Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 1, 1977, 15—31

УДК 513.015.7 + 517.944

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

И. М. Кричевер

Открытый в конце 60-х годов (см. [1]) метод интегрирования нелинейных уравнений в частных производных, в форме Захарова — Шабата, основан на возможности представления ряда таких уравнений в операторном виде [2]

$$\left[L_1 - \frac{\partial}{\partial y}, L_2 - \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0, \tag{0.1}$$

где L_1 и L_2 — линейные дифференциальные операторы по переменной x, коэффициентами которых являются матричные функции от x y, t. В первую очередь этот метод ассоциировался с методом обратной задачи теории рассеяния. Общая схема его использования была изложена в работе [2]. Применение теории рассеяния ограничивало возможности интегрирования лишь классом быстро убывающих решений.

Исследование периодических и почти периодических решений уравнения Кортевега — де Фриза, первого уравнения, для которого было найдено представление (0.1), вскрыло его глубокую алгебро-геометрическую природу. (Детальное изложение полученных в этом направлении результатов и полная библиография содержатся в обзоре [3].)

В настоящей работе предлагается общая схема построения периодических и почти периодических решений уравнений (0.1) с помощью методов алгебраической геометрии. (Краткое ее изложение содержится в заметках [4], [5].)

Эти методы позволяют найти и выразить в явном виде через θ-функции Римана все стационарные решения уравнений (0.1), т. е. решения, не зависящие от переменных y, t, а следовательно, дать классификацию коммутативных колец дифференциальных операторов от одной переменной.

В основе конструкции лежит понятие алгебраичности дифференциального оператора, означающее, что у него существует семейство собственных функций, параметризованных точками неособой алгебраической кривой $\mathfrak{R}$, обладающее на $\mathfrak{R}$ «хорошими» аналитическими свойствами. Обратная задача о восстановлении оператора по такому семейству разрешима и в случае операторов от нескольких переменных (см. также [6]).

Пользуясь случаем, хочу выразить глубокую признательность С. П. Новикову за постоянное внимание к работе и ценные советы.

§ 1. Уравнения Новикова

Рассмотрим систему нелинейных уравнений на коэффициенты операторов

$$L_1 = \sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}, \quad L_2 = \sum_{\beta=0}^{m} v_\beta(x) \frac{d^\beta}{dx^\beta},$$

эквивалентную условию их коммутации, т. е. уравнению*)

$$[L_1, L_2] = 0. \tag{1.1}$$

Априори предполагается, что это уравнения в классе ростков матричных функций $u_\alpha^{ij}(x)$, $v_\beta^{ij}(x)$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$, вещественной переменной. Забегая вперед, отметим, что, как будет показано в § 4, все их решения допускают мероморфное продолжение на всю комплексную область, а почти все решения являются к тому же условно периодическими функциями.

Прежде всего условимся, что у всех операторов, если не оговорено противное, старшие коэффициенты являются постоянными, невырожденными, диагональными матрицами $u_n^{ij}(x) = c_i\delta_{ij}$, $v_m(x) = b_i\delta_{ij}$. Кроме того, положим для тех i, j, при которых $c_i = c_j$ (множество таких пар обозначим через Δ), $u_{n-1}^{ij}(x) \equiv 0$.

Поскольку коммутирование операторов «эквивалентно» наличию «достаточно большого» запаса совместных собственных функций, то введем в рассмотрение формальные решения уравнения

$$L_1\Psi(x, k) = k^n\Psi(x, k)\, u_n, \tag{1.2}$$

имеющие следующий вид:

$$\Psi(x, k) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right) e^{k(x-x_0)}, \tag{1.3}$$

где k — формальная переменная, а $\xi_s(x)$ — матричные функции.

Лемма 1.1. *Существует единственное формальное решение уравнения* (1.2), *обозначаемое через* $\Psi(x, k; x_0)$, *удовлетворяющее условиям «нормировки»* $\xi_0^{ij} = \delta_{ij}$, $\xi_s^{ij}(x_0) = 0$, $s \geqslant 1$, $(i, j) \in \Delta$.

Доказательство. Матрицы $\xi_s(x)$ определяются последовательно из уравнений, полученных приравниванием коэффициентов при k^{-s}, $s = -n + 1, \ldots, 0, 1, \ldots$, обеих частей равенства (1.2).

Эти уравнения

$$\sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha \sum_{l=0}^{\alpha} C_\alpha^l \frac{\partial^{\alpha-l}}{\partial x^{\alpha-l}} \xi_{s+l} = \xi_{s+n} u_n \tag{1.4}$$

преобразуются к виду

$$0 = [u_n, \xi_{n+s}] + n u_n \frac{\partial}{\partial x}\xi_{n+s-1} + (\text{члены, содержащие лишь } \xi_j,\ j < n + s - 1).$$

Следовательно, из s-го уравнения находятся те элементы $\xi_{s+n}^{ij}(x)$, для которых $(i, j) \notin \Delta$, и элементы $\frac{\partial}{\partial x}\xi_{s+n-1}^{ij}$, если $(i, j) \in \Delta$. Это утверждение не только заканчивает доказательство леммы, но и позволяет легко вывести

Следствие. *Ряд* (1.3) *тогда и только тогда является решением уравнения* (1.2), *когда он представим в виде*

$$\Psi(x, k) = \Psi(x, k; x_0)\, A(k, x_0), \tag{1.5}$$

где ряд $A(k, x_0) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(x_0) k^{-s}$ *имеет ненулевые матричные элементы коэффициентов* $a_s^{ij}(x_0)$ *лишь для индексов* $(i, j) \in \Delta$.

---

*) Полностью эти уравнения, в случае, когда L_1 — оператор второго порядка со скалярным коэффициентом, были проинтегрированы С. П. Новиковым и Б. П. Дубровиным (см. обзор [3]). Уравнения (1.1), когда один из операторов с матричными коэффициентами имеет первый порядок, были рассмотрены Б. А. Дубровиным (см. [3]).

Доказательство. Проверим, что ряд, задаваемый правой частью равенства (1.5), удовлетворяет уравнению (1.2). Имеем

$$L_1\Psi(x, k) = k^n\Psi(x, k; x_0)\, u_n A(k, x_0) = k^n\Psi(x, k)\, u_n,$$

так как $[A(k, x_0), u_n] = 0$.

Для любого решения $\Psi(x, k)$ в качестве ряда $A(k, x_0)$ возьмем ряд $\Psi^{-1}(x_0, k; x_0)\,\Psi(x_0, k)$. Непосредственно проверяется, что он удовлетворяет требованиям следствия.

Далее мы будем предполагать, что все $c_i \neq c_j$, если $i \neq j$, т. е. множество Δ состоит из пар (i, i).

Теорема 1.2. *Операторы L_1 и L_2 коммутируют тогда и только тогда, когда коэффициенты ряда*

$$\Psi^{-1}(x_0, k; x_0)\, L_2\Psi(x_0, k; x_0) = A(k, x_0) = A(k)$$

имеют отличные от нуля лишь диагональные элементы, которые, кроме того, не зависят от x_0.

Доказательство. Если операторы коммутируют, то ряд $L_2\Psi(x, k; x_0)$ удовлетворяет уравнению (1.2). Действительно, $L_1L_2\Psi(x, k; x_0) = L_2L_1\Psi(x, k; x_0) = k^nL_2\Psi(x, k; x_0)\, u_n$.

