1977 г. ноябрь-декабрь *т. XXXII, вып. 6 (198)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. М. Кричевер

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Механизм интегрирования уравнения Кортевега де Фриза методом обратной задачи рассеяния, предложенный в работе [1] (Гарднер, Грин, Крускал, Миура), был осмыслен с различных точек зрения Лаксом [2], В. Е. Захаровым и Л. Д. Фаддеевым [3], Гарднером [4]. Начиная с работы В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [5] было найдено много других физически важных уравнений, интегрируемых этим методом на классе быстро убывающих функций. Среди проинтегрированных таким образом уравнений были хорошо известные в математической физике: нелинейное уравнение Шрёдингера $\alpha u_t = u_{xx} \pm |u|^2 u$ ([5], [6]), уравнение «sin-gordon» $u_{xt} = \sin u$ ([7], [11], [12]), уравнение Кадомцева — Петвиашвили

$$\frac{3}{4}\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha \frac{\partial v}{\partial t} + h\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 6v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] = 0 \text{ ([8])},$$

а также ряд других уравнений [9] — [17].

Метод их нахождения был развит В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [18], [19].

Применение теории рассеяния ограничивало возможности интегрирования лишь классом быстро убывающих по пространственной переменной функций. Периодическая задача потребовала принципиально новых идей, первые из которых были выдвинуты в работе С. П. Новикова [20] (часть результатов которой была одновременно получена также Лаксом [21]). В последовавших затем работах Б. А. Дубровина [44], Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [54], А. Р. Итса и В. Б. Матвеева [36], Лакса [47] была построена теория так называемых конечнозонных периодических и условно периодических решений уравнения КдФ и вскрыта их глубокая алгебро-геометрическая природа [1]).

Результаты об аппроксимации общих периодических потенциалов конечнозонными (с тем же периодом) [2]) получены в цикле работ Марченко и Островского [23], [24], [25]. Новиковым и Дубровиным было впервые введено общее понятие конечнозонного линейного дифференциального оператора, для которого блоховская собственная функция (или функция Флоке) определена на римановой поверхности конечного рода (алгебраической кривой). Обзор этих результатов и полная библиография содержатся в [26].

Автором была предложена алгебро-геометрическая конструкция широкого класса периодических и условно периодических решений общего уравнения Захарова — Шабата $L_t - A_y = [A, L]$, позволяющая найти их явные выражения через θ-функции Римана. В частности, для построенных решений $u(x, y, t)$ физически важного уравнения Кадомцева — Петвиашвили [27] попутно явными формулами решается нестационарное уравнение Шрёдингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-u(x, y, t)\psi=0.$$

Кроме того, эта конструкция дает решение задачи о классификации коммутативных колец дифференциальных операторов от одной переменной, первоначально в случае, когда кольцо содержит пару операторов взаимно простого порядка (см. [28], [29], [30]).

Плодотворная дискуссия по этим проблемам состоялась после докладов автора в ноябре — декабре 1975 г. на известном семинаре в МГУ под руководством И. М. Гельфанда. Дринфельдом [31] было указано абстрактно-алгебраическое изложение конструкции автора, позволившее дать некоторые полезные обобщения и, в частности, продвинуться в проблеме классификации коммутативных колец дифференциальных операторов на прямой без гипотезы взаимной простоты. Решение этой задачи полностью завершено автором (см. § 2 этого обзора). Гельфандом и Диким была исследована гамильтонова структура увравнений типа Лакса $-L_t = [L, A]$, где L, A — операторы со скалярными коэффициентами и порядок L больше двух. Соответствующий аналог гамильтонова формализма Гарднера — Захарова — Фаддеева оказался довольно сложным. Эти результаты изложены в работах [32], [33]. Пока гамильтонов формализм для уже решенных автором стационарных уравнений типа уравнения Новикова $[L, A] = 0$, задающих коммутативные алгебры, не разработан (см. Приложение 1).

---

[1]) Некоторые результаты Новикова — Дубровина — Матвеева — Итса позднее были получены Мак Кином и Ван Моёрбеке ([22]).

[2]) Аппроксимация в классе условно периодических потенциалов, очевидно, следует из [36], [44], но доказательство аппроксимации с тем же периодом затруднительно.

Понятие конечнозонного дифференциального оператора может быть обобщено на случай нескольких независимых переменных. Грубо говоря, линейный дифференциальный оператор от n переменных называется k-алгебраическим, если у него существует семейство собственных функций, параметризованное точками k-мерного комплексного алгебраического многообразия M^k с «хорошими» аналитическими свойствами, аналогичными свойствам блоховских функций конечнозонного одномерного оператора Шрёдингера. Наиболее широким является случай $k = 1$ для любого числа переменных.

Б. А. Дубровиным, С. П. Новиковым и автором была решена обратная задача восстановления 1-алгебраического (слабо алгебраического в терминологии работы [34]) двумерного оператора Шрёдингера. При этом было показано, что системы совместных 1-алгебраических операторов с общим многообразием M^1 в двумерном случае образуют некоторый аналог коммутативной алгебры. Коммутатор любой пары операторов из такой «алгебры» делится справа на один и тот же оператор Шрёдингера H:

$$[L_i,\ L_j] = D_{ij}H, \qquad [L_i,\ H] = D_iH,$$

где D_{ij}, D_i — некоторые линейные дифференциальные операторы.

В § 4 содержится исследование k-алгебраических ($k > 1$) линейных дифференциальных операторов. Решения обратных задач для них пока нет. Это приводит к интересным и новым задачам алгебраической геометрии.

Наконец, в заключительном параграфе обзора мы изложим результаты Мозера, Мак Кина и Эро, которые обнаружили замечательную связь между поведением особенностей рациональных и элиптических решений уравнения КдФ и движением системы n-точек на прямой [51].

§ 1. Функция Ахиезера и уравнения Захарова — Шабата

Мы будем рассматривать нелинейные уравнения в частных производных на коэффициенты операторов

$$(1.1)\qquad L_1 = \sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha(x,\ y,\ t)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}, \qquad L_2 = \sum_{\beta=0}^{m} v_\beta(x,\ y,\ t)\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

эквивалентные операторному уравнению

$$(1.2)\qquad \left[L_1 - \frac{\partial}{\partial t},\ L_2 - \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0, \quad \text{где} \quad [A,\ B] = AB - BA.$$

Впервые эти уравнения изучались В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [19]. Ими был развит метод получения некоторых точных решений, быстро убывающих при $|x| \to \infty$.

В этом обзоре мы ограничимся для определенности операторами со скалярными коэффициентами. Все его результаты легко переносятся на общий случай матричных коэффициентов (см. [29], [30]).

В последующей конструкции точных решений уравнений Захарова — Шабата центральную роль играет понятие функции Ахиезера.

Л е м м а 1.1. *Для каждой неособой комплексной кривой $\mathfrak{R}$ рода g с отмеченной точкой P_0 и неспециального, эффективного девизора степени g (т. е.*

набора g точек $p_1, \ldots, p_g$ общего положения) существует единственная функция $\psi(x, y, t, P)$, $P \in \mathfrak{R}$, обладающая следующими свойствами.

1°. *Вне P_0 она мероморфна, а ее полюсы лежат в $p_1, \ldots, p_g$.*

2°. *В окрестности P_0 она представима в виде*

$$\psi(x, y, t, P) = \exp(kx + Q(k)y + R(k)t)\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, y, t)k^{-s}\right), \tag{1.3}$$

где $k^{-1} = k^{-1}(P)$ — фиксированный локальный параметр, $k^{-1}(P_0) = 0$; $Q(k) = q_m k^m + \ldots + q_0$, $R(k) = r_n k^n + \ldots + r_0$ — полиномы.

Впервые функции такого вида были рассмотрены Н. И. Ахиезером [35] в случае гиперэллиптической кривой $w^2 = \prod_{i=1}^{2n+1}(E - E_i)$, причем точки $P_0, p_1, \ldots, p_n$ были точками ветвления.

Оставив пока утверждение леммы без доказательства, перейдем к основной теореме этого параграфа, установленной впервые в [28].

Т е о р е м а 1.1. *Для каждой функции Ахиезера существуют единственные операторы L_1 и L_2 вида* (1.1) *такие, что*

$$L_1\psi = \frac{\partial}{\partial t}\psi, \qquad L_2\psi = \frac{\partial}{\partial y}\psi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого формального ряда (1.3) существует единственный оператор L_1 такой, что выполнено сравнение

$$L_1\psi(x, y, t, P) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\psi(x, y, t, P) \,(\mathrm{mod}\, O(k^{-1})\, e^{kx+Q(k)y+R(k)t}).$$

Его коэффициенты находятся из системы уравнений, эквивалентной этому сравнению:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha \sum_{l=0}^{\alpha} C_\alpha^l \frac{\partial^{\alpha-l}}{\partial x^{\alpha-l}} \xi_{s+l} = \sum_{i=0}^{n} r_i \xi_{s+i}, \qquad (\xi_j = 0,\ j < 0). \tag{1.4}$$

Тогда $u_n = r_n$, $u_{n-1} = r_{n-1}$, $u_{n-2} = r_{n-2} - nr_n \frac{\partial}{\partial x}\xi_1, \ldots$

Роль компактной кривой $\mathfrak{R}$ заключается в том, что для функции Ахиезера из указанного сравнения вытекает точное равенство. Этот момент является характерным в решении всех последующих обратных задач.

Рассмотрим функцию $\left(L_1 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x, y, t, P) = 0$. Она удовлетворяет всем требованиям, определяющим функцию Ахиезера, кроме одного. Разложение регулярного множителя при экспоненте в P_0 начинается с $O(k^{-1})$. Из единственности $\psi(x, y, t, P)$ следует равенство этой функции нулю. Аналогично находится оператор L_2.

