*Функциональный анализ и его приложения,*
т. 14, вып. 4, 1980, 45—54.

УДК 517.9

# ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

И. М. Кричевер

Основной целью настоящей работы является построение переменных типа «действия-угол» для системы частиц с парным потенциалом взаимодействия, гамильтониан которой имеет вид

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2-2\sum_{i\neq j}\wp(x_i-x_j), \tag{1}$$

где $\wp(x)$ — $\wp$-функция Вейерштрасса (см. [1]). Знак при потенциале, отвечающий притягивающей системе частиц, выбран для упрощения последующих формул, из которых исключаются тем самым многочисленные $\sqrt{-1}$. Замена этого знака происходит при переходе к мнимому времени. Развиваемые методы позволяют проинтегрировать уравнения движения системы (1) в терминах $\theta$-функций Римана.

Известно, что уравнения движения системы (1) допускают представление типа Лакса (см. [2])

$$\dot{L}=[M, L], \tag{2}$$

где матрицы $L$ и $M$ зависят от $x_i$ и $p_i$. Из этого представления следует, что величины $J_k=\frac{1}{k}\operatorname{tr} L^k$, $k=1, \ldots, n$, являются интегралами системы (1). В работе [3] было доказано, что эти интегралы независимы и находятся в инволюции. Тем самым по теореме Лиувилля система (1) является вполне интегрируемой.

В работе [4] впервые была открыта замечательная связь между гамильтоновыми системами частиц на прямой и динамикой полюсов специальных решений нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Для уравнения Кортевега — де Фриза было доказано, что динамика полюсов эллиптического решения $u(x, t)=2\sum_{i=1}^{N}\wp(x-x_i(t))$ уравнения КдФ эквивалентна ограничению уравнений движения системы с гамильтонианом $J_3$ на неподвижные точки системы (1), $\operatorname{grad} H=0$. При этом $N$, оказывается, имеет вид $n(n+1)/2$. Аналогичное утверждение было получено для уравнения Буссинеска. Ограничения на число частиц связано с необходимостью рассматривать уравнения движения на стационарных многообразиях гамильтоновых систем. Связь между гамильтоновыми системами и эллиптическими решениями нелинейных уравнений оказывается естественной в случае двумерных систем. Например, в случае уравнения Кадомцева—Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4}u_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{u_t+\frac{1}{4}(6uu_x-u_{xxx})\right\}. \tag{3}$$

Эллиптические решения этого уравнения имеют вид $u = \mathrm{const} + 2\sum\wp(x - x_i(y, t))$. При этом динамика полюсов по переменным $y$ и $t$ описывается коммутирующими гамильтоновыми потоками, отвечающими $H$ и $J_3$ соответственно. Это утверждение в случае вырожденной $\wp$-функции Вейерштрасса — $x^{-2}$ было получено в [5] (см. также [6]).

Впоследствие полюсные системы, отвечающие различным нелинейным уравнениям, исследовались многими авторами (см. обзор [7], [8]).

Связь между вполне интегрируемыми системами частиц на прямой и полюсными решениями нелинейных уравнений может использоваться в двух направлениях. Для всех вырождений функции Вейерштрасса, отвечающих одному или двум бесконечным периодам ($\wp(x)$ при этом переходит в $\mathrm{sh}^{-2}(x)$ или $x^{-2}$ соответственно), помимо интегралов $J_k$ известен механизм интегрирования уравнений движения. Координаты частиц $x_j(t)$ оказываются собственными значениями матрицы $x_j(0)\delta_{ij} + L(0)t$, где $L(0)$ зависит от начальных координат и импульсов (см. [9], [10]). Подстановка этих координат в формулу $u(x, y, t) = 2\sum_{i=1}^{n}(x - x_i(y, t))^{-2}$ позволяет, например, получить рациональные решения уравнения КП. С другой стороны, при наличии конструкции рациональных решений уравнения КП можно независимо получить интегрирование уравнений системы частиц с потенциалом $x^{-2}$. Основной целью работы [5] была как раз реализация второй возможности. В ней, используя идеи «конечнозонного интегрирования», мы нашли точные формулы для рациональных решений уравнения КП.