В силу следствия леммы 1.1, $L_2\Psi(x, k; x_0) = \Psi(x, k; x_0)\, A(k; x_0)$. Воспользуемся теперь тем, что $\Psi(x, k; x_1)\, e^{k(x_1-x_0)}$ имеет вид (1.3) и удовлетворяет (1.2). Значит, $\Psi(x, k; x_1)\, e^{k(x_1-x_0)} = \Psi(x, k; x_0)\, B(k, x_0)$. Тогда $A(k, x_1) = B^{-1}(k, x_0)\, A(k, x_0)\, B(k, x_0) = A(k, x_0)$. Здесь мы используем то, что оба ряда имеют в качестве коэффициентов диагональные матрицы.

Докажем теперь достаточность условий теоремы. Так как $L_1L_2\Psi(x, k; x_0) = k^n\Psi(x, k; x_0)\, A(k)u_n$, то $[L_1, L_2]\,\Psi(x, k; x_0) = 0$, что достаточно для равенства нулю оператора $[L_1, L_2]$.

Следствие 1. *Кольцо операторов, коммутирующих с заданным, коммутативно.*

Доказательство. Пусть $[L_1, L_2] = 0$, $[L_1, L_3] = 0$, тогда $L_2\Psi(x, k; x_0) = \Psi(x, k; x_0)\, A_1(k)$, $L_3\Psi(x, k; x_0) = \Psi(x, k; x_0)\, A_2(k)$, и $[L_2, L_3]\,\Psi(x, k; x_0) = 0$. Значит, $[L_2, L_3] = 0$.

Следствие 2. *Уравнения* (1.1) *имеют бесконечный набор первых интегралов, полиномиально зависящих от матричных элементов $u_\alpha^{ij}(x)$ и $v_\beta^{ij}(x)$ и их производных.*

Доказательство. Как утверждает теорема 1.2, первыми интегралами системы являются матричные элементы коэффициентов ряда

$$\Psi^{-1}(x, k; x)\, L_2\Psi(x, k; x) = \sum_{s=-m}^{\infty} A_s k^{-s}.$$

Из уравнений (1.4) вытекает, что матричные элементы рядов $\frac{d^r}{dx^r}\Psi(x, k; x)$ полиномиально зависят от матричных элементов u_α^{ij} и их производных.

Следствие 3. *Матричные элементы $v_\beta^{ij}(x)$ полиномиально выражаются через матричные элементы $u_\alpha^{ij}(x)$, их производные и через первые интегралы уравнений A_s^{ii}, $-m \leqslant s \leqslant 0$.*

Таким образом, система нелинейных уравнений на коэффициенты операторов L_1 и L_2 (1.1) оказывается эквивалентной семейству систем уравнений на коэффициенты лишь оператора L_1, параметризованному наборами произвольных комплексных констант A_s^{ii}, $-m \leqslant s \leqslant 0$. Последние системы мы будем называть *уравнениями Новикова*, так как в случае оператора Шредингера $-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)$ они совпадают с уравнениями, описывающими стационарные решения высших аналогов уравнения Кортевега — де Фриза, важность которых впервые была отмечена в работе [7].

Как будет показано при доказательстве теоремы 1.3, среди интегралов A_s^{ii} содержится лишь конечное число независимых.

Обратим внимание на отличие предложенной схемы от схем построения полиномиальных интегралов высших аналогов уравнения КдФ работ [7], [8], [23]. Формулы, связывающие наборы интегралов Новикова и Гельфанда — Дикого — Лакса, даются в работе [9] *).

Теорема 1.3. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют уравнениям Новикова, для которых среди определяющих их констант A_s^{ii}, $-m \leqslant s \leqslant 0$, найдется хотя бы одна ненулевая с индексом s, взаимно простым с n. Тогда у оператора L существует семейство собственных вектор-функций $\psi(x, P)$, т. е. $L\psi(x, P) = E(P)\psi(x, P)$, параметризованное точками неособой алгебраической кривой $\mathfrak{R}$, $P \in \mathfrak{R}$. Функция $E(P)$ мероморфна на $\mathfrak{R}$, имеет l полюсов, $P_1, \ldots, P_l$, кратности n. Кроме того, $\psi(x, P)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

1) *для всех x она мероморфна на $\mathfrak{R}$ вне $P_1, \ldots, P_l$, а ее полюсы $D_1, \ldots, D_N$ не зависят от x;*

2) *в окрестности точки P_j вектор-функция $\psi(x, P)\,e^{-k(P)(x-x_0)}$ аналитична, $k(P)=\sqrt[n]{\frac{E(P)}{c_j}}$, а ее значение в P_j равно вектору с единственной ненулевой j-й координатой, равной 1.*

Для почти всех решений исходного уравнения дивизор $D_1+\ldots+D_N$ неспециален, а его степень равна $g+l-1$, где g — род кривой $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Рассмотрим для формальной переменной E nl-мерное линейное комплексное пространство $\mathscr{L}(E)$, базисом которого являются j-е столбцы матриц $\Psi(x, k_{jr}; x_0)$, определенных согласно лемме 1.1, $1 \leqslant j \leqslant l$, $0 \leqslant r \leqslant n-1$, где $c_j k_{jr}^n = E$ $(c_j = u_n^{jj})$. По следствию 3 коэффициенты оператора L и константы A_s^{ii} определяют оператор L_2, коммутирующий с L. Следовательно, L_2 индуцирует на $\mathscr{L}(E)$ конечномерный линейный оператор $L_2(E)$, для которого выбранный базис собственный. Характеристический полином оператора равен

$$\prod_{j=1}^{l}\prod_{r=1}^{n-1}(y - A^{jj}(k_{jr})).$$

Коэффициенты этого полинома — симметрические функции переменных k_{jr}, а следовательно, являются лорановскими рядами от переменной E^{-1}. Мы докажем, что они являются полиномами по E.

Поскольку эти полиномы выражаются через A_s^{jj}, $s \leqslant m(nl-1) = N$, то все остальные интегралы уравнений Новикова являются следствиями этих. Равенство нулю коэффициентов при степенях E^{-1} позволяет выразить линейные комбинации $c_r A_r^{jj}$, где $r = h_1 m + h_2 n \leqslant N$ (обозначим число таких пар (h_1, h_2) через $N(m, n, l)$) через интегралы с меньшими индексами.

Следствие. *Каждое уравнение Новикова обладает набором $ml(nl-1) - N(m, n, l)$ независимых полиномиальных интегралов.*

---

*) В настоящей работе вопрос о гамильтоновой механике, связанной с уравнениями (1.1), не затрагивается. Как сообщили автору И. М. Гельфанд и Л. А. Дикий, их гамильтонова структура исследуется в работе [24].

Введем новый базис в $\mathscr{L}(E)$, образованный $c_{js}(x, E)$ столбцами матриц $C_j(x, E)$, определяемых нормировкой $\frac{d^r}{dx^r} C_j(x_0, E) = \delta_{rj} I$, где I — единичная матрица, а $0 \leqslant r \leqslant n-1$.

Лемма 1.4. *Матричные элементы матриц* $\frac{d^N}{dx^N} C_j(x_0, E)$ *полиномиально выражаются через матричные элементы* $u_\alpha^{ij}(x_0)$, $\frac{d}{dx} u_\alpha^{ij}(x_0), \ldots$ *и переменную* E.

Доказательство леммы получается, если многократно использовать для понижения порядка производной равенство

$$u_n \frac{d^n}{dx^n} C_j(x, E) = E C_j(x, E) - \sum_{\alpha=0}^{n-1} u_\alpha(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} C_j(x, E),$$

выполненное в силу определения $\mathscr{L}(E)$.

