Функциональный анализ и его приложения,
т. 13, вып. 4, 1979, 81—82.

УДК 517.43

РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДУАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОЛЕЙ ЯНГА — МИЛЛСА

И. М. Кричевер

В настоящей заметке предлагается конструкция широкого класса рациональных решений уравнений дуальности [1]. Эти уравнения эквивалентны условию коммутации операторов (см. [2])

$$L_1 = \lambda\partial_1 + \partial_2 + \lambda B_1 + B_2, \qquad L_2 = \lambda\bar\partial_2 - \bar\partial_1 + \lambda B_3 - B_4,$$

где λ — спектральный параметр, $B_i = B_i(z_1, z_2, \bar z_1, \bar z_2)$ — коэффициенты связности в координатах $z_1 = {}^1/_2(x_2 + ix_1)$; $z_2 = {}^1/_2(x_4 + ix_3)$; $\bar z_2$; $\bar z_1$ соответственно; $(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbf{R}^4$. Для $SU(n)$-связностей $B_3 = -B_2^+$, $B_4 = -B_1^+$. Далее мы ограничимся случаем $n = 2$.

I. Рассмотрим линейное пространство L^{2N+2} пар рациональных по λ функций $(f_1(\lambda), f_2(\lambda))$, имеющих полюсы в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$.

Пусть заданы функции $a_i(z, \bar z, \lambda) = a_{i0} + a_{i1}(\lambda - \lambda_i)$ и $b_i(z, \bar z, \lambda) = b_{i0} + b_{i1}(\lambda - \lambda_i)$ такие, что

$$(\lambda\partial_1 + \partial_2)a_i = (\lambda\bar\partial_2 - \bar\partial_1)a_i = O(\lambda - \lambda_i)^2,$$
$$(\lambda\partial_1 + \partial_2)b_i = (\lambda\bar\partial_2 - \bar\partial_1)b_i = O(\lambda - \lambda_i)^2, \qquad z = (z_1, z_2). \tag{1}$$

Система $2N$ линейных уравнений, зависящих от z, $\bar z$ как от параметров и эквивалентных условиям

$$a_i(z, \bar z, \lambda)f_1(z, \bar z, \lambda) - b_i(z, \bar z, \lambda)f_2(z, \bar z, \lambda) = 0\,|_{\lambda=\lambda_i}, \tag{2}$$

задает двумерное подрасслоение $\mathscr{L}$ в $\mathbf{R}^4 \times L^{2N+2}$.

Представим вектор (f_1, f_2) в виде

$$(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^{N} (b_{i0}, a_{i0})\frac{\varphi_i}{\lambda - \lambda_i} + (\varphi_{N+1}, \varphi_{N+2}),$$

тогда для каждого i одно из уравнений (2) будет выполнено. Оставшиеся уравнения на φ_i примут вид

$$\sum_{j\neq i} \frac{a_{i0}b_{j0} - b_{i0}a_{j0}}{\lambda_i - \lambda_j}\varphi_j + d_i\varphi_i = b_{i0}\varphi_{N+2} - a_{i0}\varphi_{N+1}, \qquad d_i = b_{i0}a_{i1} - a_{i0}b_{i1}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Обозначим через $\Psi(z, \bar z, \lambda)$ (2×2)-матрицу, строками которой являются базисные решения уравнений (2). Она определена однозначно с точностью до умножения на невырожденную матрицу $g(z, \bar z)$, не зависящую от λ.

Теорема 1. *Пусть* $R_1 = \Psi(z, \bar z, \infty)$, $R_2 = \Psi(z, \bar z, 0)$ *и* $B_1 = -\partial_1 R_1 \cdot R_1^{-1}$, $B_2 = -\partial_2 R_2 \cdot R_2^{-1}$, $B_3 = -\bar\partial_2 R_1 \cdot R_1^{-1}$, $B_4 = -\bar\partial_1 R_2 \cdot R_2^{-1}$. *Тогда* Ψ *удовлетворяет уравнениям* $L_1\Psi(z, \bar z, \lambda) = 0$, $L_2\Psi(z, \bar z, \lambda) = 0$.

Следствие. *Операторы* L_1 *и* L_2 *коммутируют. Их коэффициенты* B_i *задают самодуальную связность.*

Замечание 1. Замена базисных сечений, т. е. замена $\Psi'(z, \bar z, \lambda) = g(z, \bar z)\Psi(z, \bar z, \lambda)$, эквивалентна калибровочному преобразованию полей.

II. Простейшим набором функций a_i, b_i, удовлетворяющих уравнениям (1), являются

$$(a_{i0}, b_{i0}) = (z_1 - \lambda_i z_2 + \alpha_i, \bar z_2 + \lambda_i \bar z_1 + \beta_i)A_i,$$
$$(a_{i1}, b_{i1}) = \left(-z_2 + \frac{\alpha_i\bar\lambda_i - \bar\beta_i}{1 + |\lambda_i|^2}, \bar z_1 + \frac{\bar\alpha_i + \bar\lambda_i\beta_i}{1 + |\lambda_i|^2}\right)A_i + \left(\frac{c_i}{b_{i0}}, 0\right).$$

Здесь α_i, β_i, c_i — константы, $A_i \in \mathrm{SL}(2, \mathrm{C})$ — постоянная матрица. (Эти равенства означают равенства вектор-строк.)

В этом случае матричные элементы $\Psi(z, \bar z, \lambda)$ являются рациональными функциями степени $2N$ от переменных z_1, z_2, $\bar z_1$, $\bar z_2$. Поля B_i также являются рациональными функциями z, $\bar z$.

Пример. Пусть $N = 1$, $A_1 = \hat{1}$, $\lambda_1 = 0$. Тогда получим одноинстантонное решение уравнений дуальности, для которого α, β задают центр, а модуль вещественной отрицательной константы c является размером инстантона.