С л е д с т в и е. *Построенные операторы удовлетворяют уравнению* $\left[L_1 - \frac{\partial}{\partial t}, L_2 - \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0.$

В ы в о д с л е д с т в и я. Ядро оператора $\left[L_1 - \frac{\partial}{\partial t}, L_2 - \frac{\partial}{\partial y}\right]$ содержит однопараметрическое семейство функций $\psi(x, y, t, P)$. Так как сам оператор содержит дифференцирования только по переменной x, то его ядро, если он не нулевой, конечномерно. Это противоречие доказывает утверждение следствия.

Рассмотрим важный пример построения по этой схеме решений уравнения Кадомцева — Петвиашвили.

Пусть $Q(k) = q_2k^2 + q_0$, $R(k) = r_3k^3 + r_1k + r_0$. По доказанному, каждая неособая комплексная кривая $\mathfrak{R}$ рода g с отмеченной точкой P_0 и неспециальный эффективный девизор степени g задают операторы

$$L_1 = q_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v_0(x, y, t)\right), \quad L_2 = r_3\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + u_1(x, y, t)\frac{\partial}{\partial x} + u_0(x, y, t)\right),$$

удовлетворяющие операторному уравнению (1.2). Исключая из эквивалентной ему системы уравнений u_1 и u_0, получим для $v(x, y, t)$ равенство

$$\frac{3}{4}\beta^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\alpha\frac{\partial v}{\partial t} + h\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 6v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} = 0,$$

где $\alpha = q_2^{-1}$, $\beta = d_3^{-1}$.

Из уравнений (1.4) следует, что $v = q - 2\frac{\partial}{\partial x}\xi_1$. Чтобы найти явное выражение для $v(x, y, t)$, выразим $\psi(x, y, t, P)$ через θ-функцию Римана. Попутно мы тем самым докажем лемму 1.1. Впервые соответствующие выражения в случае гиперэллиптической кривой и P_0-точки ветвле́ния были получены А. Р. Итсом [58].

Зафиксируем на неособой алгебраической кривой $\mathfrak{R}$ рода g базис циклов $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ с матрицей пересечений

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \qquad a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

Введем базис голоморфных диференциалов ω_i на $\mathfrak{R}$, нормированных условиями $\oint\limits_{a_i}\omega_k = \delta_{ik}$. Обозначим через B матрицу b-периодов: $B_{ik} = \oint\limits_{b_i}\omega_k$. Известно, что она симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть.

Целочисленные комбинации векторов в C^g с координатами δ_{ik} и B_{ik} образуют решетку, определяющую комплексный тор $J(\mathfrak{R})$, называемый многообразием Якоби кривой.

Пусть $\overline{P}$ отмеченная точка на $\mathfrak{R}$; тогда определено отображение $\omega\colon \mathfrak{R} \to J(\mathfrak{R})$. Координаты вектора $\omega(P)$ равны $\int\limits_{\overline{P}}^{P}\omega_k$.

По матрице B строится θ-функция Римана — целая функция g комплексных переменных

$$\theta(u_1, \ldots, u_g) = \sum_{m\in Z^g}\exp\left(\pi i(Bm, m) + 2\pi i(m, u)\right),$$

где $(m, a) = m_1u_1 + \ldots + m_gu_g$.

Она обладает следующими, легко проверяемыми свойствами:

$$(1.5)\quad \begin{cases} \theta(u_1, \ldots, u_j + 1, \ldots, u_g) = \theta(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_g), \\ \theta(u_1 + B_{1k}, \ldots, u_g + B_{gk}) = e^{-\pi i B_{kk} - 2\pi i u_k}\theta(u_1, \ldots, u_g). \end{cases}$$

Кроме того, для любого неспециального эффективного девизора $D=\sum_{j=1}^{g} p_j$ степени g существует вектор $W(D)$ такой, что функция $\theta(\omega(P)+W(D))$, определенная на $\mathfrak{R}$, разрезанной вдоль циклов a_i, b_j, имеет ровно g нулей, совпадающих с p_j (см. [37]).

Обозначим через ω_2, ω_Q, ω_R нормированные абелевы дифференциалы второго рода [38], имеющие единственную особенность в P_0 вида $-\frac{\partial z}{z^2}$, $dQ\left(\frac{1}{z}\right)$, $dR\left(\frac{1}{z}\right)$ в локальном параметре $z(P)$. Пусть $2\pi i U_1$, $2\pi i U_2$, $2\pi i U_3$ — векторы их b-периодов.

Из свойств (1.5) вытекает, что функция

$$\exp\left\{\int\limits_{\overline{P}}^{P}(x\omega_2+y\omega_Q+t\omega_R)\right\}\frac{\theta(\omega(P)+U_1x+U_2y+U_3t+W(D))}{\theta(\omega(P)+W(D))}$$

не меняет своего значения при обходе по циклам a_i, b_j и, следовательно, корректно определена. Нормировав ее в P_0, получим $\psi(x, y, t, P)$ в форме, идея рассмотрения которой принадлежит А. Р. Итсу.

Разлагая ее в P_0, придем к следующей формуле для решений уравнения Кадомцева — Петвиашвили:

$$v(x, y, t)=q+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(U_1x+U_2y+U_3t+W), \tag{1.6}$$

где W — произвольная точка якобиана кривой.

Если $U_2=0$ или $U_3=0$, что означает существование на $\mathfrak{R}$ функции с единственным полюсом второго или третьего порядка в P_0, то $v(x, y, t)$ удовлетворяет либо уравнению КдФ, либо одному из вариантов уравнения нелинейной струны [9]

$$\pm\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\mp\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,\quad\left(h=-\frac{3}{4}\beta^2=\pm 1\right).$$

В первом случае $\mathfrak{R}$ гиперэллиптична, а (1.6) переходит в формулу Матвеева — Итса [36].

Из полученного выражения для $\psi(x, y, t, P)$ в силу того, что векторы U_i задают прямолинейные обмотки на якобиане кривой, вытекает важное следствие.

С л е д с т в и е. *Все построенные решения уравнений Захарова — Шабата являются условно периодическими функциями (поверхность $\mathfrak{R}$ неособая).*

§ 2. Коммутативные кольца дифференциальных операторов

2.1. Общие свойства. Рассмотрим систему нелинейных уравнений относительно коэффициентов операторов $L_1=\sum_{\alpha=0}^{n}u_\alpha(x)\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$, $L_2=\sum_{\beta=0}^{m}v_\beta(x)\frac{d^\beta}{dx^\beta}$, эквивалентную условию их коммутации. Априори предполагается, что это уравнения в классе ростков матричных функций $u_\alpha^{ij}(x)$, $v_\beta^{ij}(x)$, $1\leqslant i$, $j\leqslant l$, вещественной переменной. Оказывается, все их решения допускают мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость. Почти все решения являются условно периодическими.

Уравнения $[L_1, L_2] = 0$ в случае скалярных операторов и $n = 2$ были проинтегрированы в работах С. П. Новикова и Б. А. Дубровина. Случай коммутирующих матричных операторов, один из которых имеет первый порядок, был разобран Б. А. Дубровиным [39], [40]. Новый интересный пример их приложения был недавно найден С. В. Манаковым [41]. Он показал, что уравнения движения n-мерного твердого тела [42] эквивалентны условию коммутации операторов

$$L_1 = I^{-1}\frac{d}{dt} - I^{-1}\Omega, \qquad L_2 = I\frac{d}{dt} + \Omega I,$$

где I — тензор инерции. Полностью уравнения коммутации матричных операторов взаимно простого порядка были проинтегрированы автором [29], [30].

Еще раз оговоримся, что в рамках этого обзора мы ограничимся случаем скалярных операторов, так как он позволяет наиболее полно и ясно изложить идеи применения методов алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. Матричный вариант приводит к незначительной технической модификации всех конструкций.

Условимся, что все рассматриваемые операторы имеют постоянные старшие коэффициенты. Кроме того, пусть $u_{n-1}(x) \equiv 0$. Этого всегда можно добиться с помощью градиентного преобразования.

В основе применимости методов алгебраической геометрии для решения уравнений типа Новикова $[L_1, L_2] = 0$ лежит следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Существует полином от двух переменных $Q(w, E)$ такой, что $Q(L_2, L_1) = 0$.*

По-видимому, впервые такого рода утверждение было получено А. Б. Шабатом в случае $n = 2$.

Доказательство. Оператор L_2 на пространстве $\mathscr{L}(E)$ решений уравнения $L_1 y = Ey$ задает линейный оператор $L_2(E)$. Его матричные элементы в каноническом базисе

$$c_j(x, E); \quad \frac{d^r}{dx^r} c_j(x_0, E) = \delta_{rj}, \quad 0 \leqslant r, \quad j \leqslant n-1,$$

являются полиномами по E. Пусть $Q(w, E) = \det(w \cdot 1 - L_2^{st}(E))$ — его характеристический полином. Ядро оператора $Q(L_2, L_1)$ содержит $\mathscr{L}(E)$ при всех E, поэтому оно бесконечномерно. Следовательно, сам оператор нулевой.

2.2. Случай одномерных расслоений. Операторы взаимно простых порядков. Сначала рассмотрим случай, когда для почти всех E собственные числа $L_2(E)$ различны. Тогда каждой точке $P = (w, E)$ алгебраической кривой $\mathfrak{R}$, заданной уравнением $Q(w, E) = 0$, отвечает одномерное собственное подпространство оператора $L_2(E)$. Это дает одномерное расслоение над $\mathfrak{R}$ [1]). Мы выбираем в каждом слое над $\mathfrak{R} \setminus \infty$ вектор с единичной первой координатой в базисе $c_j(x, E)$. Все остальные его координаты являются мероморфными

[1]) Аксиоматизация свойств этого расслоения на современном абстрактно-алгебраическом языке послужила отправной точкой работы В. Г. Дринфельда [31].