Следствие. *В новом базисе матричные элементы оператора* $L_2^{ij}(E)$ *полиномиально зависят от переменной* E.

Значит, характеристический полином $L_2(E)$ имеет вид $Q(y, E)$, где $Q(\ ,\ )$ — полином от двух переменных.

Следующая лемма отражает хорошо известный для самосопряженных операторов факт, что коммутирующие операторы функционально зависимы.

Лемма 1.5. *Операторы* L *и* L_2 *связаны алгебраическим соотношением* $Q(L_2, L) = 0$.

Доказательство. Собственные значения оператора $L_2(E)$ даются равенством

$$Q(y, E) = 0, \tag{1.6}$$

Поэтому $Q(L_2, L)\Psi(x, k; x_0) = Q(y, E)\Psi(x, k; x_0) = 0$.

Как уже неоднократно отмечалось, линейный дифференциальный оператор равен нулю тогда и только тогда, когда однопараметрическое семейство функций $\Psi(x, k; x_0)$ принадлежит его ядру.

Впервые утверждение леммы в случае оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ было получено А. Б. Шабатом для переформулировки метода доказательства основной теоремы работы [7].

Будем считать теперь E комплексным числом. Уравнение (1.6) определяет алгебраическую кривую $\mathfrak{R}$, а соответствие $(y, E) = P \in \mathfrak{R} \to E$ задает функцию на ней $E(P)$.

При больших E разложение собственных чисел оператора $L_2(E)$ в лорановские ряды по переменным $(E/c_j)^{-1/n}$ совпадает с рядами $A^{jj}(k_{jr})$. По условию теоремы эти собственные значения различны. Следовательно, они различны для почти всех значений E. Кроме того, из сказанного вытекает, что прообразом «бесконечно удаленной точки» пополненной комплексной плоскости $\bar{C} = C \cup \infty$ при отображении $E: \mathfrak{R} \to \bar{C}$ являются l точек $P_1, \ldots, P_l$, локальными координатами в окрестности которых служат функции $k_j^{-1}(P) = (E(P)/c_j)^{-1/n}$.

Каждому собственному значению оператора $L_2(E)$, т. е. точке P кривой $\mathfrak{R}$, соответствует единственный с точностью до пропорциональности собственный вектор.

Выбрав нормировку, при которой его первая координата в базисе $c_{js}(x, E)$ постоянна, легко проверить, что его остальные координаты являются мероморфными функциями на кривой $\mathfrak{R}$, зависящими, вообще говоря, от выбора начальной точки x_0. Обозначим эту собственную вектор-функцию через $\Phi(x, P; x_0)$,

$$\Phi(x, P; x_0) = \sum_{j, s} \lambda_{js}(x_0, P)\, c_{js}(x, P; x_0), \qquad \lambda_{11}(x_0, P) \equiv 1.$$

Чтобы получить нужную нам собственную функцию $\psi(x, P)$, поступим следующим образом. Координаты вектор-функции $\widetilde{\Phi}(x_0, P)$, равные значению логарифмических производных координат $\Phi(x, P; x_0)$ в точке x_0, не зависят от выбора нормировки собственного вектора $L_2(E)$. Они равны отношению координат $\dfrac{\lambda_{2s}(x_0, P)}{\lambda_{1s}(x_0, P)}$, а значит, мероморфны на $\mathfrak{R}$.

Непосредственно проверяется, что функция $\psi(x, P) = \int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{\Phi}(z, P)\, dz$ удовлетворяет всем требованиям условий теоремы.

Для почти всех решений исходного уравнения Новикова равенство (1.6) задает алгебраическую кривую без особенностей, и для завершения в этом случае доказательства теоремы остается лишь найти число полюсов N у функции $\psi(x, P)$. Для этого построим матрицу $F(x, E)$, столбцы которой составлены из координат векторов $\psi(x, P_i), \psi'(x, P_i), \ldots, \psi^{(n-1)}(x, P_i)$, где P_i — точки, в которых $E(P_i) = E$. Функция $g(x, E) = (\det \| F(x, E) \|)^2$ не зависит от порядка нумерации точек P_i и является рациональной функцией комплексной переменной E. Ее нулями являются те точки E, для которых функции $\psi(x, P_i)$ линейно зависимы, т. е. точки, для которых собственные значения оператора $L_2(E)$ сливаются. Кратность нуля $g(x, E)$ равна кратности точки ветвления ν кривой $\mathfrak{R}$. (Кратность точки ветвления — это число листов $\mathfrak{R}$, которые сливаются в ней, минус 1). Полюс $g(x, E)$ совпадают с образами полюсов $\psi(x, P)$ и с «бесконечно удаленной» точкой $E = \infty$. Имеем

$$\sum \nu = 2N + N_\infty.$$

Найдем кратность полюса в ∞. Она равна удвоенной кратности произведения диагональных элементов матрицы $F(x, E)$. В локальном параметре $E(P)^{-1/n}$ кратность полюса соответствующей координаты $\psi^{(r)}(x, P)$ равна r. Значит, кратность полюса $g(x, E)$ в параметре $E(P)^{-1/n}$ равна $2(1 + \ldots + (n-1))\, l = n(n-1)\, l$. Следовательно, $N_\infty = (n-1)\, l$. Как известно (см. [10]), род кривой равен половине суммы кратностей всех точек ветвления минус число листов плюс 1. Кратность ветвления в точках P_j равна $n - 1$, поэтому

$$2g = \sum \nu + (n-1)\, l - 2nl + 2 = \sum \nu - nl - l + 2.$$

Тогда

$$2N = \sum \nu - nl + l = 2g + 2l - 2.$$

Если кривая $\mathfrak{R}$ имеет особенности, то существует бирационально изоморфная ей неособая кривая $\hat{\mathfrak{R}}$, т. е. отображение $\pi \hat{\mathfrak{R}} \to \mathfrak{R}$, которое почти всюду изоморфизм. Функции $\pi^* E$ и $\pi^* \psi$ удовлетворяют требованиям теоремы. (Если $P \in \hat{\mathfrak{R}}$, то $\pi^* E(P) = E(\pi(P))$). Доказательство теоремы закончено.

Решения уравнений Новикова, для которых кривая, заданная равенством (1.6), имеет особенности, можно рассматривать как предел решений общего типа, при котором сливаются точки отвечающих им кривых. Однако мы дадим их замкнутое алгебро-геометрическое описание, аналогичное данному в работе [11] описанию хорошо известного класса безотражательных потенциалов оператора Штурма — Лиувилля (см. также приложение II к [3]).

Следствие. *В предположениях теоремы* 1.3 *степень* N *неспециального дивизора полюсов функции* $\psi(x, P)$ *равна* $g + l - 1 + d$, *где* d — *число точек* $E_1, \ldots, E_d$, *для которых*

$$\det \| F(x, E_s) \| \equiv 0 \tag{1.7}$$

Доказательство. Точки $E_1, \ldots, E_d$ являются образами при отображении $E: \mathfrak{R} \to \overline{C}$ особенностей кривой $\mathfrak{R}$. При разрешении этих особенностей, т. е. при переходе к кривой $\widehat{\mathfrak{R}}$, всем прообразам одной особенности соответствуют одинаковые функции $\psi(x, P)$. Следовательно, выполнены равенства (1.7). Как и при доказательстве теоремы, используя равенство нулю $g(x, E)$ не только в образах точек ветвления, но и в точках E_i, получим, что $N = g + l + d - 1$.

