\sigma : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}\}$. Man definiert $\nu(\sigma) := \{(i,j) \in \{1,\dots,k\}^2 \mid i<j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$ und $\varepsilon(\sigma) := (-1)^{\nu(\sigma)}$. Mittels diesen Definitionen ergibt sich für eine multilin. Abb. $\omega : V^k \to \mathbb{R}$:

$$\omega \text{ alternierend} \Leftrightarrow \omega(v_1,\dots,v_k) = \varepsilon(\sigma)\,\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) \quad \forall\, \sigma \in S_k\ \forall v_1,\dots,v_k \in V$$

<u>Bem.:</u> $V = \mathbb{R}^n$, $I := (i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$: Multiindex mit $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$. Definiere $dx_I : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ durch:

$$dx_I(v_1,\dots,v_k) := \det\left(v_{\nu i_\mu}\right)_{\nu,\mu=1}^{k} \quad \text{für } v_1,\dots,v_k \in \mathbb{R}^n \text{ und } v_\nu = (v_{\nu 1},\dots,v_{\nu n})$$

Spezialfall: $k=1$, $I = \{i\}$: $dx_i(v) = v_i$!

<u>Bem.:</u> Die Anzahl der Multiindizes $I = (i_1,\dots,i_k)$ mit $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ ist:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

<u>Bem.:</u> Die Menge $\Lambda^k V^k := \{\omega : V^k \to \mathbb{R} \mid \omega : \text{alt. } k\text{-Form}\} = \mathrm{Alt}^k_{\mathbb{R}}(V;\mathbb{R})$ (vgl. Lin Alg II) ist ein VRm über $\mathbb{R}$.
Es gilt: $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$, $\Lambda^1 V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R})$
<u>Übg.:</u> $k > \dim V \Rightarrow \omega = 0$

<u>Lemma 8</u>

$\dim V = n$, $k \in \{0,1,\dots,n\}$

$\Rightarrow$ i) $\dim \Lambda^k V^k = \binom{n}{k}$

ii) $V = \mathbb{R}^n$. Dann bilden die dx_I, $I = (i_1, \ldots, i_k)$ mit $1 \leq i_1 < \ldots$ $< \ldots < i_k \leq n$ eine Basis von $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$

Beweis: ii) $\Rightarrow$ i) : folgt aus Isomorphie von VRmen zum $\mathbb{R}^n$ und dem Fakt, dass wir nur $\binom{n}{k}$ dx_I haben.

ii) : $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, $a_I \in \mathbb{R}$.

Äquivalent sind:

a) $\omega = \sum_I a_I dx_I$

b) $a_I = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$, wobei $\{e_j\}_{j=1}^n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

a) $\Leftrightarrow$ b) : für $J = (j_1, \ldots, j_k)$ gilt: $dx_I(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) =$
$= \begin{cases} 1; & I = J \\ 0; & I \neq J \end{cases}$

($\blacksquare$)

Def.: V: reeller Vektorraum, $k, l \in \mathbb{N}$, $S_{k,l} := \{\sigma \in S_{k+l} \mid \sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(k); \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \ldots < \sigma(k+l)\}$ "shuffles".
Sei $\alpha \in \Lambda^k V^*$ und $\beta \in \Lambda^l V^*$. Das äussere Produkt von α und β ist die $(k+l)$-Form $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l} V^*$ die durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{k+l}) := \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \varepsilon(\sigma)\, \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\, \beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

für $v_1, \ldots, v_{k+l} \in V$ definiert ist.

Lemma 9

$\forall\, \alpha, \alpha' \in \Lambda^k V^*$, $\forall\, \beta \in \Lambda^l V^*$, $\forall\, \gamma \in \Lambda^m V^*$ gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } (\alpha + \alpha') \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + \alpha' \wedge \beta \\ \text{ii) } \beta \wedge \alpha = (-1)^{kl}\, \alpha \wedge \beta \\ \text{iii) } (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \wedge \beta \text{ ist bilinear}$$

Beweis: Übg. / s. LinAlg II

Bem.: Aus Lemma 9 folgt, wie bereits in L9 notiert, dass die Abb. : $\Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^*$ bilinear ist.

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

Lemma 10

$V = \mathbb{R}^n$, $I = (i_1, \dots, i_k)$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ und $i_j \in \mathbb{N}\ \forall j$.

$\Rightarrow dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Beweis: mittels vollständiger Induktion über k

IV: $k = 1$: folgt direkt aus Definition

IA: Identität gilt für $k-1 \in \mathbb{N}$

IS: Sei $I = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ und sei $I' := (i_1, \dots, i_{k-1})$. IA: $dx_{I'} = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}$.

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(v_1, \dots, v_k) = dx_{I'} \wedge dx_{i_k}(v_1, \dots, v_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j}\, dx_{I'}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k)\, dx_{i_k}(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \det\left(v_{\nu i_\mu} \right)_{\substack{\nu = 1, \dots, k,\ \nu \neq j \\ \mu = 1, \dots, k-1}} \cdot v_{j i_k}$$

$$= \det \begin{pmatrix} v_{1 i_1} & \dots & v_{k i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1 i_k} & \dots & v_{k i_k} \end{pmatrix} = dx_I(v_1, \dots, v_k)$$

$\blacksquare$

Def.: $U \subset \mathbb{R}^n$: offen, $k \in \mathbb{N}$.
Eine Differentialform auf U vom Grade k, auch k-Form genannt, ist eine C^∞-Abbildung $\omega: U \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ s.d. die Abbildung $\omega_x: (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R} : (\xi_1, \dots, \xi_k) \mapsto \omega(x, \xi_1, \dots, \xi_k)$ für jedes $x \in U$ eine alternierende k-Form ist. Im Falle $k = 0$ ist eine 0-Form auf U eine

glatte Abbildung $f: U \to \mathbb{R}$.

Notation: $\Omega^k(U) := \{\omega : U \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ ist eine } k\text{-Form}\}$

$\Omega^0(U) := C^\infty(U) := C^\infty(U, \mathbb{R})$

Bem.: Eine k-Form kann auch als glatte Abbildung $U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* : x \mapsto \omega_x$ verstanden werden.

