Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 1, 1978, 76—78.

УДК 517.9

О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ И ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ N ЧАСТИЦ НА ПРЯМОЙ

И. М. Кричевер

В последнее время были найдены интересные рациональные решения уравнений Кортевега — де Фриза (КдФ), Кадомцева — Петвиашвили (КП), Бюргерса и некоторых других (см. [1] — [4]). Для уравнения КдФ было показано [1], что все его рациональные решения являются вырожденным семейством конечнозонных решений, получающихся деформацией по t потенциалов Ламе $n(n+1)\wp(x)$ с помощью уравнения КдФ и его высших аналогов. Первое из таких решений было получено в [5]. В работе [1] была впервые замечена связь между динамикой полюсов этих решений и движением гамильтоновой системы частиц на прямой.

В настоящей заметке излагается алгоритм построения некоторых рациональных решений уравнений Захарова—Шабата. В частном случае уравнения Кадомцева—Петвиашвили дается полное описание всех рациональных решений. Развиваемый метод позволяет полностью идентифицировать движение полюсов рациональных решений уравнения КП с гамильтоновыми потоками, возникающими в теории Мозера [6] системы N частиц на прямой с гамильтонианом $H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}p_j^2+\sum_{i<j}2(x_j-x_i)^{-2}$.

I. Пусть заданы наборы полиномов $Q(k)=\sum_{i=0}^{n}c_ik^i$, $R(k)=\sum_{i=0}^{m}r_ik^i$, $q_1(k)=\sum_{i=0}^{N}h_ik^i$, $h_N=1$, комплексные числа $\varkappa_s$ и прямоугольные матрицы $A_s=a_{ij}^s$, $1\leqslant i\leqslant l_s$, рангов l_s, $\sum_s l_s=N$.

Существует единственная функция $\psi(x, y, t, k)$ вида

$$\psi(x, y, t, k)=\left(1+\frac{q(x, y, t, k)}{q_1(k)}\right)e^{kx+Q(k)y+R(k)t}$$

такая, что коэффициенты ее разложения в точках $\varkappa_s$

$$\psi(x, y, t, k)=\sum_{j=0}^{\infty}\zeta_{j,s}(x, y, t)(k-\varkappa_s)^j$$

удовлетворяют системе уравнений $\sum_j a_{ij}^s\zeta_{j,s}(x, y, t)=0$. Коэффициенты полинома $q(x, y, t, k)=\sum_{i=0}^{N-1}b_i(x, y, t)k^i$ оказываются при этом рациональными функциями своих аргументов.

Теорема 1. *Существуют единственные операторы* $L_1=\sum_{i=0}^{n}u_i(x, y, t)\frac{d^i}{dx^i}$, $L_2=\sum_{i=0}^{m}v_i(x, y, t)\frac{d^i}{dx^i}$ *такие, что* $\left(L_1-\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi=\left(L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=0$. *Коэффициенты этих операторов являются дифференциальными полиномами от функций* $b_i(x, y, t)$ *и, следовательно, рациональными функциями своих аргументов.*

Следствие. *Для построенных операторов имеет место равенство* $\left[L_1-\frac{\partial}{\partial y}, L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right]=0$.

Системы уравнений на коэффициенты операторов L_1 и L_2, эквивалентные последнему равенству, называются уравнениями Захарова — Шабата.

II. Пусть $Q(k) = 0$, $R(k) = k^2$, $l_s = 1$. Функция $\psi(x, t, k)$, определяемая по этим данным и полиному $q_1(k)$, удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{d^2}{dx^2} - u(x, t)\right)\psi(x, t, k) = 0. \qquad (1)$$

Потенциал $u(x, t)$ равен $-2\sum_{j=1}^{N}(x - x_j(t))^{-2}$. Функцию $\psi(x, t, k)$ можно представить в виде

$$\psi(x, t, k) = \left(1 + \sum_{j=1}^{N} a_j(t, k)(x - x_j(t))^{-1}\right)e^{kx+k^2t}, \qquad (2)$$

где $a_j(t, k)$ рационально зависят от переменной k.

Теорема 2. *Уравнение* (1) *имеет решение вида* (2) *тогда и только тогда, когда матрицы Λ и T с матричными элементами* $\Lambda_{jk} = \dot{x}_j\delta_{jk} + \dfrac{2(1 - \delta_{jk})}{x_j - x_k}$, $T_{jk} = \dfrac{2(1-\delta_{jk})}{(x_j - x_k)^2} - \sum_{s\neq j}\dfrac{2\delta_{jk}}{(x_j - x_s)^2}$ *удовлетворяют уравнению* $\left[\dfrac{\partial}{\partial t} - T, \Lambda\right] = 0$.