Замечание 2. Можно показать, что в точках общего положения изложенная конструкция совпадает с процедурой «размножения» (см. [2]) и поэтому содержит как минимум $(5N + 6)$-параметрическое семейство N-инстантонных решений, полученных в [3].

Замечание 3. Алгебро-геометрическая конструкция всех инстантонных решений была получена в [4]. Однако пока она не дает явной параметризации многообразия «модулей» N-инстантонных полей. Возможность получения всех N-инстантонных полей, т. е. гладких, асимптотически продольных полей, в рамках изложенной конструкции и ее обобщений, одно из которых будет дано ниже, остается открытой. Для получения гладких на $\mathbf{R}^4$ полей необходимо и достаточно, чтобы матрица левой части уравнений (3) была при всех z, $\bar{z}$ невырожденной. При этом определитель $\Psi(z, \bar{z}, \lambda)$ (а он, как следует из определения Ψ, не зависит от λ) отличен от нуля. Последнее условие выделяет подмногообразие в пространстве параметров: λ_i, α_i, β_i, c_i, A_i, $i = 1, \ldots, N$, размерность которого пока неизвестна.

Замечание 4. Для получения $SU(2)$-связностей можно удвоить размерность задачи, добавив точки $\overline{\lambda}_{i+N} = -1/\overline{\lambda}_i$, для которых положим $a_{i+N}(\lambda) = \overline{b}_i(-1/\overline{\lambda})$, $b_{i+N}(\lambda) = -\overline{a}_i(-1/\overline{\lambda})$. При этом a_{i+N} и b_{i+N} будут автоматически удовлетворять уравнениям (1).

III. Предложенная конструкция допускает естественное обобщение, позволяющее строить «собственные» функции операторов L_1 и L_2 не рациональные по λ, как ранее, а определенные на гиперэллиптических кривых.

Простейшее обобщение одноинстантонного решения (см. пример 1) получим следующим образом. Рассмотрим гиперэллиптическую кривую $\mathfrak{R}$, заданную уравнением $w^2 = \prod_{j=1}^{2N+2} (\lambda - \mu_j)$. Она двулистно накрывает λ-плоскость. Размерность пространства L рациональных функций на $\mathfrak{R}$, имеющих полюсы кратности $N + 1$ в двух точках $P^{\pm}$, расположенных на разных листах над фиксированной точкой λ_0, по теореме Римана — Роха равна $2N + 2 - N + 1 = N + 3$.

Пусть $a(z, \bar{z}, \lambda) = \sum_{s=0}^{N} a_s(z, \bar{z})(\lambda - \lambda_0)^s$, $b(z, \bar{z}, \lambda) = \sum_{s=0}^{N} b_s(z, \bar{z})(\lambda - \lambda_0)^s$ удовлетворяют уравнениям (1), в правой части которых $O(\lambda - \lambda_0)^2$ заменено на $O(\lambda - \lambda_0)^{N+1}$. Решения уравнений

$$a(z, \bar{z}, \lambda)\psi(z, \bar{z}, \lambda^+) - b(z, \bar{z}, \lambda)\psi(z, \bar{z}, \lambda^-) = O(1)\,|_{\lambda=\lambda_0},$$

где $\lambda^{\pm}$ — прообразы на различных листах λ, $\psi(z, \bar{z}, P) \in L$, $P \in \mathfrak{R}$, образуют двумерное подрасслоение $\mathscr{L}$ в $\mathbf{R}^4 \times L$. Обозначим через $\psi_1(z, \bar{z}, P)$ и $\psi_2(z, \bar{z}, P)$ базисные сечения $\mathscr{L}$.

Теорема 2. *Пусть $B_i(z, \bar{z})$ задаются формулами теоремы* 1, *где*

$$R_1 = \begin{pmatrix} \psi_1(z, \bar{z}, P_\infty^+) & \psi_1(z, \bar{z}, P_\infty^-) \\ \psi_2(z, \bar{z}, P_\infty^+) & \psi_2(z, \bar{z}, P_\infty^-) \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} \psi_1(z, \bar{z}, P_0^+) & \psi_1(z, \bar{z}, P_0^-) \\ \psi_2(z, \bar{z}, P_0^+) & \psi_2(z, \bar{z}, P_0^-) \end{pmatrix}.$$

Тогда поля $B_i(z, \bar{z})$ удовлетворяют уравнениям дуальности.

Здесь $P_\infty^{\pm}$, $P_0^{\pm}$ — прообразы на $\mathfrak{R}$ точек $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$ соответственно.

Замечание 5. Если функции $a_s(z, \bar{z})$ и $b_s(z, \bar{z})$ выбрать рациональными, то и поля B_i будут рационально зависеть от переменных z, $\bar{z}$.

Замечание 6. В работе [5] метод обратной задачи применен для построения конечнозонных решений уравнений дуальности. При этом собственные функции операторов L_1 и L_2 так же, как и в этом пункте, определены на гиперэллиптической кривой, но, в отличие от нашей конструкции, имеют на ней существенные особенности.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 28 декабря 1978 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Belavin A., Polyakov A., Shwartz A., Tyupkin Y., Phys. Lett. **59B** (1975), 85—89. 2. Белавин А. А., Захаров В. Е., Письма в ЖЭТФ **25**, вып. 12 (1977), 603—607. 3. Аринштейн А. Э., Ядерная физика **29**, № 1 (1979), 249—256. 4. Atiyah M., Hitchin N., Drinfeld V., Manin Yu., Phys. Lett. **65A** (1978), 185—187. 5. Чередник И. В., ДАН СССР **246**, № 3 (1979), 575—577.