$\mathcal{I}_k(n) := \{ I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \}$.

Nach L8 und L10 bilden die $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ für $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k(n)$ eine Basis von $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$

$\Rightarrow \omega \in \Omega^k(U)$ lässt sich in der Form:

$$\omega_x = \sum_{I \in \mathcal{I}_k(n)} a_I(x)\, dx_I \quad \text{schreiben mit } a_I : U \to \mathbb{R} \text{ glatt.}$$

Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$. Das äussere Produkt von $\alpha \in \Omega^k(U)$ und $\beta \in \Omega^l(U)$ die $(k+l)$-Form $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(U)$ mit $(\alpha \wedge \beta)_x := \alpha_x \wedge \beta_x$ für $x \in U$.

Die Rechenregeln aus L9 gelten auch hier.

Def.: Sei $\omega \in \Omega^k(U)$. Das Differential von ω ist die $(k+1)$-Form $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ die durch

$$(d\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{k+1})\, \xi_{i\nu}$$

Übg.: $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ $\left(d\omega = \sum_{\nu=1}^{n} \left(dx_\nu \wedge \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}\right)_x \right)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) \right)$

Bem.: Sei $k = 0$. Dann: $\omega = f : U \to \mathbb{R}$ (C^∞).

$\hookrightarrow (df)_x(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)\, \xi_\nu = df(x)\xi$ "Ableitung im üblichen Sinn"

Sei $\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_k(n)} a_I\, dx_I$ mit $a_I : U \to \mathbb{R}$ glatt.

$$\Rightarrow d\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_k(n)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_I}{\partial x_\nu}(x)\, dx_\nu \wedge dx_I = \sum_{I \in \mathcal{I}_k(n)} da_I \wedge dx_I$$

Es gilt: $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U) : \omega \mapsto d\omega$ ist linear.

Lemma 11

i) $\forall \alpha \in \Omega^k(U)\ \forall \beta \in \Omega^l(U)$ gilt:

$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$

ii) $\forall \omega \in \Omega^k(U)$ gilt: $d(d\omega) = 0$

Beweis: i): $\alpha = a\, dx_I$, $\beta = b\, dx_J$, $a, b : U \to \mathbb{R}$ C^∞, $I \in \mathcal{I}_k(n)$, $J \in \mathcal{I}_l(n)$.

$\Rightarrow \alpha \wedge \beta = ab\, dx_I \wedge dx_J$

$\Rightarrow d(\alpha \wedge \beta) = d(ab) \wedge dx_I \wedge dx_J = (da) b \wedge dx_I \wedge dx_J + a(db) \wedge dx_I \wedge dx_J = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$

ii): $k = 0$

$$d(df) = d\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu\right) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$$

$$= \sum_{\mu < \nu} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \right) dx_\mu \wedge dx_\nu = 0$$

Sei nun $\omega = a\, dx_I$.

$\Rightarrow d\omega = da \wedge dx_I \Rightarrow dd\omega = (d(da)) \wedge dx_I = 0$

∎

Def.: $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, beide offen, $f : U \to V$ glatt, $\omega \in \Omega^k(V)$. Die durch f zurückgeholte Differentialform $f^*\omega \in \Omega^k(U)$ ist definiert durch:

$$(f^*\omega)_x(\xi_1, \ldots, \xi_k) := \omega_{f(x)}(df(x)\xi_1, \ldots, df(x)\xi_k)$$

für $x \in U$, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$. Im Englischen wird dies als "Pullback" bezeichnet.

Lemma 12

$U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \in \mathbb{R}^r$: alle offen, $f: U \to V$, $g: V \to W$: beide glatt.

$\Rightarrow$ i) $\forall \omega \in \Omega^k(W)$ gilt: $(g \circ f)^* \omega = f^* g^* \omega$

ii) $\forall \alpha \in \Omega^k(V)\ \forall \beta \in \Omega^l(V)$ gilt: $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$

iii) $\forall \omega \in \Omega^k(V)$ gilt: $d(f^*\omega) = f^* d\omega$

iv) $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in V$, $\omega \in \Omega^k(V)$,

$$\omega_y = \sum_{J \in \mathcal{I}_k(m)} b_J(y)\, dy_J \Rightarrow (f^*\omega)_x = \sum_{I \in \mathcal{I}_k(n)} \sum_{J \in \mathcal{I}_k(m)} b_J(f(x)) \cdot$$

$\det\left(\frac{\partial f_J}{\partial x_I}(x)\right) dx_I$, wobei für $I = (i_1, \dots i_k)$ und $J = (j_1, \dots, j_k)$ gilt: $\frac{\partial f_J}{\partial x_I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_k}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_{j_k}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_k}}{\partial x_{i_k}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$

Beweis: iv): Manuskript

i): Kettenregel

ii): folgt sofort aus den Definitionen

iii): $\omega = g \in \Omega^0(V)$, $g: V \to \mathbb{R}$ C^∞

$\hookrightarrow f^*g = g \circ f$, $f: U \to \mathbb{R}$ C^∞, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow (d(f^*g))_x(\xi) = d(g \circ f)(x)\xi = dg(f(x))df(x)\xi$
$= (dg)_{f(x)}(df(x)\xi) = (f^*(dg))_x(\xi)$
$\Rightarrow d(f^*g) = f^*(dg)\ \forall g \in \Omega^0(V)$