§ 2. Коммутативные кольца дифференциальных операторов

В первом параграфе каждому оператору, коэффициенты которого удовлетворяют уравнениям Новикова, был сопоставлен набор данных: неособая комплексная кривая $\mathfrak{R}$, которую в соответствии с идеологией обзора [3] назовем *спектром оператора*, мероморфная функция $E(P)$, имеющая полюсы n-го порядка в точках $P_1, \ldots, P_l$ и называемая *спектральным параметром*, эффективный дивизор $D = \Sigma k_s D_s$ (т. е. набор точек с кратностями $k_s \geqslant 0$), а также точки $E_1, \ldots, E_d$, где $N = \Sigma k_s = g + l - 1 + d$.

Наша цель в этом параграфе — решить обратную задачу и восстановить оператор L по набору $(\mathfrak{R}, E, D, E_1, \ldots, E_d)$.

Построим сначала вектор-функцию $\psi(x, P)$, которая будет собственной функцией оператора L. Нужную теорему мы сформулируем в том виде, в котором она может быть использована в следующем параграфе при решении обратной задачи для алгебраических операторов от нескольких переменных.

Зафиксируем в окрестности точек $P_1, \ldots, P_l$ неособой кривой $\mathfrak{R}$ локальные параметры $z_j(P)$, $z_j(P_j) = 0$. По аналогии с пространством $\mathscr{L}(D)$ мероморфных функций на $\mathfrak{R}$, ассоциированным с дивизором D ($f(P) \in \mathscr{L}(D)$, если $D + D_f \geqslant 0$, где D_f — главный дивизор f), введем пространство $\Lambda(\mathbf{q}, D)$, где $\mathbf{q}$ — набор полиномов $q_j(k)$.

Функция $\Phi(\mathbf{q}, P)$ принадлежит $\Lambda(\mathbf{q}, D)$, если:

1) вне точек P_j она мероморфна, а для дивизора ее полюсов D_Φ (кратность, с которой точка D_s входит в D_Φ, равна со знаком минус кратности полюса функции в ней) выполнено $D_\Phi + D \geqslant 0$;

2) в окрестности P_j функция $\Phi(\mathbf{q}, P) \exp\{-q_j(k_j(P))\}$ аналитична, $k_j(P) = z_j^{-1}(P)$.

Теорема 2.1. (Ахиезер). *Для неспециального дивизора* $D \geqslant 0$ *степени* $N \geqslant g$ $\dim \Lambda(\mathbf{q}, D) = N - g + 1$.

Напомним, что неспециальными дивизорами, образующими открытое множество среди всех дивизоров, называются те дивизоры, для которых $\dim \mathscr{L}(D) = N - g + 1$.

Логарифмический дифференциал $d\Phi(\mathbf{q}, P)/\Phi(\mathbf{q}, P)$ является абелевым дифференциалом на $\mathfrak{R}$, поэтому доказательство теоремы в значительной степени повторяет ход доказательства теоремы Абеля и решение проблемы обращения Якоби (см. [12]). Мы его опускаем не только потому, что оно многократно проводилось в целом ряде работ (см. [3], [13] — [15]), правда, в несколько отличной форме, но и потому, что оно легко может быть получено из явных формул для $\Phi(\mathbf{q}, P)$, приводимых в § 4.

Ограничимся в этом параграфе случаем, когда все полиномы $q_j(k)$ равны $k(x - x_0)$. Для простоты будем писать вместо $\Phi(\mathbf{q}, P)$ $\Phi(x, P)$.

Если на кривой $\mathfrak{R}$ существует мероморфная функция $E(P)$ с полюсами кратности n в точках $P_1, \ldots, P_l$, то в качестве локальных параметров $z_j(P)$ возьмем $\sqrt[l]{c_j/E(P)}$.

Следствие. *Для неспециального дивизора $D \geqslant 0$ существует единственная вектор-функция $\psi(x, P)$, координаты которой $\psi_i(x, P) \in \Lambda(x, P)$, матрица со столбцами $\psi(x, P) \exp(-k(P)(x-x_0))|_{P_j}$ единична, а в точках $E_1, \ldots, E_d$, $d = N - g - l - 1$, выполняются равенства* (1.7).

Доказательство. Выберем произвольный базис в пространстве $\Lambda(x, D)$. Условия на коордианты $\psi(x, P)$ превратятся в систему линейных уравнений. Их число равно размерности $\Lambda(x, D)$.

Теорема 2.2. *Существует единственный оператор $L = \sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ такой, что*

$$L\psi(x, P) = E(P)\psi(x, P), \quad u_n^{ij} = c_j\delta_{ij}.$$

Его коэффициенты удовлетворяют уравнениям Новикова.

Доказательство. Построим по функции $\psi(x, P)$ ряд вида (1.3). В качестве столбцов матриц $\xi_s(x)$ возьмем коэффициенты при z_j^s разложения в окрестности P_j аналитической функции

$$\psi(x, P)\exp(-k_j(P)(x-x_0)).$$

Лемма 2.3. *Для любого ряда вида* (1.3) *существует единственный оператор L такой, что*

$$L\Psi(x, k) \equiv k^n \Psi(x, k)\, u_n \pmod{O(k^{-1}) e^{k(x-x_0)}}.$$

Доказательство. Коэффициенты L находятся последовательно из уравнений (1.4) при $s = -n+1, \ldots, 0$. Их выполнение эквивалентно требуемому сравнению.

Докажем теперь, что для построенного оператора $L\Psi(x, k) = k^n\Psi(x, k)\, u_n$. Для этого рассмотрим функцию $L\psi(x, P) - E(P)\psi(x, P)$. Она удовлетворяет всем требованиям, определяющим $\psi(x, P)$, кроме одного Ее значения во всех точках P_j равны нулю. Из единственности $\psi(x, P)$ следует, что $L\psi(x, P) = E(P)\psi(x, P)$.

Чтобы завершить доказательство, теоремы достаточно показать, что существует коммутирующий с L дифференциальный оператор.

Пусть $A(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l)$ — кольцо мероморфных на $\mathfrak{R}$ функций с полюсами в точках $P_1, \ldots, P_l$. В случае, когда $\mathfrak{R} = \overline{C}$ — пополненная комплексная плоскость, а $P = \infty$ — «бесконечно удаленная» точка, $A(\overline{C}, \infty)$ есть кольцо полиномов.

Лемма 2.4. *Функция $\psi(x, P)$ задает гомоморфизм λ из $A(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l)$ в кольцо линейных дифференциальных операторов, при котором функции $H(P) \in A(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l)$ отвечает оператор $\lambda(H)$ такой, что*

$$\lambda(H)\psi(x, P) = H(P)\psi(x, P)$$

Построение оператора $\lambda(H)$ полностью аналогично построению L. Его коэффициенты находятся из сравнения

$$\lambda(H)\Psi(x, k) \equiv \Psi(x, k)\left(\sum_{s=0}^{m} h_s k^s\right) \pmod{O(k^{-1})\, e^{k(x-x_0)}}, \tag{2.1}$$

где элементами h_s^j диагональных матриц $h_s^{ij} = h_s^j\delta_{ij}$ являются коэффициенты при k_j^s в разложении в лорановский ряд в окрестности P_j функции $H(P)$.

Поскольку $A(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l)$ — коммутативное кольцо, коммутативен и образ λ.

