1980 г. ноябрь—декабрь т. 35, вып. 6 (216)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ [1]

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

В теории нелинейных уравнений типа Кортевега — де Фриза, допускающих, например, представление Лакса в виде

$$(1)\quad \frac{\partial L}{\partial t}=[A,\ L]\quad \text{где}\quad L=\sum_{i=0}^{n} u_i(x,\ t)\frac{\partial^i}{\partial x^i},\qquad A=\sum_{i=0}^{m} v_i(x,\ t)\frac{\partial^i}{\partial x^i},$$

наиболее интересные многосолитонные и конечнозонные классы точных решений выделяются следующим условием: имеется оператор B, коммутирующий с L при $t=0$:

$$(2)\qquad [L,\ B]=\Big[\sum_{i=0}^{n} u_i(x,\ 0)\frac{\partial^i}{\partial x^i},\quad \sum_{i=0}^{N} w_i(x)\frac{\partial^i}{\partial x^i}\Big]=0$$

(это ограничение автоматически будет выполнено при любом значении t). В ситуации «ранга 1» (см. ниже), если, например, порядки операторов L и B взаимно-просты (и в матричном случае собственные значения матриц старших коэффициентов операторов L и B различны), «типичные» решения уравнений (1), удовлетворяющих условию (2), являются периодическими или квазипериодическими функциями x и t. Они выражаются через θ-функции римановых поверхностей, а сам периодический оператор L обладает некоторым замечательным спектральным свойством «конечнозонности» блоховского спектра.

[1]) Даннюй обзор базируется на докладе авторов на Советско-американском симпозиуме по теории солитонов (Киев, сентябрь 1979 г.).

Различными предельными переходами из периодических решений получаются быстроубывающие многосолитонные решения (отвечающие безотражательным потенциалам), а также рациональные решения уравнений (1) (см. обзоры [1], [2] и книгу [3]). Напомним лемму Бурхнала — Чаунди (см. [4]): пара коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов (2) связана алгебраическим соотношением

$$R(L,\ B)=0, \tag{3}$$

где $R(\lambda,\ \mu)$ — многочлен с постоянными коэффициентами.

Общая собственная функция операторов $L,\ B$

$$L\psi=\lambda\psi,\quad B\psi=\mu\psi,\ \psi=\psi(x,\ \lambda,\ \mu)$$

такова, что λ и μ лежат на римановой поверхности (3), обозначаемой буквой Г

$$R(\lambda,\ \mu)=0 \tag{4}$$

Пара $(\lambda,\ \mu)$ — это точка $P\in\Gamma$

Определение. *Рангом* l коммутирующей пары L, B называется кратность собственной функции $\psi(x,\ \lambda,\ \mu)=\psi\ (x,\ P)$ на римановой поверхности (т. е. l равно размерности пространства ψ при фиксированном $P\in\Gamma$).

Тем самым возникает l-мерное голоморфное векторное расслоение с базой Г.

Все результаты как о самих уравнениях коммутативности (2), так и о точных решениях уравнений типа КдФ (1), полученные до 1978 г., относятся к рангу $l=1$.

Важно подчеркнуть, что в теории «одномерных» систем типа (1) условие (2) накладывается на сам оператор L из лаксовой пары.

В работах [5], [6] для некоторых физически важных «двумерных» систем типа КдФ был обнаружен аналог алгебраического представления (1), где оператор L имеет вид

$$\begin{cases} L=\dfrac{\partial}{\partial y}-M, \\ \dfrac{\partial L}{\partial t}=[A,\ L]\leftrightarrow\left[\dfrac{\partial}{\partial y}-M,\ \dfrac{\partial}{\partial t}-A\right]=0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь M и A — обыкновенные линейные дифференциальные операторы по x с коэффициентами, зависящими от $x,\ y,\ t$.

Для отыскания точных решений «двумерных» систем вида (5) авторы ввели следующий «анзатц», сводящийся к набору условий, включающих вспомогательную пару операторов L_1 и L_2:

$$\begin{cases} [L,\ L_i]=0\quad (i=1,\ 2),\quad \left[\dfrac{\partial}{\partial t}-A,\ L\right]=0, \\ [L_1,\ L_2]=0,\quad L=\dfrac{\partial}{\partial y}-M. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь L_1 и L_2 — обыкновенные линейные дифференциальные операторы (только по x).

В отличие от одномерных систем (1) порядки операторов L_1 и L_2 произвольны!

Этот класс решений для коммутирующих пар $L_1,\ L_2$ ранга 1 был открыт в работе [7], а для коммутирующих пар $L_1,\ L_2$ любого ранга — в работах [8], [9]. Решения ранга $l>1$ зависят уже от произвольных функций одной переменной.

Важнейшим примером является известное двумерное уравнение КдФ (или КП), где

$$M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-U(x,\ y,\ t),\quad A=\frac{\partial^3}{\partial x^3}-\frac{3}{2}U\frac{\partial}{\partial x}+W(x,\ y,\ t),$$

$$(7)\qquad \begin{cases} W_x=\frac{3}{4}U_y-\frac{3}{4}U_{xx}, \\ W_y=U_t-\frac{3}{4}U_{xy}-\frac{1}{4}U_{xxx}+\frac{3}{2}UU_x, \end{cases}$$

или

$$\frac{3}{4}U_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U_t+\frac{1}{4}(6UU_x-U_{xxx})\right).$$

Решения ранга $l=1$ (т. е. когда пара L_1, L_2 имеет ранг 1) имеют, согласно [10], вид

$$(8)\qquad U(x,\ y,\ t)=\text{const}+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(Ux+Vy+Zt+W),$$

где $\theta(v_1,\ \ldots,\ v_g)$ — это известная θ-функция Римана, отвечающая римановой поверхности Γ (4).