Sei nun $g: V \to \mathbb{R} : y \mapsto y_j \Rightarrow dg = dy_j$
$\Rightarrow f^* dy_j = df_j$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$
$\overset{ii)}{\Rightarrow}$ Für $J = (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{I}_k(m)$ gilt: $f^* dy_J = df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_k} \Rightarrow$ Für $b_J: V \to \mathbb{R}$ gilt:
$f^*(b_J dy_J) = b_J \circ f\, df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_k}$
$\Rightarrow df^*(b_J dy_J) = d(\underbrace{b_J \circ f}_{f^* b_J}) \wedge df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_k} =$
$= f^* db_J \wedge f^* dy_{j_1} \wedge \dots \wedge f^* dy_{j_k} \overset{ii)}{=} f^*(db_J \wedge \dots$

$$\underbrace{db_y \wedge dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_k})}_{\ldots} = f^* d(b_y dy_y)$$

$$= db_y \wedge dy_y = d(b_y dy_y)$$

$\blacksquare$

<u>Bem.:</u> $U \subset \mathbb{R}^n$: offen

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n(U)$$

mit $d \circ d = 0$

$$\rightarrow \frac{\{\omega \in \Omega^k(U) \mid d\omega = 0\}}{\{\omega \in \Omega^k(U) \mid \exists \tau \in \Omega^{k-1}(U) \text{ s.d. } \omega = d\tau\}} =: H^k(U)$$

$H^k(U)$ heisst "deRham - Kohomologie von U"

ω heisst geschlossen, wenn $d\omega = 0$ ist.

ω heisst exakt, wenn $\exists \tau \in \Omega^{k-1}(U)$ s.d. $\omega = d\tau$

$$\Rightarrow H^k(U) = \frac{\{\text{geschl. } k\text{-Formen}\}}{\{\text{exakte } k\text{-Formen}\}} : \text{ reeller VRm}$$

<u>Bem.:</u> Sei nun $n = 3$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen.

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U)$$

$\hookrightarrow$ $\Lambda^0(\mathbb{R}^3)^* = \mathbb{R}$: Basis: 1

$\Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$: Basis: dx_1, dx_2, dx_3

$\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$: Basis: $dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2$

$\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$: Basis: $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$\hookrightarrow$ $f \in \Omega^0(U) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$

$\alpha \in \Omega^1(U) \Rightarrow \alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$; $a_i : U \to \mathbb{R}$

$$\Rightarrow d\alpha = da_1 \wedge dx_1 + da_2 \wedge dx_2 + da_3 \wedge dx_3$$

$$= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_3\right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \cdot dx_3\right) \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} dx_2\right) \wedge dx_3$$

$$= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1$$

$$+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \quad (*)$$

$$\hookrightarrow \begin{tikzcd} \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "\nabla"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Omega^3(U) \\ & C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \arrow[ur, "\mathrm{div}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \nabla \times v = \mathrm{rot}(v)$$

$$\hookrightarrow \mathrm{rot}(\nabla f) = 0; \; \mathrm{div}(\mathrm{rot}(v)) = 0; \; \mathrm{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} =: \Delta f$$

"Laplace - Operator"

<u>Integration von Diff.-Formen vom Grade d über d-dim. UMf $M \subset \mathbb{R}^n$</u>

<u>1. $d = n$:</u> $M = V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\omega \in \Omega^d(V)$, $y = (y_1, \dots, y_d)^T \in V \subset \mathbb{R}^d$

$\omega = g(y)\,dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d$, $g: V \to \mathbb{R}$, $B \subset V$: Jordan-messbar.

$$\Rightarrow \int_B \omega := \int_B g(y)\,dy_1 \dots dy_d \quad (\leftarrow \text{Riemann-Integral})$$

<u>2. Pullback:</u> $U, V \subset \mathbb{R}^d$: offen, $\varphi: U \to V$ ist C^∞-Diffeom.

$(\varphi^*\omega)_x = g(\varphi(x)) \det(d\varphi(x))\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$

Annahme: $\det(d\varphi(x)) > 0 \;\; \forall x \in U$

Solche Diffeom. heissen Orientierungserhaltend

$\Rightarrow$ Für $A := \varphi^{-1}(B) \subset U$: $\int_A \varphi^*\omega = \int_A g(\varphi(x)) \cdot$

$|\det(d\varphi(x))|\, dx_1 \dots dx_d \overset{\text{TF}}{=} \int_{\varphi(A)} g(y)\, dy_1 \dots dy_d$

$= \int_B \omega$ $\to$ wäre φ orientierungsumkehrend, gäbe es ein zus. Vorzeichen beim Integral.

Def.: Sei E ein d-dim. VR. $(v_1, \dots, v_d)$, $(w_1, \dots, w_d)$: Basen von E. Wir wissen: $\exists A \in GL(d, \mathbb{R})$ s.d.

$$v_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} w_j \quad , \quad i = 1, \dots, d$$

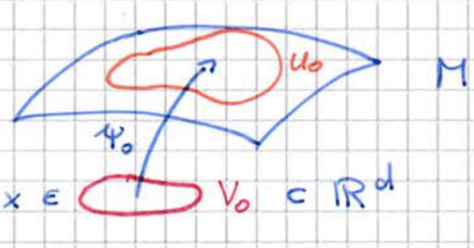
Die Basen haben die gleiche Orientierung, wenn $\det(A) > 0$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen von E mit zwei Äquivalenzklassen.

Die Orientierung von E ist somit die Wahl einer dieser Äquivalenzklassen. Die Elemente dieser Äquivalenzklasse heissen positive Basen.

Bsp.) $E = \mathbb{R}^d$, $\{e_i\}_{i=1}^d$: Std.-Basis von E. Dies def. die Std.-Orientierung vom $\mathbb{R}^d$.
$\{\xi_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R}^d$: andere Basis
Diese ist positiv $\iff \det(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) > 0$

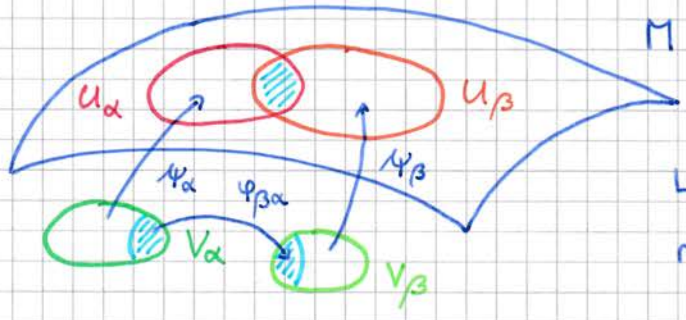
Def.: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dim. UMf. Eine Orientierung von M ist eine Familie von Orientierungen der Tangentialräume T_pM, eine für jedes $p \in M$, die folgende Bedingung erfüllen:

$\forall p_0 \in M$ $\exists$ Kartengebiet $U_0 \subset M$ mit $p_0 \in U_0$ $\exists V_0 \subset \mathbb{R}^d$ offen $\exists$ C^∞-Parametrisierung $\varphi_0 : V_0 \to U_0$ s.d. $\forall x \in V_0$ der Isomorphismus
$d\varphi_0(x) : \mathbb{R}^d \to T_{\varphi_0(x)}M$
orientierungserhaltend ist.