функциями на $\mathfrak{R}$ $\lambda_j(P)$. Поскольку $c_j(x, E)$ — целые функции по E, то совместная собственная функция L_1 и L_2, $\psi(x, P) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(P) c_j(x, E)$ мероморфна на аффинной части $\mathfrak{R}$. Ее полюсы не зависят от x.

Чтобы найти вид $\psi(x, P)$ в бесконечности, построим для каждого оператора росток формальной блоховской функции.

Лемма 2.1. *Существует единственное решение уравнения*

$$L_1 \psi(x, k) = k^n \psi(x, k) \tag{2.1}$$

в пространстве формальных рядов вида

$$\psi(x, k) = \Big(\sum_{s=N}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\Big) e^{k(x-x_0)} \tag{2.2}$$

(N *— целое) с условиями* «нормировки» $\xi_s = 0$, $s < 0$; $\xi_0(x) \equiv 1$, $\xi_s(x_0) = 0$, $s > 0$, *обозначаемое через* $\psi(x, k; x_0)$. *Любое другое решение такого вида равно*

$$\psi(x, k) = \psi(x, k; x_0) A(k), \qquad A(k) = \sum_{s=N}^{\infty} A_s k^{-s}.$$

Доказательство. Приравнивая коэффициенты при k^{-s}, $s \geqslant -n$ у обеих частей равенства (2.1), получим систему уравнений

$$\sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha \sum_{l=0}^{\alpha} C_\alpha^l \frac{d^{\alpha-l}}{dx^{\alpha-l}} \xi_{s+l} = \xi_{s+n}.$$

Из s-го уравнения находятся $\xi'_{s+n-1}(x)$, так как оно легко преобразуется к виду $0 = n\xi'_{s+n-1} +$ (члены, содержащие ξ_j, $j < s + n - 1$).

Оператор L_2 оставляет инвариантным пространство решений (2.1). Поэтому в силу доказанной леммы

$$(\psi^{-1}(x, k; x_0) L_2 \psi(x, k; x_0))\,|_{x=x_0} = k^m + \sum_{s=-m+1}^{\infty} A_s k^{-s}. \tag{2.3}$$

Следовательно, коэффициенты левой части, являющиеся полиномами от $u_\alpha(x_0)$ и их производных, в которые линейно входят $v_\beta(x_0)$, дают первые интегралы исходных уравнений. Обращая первые m интегралов, получим

Следствие 1. *Коэффициенты оператора* L_2 *полиномиально выражаются через* $u_\alpha(x)$, *их производные и константы* A_s , $-m \leqslant s \leqslant 0$.

Замечание. Для доказательства следствия достаточно, чтобы L_1 и L_2 коммутировали с точностью до операторов порядка n—2.

Из (2.3) вытекает, что $\psi(x, k; x_0)$ — собственная для всех операторов, коммутирующих с L_1.

Следствие 2. *Кольцо операторов, коммутирующих с заданным, коммутативно* (по-видимому, это впервые указано в работе [55]).

Функции $\psi(x, k_j; x_0)$, $k_j^n = E$ образуют базис $\mathscr{L}(E)$, собственный для оператора $L_2(E)$. Тогда $Q(w, E) = \prod_{j=0}^{n}(w - A(k_j))$. Следовательно, если n взаимно просто с m, то при больших, а значит, и при почти всех E собственные значения $L_2(E)$ различны. Поэтому аффинная часть $\mathfrak{R}$ пополняется в бесконечности единственной точкой P_0, в окрестности которой локальным параметром является $(E(P))^{-1/n}$. Разложение в этом локальном параметре $\psi(x, P)$ имеет вид (2.2).

Таким образом, каждой паре коммутирующих операторов, а следовательно, и коммутативному кольцу, порожденному ими, мы сопоставили: комплексную кривую $\mathfrak{R}$, называемую спектром операторов, с отмеченной точкой P_0 и их совместную собственную функцию $\psi(x, P)$. Функция $\psi(x, P)$ мероморфна вне P_0 с дивизором полюсов $p_1, \ldots, p_g$, g — род кривой $\mathfrak{R}$, которая имеет в окрестности P_0 вид (2.2). Значит, $\psi(x, P)$ — функция типа Ахиезера.

В силу леммы 1.1 набор спектральных данных $\mathfrak{R}$, P_0, $D = \sum_{j=1}^{g} p_j$ однозначно определяют функцию Ахиезера $\psi(x, P)$. Для любой функции $E(P)$, имеющей полюс лишь в P_0 (кольцо таких функций будет обозначаться через $A(\mathfrak{R}, P_0)$) теорема 1.1 сопоставляет функции $\psi(x, P)\exp(E(P)t)$ оператор L такой, что $L\psi(x, P) = E(P)\psi(x, P)$. Его коэффициенты не зависят от t. Тем самым, $\mathfrak{R}$, P_0, D задают гомоморфизм λ из $A(\mathfrak{R}, P_0)$ в кольцо дифференциальных операторов.

Т е о р е м а 2.2. *Для любого коммутативного кольца A дифференциальных операторов, содержащего пару операторов взаимно простого порядка найдутся комплексная кривая $\mathfrak{R}$ рода g с отмеченной точкой и эффективный дивизор D степени g такие, что определяемый ими гомоморфизм λ является изоморфизмом.* λ: $A(\mathfrak{R}, P_0) \to A$.

2.3. Многомерные расслоения. Общие коммутативные кольца. Отбросим теперь условие взаимной простоты порядков операторов. Оператор $L_2(E)$ может иметь кратные собственные значения. Это означает, что тогда $A(k) = \widetilde{A}(k^l)$, где l — общий делитель n и m.

Каждой точке кривой $\mathfrak{R}$, заданной уравнением

$$Q(w, E) = \prod_{j=1}^{n_1} (w - \widetilde{A}(k_j)) = 0, \quad n_1 l = n,$$

соответствует l-мерное подпространство собственных векторов оператора $L_2(E)$. Это задает l-мерное расслоение над $\mathfrak{R}$. Выберем в каждом слое над $\mathfrak{R} \setminus \infty$ векторы такие, что $\frac{d^r}{dx^r}\varphi_i(x_0, P) = \delta_{ri}$, $0 \leqslant r$, $i \leqslant l-1$. Как и ранее, все $\varphi_i(x, P)$ мероморфны на аффинной части $\mathfrak{R}$, дивизор их полюсов D_i имеет степень g.

Чтобы найти вид $\varphi_i(x, P)$ в окрестности «бесконечно удаленной» точки P_0, построим матричную функцию $\Psi(x, P)$, столбцы которой $\varphi_i(x, P)$, $\varphi_i^{(1)}(x, P)$, $\varphi_i^{l-1}(x, P)$. Матричная функция $\Psi'(x, P)\Psi^{-1}(x, P)$ не зависит от выбора базиса $\varphi_i(x, P)$, поэтому для ее нахождения в окрестности P_0 можно воспользоваться функциями $\psi(x, \widetilde{k}_j; x_0)$, $\widetilde{k}_j^l = k$. В локальном параметре $k^{-1}(P)$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \ldots & 0 & 1 \\ k+\widetilde{u}_0, & \widetilde{u}_1 & & \ldots & \widetilde{u}_{l-2} & 0 \end{pmatrix} + O(k^{-1}), \tag{2.4}$$

где $\tilde{u}_\alpha(x)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant l-2$,— полиномы от коэффициентов L_1 и их производных.

Введем оператор $\tilde{L} = \sum \tilde{u}_\alpha(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$; $\tilde{u}_l \equiv 1, \tilde{u}_{l-1} = 0$. Пусть $\tilde{c}_j(x, k)$ — канонический базис пространства решений $\tilde{L}y = ky$. Из (2.4) вытекает

Лемма 2.2. *В окрестности P_0 функция $\varphi_j(x, P)$ представима в виде*

$$\varphi_j(x, P) = \tilde{c}_j(x, k)\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_j(x) k^{-s}\right). \tag{2.5}$$

Займемся теперь обратной задачей восстановления коммутирующих операторов по $\mathfrak{R}$, P_0, $D_1, \ldots, D_l$, $\tilde{u}_0(x), \ldots, \tilde{u}_{l-2}(x)$.

Лемма 2.3. *Для каждой неособой комплексной кривой $\mathfrak{R}$ рода g с отмеченной точкой и неспециальных эффективных дивизоров D_j степени g существуют единственные функции $\varphi_j(x, P)$, мероморфные вне P_0, с дивизором полюсов D_j, имеющие в окрестности P_0 вид* (2.5).

Доказательство. Пусть ω — нормированный абелев дифференциал с единственной особенностью в P_0 вида $-\frac{dz}{z^2}$, $z(P) = k^{-1}(P)$. Функция $c_j\left(x, \int_{\bar{p}}^{p} \omega\right)$ определена на $\mathfrak{R}$, разрезанной по циклам a_i, и имеет нужную особенность в P_0. Обозначим через $G_i(x, t)$, $t \in a_i$, отношение ее значения на двух берегах разреза.