Для случая $l>1$ даже исследование самого условия коммутативности $[L_1,\ L_2]=0$ весьма затруднительно. В работе [11] было найдено решение проблемы классификации таких пар L_1, L_2 для любого $l>1$, где вычисление коэффициентов сводится к некоторой задаче Римана.

В работах [8], [9], [12] был развит метод, позволяющий в некоторых случаях элиминировать задачу Римана и получить явные формулы для коэффициентов операторов L_1 и L_2 ранга $l>1$.

§ 2. Многоточечный векторый аналог функции Бейкера — Ахиезера

Зададим набор матричных $(l\times l)$-функций

$$\Psi_s(x,\ k)\ (s=1,\ \ldots,\ m),\ x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

таких, что $\Psi_s(0,\ k)=1$ и матрицы

$$(9)\qquad A_j^s(x,\ k)=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Psi_s(x,\ k)\right)\Psi_s^{-1}(x,\ k)$$

являются полиномами по k.

Матричные функции $A_i^s(x,\ k)$ обязаны удовлетворять соотношениям

$$(10)\qquad \frac{\partial A_j^s}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i^s}{\partial x_j}=[A_i^s,\ A_j^s].$$

Задание полиномиальных по k матричных функций A_i^s, удовлетворяющих (10), однозначно определяет $\Psi_s(x,\ k)$.

Пусть теперь заданы произвольная неособая риманова поверхность Γ рода g и набор ее точек $P_1,\ \ldots,\ P_m$ с локальными параметрами $z_s=k_s^{-1}(P)$ в их окрестностях. Зададим на Γ неупорядоченный набор точек

$$(\gamma)=(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{gl})$$

и набор (α) комплексных $(l-1)$-векторов

$$\alpha_i=(\alpha_{i,1},\ \ldots,\ \alpha_{i,l-1})\qquad (i=1,\ \ldots,\ gl).$$

Замечание. Полный набор $(\gamma,\ \alpha)$ будет называться «параметрами Тюрина», так как, согласно [13], они однозначно определяют стабильное (в смысле Мамфорда) l-мерное векторное голоморфное расслоение степени gl

над Г вместе с оснащением, т. е. набором голоморфных сечений $\eta_1, \ldots, \eta_l$. Точки $\gamma_1, \ldots, \gamma_{gl}$ — это точки линейной зависимости сечений η_i, а $\alpha_{i,j}$ — это коэффициенты линейной зависимости

$$(11) \qquad \eta_l(\gamma_i) = \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_{i,j}\eta_j(\gamma_i).$$

Поставим задачу: найти вектор-функцию $\psi(x, P)$ на Г, мероморфную вне $P_1, \ldots, P_m$ такую, что:

1. Полюса $\psi(x, P) = (\psi_1, \ldots, \psi_l)$ лежат в точках γ_i; требуется, чтобы для вычетов $\psi_j(x, P)$ в этих точках выполнялись соотношения

$$(12) \qquad \operatorname{res}_{\gamma_i} \psi_j(x, P) = \alpha_{i,j} \operatorname{res}_{\gamma_i} \psi_l(x, P),$$

$\alpha_{i,j}$ и γ_i не зависят от x.

2. В окрестности точки P_s вектор-функция $\psi(x, P)$ должна представляться в виде

$$(13) \qquad \psi(x, P) = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(x) k_s^{-i}\Big) \Psi_s(x, k_s).$$

При $l = 1$ «затравочные функции» Ψ_s являются экспонентами и ψ совпадает с m-точечным скалярным аналогом классической функции Бейкера — Ахиезера.

Следуя схеме [11], основанной на технике [14], [15], получим общее утверждение:

Теорема. *Размерность линейного пространства функций, удовлетворяющих при фиксированном x перечисленным требованиям, равна l. Для однозначного определения ψ достаточно, например, задать ее значение в произвольной точке. Нахождение ψ сводится к системе линейных сингулярных интегральных уравнений на малых окружностях — границах окрестностей точек $P_1, \ldots, P_m$. Интегральные уравнения решаются отдельно при каждом x; требование* (12) *на вычеты и задание $\psi(x, P_0)$ однозначно выделяет в пространстве решений сингулярных уравнений искомую вектор-функцию $\psi(x, P)$.*

Полной матричной функцией Бейкера — Ахиезера будет называться матрица $\Psi(x, P)$, строками которой являются линейно независимые решения задачи (12) — (13). По сформулированной теореме $\Psi(x, P)$ определена однозначно с точностью до умножения на невырожденную матричную функцию $G(x)$:

$$\widetilde{\Psi}(x, P) \Rightarrow G(x)\Psi(x, P).$$

Кроме параметров Тюрина (γ, α), произвол конструкции сводится к выбору матриц Ψ_s.