В отличие от рационального и тригонометрического случаев для системы (1) с невырожденной $\wp$-функцией Вейерштрасса ни построение переменных типа «угла», отвечающих инволютивным интегралам $J_k$, ни тем более явное интегрирование уравнений движения известно не было.

Исключением являются решения уравнения КдФ, представляющие собой сумму трех эллиптических функций, найденных в работе [18] без всякой связи с теорией интегрируемых систем на прямой,

$$u = 2\wp(x - x_1(t)) + 2\wp(x - x_2(t)) + 2\wp(x - x_3(t)).$$

Для двух частиц система (1) была проинтегрирована в работе [11], в которой было доказано, что многообразие уровней интегралов $J_1$, $H$ является двумерным абелевым многообразием.

## § 1. Линейное нестационарное уравнение Шредингера и система частиц на окружности

Методы интегрирования уравнения КП (3) основаны на следующем коммутационном представлении (см. [12], [13]):

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M\right] = 0,$$
$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u(x, y, t), \qquad M = \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x} + w(x, y, t). \tag{4}$$

Ниже будет доказано, что гамильтоновы системы типа (1) связаны с наличием у линейных операторов с эллиптическими потенциалами решений определенного вида.

Напомним прежде всего основные определения и свойства классических функций Вейерштрасса (см. [1]). Пусть $\omega_1$, $\omega_2$ — пара периодов. Сигма-функция Вейерштрасса является целой функцией, определяемой произведением

$$\sigma(z)=z\prod_{m,\,n\neq 0}\left(1-\frac{z}{\omega_{mn}}\right)\exp\left[\frac{z}{\omega_{mn}}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega_{mn}}\right)^2\right], \tag{5}$$

где $\omega_{mn}=m\omega_1+n\omega_2$. Остальные функции можно определить из соотношений

$$\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},\qquad \wp(z)=-\zeta'(z). \tag{6}$$

В отличие от $\wp$ $\sigma$- и $\zeta$-функции Вейерштрасса не являются двоякопериодическими. Они следующим образом преобразуются при сдвигах на периоды:

$$\zeta(\alpha+\omega_l)=\zeta(\alpha)+\eta_l;\qquad \eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=2\pi i; \tag{7}$$

$$\sigma(\alpha+\omega_l)=-\sigma(\alpha)\exp\left[\eta_l\left(\alpha+\frac{\omega_l}{2}\right)\right].$$

В окрестности $\alpha=0$ функции Вейерштрасса имеют вид

$$\sigma(\alpha)=\alpha+O(\alpha^5);\qquad \zeta(\alpha)=\alpha^{-1}+O(\alpha^3);\qquad \wp(\alpha)=\alpha^{-2}+O(\alpha^2). \tag{8}$$

Теорема 1. *Уравнение*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\sum_{i=1}^{n}\wp(x-x_i(t))\right)\psi=0 \tag{9}$$

*имеет решение* $\psi$ *вида*

$$\psi=\sum_{i=1}^{n}a_i(t,k,\alpha)\,\Phi(x-x_i,\alpha)\,e^{kx+k^2t}, \tag{10}$$

*где*

$$-\Phi(x,\alpha)=\frac{\sigma(x-\alpha)}{\sigma(\alpha)\,\sigma(x)}\,e^{\zeta(\alpha)x}, \tag{11}$$

*тогда и только тогда, когда* $x_i(t)$ *удовлетворяют уравнениям движения системы частиц* (1)

$$\ddot{x}_i=4\sum_{k\neq i}\wp'(x_i-x_k). \tag{12}$$

Выбор указанного представления для $\psi$ связан с тем, что функция $\Phi(x,\alpha)$ является решением уравнения Ламе [14]

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-2\wp(x)\right)\Phi(x,\alpha)=\wp(\alpha)\,\Phi(x,\alpha). \tag{13}$$

Из трансляционных соотношений (7) легко следует, что $\Phi(x,\alpha)$ двоякопериодична по $\alpha$, $\Phi(x,\alpha+\omega_l)=\Phi(x,\alpha)$.