В определении функции $\psi(x, P)$, а значит, и гомоморфизма λ, фигурировала функция $E(P)$. Чтобы определить λ по любой кривой $\mathfrak{R}$ с отмеченными точками и дивизору степени $N = g + l - 1$, условимся в качестве $E(P)$ всегда выбирать функцию из $A(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l)$ с полюсами одинаковой, минимальной кратности в точках P_j. Кроме того, λ зависит лишь от класса эквивалентности D. Два дивизора называются *эквивалентными*, $D \sim D'$, если $D - D'$ является дивизором некоторой мероморфной функции $f(P)$ на $\mathfrak{R}$. Вектор-функции $\psi(x, P)$ и $\psi'(x, P)$, построенные по D и D', связаны соотношением $\psi(x, P) = B(P)\psi'(x, P)$, где $B^{ij}(P) = f^{-1}(P_j)f(P)\delta_{ij}$, поэтому $\lambda = \lambda'$.

Объединяя результаты, полученные в первом и втором параграфах, получим.

Следствие. *Для любого коммутативного подкольца дифференциальных операторов A, в котором найдется пара операторов взаимно простых порядков, найдутся неособая кривая $\mathfrak{R}$ с отмеченными точками и класс дивизоров (D) такие, что определяемый ими гомоморфизм λ устанавливает изоморфизм λ: $A(\mathfrak{R}, P_1, \ldots, P_l) \to A$.*

Пространство решений уравнений (1.1) есть комплексное линейное пространство, которое при взаимно простых n и m по доказанному следствию изоморфно пространству расслоения над многообразием модулей кривых с l отмеченными точками, в которых существуют функции с полюсами порядков n и m, слоем которого являются якобианы кривых.

Якобианом кривой называется g-мерный комплексный тор, который образуют классы эквивалентности дивизоров фиксированной степени (см. [12]). Более подробно о них мы будем говорить в § 4.

В случае $n = 2$ и $l = 1$ этот результат был получен в работе [16].

Зададимся вопросом, когда кривая $\mathfrak{R}$, отвечающая коммутативному кольцу A, имеет фиксированный род. Род $\mathfrak{R}$ в терминах кольца $A(\mathfrak{R}, P)$ задается следующим образом. Пусть n — минимально возможная кратность полюса функций из $A(\mathfrak{R}, P)$, а μ_i, $i = 1, \ldots, n - 1$, минимальные числа, для которых найдется функция в этом кольце с кратностью полюса $\mu_i n + i$. Тогда $g = \mu_1 + \ldots + \mu_{n-1}$.

Лемма 2.5. *Род кривой $\mathfrak{R}$ не больше g тогда и только тогда, когда в кольце A найдутся операторы порядков n, $\mu_i n + i$, где $\mu_1 + \ldots + \mu_{n-1} = g$.*

Для почти всех точек P кривой $\mathfrak{R}$ $n = g + 1$. Все остальные точки называются *точками Вейерштрасса*. Для почти всех кривых фиксированного рода g в точках Вейерштрасса $n = g$, $\mu_1 = 2$, $\mu_i = 1$, $i > 2$.

Следствие. *Пространство расслоения $\hat{\hat{M}}$ над конечнолистным накрытием $\hat{M} \to M$ многообразия модулей кривых рода g, соответствующим фиксации на кривой точки Вейерштрасса, слоем которого является якобиан кривой, изоморфно пространству решений системы уравнений*

$$[L, L_i] = 0, \qquad i = 1, \ldots, g - 1, \tag{2.2}$$

где L, L_i — дифференциальные операторы со скалярными коэффициентами порядков g, $2g + 1$, $g + i$ $(i > 2)$ соответственно.

Дифференциальные уравнения (2.2) на комплексном линейном пространстве решений уравнений $[L, L_1] = 0$ задают алгебраические уравнения, описывающие многообразие $\hat{\hat{M}}$.

Требуется провести тщательный анализ возможностей такого подхода для решения важнейшей в алгебраической геометрии проблемы об унирациональности полного многообразия модулей кривых рода g.

§ 3. Алгебраические операторы и уравнения Захарова — Шабата

Как уже отмечалось во введении, возможности обратной задачи значительно шире прямой, и ее решение возможно всегда, когда для оператора существует перечисленный в начале предшествующего параграфа набор «спектральных данных».

В этой работе мы ограничимся операторами вида

$$\sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha(x, y) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial y} = L - \frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.1}$$

Определение. Оператор $L - \frac{\partial}{\partial y}$ называется *алгебраическим*, если найдутся кривая $\mathfrak{R}$ рода g с отмеченными точками $P_1, \ldots, P_l$, эффективный дивизор D степени $g + l - 1$ и вектор-функция $\psi(x, y, P)$, $P \in \mathfrak{R}$, такая, что

1) $$\left(L - \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi(x, y, P) = 0;$$

2) вне точек P_j она мероморфна, и для дивизора ее полюсов D_ψ выполнено $D + D_\psi \geqslant 0$;

3) в окрестности P_j функция $\psi(x, y, P) \exp(-k_j(P) x - Q_j(k_j(P)) y)$ аналитична, а ее значение в P_j равно вектору с единственной ненулевой j-й координатой, равной 1. Здесь $z_j(P) = k_j^{-1}(P)$ — локальный параметр, $Q_j(k)$ — полиномы степени n.

Замечание. Это определение алгебраичности соответствует свойствам операторов, коэффициенты которых являются решениями общего типа уравнений Новикова. Не представляет труда дать определение аналогов сепаратрисных решений этих уравнений (см. следствие теоремы 1.3).

Займемся задачей восстановления алгебраического оператора по его «спектральным данным».

Положим полиномы $q_j(k)$, фигурирующие в определении пространства $\Lambda(\mathfrak{q}, D)$, равными $q_j(k) = kx + Q_j(k) y$; тогда в качестве следствия теоремы 2.1 получим

Следствие. *При фиксированных локальных параметрах $z_j(P)$ и полиномах $Q_j(k)$ условия* 2) *и* 3) *однозначно определяют функцию* $\psi(x, y, P)$.

Теорема 3.1. *Существует единственный оператор* $L = \sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha(x, y) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ *такой, что*

$$\left(L - \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi(x, y, P) = 0$$

где n — максимальная степень $Q_j(k)$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.1, построим по вектор-функции $\psi(x, y, P)$ формальный ряд с матричными коэффициентами, имеющий вид

$$\Psi(x, y, k) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x, y) k^{-s}\right) e^{kx + Q(k) y}, \tag{3.2}$$

где $Q(k)$ — полином с матричными коэффициентами,

$$Q(k) = \sum_{j=1}^{l} Q_j(k) \delta_{ij} = \sum_{m=0}^{n} \widetilde{Q}_m k^m.$$

По условию нормировки $\xi_0(x, y)$ — единичная матрица.

Лемма 3.2. *Для любого ряда вида* (3.2) *существует единственный оператор вида* (3.1) *такой, что*

$$\left(L - \frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi(x, y, k) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, O(k^{-1})\, e^{kx+Q(k)y}).$$

Доказательство. Требуемое сравнение эквивалентно выполнению равенств

$$\sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha \sum_{l=0}^{\alpha} C_\alpha^l \frac{\partial^{\alpha-l}}{\partial x^{\alpha-l}} \xi_{s+l} = \sum_{m=0}^{n} \xi_{s+m} \widetilde{Q}_m, \qquad s = -n, \ldots, 0. \tag{3.3}$$

Из этих уравнений последовательно находятся матрицы $u_\alpha(x, y)$.

Продолжая ход доказательства теоремы 2.1, получим, что для построенного оператора $(L - \partial/\partial y)\,\psi(x, y, P) = 0$.