Пример 1 (см. [8], [9]). Уравнение КП и коммутирующие операторы. Рассмотрим одноточечную вектор-функцию Бейкера — Ахиезера $\psi(x, y, t, P)$ с существенно особой точкой P_0 на римановой поверхности Г рода g. Она определяется параметрами Тюрина (γ, α) и матрицей $\Psi_0(x, y, t, k)$. При $l = 1$ это классическая функция Клебша — Гордона — Бейкера [16].

а) Пусть $l = 2$. Выберем матричные функции $A_i(x, y, t, k)$ $(i = 1, 2, 3)$, определяющие в силу (1) Ψ_0, в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k-u & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{u_x}{4} & k+\frac{u}{2} \\ k^2-\frac{ku}{2}-\frac{u^2}{2}-\frac{u_{xx}}{4} & \frac{u_x}{4} \end{pmatrix},$$

где $u = u(x, y, t)$.

Из уравнений совместности (10) вытекает, что $u = u(x, t)$ не зависит от y и удовлетворяет уравнению КдФ:

$$4u_t = u_{xxx} - 6uu_x.$$

б) Пусть $l = 3$. Выберем A_i в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k-w & -\frac{3}{2}u & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ k-w+u_x & -\frac{u}{2} & 0 \\ -w_x+u_{xx} & k-w+\frac{u_x}{2} & -\frac{u}{2} \end{pmatrix}.$$

Из (10) следует, что $u = u(x, y)$ не зависит от t и является решением уравнения Буссинеска

$$3u_{yy} + u_{xxxx} - 6(uu_x)_x = 0.$$

в) При $l > 3$ матрицы $A_i(x, y, t, k)$ выбираются в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_0 & & \dots & u_{l-2} & 0 \end{pmatrix} + \hat{\varkappa}; \quad \hat{\varkappa} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & & \dots & 1 \\ k & 0 & & & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \hat{\varkappa}^2 + a_2, \quad A_3 = \hat{\varkappa}^3 + a_3,$$

где a_2 и a_3 — матрицы $(l \times l)$, не зависящие от k, элементы которых являются дифференциальными полиномами от $u_0, \dots, u_{l-2}$.

В а ж н о е у т в е р ж д е н и е. *Во всех перечисленных случаях вектор-функция Бейкера — Ахиезера ψ, имеющая в окрестности точки P_0 вид*

$$\psi(x, y, t, P) = \Big(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x, y, t) k^{-s}\Big) \Psi_0(k, y, t, k), \tag{14}$$

$$\xi_0 = (1, 0, \dots, 0); \quad \xi_s = (\xi_s^{(1)}, \dots, \xi_s^{(l)}),$$

аннулируется парой скалярных операторов (7):

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y} - M\Big)\psi = \Big(\frac{\partial}{\partial t} - A\Big)\psi = 0, \tag{15}$$

где

$$M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U, \quad A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2} U \frac{\partial}{\partial x} + W.$$

Коэффициенты U, W не зависят от P и определяется формулами

$$l = 2: \quad U = u(x, t) - 2\xi_{1x}^{(2)},$$

$$l \geqslant 3: \quad U = -2\xi_{1x}^{(l)}.$$

В ы в о д. *Функция $U(x, y, t)$ является решением уравнения КП*

$$\frac{3}{4} U_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\Big\{U_t - \frac{1}{4}(6UU_x - U_{xxx})\Big\}. \tag{16}$$

Таким образом, мы получаем класс решений КП, зависящих от набора данных

$$\{\Gamma, P_0, \gamma, \alpha, u_0, \dots, u_{l-2}\}.$$

При $l = 2$ функция $u_0(x, t)$ является решением обычного уравнения КдФ.

Вектор-функция $\psi(x, 0, 0, P) = \psi(x, P)$, зависящая от одной переменной x, возникла в работе [11]. Ее компоненты — это набор из l общих собственных функций пары коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов (по x):

$$(17)\qquad \begin{cases} L_1\psi_q(x, P) = \lambda(P)\psi_q(x, P), \\ L_2\psi_q(x, P) = \mu(P)\psi_q(x, P), \end{cases}$$

где λ, μ — любые алгебраические функции на поверхности Γ, имеющие по единственному полюсу в точке P_0 порядка m, n. Порядки операторов L_1, L_2 равны соответственно ml и nl. Таким образом, коммутативное кольцо операторов ранга l классифицируется поверхностью Γ, точкой P_0 с локальным параметром, набором параметров Тюрина $\gamma_1, \ldots, \gamma_{gl}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{gl})$ и произвольными функциями $u_0(x), \ldots, u_{l-2}(x)$. Оператор L в этом кольце задается произвольной алгебраической функцией $\lambda(P)$ с единственным полюсом в в точке P_0. Проблему эффективного вычисления коэффициентов этих операторов мы обсудим ниже (см. [9], [12]).

Из уравнений (15) и (17) немедленно следуют все соотношения (6). Тем самым найденные решения уравнения КП ранга l соответствуют анзатцу (6).