Поставим теперь задачу Римана об отыскании функции $f_j(x, P)$ мероморфной на $\mathfrak{R}$, разрезанной вдоль a_i, с дивизором полюсов D_j, удовлетворяющей на a_i краевому условию

$$f_j^+(x, t) = G_i^{-1}(x, t) f_i^-(x, t); \qquad f_j(x, P_0) = 1.$$

Существование, единственность и конструктивное построение $f_j(x, P)$ через ядра Коши на $\mathfrak{R}$ и θ-функции Римана содержатся в [37]. Искомая функция:

$$\varphi_j(x, P) = c_j\left(x, \int_{\bar{p}}^{p} \omega\right) f_j(x, P).$$

Теорема 2.3. *Для каждой функции $E(P) \in A(\mathfrak{R}, P_0)$ существует единственный оператор L порядка nl, где n — кратность полюса $E(P)$, такой, что $L\varphi_j(x, P) = E(P)\varphi_j(x, P)$.*

Доказательство. Построим по $\varphi_j(x, P)$ матричную функцию Ахиезера $\Psi(x, P)$. Из (2.4) следует, что $\left(\frac{d^{\alpha l}}{dx^{\alpha l}} \Psi(x, P)\right) \Psi^{-1}(x, P)$ в окрестности P_0 имеет вид $k^\alpha 1 + O(k^{\alpha-1})$, где 1 — единичная матрица. Как и в § 1, найдем коэффициенты матричного оператора $\bar{L} = \sum_{\alpha=0}^{n} w_\alpha(x) \frac{d^{\alpha l}}{dx^{\alpha l}}$ из сравнения

$$(\bar{L}\Psi)\Psi^{-1} \equiv E(P) \cdot \bar{L} \pmod{O(k^{-1})}.$$

Из единственности матричной функции $\Psi(x, P)$ следует, что $\bar{L}(\Psi(x, P) = E(P)\Psi(x, P)$. Вспоминая, что столбцы $\Psi(x, P)$ состоят из производных

$\varphi_j(x, P)$, получим, что действие $\bar{L}$ на вектор-столбец совпадает с действием на $\varphi_j(x, P)$ скалярного оператора L.

Таким образом мы пришли к теореме.

Теорема 2.4. *Для любого коммутативного кольца A дифференциальных операторов найдутся: кривая $\mathfrak{R}$ рода g с отмеченной точкой P_0, набор дивизоров $D_1, \ldots, D_l$ степени g, набор произвольных функций $\tilde{u}_0(x), \ldots, u_{l-2}(x)$ такие, что определяемый ими в силу теоремы 2.3 гомоморфизм λ является изоморфизмом λ: $A(\mathfrak{R}, P_0) \to A$.*

Кривая $\mathfrak{R}$ называется спектром A кратности l. Представляет интерес задача выделения коммутирующих операторов с полиноминальными по x коэффициентами. В работе [43] был построен пример таких операторов. Их совместным спектром является эллиптическая кривая, $w^2 = E^3 - \alpha$. Кратность спектра равна 3.

§ 3. Двумерный оператор Шрёдингера и связанные с ним алгебры

Мы изложим здесь основные идеи работы Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и автора [34], где впервые была поставлена и решена обратная задача о восстановлении оператора, существенным образом зависящего от нескольких пространственных переменных, по «алгебраическим» спектральным данным. (Напомним, что в рассматриваемых в § 1 операторах дифференцирование по y входило лишь в первой степени.)

В связи с этим естественно возникла новая задача об описании подколец A кольца дифференциальных операторов от двух переменных $\mathcal{O}$, которые после факторизации по левому главному идеалу, порожденному оператором Шрёдингера H в $\mathcal{O}$, образуют коммутативное кольцо $A(\mathrm{mod}\, H)$, где $H = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} + v(z, \bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + u(z, \bar{z})$. Мы будем называть такие кольца «коммутативными» modulo H. Это означает, что для любых операторов $L_1, L_2 \in A$ существуют операторы D_1, D_2, D_3 такие, что

$$[L_1, L_2] = D_1 H;\ [L_1, H] = D_2 H;\ [L_2, H] = D_3 H. \tag{3.1}$$

Последние равенства эквивалентны системе нелинейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов L_1, L_2, H. Как будет показано, их решения могут быть явно выражены через θ-функции Римана.

Как и ранее, предполагается, что старшие члены всех рассматриваемых операторов являются однородными дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами.

Теорема 3.1. *Операторы L_1, L_2, удовлетворяющие уравнениям совместности* (3.1), *связаны алгебраическим соотношением, т. е. $Q(L_2, L_1)\varphi = 0$ на пространстве решений $H\varphi = 0$.*

Утверждение теоремы следует из того, что на пространстве $\mathcal{L}(E)$ решений уравнений

$$L_1\varphi(z, \bar{z}, E) = E\varphi(z, \bar{z}, E);\quad H\varphi(z, \bar{z}, E) = 0 \tag{3.2}$$

оператор L_2 задает линейный оператор $L_2(E)$, матричные элементы которого в каноническом базисе являются полиномами по $E(\dim \mathcal{L}(E) = 2n)$. Тогда $Q(w, E) = \det(w \cdot 1 - L_2^{st}(E))$ — характеристический полином для $L_2(E)$.

Предположим, что при почти всех E собственные значения $L_2(E)$ различны. Тогда каждой точке алгебраической кривой $\mathfrak{R}$, заданной уравнением $Q(w, E) = 0$, отвечает собственный вектор $L_2(E)$, все координаты которого в каноническом базисе $c_j(z, \bar{z}, E)$ — мероморфные функции на $\mathfrak{R}$, $\lambda_j(P)$. Соответствующая функция $\psi(z, \bar{z}, P) = \sum \lambda_j(P) c_j(z, \bar{z}, P)$ мероморфна на $\mathfrak{R}$ вне «бесконечности». Ее дивизор полюсов имеет степень g, равную роду $\mathfrak{R}$.

Чтобы найти поведение $\psi(z, \bar{z}, P)$ в «бесконечности», построим, как и ранее, росток формальной блоховской функции. Не ограничивая общности, можно считать, что старшие члены L_1 и L_2 равны $\frac{\partial^n}{\partial z^n} + q_1 \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}$ и $\frac{\partial^m}{\partial z^m} + q_2 \frac{\partial^m}{\partial \bar{z}^m}$ соответственно.

Л е м м а 3.1. *Существуют единственные формальные решения уравнений* (3.2) *вида*

$$\left\{\begin{aligned} &\psi_1(z, \bar{z}, k_1) = e^{k_1 z}\Big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(z, \bar{z})\, k_1^{-s}\Big), \quad k_1^n = E, \\ &\psi_2(z, \bar{z}, k_2) = e^{k_2 \bar{z}}\Big(\sum_{s=0}^{\infty} \chi_s(z, \bar{z})\, k_2^{-s}\Big), \quad q_1 k_2^n = E \end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

с условиями «нормировки» $\xi_s(0, 0) = \chi_s(0, 0) = 0$, $s \geqslant 1$, $\chi_0(0, 0) = 1$.

Ряды $\psi_1^{-1} L_2 \psi_1 = k_1^m + O(k_1^{m-1})$ и $\psi_2^{-1} L_2 \psi_2 = q_2 k_2^m + O(k_2^{m-1})$ являются разложениями собственных значений $L_2(E)$ в окрестностях двух «бесконечно удаленных» точек P_1, P_2 кривой $\mathfrak{R}$, если n и m взаимно просты и $q_1^m \neq q_2^n$.

Локальными параметрами в окрестностях P_1 и P_2 являются $(E(P))^{-1/n}$ и $(E(P) q_1^{-1})^{-\frac{1}{n}}$. В них разложение $\psi(z, \bar{z}, P)$ имеет вид (3.3).

Найденные свойства $\psi(z, \bar{z}, P)$, как и в случае функций Ахиезера, позволяют восстановить ее по «алгебраическим» данным.

Л е м м а 3.2. *Для любой неособой комплексной кривой $\mathfrak{R}$ рода g с фиксированными локальными параметрами $w_1 = k_1^{-1}(P)$, $w_2 = k_2^{-1}(P)$ в окрестностях отмеченных точек P_1 и P_2 и эффективного, неспециального дивизора D степени g существует единственная функция $\psi(z, \bar{z}, P)$, мероморфная вне P_1 и P_2 с дивизором полюсов D, разложение которой в окрестности P_j в локальном параметре $k_j^{-1}(P)$ имеет вид* (3.3).

Два локальных параметра $w_j(P)$ и $w_j'(P)$ в окрестности P_j называются эквивалентными, если $(w_j^{-1} w_j')(P_j) = 1$.

С л е д с т в и е. *Функция $\psi(z, \bar{z}, P)$ зависит лишь от классов эквивалентности $w_j(P)$.*

Л е м м а 3.3. *Существует единственный оператор* $H = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} + v(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + u(z, \bar{z})$ *такой, что* $H\psi = 0$.

Любой оператор L, $L\psi=0$, делится справа на H, т. е. $L=DH$.

Доказательство. Для любых рядов $\psi_1(z, \bar z, k)$, $\psi_2(z, \bar z, k)$ вида (3.3) существует оператор H такой, что $H\psi_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, O(k^{-1}))$, $H\psi_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\, O(1))$. Стандартным в рамках нашей конструкции образом из единственности $\psi(z, \bar z, P)$ следует, что $H\psi(z, \bar z, P)$ тогда тождественно равна нулю.

Лемма 3.4. *Для любой функции $E(P) \in A(\mathfrak{R}, P_1, P_2)$, имеющей полюсы лишь в точках P_1 и P_2, существует единственный оператор L вида*

$$\sum_{\alpha=0}^{n_1} u_\alpha(z, \bar z) \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n_2} v_\beta(z, \bar z) \frac{\partial^\beta}{\partial \bar z^\beta},$$

где n_j — порядки полюсов $E(P)$ в P_j, такой, что

$$L\psi(z, \bar z, P) = E(P)\psi(z, \bar z, P).$$

Коэффициенты операторов L, H стандартным образом выражаются через θ-функцию Римана. Например, для H имеем [34]

$$v(z, \bar z) = -\frac{\partial}{\partial z} \ln \left[\frac{\theta(U_1 z + U_2 \bar z + V_1 + W)}{\theta(U_1 z + U_2 \bar z + V_2 + W)}\right],$$

$$u(z, \bar z) = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar z} \ln \theta(U_1 z + U_2 \bar z + W).$$

Суммируем доказанные утверждения.