По $x$ функция $\Phi(x,\alpha)$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi(x+\omega_l,\alpha)=\Phi(x,\alpha)\exp\left[\zeta(\alpha)\omega_l-\eta_l\alpha\right]. \tag{7'}$$

Функция $\psi$ вида (10) имеет простые полюса в точках $x=x_i$. Подставляя ее в уравнение (9) и приравнивая нулю коэффициенты при $(x-x_i)^{-2}$ и $(x-x_i)^{-1}$, получим следующие уравнения:

$$\begin{gathered} a_i\dot{x}_i+2ka_i+2\sum_{j\neq i}a_j\Phi(x_i-x_j,\alpha)=0,\\ \dot{a}_i-\wp(\alpha)\,a_i+a_i\left(\sum_{k\neq i}2\wp(x_i-x_k)\right)+2\sum_{j\neq i}a_j\Phi'(x_i-x_j,\alpha)=0. \end{gathered} \tag{14}$$

Если ввести вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и матрицы

$$L_{ij}(\alpha) = \dot{x}_i\delta_{ij} + 2(1 - \delta_{ij})\Phi(x_i - x_j, \alpha),$$

$$T_{ij}(\alpha) = \delta_{ij}\left(-\wp(\alpha) + 2\sum_{k\neq i}\wp(x_i - x_k)\right) + 2(1-\delta_{ij})\Phi'(x_i - x_j, \alpha), \tag{15}$$

то уравнения (14) запишутся в виде

$$(L(\alpha) + 2k\cdot 1)\,a = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + T\right)a = 0. \tag{16}$$

Для того чтобы уравнения (16) были совместны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\left[L, \frac{\partial}{\partial t} + T\right] = 0 \leftrightarrow \dot{L} = [L, T]. \tag{17}$$

Лемма 1. *Уравнения* (17) *имеют место тогда и только тогда, когда* $x_i(t)$ *удовлетворяют уравнениям* (12).

Утверждение леммы вытекает из непосредственной подстановки выражений для $L$ и $T$ в уравнения (17). Кроме того, можно воспользоваться известным в теории системы (1) утверждением, что коммутационное представление (17) эквивалентно (12), если $\Phi(x, \alpha)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$[\Phi'(x)\Phi(y) - \Phi(x)\Phi'(y)]\Phi^{-1}(x+y) = [\wp(y) - \wp(x)] \tag{18}$$

и соотношению

$$\Phi(x)\Phi(-x) = \wp(\alpha) - \wp(x). \tag{19}$$

Для проверки первого из этих соотношений заметим, что левая часть равенства (18), как следует из (7′), двоякопериодична и по $x$ и по $y$, имеет полюса второго порядка при $x = 0$, $y = 0$. Значит, она равна правой части. Аналогично, левая часть (19) периодична по $x$ и $\alpha$ и имеет полюса второго порядка при $x = 0$ и $\alpha = 0$.

Таким образом, нами найдены решения функциональных уравнений (18), (19) и тем самым коммутационные представления (17) для системы (1), которые в отличие от всех использованных ранее зависят от дополнительного «спектрального параметра» $\alpha$, определенного на эллиптической кривой $\Gamma$ с периодами $\omega_1$ и $\omega_2$. Наличие этого дополнительного параметра и позволяет продвинуться в интегрировании системы (1) с помощью методов алгебраической геометрии.

Рассмотрим матрицу $A(t, \alpha)$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + T(t, \alpha)\right)A(t, \alpha) = 0 \tag{20}$$

и нормированную условием $A(0, \alpha) \equiv 1$.

Из уравнения (17) следует, что

$$L(t, \alpha)A(t, \alpha) = A(t, \alpha)L(0, \alpha). \tag{21}$$

Значит, функция

$$R(k, \alpha) = \det(2k + L(t, \alpha)) \tag{22}$$

не зависит от $t$. Матрица $L(t, \alpha)$, имеющая существенные особенности при $\alpha = 0$, может быть представлена в виде

$$L(t, \alpha) = G(t, \alpha)\widetilde{L}(t, \alpha)G^{-1}(t, \alpha), \tag{23}$$

где $\widetilde{L}$ не имеет существенной особенности, $G$ — диагональная матрица, $G_{ij} = \delta_{ij}\exp(\zeta(\alpha)x_i)$. Следовательно, $r_i(\alpha)$ — коэффициенты выражения

$$R(k, \alpha) = \sum_{i=0}^{n} r_i(\alpha) k^i \tag{24}$$

являются эллиптическими функциями с полюсами в точке $\alpha = 0$. Функции $r_i(\alpha)$ представимы в виде линейной комбинации $\wp$-функции и ее производных. Коэффициенты такого разложения являются интегралами системы (1). Каждый набор фиксированных значений этих интегралов задает уравнением $R(k, \alpha) = 0$ алгебраическую кривую $\Gamma_n$, $n$-листно накрывающую исходную эллиптическую кривую $\Gamma$.