§ 3. Двумерный оператор Шрёдингера и двухточечные функции типа Бейкера — Ахиезера с разделенными переменными

Вопрос о естественном обобщении уравнений типа Лакса (1) на случай операторов L, существенным образом зависящих от нескольких пространственных переменных, нетривиален. Заметим, что для уравнений типа уравнения КП соответствующий оператор содержит оператор $\frac{\partial}{\partial y}$ лишь в первой степени. Известно, что для потенциала общего положения $u(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n > 1$, не существует оператора A «почти коммутирующего» с $L = \Delta + u$, т. е. оператора такого, что $[L, A]$ есть оператор умножения на функцию. Это означает, что не существует нетривиальных динамических систем вида $\dot{L} = [A, L]$, сохраняющих весь спектр оператора L. Собственные значения L при $n > 1$ имеют бесконечную степень вырождения. По-видимому, для восстановления L достаточно задавать «данные обратной задачи» только при одном значении энергии. Например, при $E = 0$.

Деформации, сохраняющие спектральные характеристики при одном значении энергии $E = 0$, описываются уравнением вида

$$(18)\qquad \frac{\partial L}{\partial t} = [A, L] + BL,$$

где B — дифференциальный оператор. Такие уравнения впервые были рассмотрены в [17].

Обратная задача для двумерного оператора Шрёдингера в магнитном поле с нулевым потоком, т. е. периодическими (или квазипериодическими) коэффициентами, была решена в работе [18] при использовании данных на одном уровне энергии, в классе операторов, аналогичных в некотором смысле конечнозонным.

Напомним основные соображения, приводящие к постановке обратной задачи восстановления оператора

$$H = \left(i\frac{\partial}{\partial x} - A_1\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial y} - A_2\right)^2 + u(x, y).$$

Пусть потенциал $u(x, y)$ и вектор-потенциалы $A_1(x, y)$ и $A_2(x, y)$ периодичны по x, y с периодами T_1, T_2. Для уравнения $H\psi = E\psi$ естественно выделяются блоховские собственные функции как собственные функции операторов сдвига на период

$$\psi(x+T_1, y) = e^{ip_1T_1}\psi(x, y),$$
$$\psi(x, y+T_2) = e^{ip_2T_2}\psi(x, y).$$

Числа p_1, p_2 называются квазиимпульсными. В трехмерном пространстве совместные собственные значения операторов монодромии $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$ и оператора H образуют двумерное подмногообразие. Точки его — это наборы λ_1, λ_2, E такие, что существуют решения уравнения $H\psi = E\psi$ такие, что $\psi(x+T_1, y) = \lambda_1\psi(x, y)$; $\psi(x, y+T_2) = \lambda_2\psi(x, y)$. Будем говорить, что H обладает хорошими аналитическими свойствами, если это многообразие M^2 при всех комплексных значениях λ_1, λ_2, E является двумерным аналитическим подмногообразием. Тогда пересечение M^2 с поверхностью $E = E_0$ является аналитической кривой $\mathfrak{R}(E_0)$, называемой «комплексной Ферми-поверхностью».

Оператор называется конечнозонным, если род $\mathfrak{R}(E_0)$ конечен. Выясним в этом случае асимптотику блоховских функций при больших значениях квазиимпульсов в нефизической области комплексных p_1 и p_2. В этой области они должны быть связаны соотношением $p_1^2 + p_2^2 = O(1)$. Значит кривая $\mathfrak{R}(E_0)$ компактируется двумя бесконечноудаленными точками P_1 и P_2, в окрестности которых для блоховских функций имеется асимптотика:

$$\psi = e^{k_1(x+iy)}\Big(\sum_{l=0}^{\infty} \xi_l(x,y)\, k_1^{-l}\Big) \sim e^{k_1 z},$$

$$\psi = e^{k_2(x-iy)}\Big(\sum_{l=0}^{\infty} \zeta_l(x, y)\, k_2^{-l}\Big) \sim e^{k_2\bar{z}},$$

где k_1^{-1} и k_2^{-1} — локальные координаты в окрестностях P_1 и P_2. Вне точек P_1, P_2 $\psi(x, y, P)$, $P \in \mathfrak{R}$, мероморфна и имеет g полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Задача восстановления H по кривой $\mathfrak{R}$ с двумя отмеченными точками P_1, P_2 и набору $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ была решена в [18]. Обратим внимание на важное обстоятельство: асимптотика ψ около точек P_1 и P_2 зависят от разных переменных z и $\bar{z}$. Функции типа Бейкера — Ахиезера с этим свойством мы будем называть «двухточечными с разделенными переменными». Верны формулы (для ранга $l = 1$)

$$A_{\bar{z}} = A_1 + iA_2 = -\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\theta(U_1 z + U_2\bar{z} + V_1 + W)}{\theta(U_1 z + U_2\bar{z} + V_2 + W)};$$

$$A_z = A_1 - iA_2 = 0;\quad z = x + iy;\quad \bar{z} = x - iy;$$

$$u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln\theta(U_1 z + U_2\bar{z} + W).$$

Постоянные вектора U_i, V_i зависят лишь от P_1, P_2, а W определяется дивизором $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Вообще говоря, оператор H не эрмитов. Выделение параметров $\mathfrak{R}$, P_1, P_2, $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, для которых H эрмитов, было получено в работе [19].

