1978 г. сентябрь — октябрь *т. XXXIII, вып. 5 (203)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМ. И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 1 марта 1978 г.

1. Ю. И. Манин «Об уравнениях длинных волн со свободной поверхностью». Доклад был основан на работах [1] — [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. J. Benney, Some properties of long nonlinear waves, Studies in Appl. Math. 52 : 1 (1973), 45—50.

[2] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин, Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. I. Законы сохранения и решения, Функц. анализ 11 : 3 (1977), 31—42.

[3] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин, Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. II. Гамильтонова структура и высшие уравнения, Функц. анализ 12 : 1 (1978), 25—37.

Заседание 15 марта 1978 г.

1. И. М. Кричевер, С. П. Новиков, «Голоморфные расслоения и уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП)».

I. Уравнение КП (или двумерное уравнение КдФ) возникло в 1970 г. при исследовании устойчивости солитонов относительно медленных поперечных возмущений. Степень универсальности его физического вывода такая же, как и для КдФ (см. [1]). В работах [2], [3] указано представление типа Лакса для этого уравнения. Оно имеет вид

$$3(u_y+u_{xx})=4w_x;\quad w_y-u_t=w_{xx}-\frac{3}{2}uu_x-u_{xxx} \tag{1}$$

и эквивалентно уравнению коммутативности линейных операторов:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}-L,\ \frac{\partial}{\partial t}-A\right]=0, \tag{2}$$

где $L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x, y, t)$, $A=\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+w(x, y, t)$. Подстановка $u\to\mu(t)+u\left(x+\frac{3}{2}\nu(t), y, t\right)$, $w\to w+y\frac{\partial\mu}{\partial t}$; $\frac{\partial\nu}{\partial t}=\mu$ для любой $\mu(t)$ переводит решение в решение. Отсюда следует, что корректная задача Коши по t возможна лишь для классов функций, ограниченных по y. Для убывающих при $|x|\to\infty$ решений имеем $\frac{\partial}{\partial y}\int u\,dx=0$. Поэтому величина $\int u\,dx\,dy$, являющаяся формально интегралом (1), может существовать только, если $\int u\,dx=0$. При том же условии величина $\int u^2\,dx\,dy$ является также законом сохранения. Остальные законы сохранения (1) выписываются сложнее.

II. Известен целый ряд классов точных решений уравнения КП, обладающих замечательными свойствами.

1. Солитоноподобные решения [2], полученные из методов теории рассеяния, зависящие, по существу, от произвольной функции одной переменной k.

2. Квазипериодические по x, y, t решения (см. обзор [4]), определяемые по любой римановой поверхности Γ рода g с отмеченной точкой и дивизору D степени g (или одномерному голоморфному расслоению над Γ степени g).

3. Рациональные по x, y, t решения, убывающие при $x \to \infty$. Среди неособых решений этого типа содержатся «слабо локализованные» солитоны $u(x - at, y - bt)$, убывающие при $x^2 + y^2 \to \infty$ как $(x^2 + y^2)^{-1}$, а также соответствующие многосолитонные решения [5]. Общие рациональные решения этого класса (возможно с особенностями) имеют вид

$$u(x, y, t) = -2 \sum_{j=1}^{n} (x - x_j(y, t))^{-2}, \tag{3}$$

где зависимость $x_j(y, t)$ от y, t изоморфна полностью «теории Мозера — Калоджеро» частиц на прямой с гамильтонианом

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + 2 \sum_{i<j} (x_i - x_j)^{-2}$$

(см. [4], [6]).

III. Целью новой работы докладчиков [7] является развитие алгебро-геометрических методов построения решений уравнения КП, основанное на теории голоморфных векторных расслоений над алгебраическими кривыми Γ рода g, изучавшихся в работах М. Ф. Атия, Дж. Мамфорда и А. Н. Тюрина начала 60-х годов. Укажем, что стабильное l-мерное расслоение степени lg над Γ рода g, в котором задан набор голоморфных сечений $\eta_1, \ldots, \eta_l$, определяется следующими инвариантами: а) набором точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg} \in \Gamma$, в которых сечения линейно зависимы; в) векторами

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{lg}, \quad \alpha_j = \alpha_j^q \quad (q = 1, \ldots, l),$$

$$\sum_{q=1}^{l} \alpha_j^q \eta_q \big|_{P=\gamma_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, lg). \tag{4}$$

Можно считать, что в общем положении $\alpha_j^l = 1$.

Строится векторный (некоммутативный) аналог функции Бейкера — Ахиезера $\psi(\vec{x}, P)$; $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $P \in \Gamma$, x_j — параметры, $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^l)$. Она должна удовлетворять следующим требованиям:

а) Вне точки $P_0 \in \Gamma$ функция ψ мероморфна. Ее полюса не зависят от x_j и находятся в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg}$.