Jede solche Parametrisierung φ_0 heisst mit der Orientierung von M verträglich, oder etwas kürzer: φ_0 heisst orientiert.

Es existiert ein Atlas von orientierten C^∞-Parametrisierungen $\psi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$, $V_\alpha \subset \mathbb{R}^d$, $U_\alpha \subset M$, $\alpha \in A$, s.d. gilt: $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$



$\varphi_{\beta\alpha} := \psi_\beta^{-1} \circ \psi_A$

↳ $\varphi_{\beta\alpha}$ C^∞-Diffeom. mit $\det(d\varphi_{\beta\alpha}(x)) > 0$

$\mathbb{R}^d \supset \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^d$ offen

<u>Def.:</u> $M \subset \mathbb{R}^n$: orientierte C^∞-UMf mit $\dim M = d$. Sei $\{\psi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ein orientierter Atlas und $\omega \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$. Es sei zusätzlich $B \subset M$ kmpkt und Jordan-messbar bzgl. M mit $B \subset U_\alpha$. Man definiert nun das Integral:

$$\int_B \omega := \int_{\psi_\alpha^{-1}(B)} \psi_\alpha^* \omega$$

<u>Beh.:</u> Das Integral ist unabhängig von α.

<u>Bew.:</u> Annahme $B \subset U_\beta$

$$↳ \int_{\psi_\beta^{-1}(B)} \psi_\beta^* \omega = \int_{\varphi_{\beta\alpha}(\psi_\alpha^{-1}(B))} \psi_\beta^* \omega \overset{TF}{=} \int_{\psi_\alpha^{-1}(B)} \varphi_{\beta\alpha}^* \psi_\beta^* \omega = \int_{\psi_\alpha^{-1}(B)} (\psi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha})^* \omega = \int_{\psi_\alpha^{-1}(B)} \psi_\alpha^* \omega$$

∎

<u>Def.:</u> $M \subset \mathbb{R}^n$: orientierte d-dim. UMf., $B \subset M$ kmpkt. & Jordan-messbar bzgl. M., $\omega \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$.

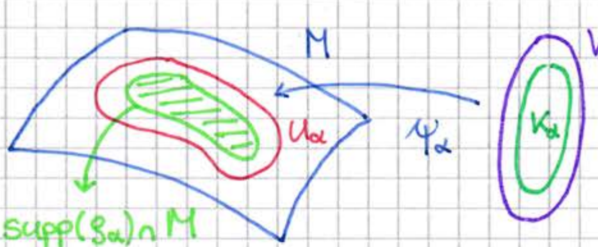
- Wähle endl. viele Kartengebiete $U_\alpha \subset M$ s.d. gilt:

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \supset B$$

- Wähle orientierte C^∞-Parametrisierungen $\varphi_\alpha : V_\alpha \subset \mathbb{R}^d \to U_\alpha$
- Wähle eine PdA $\rho_\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ glatt mit $\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \cap M \subset U_\alpha$, $\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \cap M$ kmpkt., wobei gelten soll: $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in B$

Definiere nun: $\int_B \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha \cap B} \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{K_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1}(B)} \varphi_\alpha^*(\rho_\alpha \omega)$,

wobei $K_\alpha \subset V_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ als Jordan-messb. gewählt ist, s.d. $\varphi_\alpha^{-1}(\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \cap M) \subset K_\alpha \subset V_\alpha$



Übg.: $\int_B \omega$ ist unabhängig von der Wahl von $U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha, K_\alpha, \rho_\alpha$, etc.

Bsp. 1) $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ orientiert
$T_x S^{n-1} \ni \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ pos. Basis $:\Longleftrightarrow \det(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) > 0$

Bsp. 2) $\mathbb{T}^n = \{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1 \}$ ist orientierbar ($\neq$ orientiert!)

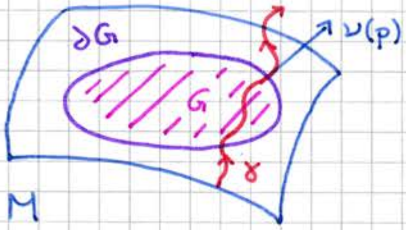
Bsp. 3) Möbiusband: nicht orientierbar! Orientierung der Basisvektoren des Tangentialraumes wechseln ihre Orientierung nach einmaligem Durchlauf

Bsp. 4) $M := \{ (x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy) \in \mathbb{R}^6 \mid x, y, z \in \mathbb{R},\ x^2+y^2+z^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^6$: nicht orientierbar (Übg.)

Def.: $M \subset \mathbb{R}^n$: d-dim. orientierte UMf., $G \subset M$ (M-offen) mit $\overline{G}$ (Abschluss rel. zu M) sei kmpkt. sowie $\partial_M G$ eine $(d-1)$-

dimensionale UMf. (alle diese Bedingungen seien ab jetzt mit (*) bezeichnet.)

Zur Orientierung von $\partial_M G =: \partial G$:



Sei $p \in \partial G$. Sei $\nu(p) \in T_p M$ so gewählt, dass
- $\|\nu(p)\| = 1$
- $\nu(p) \perp T_p \partial G$
- $\nu(p)$ zeigt nach aussen

"nach aussen": Für $\gamma: \mathbb{R} \to M$ C^∞ mit $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = \nu(p)$ gilt: $\gamma(t) \notin G$ $\forall t > 0$ klein & $\gamma(t) \in G$ $\forall t < 0$ klein.