Условие конечнозонности оператора H не является устойчивым по отношению к варьированию уровня энергии. Это значит, что если род комплексной Ферми-поверхности-кривой $\mathfrak{R}(E)$ блоховских функций, удовлетворяющих уравнению $H\psi = E\psi$, конечен при одном значении $E = E_0$, то уже при близких значениях он становится бесконечным. В теории уравнения КдФ естественное обобщение языка тэта-функции позволяет решать обратную задачу для операторов, блоховская собственная функция которых определена на гиперэллиптической кривой бесконечного рода [20]. Для построения полной теории двумерного оператора Шрёдингера, в силу неустойчивости понятия конечнозонности, необходимо построить обобщение вышеизложенной конструкции на случай бесконечного рода. В первую очередь необходимо выяснить асимптотику и расположение полюсов блоховских функций по квазиимпульсам при фиксированном значении энергии. Отметим, что соответствующая асимптотика должна рассматриваться в нефизической области комплексных значений квазиимпульсов.

Аналогом уравнений (2), выделяющим конечнозонные решения уравнений типа Лакса, для двумерного оператора Шрёдингера является следующее алгебраическое требование. Пусть существуют линейные операторы L_1, L_2 такие, что коммутаторы имеют вид

$$[H, L_i] = B_i H; \quad [L_1, L_2] = B_3 H, \tag{19}$$

где B_1, B_2, B_3 — дифференциальные операторы.

Совместные собственные значения операторов

$$H\psi = 0, \quad L_i\psi = \lambda_i\psi \tag{20}$$

связаны алгебраическим соотношением

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{21}$$

где $R(\lambda, \mu)$ — полином от двух переменных.

Как и в теории конечнозонных решений уравнений типа Лакса и их двумерных обобщений (6), вводится понятие ранга алгебры операторов (19). Ее рангом будет называться кратность собственных значений, т. е. число линейно независимых решений уравнений (20). Для алгебры ранга l совместные ее собственные функции образуют l-мерное голоморфное расслоение над кривой Г, заданной уравнением (21). Построенные выше операторы H отвечают алгебрам ранга 1.

Интересно было бы проследить взаимоотношение понятий ранга и «общности» положения для оператора H с периодическими коэффициентами. Для конечнозонных операторов это взаимоотношение таково. При фиксированных порядках операторов L_1 и L_2 число параметров, определяющих алгебраическое соотношение (3) для алгебр ранга 1, больше числа параметров, определяющих эти соотношения для алгебр ранга $l > 1$. Однако, помимо параметров, задающих кривую Г, алгебра ранга l зависит от $2(l-1)$ произвольной функции, поэтому алгебры ранга $l > 1$, вообще говоря, не являются вырождением алгебр ранга $l = 1$.

Приведем конструкции конечнозонных операторов H ранга l. Пусть $\Psi_1(z, k)$, $\Psi_2(\bar{z}, k)$ — матричные функции, определяемые уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\Psi_1(z, k) = A^1(z, k)\Psi_1(z, k), \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\Psi_2(\bar{z}, k) = A^2(\bar{z}, k)\Psi_2(\bar{z}, k), \end{cases} \tag{22}$$

где

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 1 \\ k_1+u_0 & u_1 & & \dots & u_{l-2} & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \dots & & -k_2+v_0 \\ 1 & 0 & & \dots & & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots\ 1 & 0 & v_{l-2} \\ 0 & 0 & & \dots\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$\Psi_i(0, k) = 1$; $u_i(z)$, $v_i(\bar{z})$ — произвольные функции.

Рассмотрим двухточечную вектор-функцию Бейкера — Ахиезера $\psi(z, \bar{z}, P)$ на римановой поверхности Г рода g, отвечающую параметрам

Тюрина (γ, α) и имеющую в окрестности двух отмеченных точек P_1, P_2 вид

$$\psi(z, \bar{z}, P) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(z, \bar{z}) k_1^{-s}\right) \Psi_1(z, k_1), \tag{24}$$

$$\psi(z, \bar{z}, P) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \zeta_s(z, \bar{z}) k_2^{-s}\right) \Psi_2(\bar{z}, k_2). \tag{25}$$

Нормируем ее следующим условием: $\xi_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$; $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(l)}$; $\zeta = (\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(l)})$.

Здесь $k_\varepsilon^{-1} = k_\varepsilon^{-1}(P)$, $\varepsilon = 1, 2$, — локальные параметры в окрестностях точек P_1, P_2.

Утверждение. *Вектор-функция Бейкера — Ахиезера удовлетворяет уравнению $H\psi = 0$, где*

$$H = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + v(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + u(z, \bar{z})$$

— двумерный оператор Шрёдингера со скалярными коэффициентами

$$\begin{cases} v(z, \bar{z}) = -\dfrac{\partial}{\partial z} \ln \zeta_0^{(1)}(z, \bar{z}), \\ u(z, \bar{z}) = -\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \xi_1^{(l)}(z, \bar{z}). \end{cases} \tag{26}$$

Физический смысл могут иметь лишь эрмитовы операторы H, которые при выбранной калибровке отвечают случаю вещественных «магнитного поля» $B = \partial v / \partial \bar{z}$ и «электрического потенциала» $U = 2u - \partial v / \partial \bar{z}$.

Как отмечалось выше, условия на параметры нашей конструкции операторов H ранга 1, соответствующие эрмитовости операторов, были получены в работе [19]. Следуя ее идее, приведем аналогичные условия при $l = 2$.