Введем соотношение эквивалентности между наборами локальных параметров $z_j(P)$ и полиномов $Q_j(k)$. Скажем, что $(z_j(P), Q_j(k))$ и $(z_j'(P), Q_j'(k))$ эквивалентны, если при подстановке $k_j(P) = a_{-1}k_j(P) + a_0 + a_1 k_j^{-1}(P) + \ldots$ получим, что

$$Q_j(k) \equiv Q_j'(a_{-1}k + a_0 + \ldots) \quad (\mathrm{mod}\, k^{-1}).$$

Следствие. *Множество алгебраических операторов, имеющих фиксированный набор «спектральных данных»* $\mathfrak{R}$, $P_1, \ldots, P_l$, D, *находится во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности наборов* $(z_j(P), Q_j(k))$.

Применим доказанную теорему для построения решений уравнений Захарова — Шабата.

Пусть операторы $L_1 = \sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha(x, y, t)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ и $L_2 = \sum_{\beta=0}^{m} v_\beta(x, y, t)\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$ таковы, что выполнено условие коммутации

$$0 = \left[L_1 - \frac{\partial}{\partial t},\ L_2 - \frac{\partial}{\partial y}\right] \Leftrightarrow [L_1, L_2] = \frac{\partial L_1}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial t}. \tag{3.4}$$

Предположим, что $n \geqslant m$, тогда, так как в правой части последнего равенства стоит оператор порядка, меньшего либо равного $n - 1$ (напомним, что все рассматриваемые операторы имеют в качестве старшего коэффициента постоянные диагональные матрицы), то L_1 и L_2 коммутируют с точностью до операторов порядка $n - 1$.

Легко проверить что ограниченная коммутация операторов L_1 и L_2 достаточна для проведения доказательства следствия 3 теоремы 1.2, поэтому имеет место

Лемма 3.3. *Система нелинейных уравнений на коэффициенты операторов* L_1 *и* L_2, *эквивалентная уравнению* (3.4), *эквивалентна семейству систем уравнений на коэффициенты лишь оператора* L_1, *параметризованному наборами комплексных чисел* A_s^i, $0 \leqslant s \leqslant m$, $i = 1, \ldots, l$.

Соответствующие уравнения на матричные элементы $u_\alpha^{ij}(x, y, t)$ называются *уравнениями Захарова — Шабата.*

Для каждой неособой комплексной кривой $\mathfrak{R}$ рода g с фиксированными локальными параметрами $z_j(P)$ в окрестности отмеченных точек P_j построим (полагая полиномы $q_j(k)$ равными $q_j(k) = kx + Q_j(k)y + R_j(k)t$) по каждому дивизору $D \geqslant 0$ степени $g + l - 1$ функцию $\psi(x, y, t, P) \in \Lambda(x, y, t, D)$, нормированную как обычно в точках P_j.

Считая поочередно y и t параметрами и воспользовавшись теоремой 3.1, получим

Следствие. *Существуют единственные операторы*

$$L_1=\sum_{\alpha=0}^{n}u_\alpha(x,y,t)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha},\qquad L_2=\sum_{\beta=0}^{m}v_\beta(x,y,t)\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$$

такие, что $(L_1-\partial/\partial t)\psi(x,y,t,P)=0$, $(L_2-\partial/\partial y)\psi(x,y,t,P)=0$, *где* n *и* m — *степени полиномов* $R_j(k)$ и $Q_j(k)$ *соответственно. Операторы* L_1 и L_2 *зависят лишь от класса дивизора* D.

Так как $\left[L_1-\frac{\partial}{\partial t},\ L_2-\frac{\partial}{\partial y}\right]\psi(x,y,t,P)=0$, то $\left[L_1-\frac{\partial}{\partial t},\ L_2-\frac{\partial}{\partial y}\right]=0$.

Следствие. *Коэффициенты оператора* L_1, *построенного по набору* $(\mathfrak{R},P_1,\ldots,P_l,D,z_j(P),Q_j(k),R_j(k))$, *являются решениями уравнений Захарова — Шабата.*

Замечание. Набор констант, параметризирующих уравнение Захарова — Шабата, определяется следующим образом. Если $z_j'(P)$ — локальный параметр, в котором эквивалентный $R_j(k)$ полином $R_j'(k)$ равен k^n, то A_s^j равны коэффициентам полинома $Q_j'(k)\sim Q_j(k)$.

Рассмотрим решения уравнений Захарова — Шабата, не зависящие от одной из переменных y или t (например, y), т. е. решения уравнений, эквивалентных операторному уравнению

$$\left[L_1-\frac{\partial}{\partial t},\ L_2\right]=0. \tag{3.5}$$

Коэффициенты L_1 и L_2 зависят от x и t. К числу таких уравнений относится уравнение Кортевега — де Фриза.

Пусть на кривой $\mathfrak{R}$ существует функция $E(P)$ с полюсами кратности n в точках $P_1,\ldots,P_l$. Локальными параметрами возьмем функции $z_j(P)=\sqrt[n]{E(P)}$. По теореме 3.1 набор полиномов $R_j(k)$ определяет для каждого класса дивизоров (D) алгебраический дифференциальный оператор $(L_1-\partial/\partial t)$ и его собственную функцию $\psi(x,t,P)$. Считая t параметром, мы видим, что, как и в теореме 2.2, функции $E(P)$ отвечает при гомоморфизме λ оператор $L_2=\sum_{\beta=0}^{m}v_\beta(x,t)\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$ такой, что $L_2\psi(x,t,P)=E(P)\psi(x,t,P)$.

Следствие. *Коэффициенты операторов* L_1 *и* L_2, *построенных по* $(\mathfrak{R},E(P),D,R_j(k))$, *удовлетворяют уравнениям* (3.5).

§ 4. Явные формулы и примеры

Как следует из уравнений (3.3) (или (1.4)), матричные элементы коэффициентов алгебраических операторов являются рациональными функциями матричных элементов ξ_s^{ij}.

Для нахождения матриц ξ_s мы выразим через θ-функцию Римана образующие линейного пространства $\Lambda(\mathbf{q},D)$, а затем получим формулы для коэффициентов разложения соответствующих функций в окрестности точек P_j.

Зафиксируем на неособой алгебраической кривой $\mathfrak{R}$ рода g базис циклов

$$a_1,\ldots,a_g,\ b_1,\ldots,b_g$$

с матрицей пересечений $a_i\circ a_j=b_i\circ b_j=0$, $a_i\circ b_j=\delta_{ij}$. Введем базис голоморфных дифференциалов ω_i на $\mathfrak{R}$, нормированных условиями $\oint\limits_{a_i} \omega_k = \delta_{ik}$.

Обозначим через B матрицу b-периодов, $B_{ik} = \oint\limits_{b_i} \omega_k$. Известно, что она симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть.

Целочисленные комбинации векторов в C^g с координатами δ_{ik} и B_{ik} образуют решетку, определяющую комплексный тор $J(\mathfrak{R})$, называемый *многообразием Якоби* кривой.

Пусть P_0 — отмеченная точка на $\mathfrak{R}$; тогда определено отображение ω: $\mathfrak{R} \to J(\mathfrak{R})$. Координаты вектора $\omega_k(P)$ равны $\int\limits_{P_0}^{P} \omega_k$.

По матрице b-периодов, как и по любой матрице с положительно определенной мнимой частью, можно построить целую функцию g комплексных переменных

$$\theta(u_1, \ldots, u_g) = \sum_{k \in Z^g} \exp\{\pi i (Bk, k) + 2\pi i (k, u)\},$$

где $(k, u) = k_1 u_1 + \ldots + k_g u_g$.