$\nu: \partial G \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$: äusseres Normalenfeld.

Die Randorientierung von ∂G sei nun wie folgt definiert: Eine Basis $v_1, \dots, v_{d-1}$ von $T_p \partial G$ für $p \in \partial G$ heisst positiv, wenn die Basis $\nu(p), v_1, \dots, v_{d-1}$ von $T_p M$ positiv ist.

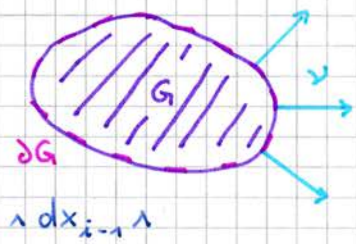
SATZ 3 (Stokes)

$M \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset M$ wie in (*), $\omega \in \Omega^{d-1}(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega$$

Beweis: 1. Fall: $d = n$, $M = \mathbb{R}^d$.

$G \subset \mathbb{R}^d$ offen & beschränkt, ∂G: $(d-1)$-dim. UMf, $\omega \in \Omega^{d-1}(\mathbb{R}^d)$. Sei nun $\nu: \partial G \to S^{d-1}$ und $v: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ C^∞, $v = (v_1, \dots, v_d)^T$,



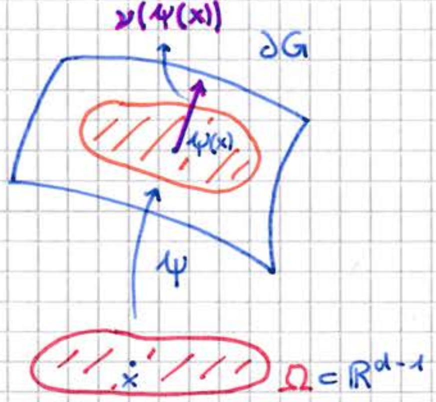
$$\omega := \omega_v := \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i-1} v_i(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d.$$

Beh: $\int_{\partial G} \omega_v = \int_{\partial G} \langle v, \nu \rangle \, dS$

Beh. $\Rightarrow \displaystyle\int_{\partial G} \omega = \int_{\partial G} \langle v, \nu \rangle \, dS = \int_G \operatorname{div}(v) \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d$

$= \displaystyle\int_G d\omega$ (Anm.: $\omega \in \Omega^{d-1}(\mathbb{R}^d)$)

<u>Bew.:</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ offen, $\psi : \Omega \to \partial G$ pos. C^∞-Param.



Formel für $\nu(\psi(x))$:

$$\nu_i(\psi(x)) \sqrt{\det(d\psi(x)^T d\psi(x))} = (-1)^{i-1} \det(\underbrace{d\psi(x)}_{\in \mathbb{R}^{d \times (d-1)}} \leftarrow \text{ohne } i\text{-te Zeile})$$

(Übg.)

$$\Rightarrow \int_{\psi(\Omega)} \langle v, \nu \rangle \, dS =$$

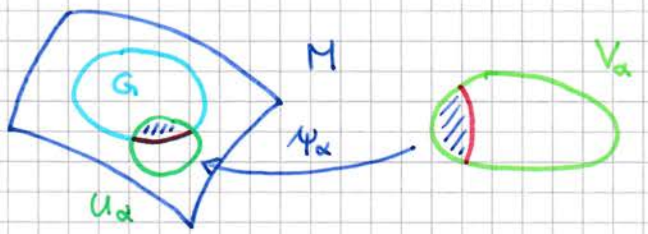
$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^d v_i(\psi(x)) \, \nu_i(\psi(x)) \sqrt{\det(d\psi(x)^T d\psi(x))} \, dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} v_i(\psi(x)) \underbrace{\det(d\psi(x) \leftarrow \text{ohne } i\text{-te Zeile}) \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d}_{= \psi^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_d)}$$

$$= \int_\Omega \psi^* \omega = \int_{\psi(\Omega)} \omega \quad \Rightarrow \text{Beh. via Pd1} \ \checkmark$$

<u>2. Fall:</u> allgemeine Situation: $\overline{G} \subset M \subset \mathbb{R}^n$, M: d-dim. UMf., G: M-offen, $\overline{G}$ kmpkt., $\partial G = \overline{G} \setminus G$: Rand relativ zu M. $U_\alpha \subset M$ endl. viele Kartengebiete mit $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset \overline{G}$; $\varphi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$: C^∞-Param., $V_\alpha \subset \mathbb{R}^d$: offen. Wähle C^∞-Abb. $\rho_\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ s.d. $\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \cap M$: kmpkt., $\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \cap M \subset U_\alpha$,

$\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in \overline{G}$ (φ_α ist orientiert)



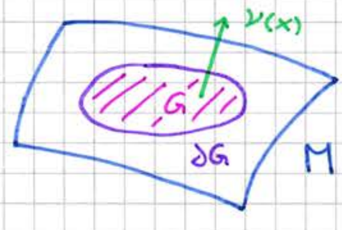
$G_\alpha := \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap G)$
$\partial G_\alpha := \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap \partial G)$

$\omega \in \Omega^{d-1}(\mathbb{R}^n)$, $W_\alpha := \psi_\alpha^*(\varrho_\alpha \omega) = (\varrho_\alpha \circ \psi_\alpha)\psi_\alpha$, $W_\alpha \in \Omega^{d-1}(V_\alpha)$, W_α hat kmpkten Träger.

$$\int_G d\omega = \int_G d\Big(\sum_\alpha \varrho_\alpha \omega\Big) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha \cap G} d(\varrho_\alpha \omega)$$
$$= \sum_\alpha \int_{G_\alpha} \psi_\alpha^* d(\varrho_\alpha \omega) = \sum_\alpha \int_{G_\alpha} d(\psi_\alpha^*(\varrho_\alpha \omega))$$
$$= \sum_\alpha \int_{G_\alpha} dW_\alpha = \sum_\alpha \int_{\partial G_\alpha} \omega_\alpha = \sum_\alpha \int_{\partial G_\alpha} \psi_\alpha^*(\varrho_\alpha \omega)$$
$$= \sum_\alpha \int_{U_\alpha \cap \partial G} \varrho_\alpha \omega = \sum_\alpha{}' \int_{\partial G} \varrho_\alpha \omega = \int_{\partial G} \omega$$

■

Spezialfall: $d = 2$, $n = 3$
$M \subset \mathbb{R}^3$: 2-dim. C^∞-UMf., $\overline{G} \subset M$: kmpkt.,
$G \subset M$: M-offen, $\partial G = \overline{G} \setminus G$: 1-dim. UMf.



