1977 г. январь — февраль *т. XXXII, вып. 1 (193)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 25 февраля 1976 г.

1. Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер «Геометрия римановых поверхностей и нелинейные дифференциальные уравнения».

В основе интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты операторов $L_1=\sum\limits_{i=0}^{n} u_i(x, y, t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}$, $L_2=\sum\limits_{i=0}^{m} v_i(x, y, t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}$, эквивалентных операторному уравнению $\left[L_1-\frac{\partial}{\partial y},\ L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right]=0$, методами алгебраической геометрии лежит понятие алгебраичности оператора. (Заметим, что среди таких уравнений содержится ряд уравнений, хорошо известных в математической физике: Кортевега — де Фриза, sin-gordon и др. [1].)

Для каждого оператора L существует единственное формальное решение уравнения $\left(L-\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi=0$, имеющее вид

$$\Psi(x, y, t, k)=e^{kx+k^n y+F(k)t}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(x, y, t)k^{-i}\right), \tag{1}$$
$$F(k)=c_m k^m+\ldots+c_0.$$

Ряд $\Psi(x, y, t, k)$ (соответственно, и оператор L) называется алгебраическим, если он сходится, допускает аналитическое продолжение на компактную риманову поверхность $\mathcal{R}$, на которой в дополнении к точке P_0 имеет g полюсов (g — род $\mathcal{R}$), не зависящих от x, y, t. Обозначим через $\Psi(x, y, t, P)$ полученную функцию.

Лемма ([2]). *Для любой кривой $\mathcal{R}$ рода g, $P_0\in\mathcal{R}$, и неспециального дивизора D степени g существует единственная функция, с g полюсами в D, имеющая в окрестности P_0 вид* (1).

Теорема 1. *Существуют операторы L_1 и L_2 такие, что*

$$L_1\Psi=\frac{\partial}{\partial y}\Psi,\qquad L_2\Psi=\frac{\partial}{\partial t}\Psi.$$

Их коэффициенты являются полиномами от $\xi_i(x, y, t)$ и их производных.

Условие совместности последних равенств приводит к тому, что выполняется

Следствие. $\left[L_1-\frac{\partial}{\partial y},\ L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right]=0.$

Введем обозначение $\Psi(x, P)=\Psi(x, 0, 0, P)$.

Теорема 2. *Для каждой алгебраической функции $E(P)$, имеющей единственный полюс на $\mathcal{R}$ в P_0 (обозначим кольцо таких функций через $A(\mathcal{R}, P_0)$) существует единственный оператор L_E такой, что $L_E\Psi=E\Psi$.*

Таким образом, каждый дивизор D определяет некоторую функцию $\Psi(x, P)$ и, значит, кольцевой гомоморфизм λ_D кольца $A(\mathfrak{R}, P_0)$ в кольцо дифференциальных операторов по x.

Теорема 3. *Для любого коммутативного кольца A дифференциальных операторов, содержащего пару операторов взаимно простых порядков, существуют кривая $\mathfrak{R}$, $P_0 \in \mathfrak{R}$, и дивизор D такие, что λ_D устанавливает изоморфизм между $A(\mathfrak{R}, P_0)$ и A.*

В случае нелинейных уравнений, связанных с матричными операторами первого порядка $L = \frac{d}{dx} + u(x)$, $u = u_i^j(x)$, $u_i^i \equiv 0$, которые оказываются гамильтоновыми, использование алгебро-геометрических методов позволяет явно вычислить инвариантные многообразия соответствующих вполне интегрируемых систем.

Пусть a — постоянная диагональная матрица $a_i\delta_i^j$, $a_i \neq a_j$. Существует единственное решение уравнения

$$\frac{d\lambda}{dx} = [\lambda, u - Ea],$$

E — параметр, в виде формального степенно́го ряда

$$\lambda = a + \frac{\lambda_{a,1}}{E} + \frac{\lambda_{a,2}}{E^2} + \ldots$$

Матрицы $\lambda_{a,i}$ находятся рекуррентно и являются полиномами от u, u', ...

Определение. Произвольная линейная комбинация уравнений $\dot{u} = [a, \lambda_{a,N+1}]$ называется *N-м уравнением типа КдФ.*

Построенные уравнения гамильтоновы: их можно представить в виде $\dot{u} = \operatorname{ad} a \cdot \left(\frac{\delta I\{u\}}{\delta u}\right)$, где $I\{u\}$ — функционал. Стационарные уравнения $\dot{u} = 0$ также гамильтоновы (с $Nn(n-1)/2$ степенями свободы).

Как и ранее, оператор L называется алгебраическим, если существуют Ψ, $L\Psi = Ea\Psi$, мероморфные на компактной римановой кривой $\mathfrak{R}$, которую назовем *спектром.*

Теорема 4. *Если $u(x)$ — стационарное решение уравнения типа КдФ, то $L = \frac{d}{dx} + u(x)$ алгебраичен.*

Если $\dot{u} = [a, \lambda_{a,N+1}] = 0$, то риманова поверхность $\mathfrak{R}$ задается уравнением $Q(W, E) = \det|W \cdot 1 - (aE^N + \ldots + \lambda_{a,N})| = 0$. Коэффициенты являются интегралами уравнения $\dot{u} = 0$. Структура инвариантного многообразия этого уравнения $M_{\mathfrak{R}}$, получающегося фиксацией уровней интегралов, т. е. структура многообразия $M_{\mathfrak{R}}$ алгебраических операторов с данным спектром, дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Многообразие $M_{\mathfrak{R}}$ есть пространство главного π-расслоения над многообразием Якоби $J(\mathfrak{R})$ кривой $\mathfrak{R}$.*

Здесь π — фактор-группа диагональных невырожденных матриц по подгруппе скалярных. Она действует на потенциалах u по правилу $u \to \pi^{-1}u\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния, Функц. анализ 8:3 (1974), 43—53.

[2] Н. И. Ахиезер, Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов, ДАН 141:2 (1961), 263—266.

Заседание 3 марта 1976 г.

1. В. И. Юдович «Спектральные свойства эволюционного оператора параболического уравнения с одной пространственной переменной и его конечномерных аналогов».