Рассмотрим кривые Γ с антиголоморфной инволюцией σ: $\Gamma \to \Gamma$, переставляющей отмеченные точки, $\sigma(P_1) = P_2$, и локальные параметры $k_\varepsilon^{-1}(\sigma(k_1) = -\bar{k}_2)$. Зададим абелев дифференциал ω третьего рода с простыми полюсами в точках P_1, P_2 и с вычетами ± 1 соответственно. Такой дифференциал существует и определен с точностью до прибавления произвольного голоморфного дифференциала.

Выберем нечетный относительно σ дифференциал ω, $\omega(P) = -\bar{\omega}(\sigma(P))$. Размерность пространства таких дифференциалов равна размерности нечетных голоморфных дифференциалов $\omega_1(P)$. Так как умножение на i переводит четные дифференциалы в нечетные, то эта вещественная размерность равна g. Обозначим через $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ нули $\omega(P)$. В силу нечетности ω набор точек (γ) инвариантен относительно σ, $\sigma(\gamma_i) = \gamma_{\sigma(i)}$, $\sigma(i)$ — соответствующая перестановка индексов.

Пример. Пусть Γ — гиперэллиптическая кривая, заданная в C^2 уравнением

$$y^2 = \lambda \prod_{i=1}^{2g} (\lambda - \lambda_i),$$

где набор комплексных чисел λ_i инвариантен относительно инволюции $\lambda \to \bar{\lambda}^{-1}$, $\prod_i \lambda_i = 1$.

Антиголоморфная инволюция на Γ, переставляющая точки $P_1 = 0$, $P_2 = \infty$, имеет вид

$$P = (y, \lambda) \to \sigma(P) = \left(-\frac{\bar{y}}{\bar{\lambda}^{g+1}}, \frac{1}{\bar{\lambda}}\right).$$

Абелевы дифференциалы с полюсами в P_1, P_2 имеют вид

$$\omega = \frac{d\lambda}{\lambda} + \sum_{i=0}^{g-1} c_i \frac{\lambda^i \, d\lambda}{y},$$

c_i — константы. Условие нечетности ω означает, что $c_i = -\bar{c}_{g-1-i}$.

Таким образом, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ — это нули функции

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{y}\left(\sum_{i=0}^{g-1} c_i \lambda^i\right)$$

на кривой Г.

Сопоставим каждой точке γ_i число α_i (напомним, что $l = 2$) так, чтобы выполнялось соотношение $\bar{\alpha}_i = -\alpha^{-1}_{\sigma(i)}$.

Помимо набора параметров Тюрина (γ, α) вектор-функция $\psi(z, \bar{z}, P)$ определялась двумя функциями $u_0(z)$ и $v_0(\bar{z})$. Пусть $\overline{u_0(z)} = -v_0(z)$.

Утверждение. *Перечисленные ограничения на параметры задачи выделяют эрмитовы операторы H.*

Набросок доказательства. Рассмотрим скалярную функцию

$$\varphi(z, \bar{z}, P) = \psi(z, \bar{z}, P)\psi^+(z, \bar{z}, \sigma(P))$$

(крест означает эрмитово сопряжение). Из (23) при $l = 2$ и $\overline{u_0(z)} = -v_0(\bar{z})$ легко следует, что

$$\Psi_1(z, k)\Psi_2^+(\bar{z}, -\bar{k}) = 1.$$

Значит, $\varphi(z, \bar{z}, P)$ — мероморфная функция на всей кривой Г. Из того, что $\bar{\alpha}_i = -\alpha^{-1}_{\sigma(i)}$, следует, что полюса φ в точках γ_i простые. По определению $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ дифференциал $\varphi(z, \bar{z}, P)\omega(P)$ имеет всего два полюса в точках P_1 и P_2. Так как сумма его вычетов равна нулю, то $\varphi(z, \bar{z}, P_1) = \varphi(z, \bar{z}, P_2)$. Вычисляя значения φ в точках P_1, P_2, получим

$$\varphi(z, \bar{z}, P_1) = \bar{\zeta}_0^{(1)}, \quad \varphi(z, \bar{z}, P_2) = \zeta_0^{(1)}.$$

Значит по (26) $B(z, \bar{z})$ вещественно. Легко видеть, что V — также вещественно.

§ 4. Деформации голоморфных расслоений

Как уже говорилось выше, в общем случае задача вычисления векторного аналога функции Бейкера — Ахиезера Ψ сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, эквивалентных задаче Римана. Однако функция Ψ нам не нужна. Для построения коэффициентов линейных операторов и решений соответствующих нелинейных уравнений задача Римана может быть иногда элиминирована. Эта возможность основана на изучении уравнений на параметры Тюрина (γ, α), обобщающих прямолинейные обмотки торов Якоби для ранга 1.