$\nu: M \to S^2$: pos. ENF
ξ_1, ξ_2 : Basis von $T_x M$
↳ ξ_1, ξ_2 pos. Basis $\Longleftrightarrow$ $\det(\nu(x), \xi_1, \xi_2) > 0$

$\tau: \partial G \to S^2$: pos. Einheits-Tangentialfeld, d.h. für $x \in \partial G$ ist $\tau(x) \in \mathbb{R}^3$ der eindeutige Einheitsvektor $\tau(x) \in T_x \partial G$, $\|\tau(x)\| = 1$. $J(x)$ ist pos., d.h. $\det(\nu(x), \eta(x), \tau(x) > 0$ mit $\eta(x) \in T_x M$, $\eta(x) \perp T_x \partial G$, wobei ebenfalls gilt: $\|\eta(x)\| = 1$, $\eta(x)$ zeigt nach aussen.

SATZ 4 (klassischer Stokes)

$$\begin{cases} G \subset M \subset \mathbb{R}^3 \\ \nu : M \to S^2 \\ \tau : G \to S^2 \end{cases}$$ wie im obigen Spezialfall, $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^∞-VF.

$$\Rightarrow \int_G \langle \mathrm{rot}(V), \nu \rangle \, dS = \int_{\partial G} \langle V, \nu \rangle \, dS$$

Beweis: $\alpha = \sum_{i=1}^{3} V_i(x)\, dx_i \overset{S3}{\Rightarrow} \int_G d\alpha = \int_{\partial G} \alpha$

$\hookrightarrow \int_G d\alpha \underset{(1)}{\overset{!}{=}} \int_G \langle \mathrm{rot}(V), \nu \rangle \, dS \,;\; \int_{\partial G} \alpha \underset{(2)}{\overset{!}{=}} \int_{\partial G} \langle V, \gamma \rangle \, dS$

zu (1): $W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \mathrm{rot}(V) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \omega := d\alpha = W_1\, dx_2 \wedge dx_3 - W_2\, dx_1 \wedge dx_3 + W_3\, dx_1 \wedge dx_2 \longrightarrow W_1 = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}$

$\overset{\text{Beh.}}{\underset{S3}{\Rightarrow}} \int_G d\alpha = \int \langle W, \nu \rangle \, dS$ ✓

zu (2): ∂G sei zusammenhängend

Wähle pos. C^∞-Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \to \partial G$, d.h. $\dot\gamma(t) = \lambda(t)\, \tau(\gamma(t))$, $\gamma|_{[0,T)}$ inj.

$\lambda(t) > 0$, $\gamma(t+T) = \gamma(t) \; \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_{\partial G} \alpha = \int_0^T \alpha(\gamma(t), \dot\gamma(t))\, dt = \int_0^T \sum_{i=1}^{3} V_i(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)\, dt = \int_0^T \langle V(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^T \langle V(\gamma(t)), \tau(\gamma(t)) \rangle \underbrace{\lambda(t)}_{= \|\dot\gamma(t)\|} dt$$

$$= \int_{\partial G} \langle V, \tau \rangle \, dS$$

▨

SATZ 5

$G \subset \mathbb{R}^n$ offen & beschränkt, mit C^∞-Rand, $\overline{G} \subset U \subset \mathbb{R}^n$, U: offen.

$\Rightarrow \nexists$ C^∞-Abbildung $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ s.d. $\varphi(\overline{G}) \subset \partial G$ und $\varphi(x) = x$ $\forall x \in \partial G$

Beweis: $\omega := x_1 \, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$, $d\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$d\varphi(x)\xi \in T_{\varphi(x)}\partial G \quad \forall x \in \overline{G} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \det(d\varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in \overline{G} \quad (1)$

$\Rightarrow d\varphi(x)\xi = \xi \quad \forall x \in \partial G \quad \forall \xi \in T_x \partial G \quad (2)$

$$\Rightarrow \int_G \varphi^* d\omega \overset{(1)}{=} \int_G \det(d\varphi(x))\, dx_1 \ldots dx_n = 0$$

$$\int_G \varphi^* d\omega = \int_G d\varphi^*\omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial G} \varphi^*\omega \overset{(2)}{=} \int_{\partial G} \omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_G d\omega = \int_G 1 \, dx_1 \ldots dx_n$$

$$0 = \mathrm{Vol}_n(G) \quad \updownarrow \ \lightning$$

$\Rightarrow \perp$ zur (unsichtbaren) Annahme, dass ein solches φ unter den gegebenen Bedingungen existiert. ∎

Korollar 1 (Spezialfall des Browerschen Fixpunktsatzes)

$B := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1 \} \subset U$ (offen) $\subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^n$ (C^∞) mit $f(B) \subset B$

$\Rightarrow \exists x \in B$ mit $f(x) = x$

Bew.: $U_\varepsilon := \{ x \in U \mid \|x\| < 1+\varepsilon \}$. Annahme: $\nexists$ Fixpunkt

$\Rightarrow B \subset U_\varepsilon$ ($f(x) \neq x \ \forall x \in U_\varepsilon$)

Definiere eine Abb. $\varphi: B \to \partial B = S^{n-1}$ durch

$\varphi(x) := x + t(x)(x - f(x))$, $t(x) > 0$

Definiere $t(x)$ durch:

$$t(x) = \frac{1}{\|x-f(x)\|}\left(\left(\|x\|^2 - 1 + \langle x, \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}\rangle^2\right)^{1/2} - \langle x, \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}\rangle\right) \in \mathbb{R}, \quad \|x\| < 1+\varepsilon$$

$\Rightarrow \varphi$ ist C^∞, $\varphi(B) \subset \partial B$ mit $\varphi(x) = x \ \forall x \in \partial B$

$\Rightarrow \perp$ zu Satz 5 ▨

Korollar 2 (Browerscher Fixpunktsatz)

Jede stetige Abbildung $f: B \to B$ besitzt einen Fixpunkt $x = f(x) \in B$.