б) Вычеты $\varphi^q(x)$ компонент ψ^q в точках γ_j все пропорциональны φ_j^l с постоянными коэффициентами α_j^q

$$\varphi_j^q(\vec{x}) = \alpha_j^q \varphi_j^l(\vec{x}). \tag{5}$$

с) При $P \to P_0$ вектор-функция ψ имеет вид:

$$\psi(\vec{x}, k) = \left(\xi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\vec{x}) k^{-1}\right) \Psi_0(\vec{x}, k),$$

где $\xi_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\xi_i(\vec{x})$ — векторы, $k^{-1} = k^{-1}(P)$ — локальный параметр в окрестности P_0. Матричная $(l \times l)$ функция $\Psi_0(\vec{x}, k)$ такова, что все $A_i = \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_i} \Psi_0^{-1}$ полиномиальны по k. Матрицы $A_i(\vec{x}, k)$ удовлетворяют уравнениям совместности

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = [A_j, A_i]. \tag{6}$$

Теорема 1. *Вектор-функция* $\psi(\mathbf{x}, P)$ *с указанными выше аналитическими свойствами* а), б), в) *существует и единственным образом определяется набором* $\{\Gamma, P_0, \gamma_j, \alpha_j, A_i(\vec{x}, k)\}$ *при условии* $\Psi_0(\vec{0}, k) = 1$.

Для одной переменной x эта функция строится в [8] в связи с классификацией коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов.) Рассмотрим $l \times l$ матрицу $\varkappa = (\varkappa_{ij})$, где $\varkappa_{l1} = k$, $\varkappa_{j,j+1} = 1$, а все остальные $\varkappa_{ij} = 0$. Имеем $\varkappa^l = k\hat{1}$. Зададим A_1, A_2, A_3 в виде

1. $l=2$. $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_0 & 0 \end{pmatrix} + \varkappa, \quad A_2 = \varkappa^2, \quad A_3 = \varkappa^3 + k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix} + (q_{ij}),$

2. $l=3$. $\quad A_1 = \varkappa + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ u_0, u_1, & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \varkappa^2 + (q_{ij}), \quad A_3 = \varkappa^3 + (p_{ij}),$

где функции p_{ij}, q_{ij} не зависят от k. Из соотношений (6) зависимость $u_0, u_1, \dots, p_{ij}, q_{ij}$ от x, y, t определяется. В частности, для $l = 2$ все сводится к одной функции $u_0(x, t)$, удовлетворяющей уравнению КдФ. Построим по этим функциям функцию $\Psi_0(x, y, t, k)$, а затем и вектор-функцию ψ.

Теорема 2. *Вектор-функция Бейкера—Ахиезера* $\psi(x, y, t, P)$ *аннулируется скалярными линейными операторами* $\left(\frac{\partial}{\partial y} - L\right)\psi = 0$, $\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\psi = 0$. *Вид* L *и* A *тот же, что и выше, а их коэффициенты даются формулами* $u(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\xi_1^l(x, y, t)$, $w = -\frac{3}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\xi_1^l$. *Пара* u, w *удовлетворяет уравнению КП.*

Точные формулы выводятся и обсуждаются в [7].

Пусть $A_i = \varkappa^i (i = 1, \dots, l(g+1) - 1 = N)$. Построим функцию $\Psi_0(\vec{x}, k)$, а затем $\vec{\psi}(\vec{x}, k)$. Естественно определяется зависимость параметров Тюрина γ, α от $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

Теорема 3. *Существует коммутативная* $(l(g+1) - 1)$*-мерная группа преобразований пространства модулей* l*-мерных векторных голоморфных расслоений степени* lg *над неособой алгебраической кривой рода* g. *Ее генераторы задаются мероморфными векторными полями.*

Заметим, что это пространство модулей l^2g-мерно. Для $l = 1$ оно совпадало с тором Якоби $I(\Gamma)$, который сам и являлся этой группой. При $l > 1$ все пространство модулей уже не является группой. На этом пространстве действует группа $GL(l, C)$, переставляющая оснащение. Важно отметить, что действие построенной нами группы размерности $l(g+1) - 1$ не коммутирует с действием $GL(l, C)$ и тем самым не определено на пространстве модулей расслоений без оснащений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах, ДАН 192 : 4 (1970), 291—294.

[2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I, Функц. анализ 8 : 3 (1974), 43—53.

[3] В. С. Дрюма, Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриза, Письма в ЖЭТФ 19 : 12 (1973), 219—225.

[4] И. М. Кричевер, Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений, УМН 32 : 6 (1977), 183—208.