Пусть, по-прежнему, Г — неособая алгебраическая кривая рода g с отмеченными точками $P_1, \ldots, P_m$ и фиксированными локальными параметрами $k_s^{-1}(P)$ в их окрестностях. Для функции Бейкера — Ахиезера $\Psi(x, P)$, определенной в предшествующем параграфе по «затравочным функциям» $\Psi_s(x, k)$ и параметрам Тюрина (γ^0, α^0), рассмотрим логарифмические производные $\Psi(x, P)$ — матричные функции $\chi_i(x, P)$ такие, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \chi_i(x, P)\right)\Psi(x, P) = 0. \tag{27}$$

Функции $\chi_i(x, P)$ являются мероморфными функциями на кривой Γ, имеющими полюса в точках $P_1, \ldots, P_m$. Кроме того, $\chi_i(x, P)$ имеют gl простых полюсов $\gamma_1(x), \ldots, \gamma_{gl}(x)$. Ранг матриц-вычетов χ_i в точках γ_s равен 1. Таким образом, в точке γ_s определены $(l-1)$-вектора $\alpha_{sj}(x)$ $(j = 1, \ldots, l)$: для матричных элементов χ_i^{ab} выполнены соотношения

$$\operatorname{res}_{\gamma_s} \chi_i^{ab} = \alpha_{sb} \operatorname{res}_{\gamma_s} \chi_i^{al}. \tag{28}$$

Параметры $\gamma(x)$, $\alpha(x)$ удовлетворяют уравнениям «деформации»

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma = -\operatorname{Sp}\chi_{i,0}(x), \tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha_j = -\sum_{a=1}^{l}\alpha_a\chi_{i,1}^{aj} + \alpha_j\Big(\sum_{a=1}^{l}\alpha_a\chi_{i,1}^{al}\Big), \tag{30}$$

где $\chi_{i,0}$ и $\chi_{i,1}$ — коэффициенты разложения $\chi_i(x, P)$ в лорановский ряд в окрестности полюса $\gamma = \gamma_s(x)$ (индекс s для кратности формул здесь опущен):

$$\chi_i(x, P) = \chi_{i,0}(x)(k-\gamma)^{-1} + \chi_{i,1}(x) + O(k-\gamma). \tag{31}$$

Обозначим через $u_{is}(x, k)$ матрицы, полиномиально зависящие от k, равные особенностям χ_i в точке P_s. Это значит, что

$$\chi_i(x, P) - u_{is}(x, k_s(P)) \tag{32}$$

есть регулярная функция в окрестности P_s.

Утверждение. *Для любых функций $u_{is}(x, k)$, полиномиально зависящих от k, и произвольных $\gamma(x)$ и $\alpha(x)$ существует матричная функция $\chi_i(x, P)$, удовлетворяющая условиям* (28) *и* (32). *Она однозначно определяется своим значением в некоторой точке P_0, $\chi_i(x, P_0) = u_{i0}(x)$.*

Произвол в определении $\chi_i(x, P)$ связан с тем, что матричный аналог функции Бейкера — Ахиезера своими особенностями в точках $P_1, \ldots, P_m$ и параметрами Тюрина определен с точностью до умножения на невырожденную матрицу.

Доказательство сводится к простому подсчету по теореме Римана — Роха размерности пространства функций, имеющих простые полюса в точках γ_s и полюса кратности n_i в точках P_i. Эта размерность совпадает с числом неоднородных линейных уравнений, эквивалентных (28), (32) и условию

$$\chi_i(x, P_0) = u_{i0}(x).$$

Пусть $\chi_i(x, P)$ — матричная функция, определенная параметрами

$$\{\gamma(x),\ \alpha(x),\ u_{si}(x, k),\ u_{i0}(x)\}.$$

Утверждение. *Выполнение уравнений* (29), (30) *необходимы и достаточны, для того чтобы решение уравнений* (27), *нормированное условием $\Psi(0, P) = 1$, являлось функцией Бейкера — Ахиезера.*

Для краткости ниже индекс i опускается, т. е. будем считать, что $\Psi(x, P)$ зависит лишь от одного параметра x.

Доказательство. Прежде всего докажем, что (29) и (30) эквивалентны тому, что $\Psi(x, P)$ голоморфна в точках $\gamma_j(x)$.

Пусть $\Psi(x, P)$ голоморфна в $\gamma = \gamma_j(x)$, тогда для любого столбца Ψ^j матрицы Ψ выполнено равенство

$$\sum_{a=1}^{l}\alpha_a\psi_a = 0, \quad \alpha_l = 1, \quad \Psi^j = (\psi_1, \ldots, \psi_l)^t, \tag{33}$$

получающиеся после приравнивания нулю коэффициента при $(k-\gamma)^{-1}$ в (27). Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_a=\sum_b \chi_1^{ab}\psi_b+\sum_b \chi_0^{ab}\frac{\partial\psi_b}{\partial k}. \tag{34}$$

Дифференцируя (33), получим

$$\sum_a \alpha_{ax}\psi_a+\sum_a \alpha_a\psi_{ax}+\sum_a \alpha_a\gamma_x\frac{\partial\psi_a}{\partial k}=0$$

или, учитывая (33) и (34),

$$\sum_a\left[\alpha_{ax}\psi_a+\alpha_a\left(\sum_b \chi_1^{ab}\psi_b+\chi_0^{ab}\frac{\partial\psi_b}{\partial k}\right)+\gamma_x\alpha_a\frac{\partial\psi_a}{\partial k}\right]=\sum_a\left(\alpha_{ax}+\sum_b\alpha_b\chi_1^{ba}\right)\psi_a=0. \tag{35}$$

Равенство (29) есть простое следствие того, что логарифмическая производная $\det\Psi$ равна следу $\chi(x, P)$. Так как коэффициенты при ψ_a в равенствах (33) и (35) должны быть пропорциональны, то имеет место (30).