Bew.: Annahme: $f(x) \neq x \ \forall x \in B$

$\Rightarrow \inf_{x \in B} \underbrace{\|f(x) - x\|}_{=: 4\varepsilon} > 0$

Weierstrass - Approximationssatz:

$\exists$ Polynom $p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s.d. $\|f(x) - p(x)\| \leq \varepsilon \ \forall x \in B$

$\Rightarrow \|p(x)\| = \|p(x) - f(x) + f(x)\|$

$\leq \|p(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \varepsilon + 1 \quad \forall x \in B$

Definiere $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch: $g(x) := \frac{1}{1+\varepsilon} p(x)$

$\Rightarrow$
- $g(B) \subset B$
- g ist C^∞

$$\|x - g(x)\| = \|x + f(x) + \frac{f(x)-p(x)}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon f(x)}{1+\varepsilon}\| \geq \|x - f(x)\| - \underbrace{\frac{\|f(x)-p(x)\|}{1+\varepsilon}}_{\leq \varepsilon} - \underbrace{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\underbrace{\|f(x)\|}_{\leq 1}}_{\leq \varepsilon} \geq \|x-f(x)\| - 2\varepsilon \geq 2\varepsilon > 0$$

$\Rightarrow \perp$! ▨

Korollar 3 (Perron - Frobenius)

$(a_{ij})_{i,j=1}^n = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a_{ij} > 0 \ \forall i,j$

$\Rightarrow \exists x = (x_1, \dots, x_n) \ \exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.d. $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, $\lambda > 0$, $x_i \geq 0 \ \forall i$

Bew.: $\Delta := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \}$, $\|\xi\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$

$\hookrightarrow$ Definiere $f : \Delta \to \Delta : x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$, f stetig

$\exists$ Homöomorphismus $\varphi : B \to A$

$\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : B \to B$ stetig $\overset{K2}{\Rightarrow} \exists y \in B : g(y) = y =$
$= \varphi^{-1}(f(\varphi(y)))$

$\hookrightarrow x = f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$, $\lambda = \|Ax\|_1 > 0$ ▨

Epilog: Ausblick

$M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^l$: kmpkte C^∞-UMf'en
$f : M \to N$: Wie definiert man Stetigkeit? Differenzierbarkeit?

Def.: f heisst glatt (C^∞), wenn $\exists \Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen, $M \subset \Omega$, $\exists$ glatte Abb. $F : \Omega \to \mathbb{R}^l$ s.d. $f(x) = F(x)$ $\forall x \in M$
Alternativ: $\forall$ Kartengebiete $U \subset M$ $\forall$ C^∞-Parametr. $\psi : V (\subset \mathbb{R}^d) \to U$ ($d := \dim M$) ist die Abb. $f \circ \psi : V \to \mathbb{R}^l$ glatt ist.

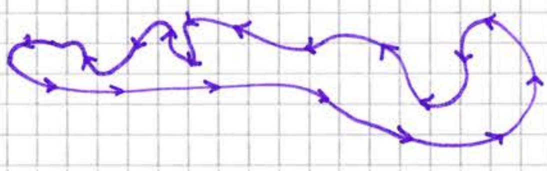
<u>Übg.:</u> Diese Definitionen sind äquivalent.

Def.: Eine Abb. $f : M \to N$ heisst (C^∞-) Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und $f : M \to N$, $f^{-1} : N \to M$ glatt sind.

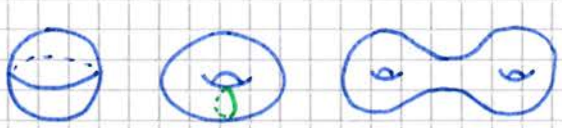
M, N heissen diffeomorph, wenn ein Diffeomorph. $f : M \to N$ existiert, bzw. homöomorph, wenn ein Homöomorphismus $f : M \to N$ existiert.

Frage: Sei $d \in \mathbb{N}$. Wann sind zwei kmpkte d-dim. C^∞-UMf. diffeomorph bzw. homöomorph?

<u>partielle Antwort:</u> <u>$d=1$:</u> Jede kmpkte, zush. 1-dim. C^∞-UMf ist diffeomorph zu $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$



<u>$d=2$:</u> M kmpkt. & orientierbar



S^2 $\quad$ T^2 $\quad$ "Brezel"

$g=0$ $\quad$ $g=1$ $\quad$ $g=2$

g: "Geschlecht v. M"

$g := \sup\{k \in \mathbb{N} \mid \exists\, k$ 1-dim. zush. UMf. $C_1, C_2, \dots, C_k \subset M$ s.d.

$M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ zush. ist.

<u>"SATZ"</u>

Zwei 2-dim., orientierbare, kmpkte und glatte UMf sind genau dann diffeomorph, wenn sie das gleiche Geschlecht besitzen.

<u>Beweis:</u> geschenkt

(▨)

<u>Def.:</u> S, M: metr. Rme

- zwei stetige Abb. $f_0, f_1 : S \to M$ heissen homotop, wenn eine stetige Abb. $F: [0,1] \times S \to M$ existiert, s.d.:

  $$F(0,s) = f_0(s), \quad F(1,s) = f_1(s) \quad \forall s \in S$$

  Notation: $f_0 \sim f_1$

- Eine stetige Abb. $f: S \to M$ heisst zusammenziehbar, wenn sie zu einer konst. Abb.

homotop ist.

- M heisst einfach zush., wenn M zush. ist und jede stetige Abb. $\gamma: S^1 \to M$ zusammenziehbar ist.