Теорема 3.2. *Для любого «коммутативного* madulo *H» кольца A, содержащего операторы взаимно простого порядка со старшими частями $\frac{\partial^n}{\partial z^n} + q_1 \frac{\partial^n}{\partial \bar z^n}$, $\frac{\partial^m}{\partial z^m} + q_2 \frac{\partial^m}{\partial \bar z^m}$, $q_1^m \neq q_2^n$ найдутся кривая $\mathfrak{R}$ рода g с двумя отмеченными точками P_1, P_2, класс эквивалентности локальных параметров в их окрестностях и эффективный неспециальный дивизор степени g такие, что определяемый ими гомоморфизм λ является изоморфизмом λ: $A(\mathfrak{R}, P_1, P_2) \to A(\mathrm{mod}\, H)$.*

Остановимся на некоторых оставшихся открытыми вопросах. Мы построили класс операторов Шрёдингера с почти-периодическими потенциалами, для которых блоховские собственные функции при нулевом уровне энергии могут быть найдены точно. Неясно, когда можно варьировать по энергии параметры нашей конструкции, т. е., если H задан кривой $\mathfrak{R}$, точками P_1, P_2, дивизором D, то существуют или нет семейства собственных функций H с любой энергией ($H\psi = E\psi$, $E \neq 0$), параметризованные точками алгебраических кривых $\mathfrak{R}(E)$. Если да, то как найти $\mathfrak{R}(E)$ по исходным данным? Как найти пространство M^2 расслоения над комплексной плоскостью C со слоями $\mathfrak{R}(E)$? Существует ли алгебраическое многообразие $\hat M^2$, компактифицирующее M^2?

Последний вопрос тесно связан с задачей выделения среди построенных операторов чисто потенциальных, т. е. операторов вида $H = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar z} + u(z, \bar z)$. Только в классе таких операторов условие вещественности коэффициентов, естественно возникающее в рамках наших конструкций, превращается в условие эрмитовости, которое должно выполняться для физических операторов Шрёдингера.

Лемма 3.5. *Если на кривой $\mathfrak{R}$ существует антиинволюция T_1 оставляющая дивизор D инвариантным и такая, что $T_1(P_1) = P_2$ и $T_1^* w_1 = \overline{w}_2$, где w_1, w_2 — локальные параметры около P_1 и P_2, то для построенного по этим данным оператора H функция $v(z, \overline{z})$ чисто мнимая, а потенциал $u(z, \overline{z})$ веществен. Следовательно, оператор H становится вещественным после калибровочного преобразования.*

Замечание 1. Аналогичным образом выделяются вещественные решения уравнений Захарова — Шабата.

По-видимому, оператор H потенциален тогда и только тогда, когда исходное кольцо A коммутативно, что влечет за собой существование многообразия $\hat{M}^2$, т. е. 2-алгебраичность H в нашей терминологии.

Замечание 2. Необходимым условием потенциальности вместе с вещественностью оператора H является существование на кривой $\mathfrak{R}$ второй антиинволюции такой, что $T_2^* w_1 = -\overline{w}_2$. Как указал С. П. Новиков, наличие двух антиинволюций T_1, T_2 (при некоторых ограничениях на расположение дивизора D на множестве неподвижных точек T_1, указанных в [34], лемме 3) достаточно для ограниченности по z, $\overline{z}$ блоховской собственной функции $\psi(z, \overline{z}, P)$, где $T_2 P = P$. (Напомним, что $H\psi = 0$.) Множество неподвижных точек $T_2 P = P$ называется «вещественной ферми-поверхностью».

§ 4. Задача о многомерных n-алгебраических операторах

Пусть A — коммутативное кольцо дифференциальных операторов от n переменных

$$L = \sum_{|\alpha| \le l} u_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha},$$

где, как обычно, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \qquad \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Предполагается, что все старшие коэффициенты операторов $u_\alpha(x)$, $|\alpha| = l$, постоянны.

Пусть символы старших частей операторов $L_i \in A (i = 1, \ldots, n)$, полиномы $P_i(k)$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, алгебраически независимы. Тогда фактор-кольцо кольца полиномов $C[k_1, \ldots, k_n]$ по идеалу, порожденному $P_i(k) - E_i$ конечномерно. Обозначим через $G_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, \ldots, N)$ представители его образующих.

Лемма 4.1. *Базисом $\mathcal{L}(E)$ пространства решений уравнений $L_i y = E_i y$ являются функции, удовлетворяющие условиям «нормировки»*

$$G_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) c_\beta (x_0, E) = \delta_{\alpha\beta}, \quad E = (E_1, \ldots, E_n).$$

Каждый оператор $L_0 \in A$ задает линейный оператор $L_0(E)$ в $\mathscr{L}(E)$.

Лемма 4.2. *Матричные элементы $L_0^{st}(E)$ оператора $L_0(E)$ в базисе $c_\alpha(x, E)$ полиномиальны по переменным E_i, E_i^{-1}.*

Теорема 4.1. *Операторы L_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, связаны алгебраическим соотношением $Q(L_0, \ldots, L_n) = 0$, где $Q(w, E_1, \ldots, E_n) = \det(w \cdot 1 - L_0^{st}(E))$.*

Если символ $P_0(k)$ старших членов L_0 принимает почти всегда различные значения в корнях уравнений $P_i(k) = E_i$, то при почти всех E собственные значения $L_0(E)$ различны. Как и ранее, сопоставляя каждой точке аффинного многообразия M^n, заданного в $C \times C^n$ уравнением $Q(w, E) = 0$, собственные векторы $L_0(E)$, получим следующую лемму.

Лемма 4.3. *Существует мероморфная функция $\psi(x, m)$, $m \in M^n$, собственная для операторов L_i,*

$$L_i\psi(x, m) = E_i(m)\psi(x, m), \quad L_0(\psi(x, m)) = w(m)\psi(x, m).$$

В отличие от случая $n = 1$, компактификация M^n, при которой $\psi(x, m)$ будет иметь «хорошие» свойства в окрестности D^∞ дивизора бесконечности, не самоочевидна при $n > 1$. Здесь D^∞ означает дивизор компактного алгебраического многообразия $\hat{M}^n$ такого, что $\hat{M}^n \setminus \hat{D}^\infty$ изоморфно M^n.

Теорема 4.2. *Существует единственное решение системы уравнений*

$$L_i\psi(x, k) = P_i(k)\psi(x, k) \ (i = 1, \ldots, n),$$

имеющее вид

$$\psi(x, k) = e^{(k, x)}\Big(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x, k)\Big), \tag{4.1}$$

где $(k, x) = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n$; $\xi_s(x, k)$ — однородные по k рациональные функции степени $-s$, $\xi_0(0, k) = 1$; $\xi_s(0, k) = 0$, $s \geqslant 1$.

Доказательство. Функции $\xi_s(x, k)$ находятся последовательно из системы уравнений

$$\sum_{|\alpha| \leq l_i} u_{\alpha, i}(x) \sum_{|r| \leq |\alpha|} \frac{\partial^r P_i(k)}{\partial k^r} \frac{\partial^{\alpha - r}}{\partial x^{\alpha - r}} \xi_{s+|r|} = P_i(k)\,\xi_s.$$

Из s-го уравнения находятся $\frac{\partial}{\partial x_j}\xi_s(x, k)$. Коммутативность L_i приводит к возможности проинтегрировать эти частные производные и найти $\xi_s(x, k)$. При этом $\xi_s(x, k)$ имеет вид $F(x, k)\,G^{-s}(k)$, где $G(k) = \det\left\| \frac{\partial P_i}{\partial k_j} \right\|$.

Замечание. Если $\deg L_i = l_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, то градиентным преобразованием операторы L_i могут быть приведены к виду $P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \tilde{L}_i$, $\deg \tilde{L}_i \leqslant l_i - 2$ тогда и только тогда, когда $\xi_0(x, k) = \xi_0(x)$ не зависит от k.

Следствие 1. *Коэффициенты ряда $\psi^{-1}(x, k)L_0\psi(x, k) = A(k)$ являются полиноминальной системой первых интегралов уравнений, эквивалентных условиям $[L_i, L_j] = 0$.*

Следствие 2. *Кольцо операторов, коммутирующих с* L_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *коммутативно. Функция* $\psi(x, m)$ *собственная для всех операторов* $L \in A$.

Следствие 3. *Характеристический полином* $Q(w, E)$ *равен* $Q(w, E) = \prod_\alpha (w - A(k_\alpha))$, *где* k_α — *корни системы уравнений* $P_i(k) = E_i$.

Введем градуировку в кольце $C[w, E_1, \ldots, E_n]$, приписав этим переменным степени $l_0, \ldots, l_n$ соответственно.

Следствие 4. *Пусть* Q^0 — *полином степени* Nl_0, *связывающий* $P_i(k)$, *т. е.* $Q^0(P_0(k), \ldots, P_n(k)) = 0$. *Тогда* $Q(w, E) = Q^0(w, E) + \tilde{Q}(w, E)$, $\deg \tilde{Q}(w, E) \leqslant Nl_0 - 1$.

Дадим теперь описание нужной компактификации M^n. Для этого рассмотрим «взвешенное» проективное пространство $CP(\omega)$, $\omega = (l_0, \ldots, l_n)$, как фактор-пространство $C^{n+2} \setminus 0$ по следующему действию мультипликативной группы комплексных чисел. Точка $(z_0, \ldots, z_{n+1})$ эквивалентна $(t^{l_0}z_0, \ldots, t^{l_n}z_n, tz_{n+1})$, $t \neq 0$.

Зададим $\hat{M}^n$ в $CP(\omega)$ уравнением

$$0 = z_{n+1}^{Nl_0} Q\left(\frac{z_0}{z_{n+1}^{l_0}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}^{l_n}}\right) = Q^0(z_0, \ldots, z_n) + z_{n+1}Q_1(z_0, \ldots, z_{n+1}).$$

Открытое подмногообразие $\hat{M}^n$: $z_{n+1} \neq 0$ изоморфно M^n.