Пример 1. Пусть $n = 2$, тогда

$$R(k, \alpha) = 4k^2 + 2k(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \dot{x}_1\dot{x}_2 + 4\wp(x_1 - x_2) - 4\wp(\alpha).$$

В окрестности $\alpha = 0$ сингулярная часть матрицы $\tilde{L}$ имеет вид $\tilde{L}_{ii} = O(1)$, $\tilde{L}_{ij} = -2\alpha^{-1} + O(1)$, $i \neq j$. У этой матрицы собственное значение $-2\alpha^{-1}$ $(n-1)$-кратно вырождено. Кроме него, есть еще одно собственное значение, равное $2(n-1)\alpha^{-1}$.

Таким образом, в окрестности $\alpha = 0$ функция $R(k, \alpha)$ представима в виде

$$R(k, \alpha) = (k - (n-1)\alpha^{-1} + b_n(\alpha)) \prod_{l=1}^{n-1} (k + \alpha^{-1} + b_l(\alpha)), \tag{25}$$

$b_l(\alpha)$ — регулярные функции $\alpha$. Значит, функция $k$, определенная на $\Gamma_n$, имеет простые полюса на всех листах в точках $P_i$, расположенных над $\alpha = 0$. Ее разложения по локальному параметру $\alpha$ на этих листах задаются сомножителями правой части (25). Из (25) следует, что один из листов выделен. Будем его для краткости называть «верхним».

Лемма 2. *Род $g$ поверхности $\Gamma_n$ равен $n$.*

Для накрывающей эллиптической кривой имеет место соотношение $2g - 2 = \nu$, где $\nu$ — число точек ветвления накрытия $\Gamma_n$ над $\Gamma$. Точки ветвления совпадают с нулями на $\Gamma_n$ функции $\partial R/\partial k$. Дифференцируя по $k$ равенство (25) и подставляя вместо $k$ соответствующие разложения, получим, что $\partial R/\partial k$ имеет простые полюса на всех листах, кроме верхнего, на котором кратность полюса равна $n - 1$. Число нулей любой мероморфной функции равно числу полюсов. Значит, $\nu = 2(n-1)$ или $g = n$.

Якобиево многообразие $J(\Gamma_n)$ кривой $\Gamma_n$ является $n$-мерным тором. Ниже будет доказано, что координаты на этом торе являются переменными типа «угла» для системы (1).

Каждой точке $P$ кривой $\Gamma_n$, т. е. паре $(k, \alpha) = P$, связанной соотношением $R(k, \alpha)$, отвечает единственный собственный вектор $a(0, P) = (a_1(0, P), \ldots, a_n(0, P))$ матрицы $L(0, \alpha)$, нормированный условием $a_1(0, P) \equiv 1$. Все остальные координаты $a_i(0, P)$ являются вне точек $P_j$ мероморфными функциями на кривой $\Gamma_n$. Число полюсов $a(0, P)$ равно $n - 1$. Для доказательства этого рассмотрим матрицу $F(\alpha)$, столбцами которой являются вектора $a(0, P_j(\alpha))$, где $P_j(\alpha)$ — прообразы точки $\alpha$. Функция $|\det F(\alpha)|^2$ не зависит от нумерации листов, т. е. корректно определена как функция $\alpha$. Она мероморфна, имеет двукратные полюса в образах полюсов $a(0, P)$. Нули этой функции совпадают с образами точек ветвления $\Gamma_n$. Если $N$ — число полюсов $a(0, P)$, то $2N = \nu = 2n - 2$.