Она обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

$$\theta(u_1, \ldots, u_j + 1, \ldots, u_g) = \theta(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_g), \tag{4.1}$$

$$\theta(u_1 + B_{ik}, \ldots, u_g + B_{gk}) = \exp\{-\pi i B_{kk} - 2\pi i u_k\} \theta(u_1, \ldots, u_g).$$

Кроме того, для любого неспециального эффективного дивизора $D = \sum\limits_{j=1}^{g} P_j$ степени g существует вектор $W(D)$ такой, что функция $\theta(\omega(P) + W(D))$, определенная на $\mathfrak{R}$, разрезанной вдоль циклов a_i, b_j, имеет ровно g нулей, совпадающих с точками P_j (см. [18]);

$$W_k(D) = -\sum_{j=1}^{g} \omega_k(P_j) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} B_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{g} \oint\limits_{a_j} \left(\int\limits_{P_0}^{t} \omega_k \right) \omega_j, \quad t \in a_j.$$

Для любого набора полиномов $q_1(k), \ldots, q_l(k)$ существует единственный абелев дифференциал второго рода (см. [12]) ω (индекс при котором $\mathbf{q}$ мы для простоты записи опустим), имеющий особенность в отмеченной точке P_j на $\mathfrak{R}$ вида $dq_j(z_j^{-1})$ в локальном параметре z_j и нормированный условиями $\oint\limits_{a_i} \omega = 0$.

Л е м м а 4.1. *Пусть $\tilde{D}$— произвольный эффективный, неспециальный дивизор степени g; тогда функция*

$$\psi(\mathbf{q}, P) = \exp\left(\int\limits_{P_0}^{P} \omega \right) \frac{\theta(\omega(P) + W(\tilde{D}) + V)}{\theta(\omega(P) + W(\tilde{D}))}, \tag{4.2}$$

где $V = (V_1, \ldots, V_g)$, *а* $V_j = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{b_j} \omega$, *является образующей одномерного пространства* $\Lambda(\mathbf{q}, \tilde{D})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы следует из простой проверки свойств функции $\psi(\mathbf{q}, P)$. Непосредственно из свойств (4.1) вытекает, что правая часть равенства (4.2) корректно определяет функцию на $\mathfrak{R}$, т. е. ее значения при обходе вдоль циклов a_i, b_j не меняются. В окрестности P_j

функция ψ (q, P) имеет нужного вида существенную особенность, а дивизор ее полюсов совпадает с $\tilde{D}$. (Заметим, что впервые формулы такого рода были получены А. Р. Итсом [19].)

Для собственных функций операторов, коэффициенты которых удовлетворяют уравнениям Захарова — Шабата, полиномы $q_j(k)$ имели вид $q_j(k) = k(x - x_0) + Q_j(k)(y - y_0) + R_j(k)(t - t_0)$. Соответственно дифференциал ω и его периоды равны

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_2 (x - x_0) + \omega_Q (y - y_0) + \omega_R (t - t_0),\\ \mathbf{V} &= \mathbf{U}_1 (x - x_0) + \mathbf{U}_2 (y - y_0) + \mathbf{U}_3 (t - t_0),\end{aligned}$$

где ω_2, ω_Q, ω_R — нормированные дифференциалы с особенностями в P_j вида $-dz/z^2$, $d(Q(1/z))$, $d(R(1/z))$, а $2\pi i\mathbf{U}_1$, $2\pi i\mathbf{U}_2$, $2\pi i\mathbf{U}_3$ — векторы их b-периодов.

Выберем в качестве локального параметра $z_j(P)$ функцию $\left(\int\limits_{P_0}^{P} \omega_2\right)^{-1/2}$.

В нем функция $\omega(P)$ разлагается в ряд;

$$\omega(P) = \omega(P_j) + \mathcal{V}_{1j} z_j(P) + \ldots \mathcal{V}_{nj} z_j^n(P) + \ldots,$$

где $2\pi i\mathcal{V}_{nj}$ — вектор b-периодов нормированного абелева дифференциала с единственной особенностью в P_j вида dz/z^{n+1} (см. [12]).

С л е д с т в и е. *Коэффициент* $\xi_s^j(x, y_1, t_1)$ *при* z_j^s *разложения в окрестности* P_j *функции*

$$\psi(x, y, t, P)\,\psi^{-1}(x_0, y_1, t_1, P)\, e^{-k(x-x_0)}$$

равен

$$\frac{1}{s!}\frac{d^s}{dz^s}\left.\frac{\theta\left(\sum\limits_{m=0}^{s} \mathcal{V}_{mj} z^m + \mathbf{U}_1(x - x_0) + \mathbf{U}_2(y - y_0) + \mathbf{U}_3(t - t_0) + \mathbf{W}(\tilde{D})\right)}{\theta\left(\sum\limits_{m=0}^{s} \mathcal{V}_{mj} z^m + \mathbf{U}_2(y_1 - y_0) + \mathbf{U}_3(t_1 - t_0) + \mathbf{W}(\tilde{D})\right)}\right|_{z=0}. \tag{4.3}$$

Построим матрицу $\tilde{\xi}_s = \xi_s^{ij}(x, y, t)$ для эффективного дивизора D степени $g + l - 1$, $D = P_1 + \ldots + P_{g+l-1}$, подставляя в формулу (4.3) вместо $\tilde{D}$ дивизоры $D_i = P_1 + \ldots + P_{g-1} + P_{g+i}$.

Л е м м а 4.2. *Матрицы* ξ_s, *определяющие из уравнений* (3.3) *коэффициенты алгебраических операторов, равны*

$$\xi_s = \tilde{\xi}_0^{-1}\tilde{\xi}_s. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции $\tilde{\psi}_i(x, y, t, P)$, задаваемые формулами (4.2), в которые вместо $\tilde{D}$ поставлены дивизоры D_i, образуют базис пространства $\Lambda(x, y, t, D)$. Вектор-функция $\tilde{\psi}(x, y, t, P)$ с такими координатами отличается от вектор-функции $\psi(x, y, t, P)$, фигурирующей в предыдущем параграфе, лишь нормировкой в точках P_j. Поэтому

$$\psi(x, y, t, P) = \tilde{\xi}_0^{-1}\tilde{\psi}(x, y, t, P),$$

что доказывает равенство (4.4).

Векторы $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$ задают прямолинейные обмотки на торе—якобиане кривой $\mathfrak{R}$.

С л е д с т в и е 1. *Построенные в § 3 решения уравнений Захарова — Шабата являются условно периодическими функциями своих аргументов.*

Для получения формул для матриц $\xi_s(x)$, определяющих решения уравнений Новикова, достаточно положить в (4.3) $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_3 = 0$.

С л е д с т в и е 2. *Почти все решения уравнений Новикова являются условно периодическими функциями.*

Разберем теперь несколько простейших примеров.

Пример 1. Для операторов со скалярными коэффициентами уравнения (3.4) нетривиальны, начиная с $n = 3$, $m = 2$;

$$L_2 = v_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v_0(x, y, t), \quad L_1 = u_3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + u_1(x, y, t)\frac{\partial}{\partial x} + u_0(x, y, t).$$

Коэффициент $v_0(x, y, t)$ равен $\frac{2}{3} u_1(x, y, t) + h$. Соответствующие уравнения Захарова — Шабата имеют вид

$$\alpha \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u_0}{\partial x},$$

$$\beta \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{2\alpha}{3}\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \frac{2}{3}u_1\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

где $\alpha = 1/v_2$, $\beta = 1/u_3$.