Регулярное отображение φ: $CP^n \to CP(\omega)$, задаваемое в однородных координатах следующим образом:

$$\varphi(v_1, \ldots, v_{n+1}) = (\ldots, P_i(v_1, \ldots, v_n), \ldots, v_{n+1}),$$

устанавливает бирациональный изоморфизм между гиперплоскостью $v_{n+1} = 0$ и дивизором D^∞, определяемым уравнениями $z_{n+1} = 0$, $Q^0(z_0, \ldots, z_n) = 0$. Следовательно, в малой окрестности D^∞ в $\hat{M}^n$ определены функции $k_i(m) = \dfrac{v_i}{v_{n+1}}$.

Теорема 4.3. *В окрестности* D^∞ *функция* $\psi(x, m)$ *представима в виде* (4.1), $k_i(m) = \dfrac{v_i}{v_{n+1}}$.

Наше предположение заключается в том, что многообразие $\hat{M}^n$ и дивизор полюсов $\psi(x, m)$ однозначно определяют коммутативное кольцо A. Решение обратной задачи осложняется тем, что $\hat{M}^n$ имеет особенности в образах при отображении φ точек $v_{n+1} = 0$, $G(v_1, \ldots, v_n) = 0$; $G(k) = \det \left\| \dfrac{\partial P_i}{\partial k_j} \right\|$. Размерность многообразия особенностей равна $n - 2$. При $n = 1$ это означало, что кривая $\mathfrak{R}$ гладкая. Поэтому мы могли воспользоваться для восстановления $\psi(x, P)$ теорией абелевых дифференциалов. При $n > 1$ теория мероморфных дифференциалов даже на гладких многообразиях недостаточно эффективна.

Ответ на обсуждавшийся в предшествующем параграфе вопрос о построении потенциальных операторов Шрёдингера должно дать решение обратной задачи для многообразия $\hat{M}^n$, уравнение которого $Q(w, E) = 0$ имеет вид:

если $Q^0(P_0(k), \ldots, P_n(k))$ — алгебраическое соотношение между однородными полиномами,

$$P_0(k) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2, \text{ то } Q(w, E) = Q^0(w, E) + \widetilde{Q}(w, E), \quad \deg \widetilde{Q} \leqslant \deg Q^0 - 2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ В УРАВНЕНИЯХ ТИПА ЛАКСА И НОВИКОВА

Уравнения КдФ и его высшие аналоги определяют на функциональных пространствах потоки, которые, согласно Гарднеру [4], В. Е. Захарову и Л. Д. Фаддееву [3], имеют формально гамильтонов вид $u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n}{\delta u}$ на любом пространстве, где $I_n = \int L_n(u, u', \ldots)\,dx$ имеют смысл, и коммутируют. Здесь I_n — система интегралов КдФ, найденная впервые в работе [45], а $\frac{\delta I}{\delta u} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial L}{\partial u^{(k)}}$. Кососимметрический оператор $\frac{\partial}{\partial x}$ определяет на пространстве функционалов скобку Пуассона (скобку Гарднера — Захарова — Фаддеева) по формуле

$$\{\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2\} = \int \frac{\delta F_1}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta F_2}{\delta u}\,dx; \quad \widetilde{F}_i = \int F_i(u, u', \ldots)\,dx \qquad (i = 0, 1).$$

В. Е. Захаров и Л. Д. Фаддеев [3] показали, что на пространстве быстро убывающих функций все «высшие аналоги» уравнения КдФ являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами, для которых переменными типа «действие — угол» являются данные рассеяния оператора Штурма — Лиувилля $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$.

Новиковым было показано, что сдвиг по x определяет на фазовом пространстве решений стационарных уравнений $\sum_{n=0}^{N} c_n \frac{\delta I_n}{\delta u} = h$ вполне интегрируемый конечномерный гамильтонов поток [20]. Общее утверждение о связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных уравнений вида $u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I}{\delta u}$ было получено С. П. Новиковым и О. И. Богоявленским [46].

Пусть потоки $X_i\left(u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_i}{\delta u}\right)$ $(i = 1, 2)$ коммутируют. Следовательно, неподвижные точки T_h потока X_1 $\left(\frac{\delta I_1}{\delta u} = h\right)$ образуют инвариантное множество потока X_2. Обозначим ограничение X_2 на T_h через $\varphi_h(X_1, X_2)$. Коммутативность потоков равносильна тому, что $\{\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2\} = 0$ или

$$\frac{\delta I_1}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_2}{\delta u} = \frac{d}{dx}\,Q(u, u', \ldots).$$

В теории КдФ такая конструкция интегралов в стационарной задаче предлагалась И. М. Гельфандом и Л. А. Диким [48], Лаксом [47].

Теорема [46]. *Поток* $\varphi_h(X_1, X_2)$ *на фазовом пространстве* T_h *является гамильтоновым с гамильтонианом* $-Q - h\frac{\delta I_2}{\delta u}$.

В случае высших КдФ существуют замечательные канонически сопряженные переменные в фазовом пространстве T, полученные в работе [49].

Коэффициенты формального ряда $V(u, k)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i k^i$, удовлетворяющего уравнению $-V'''+4V'\left(u-\frac{1}{k}\right)+2Vu'=0$ (что эквивалентно рекуррентной системе уравнений $4b'_{n+1}=-b'''_n+4b_n u+2b_n u'$), однозначно определяются после задания начальных данных

$$2c(k)=V''V-\frac{(V')^2}{2}-2V^2\left(u-\frac{1}{k}\right).$$

Высшие аналоги уравнения КдФ имеют вид $u_t=b'_{n+1}$.

Пусть $W=\sum_{i=0}^{\infty} w_i k^i=-\frac{1}{2}\frac{V'}{V}$, тогда переменные b_i w_{n-i} являются канонически сопряженными в фазовом пространстве T решений стационарного уравнения $b_{n+1}=0$. Сдвиг по x определяет в T гамильтонов поток с гамильтонианом H_{n+1}, где $H=\sum_{i=0}^{\infty} H_i k^i=W^2V+\frac{c(k)}{V}-V\left(u-\frac{1}{k}\right)$.

На языке блоховской собственной функции $\psi(x, P)$ конечнозонного оператора Штурма — Лиувилля: если $\chi(x, P)=-i(\ln\psi)'=\chi_R+i\chi_I$, то $\chi_R=$ $=\frac{\sqrt{c(k)}}{\prod_i (k-\gamma_i(x))}=\frac{\sqrt{c(k)}}{V}$, $\chi_I=-\frac{1}{2}(\ln\chi_R)'=W=\sum w_i k^i$. Следовательно, b_k — это элементарные симметрические полиномы $b_k=\sigma_k(\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x))$. Построение канонически сопряженных переменных к b_k предпринималось в работе Флашке и Мак Лафлина [50], но спектральный смысл их оставался неясным.

Решения уравнений Захарова — Шабата, не зависящие от переменной y, описываются нелинейными уравнениями на коэффициенты операторов $L_1=$ $=\sum_{\alpha=0}^{n} u_\alpha(x, t)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$, $L_2=\sum_{\beta=0}^{m} v_\beta(x, t)\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$, эквивалентными операторному уравнению

$$\text{(П.1.1)}\qquad \left[L_1, L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right]=0 \Longleftrightarrow \frac{\partial L_1}{\partial t}=[L_2, L_1].$$

Поскольку коэффициенты L_2, коммутирующего с L_1 в силу (п. 1.1) с точностью до операторов $n-2$ порядка, полиномиально выражаются через производные $u_\alpha(x, t)$ и константы h_s, $-m\leqslant s\leqslant 0$ (см. следствие 1 леммы 2.1), то эти уравнения эквивалентны набору систем уравнений на функции $u_\alpha(x, t)$, называемые *уравнениями типа Лакса*. Кроме указанного в § 2, алгоритмы построений операторов L_2, коммутирующих таким образом с L_1, содержатся в работах [19], [32]. В последней работе И. М. Гельфандом и Л. А. Диким было показано, что уравнения типа Лакса представимы в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=l\sum_{p=1}^{N}c_p\frac{\delta A_p}{\delta u},\tag{П.1.2}$$

где $u=(u_0,\ldots,u_{n-2})$, $\frac{\delta}{\delta u}=\left(\frac{\delta}{\delta u_0},\ldots,\frac{\delta}{\delta u_{n-2}}\right)$, l —кососимметрический оператор, матричные элементы которого равны

$$l_{rs}=\sum_{\gamma=0}^{n-1-r-s}C^r_{\gamma+r}u_{r+s+\gamma+1}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\gamma-C^s_{\gamma+r}\left(i\frac{d}{dx}\right)^\gamma u_{r+s+\gamma+1}.$$

Построение интегралов A_p уравнений типа Лакса использует разложение дробных степеней резольвенты оператора L_1.

Оператор l задает на пространстве функционалов скобку Пуассона (скобку Гельфанда — Дикого по формуле

$$\{\widetilde{F}_1,\widetilde{F}_2\}=-\int\left[\sum_{r,s}\left(l_{rs}\frac{\delta F_2}{\delta u_s}\right)\frac{\delta F_1}{\delta u_r}\right]dx.$$

Доказательство тождества Якоби для этой скобки нетривиально. Как сообщили автору И. М. Гельфанд и Л. А. Дикий, его полное доказательство не только для скалярных, но и матричных операторов дано в [33]. Как и в случае «высших аналогов» уравнения КдФ, все потоки $u_t=l\frac{\delta A_p}{\delta u}$ коммутируют между собой.

Из (П. 1.2) непосредственно не вытекает лагранжевость уравнений для стационарных решений уравнений типа Лакса, так как это связано с необходимостью обращения оператора l. Последние уравнения, означающие, что для оператора L_1 существует коммутирующий оператор L_2, называются уравнениями типа Новикова, $[L_1, L_2]=0$. (Построение полиномиальных интегралов для них, а также полное интегрирование уравнений типа Новикова, полученное автором, приведено в § 2 настоящего обзора.)