В окрестности «бесконечноудаленных точек» $P_j$ $a_i(0, P)$ имеет вид

$$a_i(0, P) = \left(-\frac{1}{n-1} + O(\alpha)\right) \exp[\zeta(\alpha)(x_i^0 - x_1^0)], \quad i > 1, \quad j \neq n. \tag{26}$$

На верхнем листе, $j = n$

$$a_i(0, P) = (1 + O(\alpha)) \exp [\zeta(\alpha)(x_i^0 - x_1^0)]. \tag{27}$$

Здесь и далее $x_i^0 = x_i(0)$ — начальное расположение частиц.

Фундаментальная матрица $A(t, \alpha)$ системы (20), $A(0, \alpha) = 1$, является аналитической функцией $\alpha$ вне $\alpha = 0$. Если $A_i(t, \alpha)$ — $i$-й столбец матрицы $A$, то вектор-столбец

$$a(t, P) = \sum_{i=1}^{n} a_i(0, P) A_i(t, \alpha) \tag{28}$$

является решением системы (20), собственным для $L$:

$$(L(t, \alpha) + 2k \cdot 1)\, a(t, P) = 0, \qquad P = (k, \alpha).$$

Чтобы найти вид $a(t, P)$ в прообразах точки $\alpha = 0$, перейдем от пары $L$, $T$, удовлетворяющей (17), к калибровочно эквивалентной паре

$$\tilde{L}, \quad \tilde{T} = G^{-1}\partial G + G^{-1}TG, \tag{29}$$

где $\tilde{L}$ и $G$ такие, как в (23). Имеет место сравнение

$$P(\alpha)\delta_{ij} + \tilde{T}(t, \alpha) = \alpha^{-1}\tilde{L}(t, \alpha) + O(1). \tag{30}$$

Следовательно, собственные значения матрицы $\tilde{T}$ имеют следующий вид: для $j \neq n$

$$\mu_j(t, \alpha) = -k_j^2 + O(1) = -(\alpha^{-2} + 2b_j(0)\alpha^{-1} + O(1)). \tag{31}$$

Здесь $k_j = -(\alpha^{-1} + b_j(\alpha))$ — разложения собственных значений $L$ на различных листах $\Gamma_n$. На «верхнем» листе имеем

$$\mu_n(t, \alpha) = 2k_n\alpha^{-1} + \alpha^{-2} + O(1). \tag{32}$$

Обозначим через $\nu_j(\alpha) = \mu_j(t, \alpha) + O(1)$ сингулярные части собственных значений $\tilde{T}$. Они не зависят от $t$. Следовательно, решения уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{T}\right) \tilde{a}(t, P) = 0,$$

собственные для матрицы $\tilde{L}$, имеют вид

$$\tilde{a}(t, P) = \tilde{a}(0, P)(1 + O(\alpha)) \exp(\nu_j(\alpha) t).$$

Векторы $a$ и $\tilde{a}$ связаны простым соотношением

$$a(t, P) = G(t, \alpha)\, \tilde{a}(t, P). \tag{33}$$

Таким образом, имеет место

Л е м м а 3. *Координаты $a_i(t, P)$ вектор-функции $a(t, P)$ мероморфны на кривой $\Gamma_n$ вне точек $P_j$. Их полюса $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ не зависят от $t$. В окрестности $P_j$ $a_i(t, P)$ имеет вид*

$$a_i(t, P) = c_{ij}(\alpha) \exp [\zeta(\alpha)(x_i(t) - x_1^0) + \nu_j(\alpha) t], \tag{34}$$

*$c_{ij}(\alpha)$ — регулярные в окрестности $\alpha = 0$ функции. При этом*

$$c_{1j}(0) = 1, \quad j = 1, \ldots, n; \qquad c_{in}(0) = 1, \qquad c_{ij}(0) = -\frac{1}{n-1}, \quad i > 1, \quad j \neq n. \tag{35}$$

Вернемся вновь к собственной функции

$$\psi(x, t, P) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t, P)\, \Phi(x - x_i, \alpha)\, e^{kx + k^2 t}.$$

Функция $\Phi(x - x_i, \alpha)$ имеет существенные особенности на всех листах $\Gamma_n$. Из равенств (31), (34), (25) следует, что $\psi(x, t, P)$ не имеет существенных особенностей в точках $P_j$, $j \neq n$. Из (35) следует, что $\psi$ не имеет в этой точке и полюса.