Это матричное представление уравнений движения гамильтоновой системы N частиц на прямой с гамильтонианом $H = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \sum_{i<j} 2(x_i - x_j)^{-2}$ было найдено в работе [6] и использовано для доказательства полной интегрируемости системы.

Таким образом, $2N$ параметров: коэффициенты полинома $q_1(k)$ и точки $\varkappa_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$, определяющие функцию $\psi(x, t, k)$, задают решения общего положения уравнений движения мозеровской системы частиц. Этот результат позволяет найти явные формулы для решений последних уравнений. Впервые формулы такого рода были получены в [7]. Развитый метод позволяет легко получить аналогичные формулы для всех высших гамильтоновых потоков (ср. с формулами следующего пункта).

Введем матрицу Θ с матричными элементами

$$\Theta_{si} = (x + 2\varkappa_s t)\varkappa_s^i + i\varkappa_s^{i-1} - \varkappa_s^i\left(\sum_{j=1}^{N} jh_j\varkappa_s^{j-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{N} h_j\varkappa_s^j\right)^{-1}.$$

Следствие. *Если $x_j(t)$ — координаты частиц мозеровской системы, то выполняется равенство* $\prod_{j=1}^{N}(x - x_j(t)) = \det\Theta$.

III. Уравнения Захарова — Шабата в случае операторов $L_1 = d^2/dx^2 + u(x, y, t)$, $L_2 = d^3/dx^3 + {}^3/_2 u d/dx + w(x, y, t)$ означают, что функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению КП

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4}\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\right) = 0.$$

Теорема 3. *Функция $u(x, y, t)$ тогда и только тогда является решением уравнения КП, рационально зависящим от переменной x и убывающим при $x \to \infty$, когда* $u(x, y, t) = -2\sum_{j=1}^{N}(x - x_j(y, t))^{-2}$, *и найдется функция*

$$\psi(x, y, t, k) = \left(1 + \sum_{j=1}^{N} a_j(y, t, k)(x - x_j(y, t))^{-1}\right)e^{kx+k^2y+k^3t},$$

удовлетворяющая уравнениям $\left(\dfrac{\partial}{\partial y} - L_1\right)\psi = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - L_2\right)\psi = 0$.

Следствие 1. *Динамика полюсов рациональных решений уравнения КП по переменной y совпадает с движением мозеровской системы, а по переменной t задается высшим гамильтонианом $F_3 = {}^1/_3 \operatorname{Sp}\Lambda^3$ или, что то же самое, матричным уравнением* $\left[\dfrac{\partial}{\partial t} - T_2, \Lambda\right] = 0$, *где* $T_2 = \widetilde{T} - {}^3/_2\Lambda T$, $\widetilde{T}_{jk} = \sum_{s\neq j}\dfrac{3\delta_{jk}}{(x_j - x_s)^3} - \dfrac{3(1-\delta_{jk})}{(x_j - x_k)^3}$.

Следствие 2. *Рациональные решения общего положения уравнения КП, убывающие при* $x \to \infty$, *даются формулой*

$$u(x, y, t) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det \tilde{\Theta}, \tag{3}$$

где $\tilde{\Theta}_{si}(x, y, t) = \Theta_{si}(x, y) + 3\varkappa_s^{2+i} t$.

Неособые при всех вещественных x и y решения были найдены в работе [4]. Заметим, что условие убывания по переменной y является следствием условия убывания по переменной x.

Следствие 3. *Динамика полюсов рациональных решений уравнения КдФ, т. е. рациональных решений уравнения КП, не зависящих от переменной* y, *совпадает с гамильтоновым потоком, заданным* F_3, *ограниченным на неподвижные точки исходного гамильтонова потока. Число этих полюсов равно* $n(n+1)/2$, *а сами решения даются формулой* (3), *если в ней положить*

$$\tilde{\Theta}_{si} = \frac{\partial^{3n-2i-s}}{\partial x^{3n-2i-s}} \frac{\partial^{2n+1}}{\partial k^{2n+1}} \frac{e^{kx+k^3t}}{q_1(k)} \Bigg|_{k=0}.$$

Московский энергетический институт им. Г. М. Кржижановского

Поступило в редакцию 6 сентября 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Airault H., McKean H., Moser J., preprint of Kurant inst., 1976. 2. Bordag L. A., Matveev V. B., preprint of Leipzic univ., 1977. 3. Choodnovsky D. V., Choodnovsky G. V., preprint ins «Marconi», 1977. 4. Bordag L. A., Its A. R., Matveev V. B., Manakov S. V., Zakharov V. E., preprint of Leipzic univ., 1977. 5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., ЖЭТФ **67**, № 12 (1974), 2131—2143. 6. Moser J., Adv. Math. **16** (1975), 354—360. 7. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М., Функц. анализ **10**, вып. 3 (1976), 86—87.