[5] L. A. Bordag, A. R. Its, V. B. Matveev, S. V. Manacov, V. E. Zakharov, Two-dimension solitons of Kadomtzev—Petviashvely equations, Phys. Lett. (1978).

[6] И. М. Кричевер, О рациональных решениях уравнения Кадомцева—Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой, Функц. анализ 12 : 1 (1978).

[7] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и уравнение Кадомцева—Петвиашвили, Функц. анализ 12 : 4 (1978).

[8] И. М. Кричевер, Коммутативные кольца линейных дифференциальных операторов, Функц. анализ 12 : 3 (1978), 20—31.

Заседание 22 марта 1978 г.

1. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий «Вероятностные методы исследования квазилинейных параболических систем».

Пусть X и Y — вещественные гильбертовы пространства (возможно, конечномерные), $u(x, t)(t \geqslant t_0, x \in X)$ — функция со значениями в Y, $[\nabla \otimes u(x)]h = u'(x)h$ — производная по x в направлении h. Рассматривается задача Коши (в обратной форме, что удобно при использовании теории диффузионных процессов)

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + l_u(u(t, x)) = 0, \qquad u(\tau, x) = u_0(x), \qquad t \leqslant \tau. \tag{1}$$

Здесь $l_v(u) = \frac{1}{2}(A_v A_v^* \nabla, \nabla) u + (a_v, \nabla) u + b_v(A^*\nabla, u) + c_v u$ — линейный (при фиксированном $v = v(t, x)$) дифференциальный оператор с коэффициентами $A_v = A(t, x, v) \in \mathfrak{S}_2(x)$, $a_v = a(t, x, v) \in X$, $b_v = b(t, x, v) \in L_2(Y \times X, Y)$, $c_v = c(t, x, v) \in L(Y)$, $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau, x \in X, v \in Y)$, где $L(X)$, $\mathfrak{S}_2(X)$, $L_2(Y \times X, Y)$ — соответственно пространства линейных, гильберто-шмидтовских и билинейных, гильберто-шмидтовских по второй компоненте операторов, действующих в указанных пространствах.

Наряду с (1), рассматривается стохастическая система

$$\xi(t) = x + \int_\theta^t a(s, \xi(s), u(s, \xi(s)))\, ds + \int_\theta^t A(s, \xi(s), u(s, \xi(s)))\, dw(s), \tag{2}$$

$$\eta(t, \theta) y = y + \int_\theta^t c^*(s, \xi(s), u(s, \xi(s)))\, \eta(s, \theta) y\, ds + \int_0^t b^*(s, \xi(s), u(s, \xi(s)))(\eta(s, \theta) y, dw(s)), \tag{3}$$

$$\langle y, u(t, x)\rangle_Y = M\langle \eta(\tau, t) y, u_0(\xi(\tau))\rangle_Y, \tag{4}$$

где $\langle b^*(y, x), z\rangle_Y = \langle y, b(z, x)\rangle_Y$, $z, y \in Y$, $x \in X$.

Решение этой системы порождает обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1), марковский процесс $\xi(t)$ и операторный мультипликативный функционал $\eta(t, \theta)$ от него, через которые обобщенное решение представляется формулой (4).

Предполагается, что коэффициенты a_v, A_v растут не быстрее $\| x \|$ и $\| v \|^p$ $(p > 0)$ по x и v соответственно, b_v — не быстрее $\| v \|^p$ и ограничены по x, а c_v подчинены оценке $\langle c_v h, h\rangle_Y \leqslant \| h \|^2[\rho_0 + \rho_1 \| v \|^p]$, означающей наличие в системе диссипации при $\rho_0 < 0$.

Кроме того предполагается липшицевость всех коэффициентов. Невырожденность оператора A не предполагается.

При этих предположениях доказывается сходимость метода последовательных приближений $\frac{\partial u_{k+1}}{\partial t} + l_{u_k}(u_{k+1}) = 0$ к единственному обобщенному решению задачи на временном интервале, который при достаточно большой диссипации (зависящей от u_0) сколь угодно велик. При соответствующей гладкости коэффициентов доказывается сходимость производных последовательных приближений и гладкость решения.

Эти результаты обобщают результаты М. И. Фрейдлина [1], который рассматривал случай одного уравнения в конечномерном X с ограниченными по u коэффициентами оператора l_u. Доказательства существенно опираются на свойства операторных мультипликативных функционалов [2].

Более общие системы типа $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(AA^*\nabla, \nabla)u + b(t, x, u, \nabla \otimes u) = 0$, где $A = A(t, x, u, \nabla \otimes u)$ сводятся к (1) при достаточной гладкости коэффициентов путем