Теорема 2. *Собственная функция $\psi(x, t, P)$ нестационарного уравнения Шредингера* (9) *определена на $n$-листной накрывающей $\Gamma_n$ исходной эллиптической кривой. Функция $\psi(x, t, P)$ мероморфна на $\Gamma_n$ всюду, кроме одной существенно особой точки $P_n$. Ее полюса $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ не зависят от $t$, $x$. В окрестности $P_n$ функция $\psi(x, t, P)$ имеет вид*

$$\psi(x, t, P) = \left(n\alpha^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(x, t)\,\alpha^i\right) \exp\left[\lambda(\alpha)(x - x_1^0) + \lambda^2 t\right], \tag{36}$$

*где* $\lambda(\alpha) = n\alpha^{-1} + b_n(0)$.

Тем самым функция $\psi(x, t, P)$ является классической функцией Бейкера — Ахиезера (см. [15] — [17]). Она однозначно определяется своими полюсами $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ и значением $x_1^0$. В действительности, сдвигом точки отсчета можно сдвинуть полюс из отмеченной точки и считать, что $\psi$ имеет $n$ произвольных полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

В работе [15] было доказано, что функция $\psi(x, t, P)$ со свойствами, сформулированными в теореме 2, является решением нестационарного Шредингера. Общая схема построения для функций типа Бейкера — Ахиезера их выражений через $\theta$-функции Римана содержатся в [16]. Там же выведена формула для потенциала $u(x, t)$ нестационарного Шредингера. Сопоставление результатов [15], [16] и полученных выше приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. *Координаты $x_i(t)$ системы частиц* (1) *задаются уравнением*

$$\theta(\vec{U}x + \vec{V}t + \vec{W}) = 0 = \mathrm{const} \times \prod_{i=1}^{n} \sigma(x - x_i(t)). \tag{37}$$

Для доказательства заметим, что формула для потенциала и нестационарного Шредингера имела вид

$$u(x, t) = 2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\vec{U}x + \vec{V}t + \vec{W}) + \mathrm{const}. \tag{38}$$

Полюса $u$ совпадают с нулями $\theta$, с одной стороны, и с $x_i(t)$, с другой стороны, как видно из (9).

Здесь $\theta$ — тэта-функция Римана, $\vec{U}$, $\vec{V}$ — постоянные вектора, равные периодам абелевых дифференциалов второго рода с особенностями в точке $P_n$. Более подробно их определение можно найти в [16], [17]. Ниже мы лишь обсудим характер полу нного ответа. Как сама тэта-функция, так и $\vec{U}$, $\vec{V}$ однозначно определяются кривой $\Gamma_n$ или, что то же самое, характеристическим полиномом $R(k, \alpha)$, который не зависит от $t$. Следовательно, эти параметры зависят лишь от интегралов системы (1). Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ — корни уравнения $\det(2k \cdot 1 + L_{ij}) = 0$, $i, j > 1$, (т. е. корни правого нижнего минора характеристической матрицы) на кривой $\Gamma_n$. Преобразование Абеля отображает симметрическую степень кривой $S^n\Gamma_n$ (неупорядоченный набор $n$ точек) в якобиево многообразие $J(\Gamma_n)$, $\omega : S^n\Gamma_n \to J(\Gamma_n)$. Вектор $\vec{W}$, входящий в формулу (37), является образом при преобразовании Абеля набора $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, $P_n$ $(x_1^0 = 0)$. Он преобразуется по $t$ линейно, что и доказывает то, что координаты на якобиевом многообразие суть переменные типа угла.

## § 2. Эллиптические решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили

Не подставляя непосредственно эллиптические решения в уравнение КП, идентификацию полюсов этих решений с системой (1) можно непосредственно получить из коммутационного представления (7).

Т е о р е м а 4. *Функция* $u(x, y, t)$ *является эллиптическим решением уравнения КП тогда и только тогда, когда*

$$u(x, y, t) = c + 2\sum_{j=1}^{n} \wp(x - x_j(y, t)) \tag{39}$$

*и у уравнений*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - L\right)\psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} - M\right)\psi = 0$$

*есть решение вида*

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i(t, y, P)\,\Phi(x - x_i, \alpha)\, e^{kx+k^2y+k^3t}. \tag{40}$$

С л е д с т в и е 1. *По* $y$ *динамика полюсов* $x_i(y, t)$ *совпадает с динамикой частиц системы* (1).