Явно лагранжева часть уравнений Новикова $\sum_{p=1}^{N}c_p\frac{\delta A_p}{\delta u}=0$ рассматривалась Гельфандом и Диким лишь при дополнительном предположении о невырожденности лагранжиана $\sum_{p=1}^{N}c_pA_p$. (По-видимому, это предположение эквивалентно нашим требованиям типа взаимной простоты порядков операторов L_1 и L_2.) Для этих уравнений указан алгоритм построения интегралов в инволюции. Подсчет числа независимых интегралов должен дать полную интегрируемость соответствующей гамильтоновой системы [1]).

Как показывают решения уравнений $[L_1, L_2]=0$ в случае невзаимно простых порядков операторов, для соответствующих систем должен иметь место интересный вариант гамильтонова формализма со связями.

[1]) См. заключительные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КдФ И СИСТЕМЫ МНОГИХ ЧАСТИЦ

В октябре 1976 г. поступил новый препринт Эро, Мак Кина, Мозера [51], в котором обнаружена замечательная связь между эволюцией полюсов рациональных и эллиптических решений уравнения КдФ и движениями дискретной системы взаимодействующих частиц на прямой [1]).

Легко показать, что все эллиптические решения уравнения КдФ имеют вид $u(x, t)=\sum_{j=1}^{n} 2\wp(x-x_j(t))$, где $\wp$ — функция Вейерштрасса. Уравнение КдФ для них эквивалентно системе

$$\dot{x}_j=6\prod_{k\neq j}\wp(x_j-x_k), \tag{П.2.1}$$

$$\sum_{k\neq j}\wp'(x_j-x_k)=0, \tag{П.2.2}$$

где $x_j\neq x_k (j=1, \ldots, n)$.

Тем самым вопрос об описании эллиптических решений уравнения КдФ упирается в задачу описания L^n, заданного в C^n уравнениями (П. 2.2). Кроме случая $n=3$, о нем практически ничего не известно. Неизвестна даже размерность L^n. Кроме вырожденных случаев «бегущих» волн $f(x-ct)$, эллиптические решения уравнения КдФ с тремя полюсами сводятся к найденным впервые Новиковым и Дубровиным [54] двухзонным решениям $u(x, t)$, для которых

$$x_1+x_2+x_3=0, \qquad t=\int_0^{x_1-x_2}\frac{dz}{\sqrt{12(g_2-3\wp^2(z))}}$$

$$x_2-x_3=\frac{1}{2}\wp^{-1}\left[-\wp(x_1-x_2)+\sqrt{g_2-3\wp^2(x_1-x_2)}\right].$$

Как известно, вырожденным случаем функции Вейерштрасса является функция x^{-2}.

Следовательно, устремляя оба периода $\wp(x)$ к бесконечности, мы получим рациональные решения уравнения КдФ вида $2\sum_{j=1}^{3}(x-x_j(t))^{-2}$.

Однако для рациональных решений уравнения КдФ можно получить более полные результаты. Легко доказывается, что они обязаны иметь вид $u(x, t)=2\sum_{j=1}^{n}(x-x_j(t))^{-2}$. Уравнения (П.2.1) и (П.2.2) для рационального

1) В январе 1977 г. М. А. Ольшанецкий и Ф. Колоджеро сообщили автору о работе Г. В. и Д. В. Чудновских [52], в которой эволюция полюсов эллиптических решений уравнений КдФ, Бюргерса — Хопфа и некоторых других интерпретируется в терминах движения гамильтоновой системы частиц на прямой. Часть их результатов, относящаяся к уравнению КдФ, пересекается с излагаемыми здесь результатами [51].

случая превращаются в систему $\dot{x}_j = \sum_{k\neq j} 6(x_j - x_k)^{-2}$, $\sum_{k\neq j}(x_j - x_k)^{-3} = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Замечательным оказывается то, что многообразие рациональных решений уравнения КдФ инвариантно относительно потоков X_i, определяемых «высшими аналогами» КдФ. Обозначим через X_i образы этих потоков на многообразии L^n. Поскольку $\dim L^n \leqslant n$, то существует поток $\widetilde{X}_k$, нулевой на L^n. Следовательно, все рациональные решения уравнения КдФ стационарны для одного из высших КдФ, т. е. образуют сепаратрисное семейство конечнозонных потенциалов оператора Штурма — Лиувилля.

Разложение в бесконечности функции $X_i u(x, t)$ имеет вид

$$c_i\left[\prod_{d=0}^{i}\left(n - \frac{d(d+1)}{2}\right)\right]x^{-2i+1} + O(x^{-2i}),\quad c_i \neq 0.$$

Введем функции $\pi_k = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$, тогда $\widetilde{X}_i\pi_k = 0$, если $k < 2i - 1$. Поскольку π_k, $k \leqslant n$ образуют систему координат на L^n, то поток $\widetilde{X}_i$, $2i - 1 > n$, на L^n должен быть нулевым. Чтобы $X_i u(x, t) = 0$, необходимо равенство n одному из чисел $d(d+1)/2$. В противном случае многообразие L^n будет пустым.

В случае $n = d(d+1)/2$ замыкание L^n изоморфно C^d. Этот изоморфизм определяется отображением, при котором точке $t_1, \ldots, t_d$ ставятся в соответствие полюсы функции $u(x, 1)$, где $u(x, t)$ — решение задачи Коши с начальными данными $u(x, 0) = d(d+1)x^{-2}$ для потока $t_1X_1 + \ldots + t_dX_d$.

В работе [53] Мозером была доказана полная интегрируемость системы частиц на прямой с парным потенциалом $2x^{-2}$. Гамильтониан этой системы $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i<k} 2(x_j - x_k)^{-2}$. Для уравнений движений этой системы было найдено представление типа Лакса: $B_t = [A, B]$, где элементы матриц A и B равны

$$A_{jj} = p_j,\quad A_{jk} = i(x_j - x_k)^{-1},\quad j \neq k,$$
$$B_{jj} = -i\sum_{k\neq j}(x_j - x_k)^{-2},\quad B_{jk} = i(x_j - x_k)^{-2},\quad j \neq k.$$

Очевидные из такого представления интегралы уравнений $F_k = \operatorname{tr} B^k$, $F_2 = H$ находятся в инволюции. Следовательно, потоки, определяемые в фазовом пространстве интегралами F_k, коммутируют. Множество неподвижных точек исходной системы, т. е. $\operatorname{grad} F_2 = 0$ или $p_j = 0$, $\sum_{k\neq j}(x_j - x_k)^{-3}$ $(j = 1, \ldots, n)$ совпадает с многообразием L^n. Прямое сопоставление формул показывает совпадение потоков на L^n, соответствующих движению полюсов решений уравнения КдФ и ограничения потока $\operatorname{grad} F_3$ на L^n. По-видимому, имеет место не доказанное пока утверждение о совпадении на L^n потоков $\widetilde{X}_i$ и $(\operatorname{grad} F_i \mid_{L^n})$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Как стало известно автору, уже после сдачи в печать основного текста настоящего обзора А. П. Веселовым был получен ответ на ряд вопросов, отмеченных в Приложении 1. Он доказал, что ядро оператора l образуют линейные комбинации $\sum_{p=-n+2}^{0} c_p \frac{\delta A_p}{\delta u}$. Следовательно, стационарные уравнения $l\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u}=0$, $\mathscr{L}=\sum_{p=1}^{N} c_p A_p$ являются лагранжевыми $\frac{\delta}{\delta u}\left(\mathscr{L}-\sum_{p=-n+2}^{0} c_p A_p\right)=0$. В случае взаимно простых N и n доказано, что лагранжиан не вырожден и что уравнение $l\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta u}=0$ является $n-1$ параметрическим семейством вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

2. В работе [56] В. И. Петвиашвили на основе численных расчетов высказал предположение о существовании солитонов в уравнении Кадомцева — Петвиашвили. Явный вид его был найден В. Б. Матвеевым

$$u(x, y, t)=\mp\frac{1\pm 4y^2-4(x-12t)^2}{2(x\mp 12t)^2+y^2\mp\frac{1}{4}}.$$

Все N солитонные решения этого уравнения были найдены в работе Л. А. Бордаг, А. Р. Итса, В. Б. Матвеева, С. В. Манакова и В. Е. Захарова [57]

$$u(x, y, t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det A,$$

где $A_{nn}=(x-i\nu_n y-(\xi_n+3\nu_n^2 t))$, $A_{nm}=\frac{2}{\nu_n-\nu_m}$, $n\neq m$. Для того чтобы решение не имело особенностей, необходимо, чтобы для определяющих его констант выполнялось: $N=2k$, $\operatorname{Re}\nu_n>0$, $\nu_{n+k}=-\bar{\nu}_n$, $\xi_{n+k}=\bar{\xi}_n$.

Интересным оказалось то, что у уравнения Кадомцева — Петвиашвили отсутствует взаимодействие солитонов даже типа сдвига фаз.

3. В самое последнее время автором был найден алгоритм построения широкого класса рациональных и эллиптических решений уравнений Захарова — Шабата. Эволюция полюсов этих решений, как и в случае рациональных решений уравнения КдФ тесно связана с движением системы частиц на прямой.

4. В последнее время автором было доказано, что функция $u(x, y, t)$ является рациональным решением уравнения Кадомцева — Петвиашвили, убывающим при $x\to\infty$, тогда и только тогда, когда $u(x, y, t)=-2\sum_{j=1}^{N}(x-x_j(y, t))^{-2}$ (N — любое), а динамика полюсов $x_j(y, t)$ по переменной y совпадает с движением мозеровской системы частиц с гамильтонианом H (см. приложение 2), а по переменной t совпадает с потоком, задан-

ным гамильтонианом F_3. Найдены явные формулы для u. Таким образом, теория дискретных интегрируемых систем покрывается теорией алгебро-геометрических решений уравнений Захарова — Шабата как теория специальных решений.