Исключая из этой системы $u_0(x, y, t)$, получим, что коэффициент $v = v_0(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Кадомцева — Петвиашвили (см. [20])

$$\frac{3}{4}\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\alpha \frac{\partial v}{\partial t} + hv_x + \frac{1}{4}(v_{xxx} + 6vv_x)\right\} = 0.$$

Для получения решений этого уравнения надо положить $Q(k) = v_2 k^2 + c$, $R(k) = u_3 k^3 + c_1 k + c_2$. Из уравнений (3.3) следует, что

$$v_0(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\xi_1(x, y, t) + c, \quad u_1(x, y, t) = -3\frac{\partial}{\partial x}\xi_1(x, y, t) + c_1,$$

поэтому $h = c - \frac{2}{3}c_1$.

По лемме (4.2) коэффициент $\xi_1(x, y, t)$ равен

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{\theta(\mathcal{V}_2 z + \mathbf{U}_1(x - x_0) + \mathbf{U}_2(y - y_0) + \mathbf{U}_3(t - t_0) + \mathbf{W}(D))}{\theta(\mathcal{V}_2 z + \mathbf{U}_2(y - y_0) + \mathbf{U}_3(t - t_0) + \mathbf{W}(D))}\bigg|_{z=0}.$$

Из определения векторов $\mathcal{V}_2$ и $\mathbf{U}_1$ следует, что $\mathcal{V}_2 = -\mathbf{U}_1$, поэтому окончательно получим, что функции

$$c + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(\mathbf{U}_1(x - x_0) + \mathbf{U}_2(y - y_0) + \mathbf{U}_3(t - t_0) + \mathbf{W}) \tag{4.5}$$

являются решениями уравнения Кадомцева — Петвиашвили.

В тех случаях, когда на кривой $\mathfrak{R}$ существуют функции с особенностями второго или третьего порядка в точке P, что эквивалентно равенствам $\mathbf{U}_2 = 0$, $\mathbf{U}_3 = 0$, функция (4.5) будет удовлетворять либо уравнению Кортевега — де Фриза

$$\alpha \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + hv_x + \frac{1}{4}(v_{xxx} + 6vv_x) = 0,$$

либо соответственно уравнению

$$\frac{3}{4}\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + h\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0,$$

которое при $h = -\frac{3}{4}\beta^2 = \pm 1$ является вариантом уравнения нелинейной струны (см. [21]).

(Полагая в (4.5) $\mathbf{U}_2 = 0$, мы придем к формуле Матвеева — Итса [15].)

Пример 2. Для матричных операторов первого порядка

$$L_1 = u_1 \frac{d}{dx} + u_0(x, y, t), \quad u_1^{ij} = c_i \delta_{ij}, \quad L_2 = v_1 \frac{d}{dx} + v_0(x, y, t), \quad v_1^{ij} = d_i \delta_{ij}$$

уравнения (3.4) нетривиальны, начиная с $l = 3$.

Из уравнений (3.3) следует, что $u_0 = [u_1, \xi_1]$, $v_0 = [v_1, \xi_1]$. В работе [2] было отмечено, что при дополнительных условиях симметрии $\xi_1 = \xi_1^+$ после несложной замены уравнения (3.4) при $l = 3$ редуцируются до уравнений, описывающих резонансное взаимодействие трех волн в нелинейной среде.

Чтобы получить по нашей схеме решения этих уравнений, потребуем чтобы на $\mathfrak{R}$ существовали антиинволюции T_1, T_2 такие, что $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, $T_1(P_1) = P_1$, $T_2(P_2) = P_2$, $T_1(P_2) = P_3$, $T_2(P_3) = P_1$. Если дивизор D инвариантен относительно T_i, то, как легко убедиться, $\xi_1 = \xi_1^+$.

В этом случае общую формулу (4.3) можно упростить. Выберем циклы a_j, b_j так, чтобы при действии T_i выполнялось $T_i^* a_j = -a_j$, $T_i^* b_j = b_j$; тогда $\mathcal{V}_{2j} = \mathcal{V}$ для всех j, $\mathrm{U}_1 = 3\mathcal{V}$, $\mathrm{U}_2 = c\mathcal{V}$, $\mathrm{U}_3 = d\mathcal{V}$; $c = \operatorname{Sp} u_1$, $d = \operatorname{Sp} v_1$.

Коэффициенты матрицы $\tilde{\xi}_1^{ij}$ даются формулой

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \frac{\theta(\omega(P_j) + (3(x - x_0) + c(y - y_0) + d(t - t_0))\mathcal{V} + \mathrm{W}(D_i))}{\theta(\omega(P_j) + (c(y - y_0) + d(t - t_0))\mathcal{V} + \mathrm{W}(D_i))},$$

что позволяет найти ξ_1 из равенства (4.4).

Энергетический институт им. Г. М. Кржижановского

Поступила в редакцию 20 августа 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Cardner C., Green J., Kruskal M., Miura R., Method for solving the Korteweg — de Vries equation, Phys. Rev. Lett. **19**, (1967), 1095—1098.
2. Захаров В. Е., Шабат А. Б., Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I, Функц. анализ **8**, вып. 3 (1974), 43—53.
3. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН **XXXI**, вып. 1 (1976), 55—136.
4. Кричевер И. М., Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений, ДАН СССР **227**, № 2 (1976), 291—294.
5. Кричевер И. М., Алгебраические кривые и коммутирующие матричные дифференциальные операторы, Функц. анализ **10**, вып. 2 (1976), 75—77.
6. Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П., Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности, ДАН СССР **229**, № 1 (1976), 15—19.
7. Новиков С. П., Периодическая задача для уравнения Кортевега—де Фриза. I, Функц. анализ **8**, вып. 3 (1974), 54—66.
8. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Асимптотика резольвенты штурм—лиувиллевских операторов и алгебра уравнений Кортевега — де Фриза, УМН **XXX**, вып. 5 (1975), 67—101.
9. Богоявленский О. И., Об интегралах высших стационарных уравнений КдФ и собственных числах оператора Хилла, Функц. анализ **10**, вып. 2 (1976), 9—13.
10. Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., «Наука», 1972.
11. Кричевер И. М., Безотражательные потенциалы на фоне конечнозонных, Функц. анализ **9**, вып. 2 (1975), 77—78.
12. Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, М., ИЛ, 1961.
13. Ахиезер Н. И., Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов, ДАН СССР **141**, № 2 (1961), 263—266.
14. Дубровин Б. А., Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза в классе конечнозонных потенциалов, Функц. анализ **9**, вып. 3 (1975), 41—51.

15. Итс А. Р., Матвеев В. Б., Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза, Теор. и матем. физика **23**, № 1 (1975), 51—67.
16. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза и Штурма — Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией, ДАН СССР **219**, № 3 (1974), 19—22.
17. Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М., Гостехиздат, 1948.
18. Зверович Э. И., Краевые задачи теории аналитических функций, УМН **XXVI**, вып. 1 (1971), 113—181.
19. Итс А. Р., Матвеев В. Б., Об одном классе решений уравнения КдФ, Сб. «Проблемы математической физики», № 8, ЛГУ, 1976.
20. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И., Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах, ДАН СССР **192**, № 4 (1970), 753—756.
21. Захаров В. Е., К проблеме стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов, ЖЭТФ **65**, № 1 (1973), 219—225.
22. Bogoyavlensky O. I., On perturbations of the Toda lattice, preprint, Chernogolovka, 1976.
23. Lax P. D., Periodic solutions of the KdV equations, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 141—188.
24. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Дробные степени операторов и гамильтоновы системы, Функц. анализ **10**, вып. 4 (1976), 13—29.