Это утверждение вытекает из результатов предшествующего параграфа. Аналогично уравнению $\frac{\partial}{\partial y} - L$ наличие решений вида (40) у уравнения $\frac{\partial}{\partial t} - M$ эквивалентно коммутационному уравнению типа (17) и совпадает с уравнениями гамильтонова потока, отвечающего гамильтониану $J_3$.

С л е д с т в и е 2. *По* $t$ *динамика* $x_i(y, t)$ *совпадает с третьим гамильтоновым потоком системы* (1).

С л е д с т в и е 3. *Эллиптические решения* $u(x, y, t)$ *уравнения КП* (39) *выражаются через* $\theta$-*функцию накрывающей* $\Gamma_n$ *эллиптической кривой* $\Gamma$.

$$u = \text{const} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(\vec{U}x + \vec{V}y + \vec{Z}t + \vec{W}). \tag{41}$$

Связь между полюсами эллиптических решений уравнения КП и системами типа (1) мы используем еще одним способом для доказательства того, что при естественных ограничениях эти решения при вещественных $x$, $y$, $t$ не имеют особенностей.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[u_t + \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx})\right] = 0, \tag{42}$$

отличающееся от (3) знаком. Это уравнение имеет коммутационное представление $\left[i\frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M\right] = 0$. Его эллиптические решения связаны с гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + 2\sum_{k\neq j}\wp(x_k - x_j). \tag{43}$$

Этот гамильтониан отличается от (1) знаком потенциальной энергии.

Пусть $\omega_1$, $\omega_2$ — периоды $\wp$-функции — комплексно сопряжены. Тогда $\wp(\bar{z}) = \overline{\wp(z)}$. Рассмотрим вещественные решения уравнения КП вида (39). Они задаются начальными координатами $x_j(0, 0)$ и начальными импульсами $x_{jy}(0, 0)$. Пусть эти данные выдерживают сопряжение, т. е. $n = 2m$ и $x_j = \bar{x}_{j+m}$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда $u(x, y, t)$ вещественно при всех вещественных $x$, $y$, $t$.

Следствие. *Если* $x_j(0, 0)$ *не лежат на вещественной оси, то решение* (39), (41) *не имеет особенностей при вещественных* $x$ *и* $y$.

Наличие особенности означает, что одна из частиц попала на вещественную ось, но тогда с ней должна столкнуться сопряженная частица. Это противоречит закону сохранения энергии, так как потенциал отталкивающий и сингулярный.

## Матричные системы

Ниже вкратце будут сформулированы условия, кторым должны удовлетворять кривые, чтобы конструкции [16] «конечнозонных» решений уравнений коммутативности

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M\right] = 0, \tag{44}$$

где $L$ и $M$ — операторы с матричными коэффициентами, приводили к эллиптическим решениям. Далее мы будем следовать обозначениям [16].

Согласно [16] каждая неособая алгебраическая кривая $\Gamma$ рода $g$ с $l$ отмеченными точками $P_1, \ldots, P_l$ и фиксированными локальными параметрами в их окрестностях $z_j(P)$, а также набор $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+l-1}$ точек общего положения определяет решения уравнений (44).

Пусть кривая $\Gamma_N$ $N$-листно накрывает эллиптическую кривую $\Gamma$, т. е. задана уравнением

$$k^N + \sum_{i=0}^{N-1} r_i(\alpha) k^i, \tag{45}$$

где $r_i(\alpha)$ — эллиптические функции с единственным полюсом в точке $\alpha = 0$.

Предположим, что $\Gamma_N$ над $\alpha = 0$ не имеет ветвлений. Это значит, что функция $k$ на $\Gamma_N$ имеет $N$ простых полюсов $P_1, \ldots, P_N$ — прообразов точки $\alpha = 0$. Обозначим через $\nu_j$ вычет $k$ на $j$-м листе, т. е. $k - \nu_j\alpha^{-1} = O(1)$ в окрестности $P_j$.