Примечание при корректуре. В самое последнее время автору стали известны замечательные работы, которые были забыты в течение длительного времени. Это работы: J. L. Burchnall, T. W. Chaundy, Proc. Lond. Math. Soc. **21** (1922), 420—440; Proc. Royal Soc. Lond., ser. A **118** (1928), 557—573; ser. A **134** (1931), 471; H. E. Baker, Proc. Royal Soc. Lond., ser. A **118** (1928), 573—580.

В этих работах поставлена и решена задача о классификации коммутативных алгебр обыкновенных скалярных дифференциальных операторов, содержащих пару операторов взаимно простых порядков. Для алгебр общего типа задача сведена к абелевым интегралам, хотя конечных формул для коэффициентов операторов не получено. Этот результат был переоткрыт автором и составлял часть результатов работы [30]. В работе 1931 г. рассмотрены некоторые вырожденные случаи. В работе 1922 г. найдены коммутативные алгебры, содержащие оператор Штурма — Лиувилля; для потенциала указан алгоритм сведения к гиперэллиптическим интегралам. Формулы через тета-функцию, открытые в семидесятых годах, известны не были [26], [36], [30]. Естественно сопоставить эти результаты с теорией точных периодических решений уравнения КдФ ([26]) и ее дальнейшим развитием, отраженным в этом обзоре.

1. Уравнение КдФ и его высшие аналоги имеют форму Лакса. Важное извлечение из результатов Гарднера — Захарова — Фаддеева в теории КдФ состояло в том, что все эти системы коммутируют, и вследствие этого уравнение КдФ и высшие уравнения КдФ определяют деформацию одновременно всех коммутативных алгебр, содержащих оператор Штурма — Лиувилля. Этот факт был исходным пунктом современной теории периодических решений уравнения КдФ [20].

2. Указанные работы 20—30-х годов целиком носят локальный характер по x. Периодичность (квазипериодичность) коэффициентов операторов не была получена. Поэтому не была замечена связь коммутативных алгебр с теорией Флоке линейных уравнений с периодическими коэффициентами, где собственная функция операторов определяется нелокально — через оператор трансляции на период. Узловое наблюдение современной теории уравнения КдФ состоит в том, что операторы Хилла с конечным числом лакун автоматически включаются в коммутативные алгебры. Верно и обратное утверждение [20], [44], [21], [22], [36]. Упущение этой связи, вероятно, явилось причиной того, что замечательные результаты 20-х годов были неизвестны в спектральной теории операторов и не оказали влияния на решение прямых и обратных задач. Например, в работах Е. Айнса (1939—1940) и Хохштадта (1965), исследовавших частные примеры периодических конечнолакунных операторов, эти работы не упоминались.

3. Все вопросы, относящиеся к построению полиномиальных интегралов, уравнений коммутативности, их теории как теории вполне интегри-

руемых гамильтоновых систем, к временной динамике в силу уравнения КдФ [26], к алгебро-геометрическому методу построения точных решений уравнений Захарова — Шабата [28], [30], не обсуждались в старых работах. Классификация коммутативных колец матричных операторов, а также коммутирующих скалярных операторов невзаимно простых порядков не была получена; кольца многомерных операторов там не рассматривались (см. §§ 3, 4 этого обзора).

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura, A method for solving the Korteweg — de Vries equation, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095—1098.

[2] П. Д. Лакс, Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны, Математика **13**:5 (1969), 128—150.

[3] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, Уравнение Кортевега — де Фриза вполне интегрируемая гамильтонова система, Функц. анализ **5**:4 (1971), 18—27.

[4] C. Gardner, Korteweg — de Vries equation and generalisation IV, The Korteweg — de Vries equation as a hamiltonian system, J. Math. Phys. **12**:8 (1971), 1548—1551.

[5] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, ЖЭТФ **61**:1 (1971).

[6] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, О взаимодействии солитонов в устойчивой среде, ЖЭТФ **64**:5 (1973), 1627—1639.

[7] M. A. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newel, H. Segur, Method for solving the sine-gordon equation, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1262—1264.

[8] В. С. Дрюма, Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриза, Письма в ЖЭТФ **19**:12 (1973), 219—225.

[9] В. Е. Захаров, К проблеме стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов, ЖЭТФ **65**:1 (1973), 219—225.

[10] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, О резонансном взаимодействии волновых пакетов в нелинейных средах, Письма в ЖЭТФ **18**:7 (1973), 413—417.

[11] Л. А. Тахтаджян, Точная теория распространения ультракоротких оптических импульсов в двухуровневых средах, ЖЭТФ **66**:2 (1974), 476—489.

[12] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Полное описание решений «sin-gordon», ДАН **219**:6 (1974), 1334.

[13] M. Toda, Waves in nonlinear lattice, Progr. Theor. Phys. Sappl. **45** (1970), 174—200.

[14] M. Henon, Integrals of Toda Lattice, Phys. Rev. **B9** (1974), 1921—1923.

[15] H. Flaschka, Toda lattice I, Phys. Rev. **B9** (1974), 1924—1925.

[16] H. Flaschka, Toda lattice II, Progr. Theor. Phys. **51** (1974), 703—716.

[17] С. В. Манаков, О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах, ЖЭТФ **67**:2 (1974), 543—555.

[18] А. Б. Шабат, Об уравнении Кортевега — де Фриза, ДАН **211**:6 (1973).

[19] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния I, Функц. анализ **8**:3 (1974), 43—53.

[20] С. П. Новиков, Периодическая задача Кортевега — де Фриза I, Функц. анализ **8**:3 (1974), 54—66.

[21] P. D. Lax, Periodic solutions of KdV equation, Lect. in Appl. Math. **15** (1974), 85—96.

[22] H. McKean, Van Moerbeke, The spectrum of Hill's equation, Inven. Math. **30** (1975), 217—274.

[23] В. А. Марченко, Периодическая задача Кортевега — де Фриза, ДАН **217**:2 (1974), 276—279.

[24] В. А. Марченко, И. В. Островский, Периодическая задача Кортевега — де Фриза, Матем. сб. **95**:3 (1974), 331—356.

[25] В. А. Марченко, Оператор Штурма — Лиувилля и его приложения, «Наукова думка», 1977.

[26] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН **31**:1 (1976), 55—136.

[27] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах, ДАН **192**:4 (1970), 753—756.

[28] И. М. Кричевер, Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений, ДАН **227**:2 (1976), 291—294.

[29] И. М. Кричевер, Алгебраические кривые и коммутирующие матричные дифференциальные операторы, Функц. анализ **10**:2 (1976), 75—76.

[30] И. М. Кричевер, Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии, Функц. анализ **11**:2 (1977), 15—32.

[31] В. Г. Дринфельд, О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец, Функц. анализ **11**:1 (1977), 11—15.

[32] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий, Дробные степени операторов и гамильтоновы системы, Функц. анализ **10**:4 (1976), 13—29.

[33] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий, Резольвенты и гамильтоновы системы, Функц. анализ **11**:2 (1977).

[34] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Уравнение Шрёдингера в периодическом магнитном поле и римановы поверхности, ДАН **229**:1 (1976), 15—18.

[35] Н. И. Ахиезер, Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов, ДАН **141**:2 (1961), 263—266.

[36] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза, Теор. и матем. физика **23**:1 (1975), 51—67.

[37] Э. И. Зверович, Краевые задачи теории аналитических функций, УМН **26**:1 (1971), 113—181.

[38] Д. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, М., ИЛ, 1961.

[39] Б. А. Дубровин, Конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН **31**:4 (1976).

[40] Б. А. Дубровин, Вполне интегрируемые системы, связанные с матричными операторами, Функц. анализ **11**:3 (1977).

[41] С. В. Манаков, Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, Функц. анализ **10**:4 (1976), 93—95.

[42] В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, М., «Наука», 1974.

[43] Ж. Диксьмье, Об алгебрах Вейля, Математика **13**:4 (1969), 27—40.

[44] Б. А. Дубровин, Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов, Функц. анализ **9**:1 (1975), 65—66.

[45] M. Kruskal, N. Zabusky, Interection of 2 solitons in a collisionless plasma and the reccurens of initial states, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095—1098.

[46] О. И. Богоявленский, С. П. Новиков, О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач, Функц. анализ **10**:1 (1976), 9—13.

[47] P. D. Lax, Periodic solution of the KdV equation, Comm. Pure and Appl. Math. **38**:1 (1975), 141—188.

[48] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий, Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских операторов и алгебра уравнений Кортевега — де Фриза, УМН **30**: 5(1975).

[49] С. И. Альбер, Исследование уравнений типа Кортевега — де Фриза методом рекуррентных соотношений, препринт Ин-та хим. физики АН, Черноголовка, 1976.

[50] H. Flashka, McLaflin, KdV equation, Progr. Theor. Phys. **53** (1976).

[51] H. Airault, H. McKean, J. Moser, Rational and elliptic solutions of the Korteweg — de Vries equation and a related many-body problem, preprint of Kurant ins. 8 (1976).

[52] D. V. Choodnovsky, G. V. Choodnovsky, Pole expansions uf nonlinear partial differential equations, Preprint, In. Marconi, 1977.

[53] J. Moser, Three integrable hamiltonian systems connected with isospektrum deformations, Adv. in Math. 16 (1976), 354.

[54] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза, ЖЭТФ 67:12 (1974), 2131—2143.

[55] S. A. Amitsur, Commutative linear differential operators, Pacific. J. of Math. 8 (1958), 1—10.

[56] В. И. Петвиашвили, Образование трехмерных ленгмюровских солитонов под действием мощной радиоволны в ионосфере, Физика плазмы 2:3 (1976), 650—655.

[57] L. A. Bordag, A. R. Its, V. B. Matveev, S. V. Manakov, V. E. Zakharov, Two-dimension solitons of Kadomtzev — Petviashvely equations, Phys. Lett. (1977).

[58] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, Об одном классе решения уравнения КдФ, Сб. «Проблемы математической физики» № 8, ЛГУ (1976).

Поступило в редакцию 24 марта 1977 г.