Bsp. 1) Für $d \geq 2$ ist $M = S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| = 1\}$ einfach zush.

Je zwei Funktionen $f_0, f_1 : S \to S^d$ mit $\|f_0(s) - f_1(s)\| < 2 \ \forall s \in S$ sind homotop

$$f_t(s) := \frac{(1-t) f_0(s) + t f_1(s)}{\|(1-t) f_0(s) + t f_1(s)\|} \in S^d, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\begin{cases} [0,1] \times S \to S^d \\ \quad (t,s) \mapsto f_t(s) = F(t,s) \end{cases}$$

$\gamma: S^1 \to S^d$, $d \geq 2$ diff'bar aber nicht surj., d.h. $\exists p \in S^d$ s.d. $p \neq \gamma(s) \ \forall s \in S^1$. Sei $\beta: S^1 \to S^d$ die konst. Abb. $\beta(s) := -p \ \forall s \in S^1$

$\Rightarrow \|\beta(s) - \gamma(s)\| < 2 \ \forall s \in S^1 \Rightarrow \gamma \sim \beta$

Bsp. 2) $f_0, f_1 : S^2 \to S^2$; $f_0(x) := x$, $f_1(x) := -x$

$\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$

$$\int_{S^2} f_0^* \omega = 4\pi \ ; \ \int_{S^2} f_1^* \omega = -4\pi$$

<u>Korollar</u>

$v: S^2 \to \mathbb{R}^3$ glatt, $v(x) \in T_x S^2$

$\Rightarrow \exists x \in S^2$ s.d. $v(x) = 0$

<u>Bew.:</u> Ann.: $v(x) \neq 0 \ \forall x$.

Sei $f_t(x) := \cos(\pi t) x + \sin(\pi t) \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \in S^2$, $f_t: S^2 \to S^2$, $0 \leq t \leq 1$, $x \in S^2$: $f_0(x) = x$, $f_1(x) = -x$

Poincaré - Vermutung ($d = 3$)

Jede kmpkte, einfach zush. 3-dim glatte Mf ist diffeomorph zu S^3 (1904)

Beweis: Grigori Perelman (2003)

$\blacksquare$

Verallgemeinerung: $d = 4$, $M = S^2 \times S^2$

↳ einfach zush., aber nicht diffeomorph zu S^4

$d = n$: ?

Def.: Eine Mannigfaltigkeit heisst k-fach zusammenhängend, wenn für jedes $m \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ jede stetige Abb. $f: S^m \to M$ zush. ist.

Poincaré - Vermutung ($d \in \mathbb{N}$)

$$k := \left[d/2 \right] = \begin{cases} d/2 \; ; & d \text{ gerade} \\ d-1/2 \; ; & d \text{ ungerade} \end{cases}$$

Jede kmpkte, k-fach zush. d-dim. glatte Mf M ist homöomorph zu S^d

Beweis: $d = 1, 2$: "easy" ✓.

$d = 3$: Grigori Perelman 2003

$d = 4$: Michael Freedman 1982

$d \geq 5$: Stephen Smale 1960

Frage: Gilt sogar "M diffeomorph zu S^d" in der Poincaré - Vermutung?

Antwort: $d = 1, 2, 3, 5, 6$: JA! ; $d = 7$: NEIN! ; $d = 4$: offen!

Ende Analysis II !

→

Bemerkungen zu dieser Mitschrift:

Ich wäre sehr verbunden, könnten diejenigen, die diese Mitschrift verwenden, folgenden Bitten nachkommen:

- Da diese Mitschrift im „Eifer des Gefechts" entstand, werden sich unweigerlich Fehler verschiedenster Art eingeschlichen haben. Ich bitte deshalb darum, mir die folgenden Fehler zu melden:

  - falsche mathematische Formeln / Ausdrücke / Formulierungen. WICHTIG: Hiermit meine ich eindeutige bzw. klar ersichtliche Fehler, wie z.B.:
    i) $\exists x \in \emptyset \ldots$ *Nonsense*
    ii) A anstatt $\overline{A}$ *leichte Typos*
    iii) $\varphi(x)$ anstatt $\psi(x)$ *schwere Typos*
    iv) "... isomorph ..." anstatt "... homöomorph ..."
    Verwechslungen

    Wenn Ihr Euch nicht sicher seid, so bitte ich darum, zuerst bei Euren KommilitonInnen / Assistierenden nachzufragen, ob es sich wirklich um einen Fehler handelt. Falls ja, dann wäre ich selbstverständlich froh, darüber in Kenntnis gesetzt zu werden. Ich habe leider zu wenig Zeit bzw. Kompetenz, um detaillierten konzeptionellen Fragen auf den Grund zu gehen.

  - Falls vorhanden / entdeckt: sprachliche Fehler, wie z.B. Missgeschicke in Orthographie oder Grammatik. Nur falls jemand Zeit für sowas hat...

- Falls irgendetwas komplett fehlen sollte oder nicht lesbar ist, so wäre ich auch hier um Rückmeldung dankbar.

Bitte wenden →

- Da ich bei dieser Mitschrift radierbare Tinte verwendet habe, kann es passiert sein, dass einzelne Stellen nachträglich ungewollt wegradiert worden sind, z.B. bei energischem Radieren auf der Rückseite eines Blattes können einz. Passagen auf der Vorderseite mitradiert werden. Die meisten sollten beim Einscannen der Schrift entdeckt und repariert worden sein. Falls doch noch eine Stelle auftauchen sollte: Bitte melden!

Ich werde versuchen, die eingehenden Verbesserungen, entweder durch ein Erratum oder durch Korrektur der Seiten selbst und anschliessendem, erneutem Scan, allen zugänglich zu machen und somit nachzuliefern.

Ich würde mich freuen, würde man diesen Bitten nachkommen, und hoffe, die Mitschrift wird der einen oder anderen Person hilfreich sein.

Ich wünsche viel Erfolg sowohl bei den Vorbereitungen als auch an den Prüfungen.

Simon D. Vonlanthen
Embrach, Mai 2015