Утверждение. *Предположим, что* $\nu_j = 1$, *если* $j > l$. *Тогда, если в качестве локальных параметров* $z_j(\alpha)$ *в окрестностях* $P_1, \ldots, P_l$ *выбрать* $z_j(\alpha) = (k_j(\alpha) - \zeta(\alpha))^{-1}$, *то соответствующие решения уравнений* (44) *будут эллиптическими.*

Из сформулированного утверждения легко вытекает, что любому $N$-листному накрытию эллиптической кривой отвечают эллиптические решения для систем с матричными коэффициентами размерности $((N-1) \times (N-1))$.

Доказательство утверждения следует из того, что функция

$$\varphi_i(P) = \exp[k(P)\omega_i - \zeta(\alpha)\omega_i + \eta_i\alpha], \qquad i = 1, 2,$$

корректно определена как функция $P$. Вне точек $P_1, \ldots, P_l$ она голоморфна. В окрестностях этих точек она имеет вид

$$\varphi_i(P) = (1 + O(\alpha)) \exp(z_j^{-1}(\alpha)\omega_i).$$

Из определения функций типа Бейкера — Ахиезера следует, что для $\psi(x, y, t, P)$, удовлетворяющих уравнениям $\left(\frac{\partial}{\partial y} - L\right)\psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} - M\right)\psi = 0$, выполнены соотношения

$$\psi(x + \omega_i, y, t, P) = \psi(x, y, t, P)\varphi_i(P).$$

Значит, коэффициенты операторов $L$ и $M$ мероморфны и периодичны с периодами $\omega_1$ и $\omega_2$, т. е. являются эллиптическими функциями.

В заключение следует отметить, что было бы интересно проследить, как с помощью накрытий над кривой $\mathfrak{R}$ рода $n$ получать решения нелинейных уравнений, выражающиеся через $\theta$-функции высокой размерности, но сводящиеся к решениям с группой периодов исходной кривой $\mathfrak{R}$. Возможно, такие решения связаны с новыми интегрируемыми системами частиц.

Московский энергетический
институт им. Г. М. Кржижановского

Поступила в редакцию
11 марта 1980 г.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, М., «Наука», 1967.
2. Calogero F., Exactly solvable one-dimensional many-body systems, Lett. Nuovo Cimento **13** (1975), 411—415.
3. Perelomov A. M., Completaly integrable classical systems connected with semisimple Lie algebras, Lett. Math. Phys. **1** (1977), 531—540.
4. Airault H., McKean H., Moser J., Rational and elliptic solutions of the KdV equation and related many-body problem, Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977), 95—125.
5. Кричевер И. М., О рациональных решениях уравнения Кадомцева — Петвиашвили и интегрируемых системах $N$ частиц на прямой, Функц. анализ **12**, вып. 1 (1978), 76—78.
6. Choodnovsky D. V., Choodnovsky G. V., Pole expansions of nonlinear partial differential equations, Nuovo Cimento **40B** (1977), 339—350.
7. Calogero F., Integrable many-body problem, preprint Univ. di Roma, № 89, 1978.
8. Case K. M., The $N$-soliton solutions of the Bendgamine—Ono equation, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **75** (1978), 3562—3563.
9. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M., Explicite solutions of some completaly integrable systems, Lett. Nuovo Cimento **17** (1976), 97—103.
10. Olshanetsky M. A., Rogov N. V., Bound states in completaly integrable systems with two tipes of particles, Ann. Inst. H. Poincare **29** (1978), 169—177.
11. Choodnovsky D. V., Meromorphic solutions of nonlinear partial differential equations and particle integrable systems, J. Math. Phys. **20**, № 12 (1979), 2416—2424.
12. Дрюма В. С., Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриза, Письма в ЖЭТФ **19**, № 12 (1973), 219—225.
13. Захаров В. Е., Шабат А. Б., Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I, Функц. анализ **8**, вып. 3 (1974), 43—53.
14. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., «Наука», 1976.
15. Кричевер И. М., Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений, ДАН СССР **227**, № 2 (1976), 291—294.
16. Кричевер И. М., Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии, Функц. анализ **11**, вып. 1 (1977), 15—31.
17. Baker H., Note of foregoing paper «Commutative ordinary differential equation», Proc Royal Soc. London (1928), ser. A **118**, 570—576.
18. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза, ЖЭТФ **67**, вып. 12 (1974), 2131—2143.