Докажем достаточность (29) и (30). Рассмотрим калибровочно эквивалентную χ матрицу $\tilde\chi$:

$$\tilde\chi=(\partial_x g)\,g^{-1}+g\chi g^{-1},$$

где

$$g=\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{k-\gamma} & \frac{\alpha_2}{k-\gamma} & \dots & \frac{\alpha_{l-1}}{k-\gamma} & \frac{1}{k-\gamma}\\ 0 & 0 & \dots\ 0 & 1 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 1 & 0\ \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$g^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots\ 0 & 1 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 1 & 0\ \dots & 0 & 0\\ k-\gamma & -\alpha_{l-1} & \dots & -\alpha_2 & -\alpha_1\end{pmatrix}.$$

Непосредственная проверка показывает, что из (29) и (30) следует, что $\tilde\chi$ не имеет особенностей при $k=\gamma$. Значит, решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\tilde\Psi=\tilde\chi\tilde\Psi$$

не имеет особенностей. Тогда не имеет особенностей и $\Psi=g^{-1}\tilde\Psi$, удовлетворяющая (27).

Для завершения доказательства найдем вид Ψ в окрестности особой точки P_s. Для этого поставим следующую задачу Римана:

Найти матричную функцию $\Psi_s(x, k)$, голоморфную по k всюду кроме окрестности $k=\infty$, представимую в окрестности $k=\infty$ в виде

$$\Psi_s(x, k)=R(x, k)\Psi(x, k_s^{-1}(P)), \tag{36}$$

где

$$R(x, k)=\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i(x)\,k^{-i}$$

— регулярная в окрестности $k=\infty$ матричная функция.

Эта задача имеет единственное решение такое, что $\Psi_s(x, 0)=1$.

Лемма. *Логарифмическая производная* Ψ_s *является полиномиальной функцией*

$$\left(\frac{d}{dx}\Psi_s\right)\Psi_s^{-1}=\sum_{i=1}^{n_s} w_{si}(x)\,k^i.$$

Доказательство леммы следует из того, что $\left(\frac{d}{dx}\Psi_s\right)\Psi_s^{-1}$ не имеет особенностей вне $k=\infty$, а при $k=\infty$ имеет в силу (36) и определения Ψ полюс порядка n_s.

Домножая (36) на R^{-1} слева, получим, что Ψ в окрестности P_s представима в виде (13), т. е. она является матричным аналогом функции Бейкера — Ахиезера.

§ 5. Конечнозонные решения уравнения КП ранга 2 и рода 1

В этом параграфе мы приведем явные формулы для уравнений на параметры Тюрина, отвечающие конечнозонным решениям уравнений КП ранга 2 и рода 1, т. е. решениям КП, связанным с коммутативной парой операторов L_4 и L_6 порядков 4 и 6. В общем положении такие операторы связаны соотношением

$$L_6^2=4L_4^3+g_1L_4+g_2 \qquad (37)$$

и определяются константами g_1, g_2, параметрами Тюрина $(\gamma,\ \alpha)$ на эллиптической кривой Γ, заданной уравнением (37), а также одной произвольной функцией $u_0(x)$ ([11]).

В этом случае параметры Тюрина — это пара точек γ_1, γ_2 на эллиптической кривой, в каждой из которых задано одно комплексное число $\alpha_{11}=\alpha_1$, $\alpha_{21}=\alpha_2$.

Согласно примеру 1 § 1, решение КП, отвечающее коммутативной алгебре, порожденной L_4, L_6, задается набором $(\gamma,\ \alpha)$ и произвольным решением $u_0(x,\ t)$ уравнения КдФ.

Логарифмическая производная матричного аналога функции Бейкера — Ахиезера $\Psi(x,\ y,\ t,\ P)$, отвечающего этому решению, имеет в окрестности $\lambda=0$ вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi\right)\Psi^{-1}=\chi_1(x,\ y,\ t,\ \lambda)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ k-u & 0\end{pmatrix}+O(\lambda), \qquad (38)$$

где $\lambda=k^{-1}$ — параметр на эллиптической кривой.

Вид особенности $\chi_1(x,\ y,\ t,\ \lambda)$ в окрестности $\lambda=0$ и задание параметров γ_1, γ_2, α_1, α_2 однозначно определяет χ_1. Найдем ее явный вид.

Любая эллиптическая функция представима в виде суммы ζ-функций Вейерштрасса [21]. Будем искать χ_1 в виде

$$\chi_1=A\,\zeta(\lambda-\gamma_1)+B\zeta(\lambda-\gamma_2)+C\zeta(\lambda)+D,$$

где A, B, C, D — матрицы, не зависящие от λ.

Дзета-функция Вейерштрасса задается рядом

$$\zeta(\lambda)=\lambda^{-1}+\sum_{m,\ n\neq 0}\left[(\lambda-\omega_{mn})^{-1}+\omega_{mn}^{-1}+\lambda\omega_{mn}^{-2}\right]; \qquad \omega_{mn}=m\omega+n\omega_1$$

или соотношением $\zeta'(\lambda)=-\wp(\lambda)$; $\wp(\lambda)$-функция Вейерштрасса имеет единственный полюс второго порядка в точке $\lambda=0$. В отличие от $\wp(\lambda)$ функция $\zeta(\lambda)$ не является двояко-периодической.

Необходимым и достаточным условием того, что χ_1 является эллиптической функцией является равенство

$$A+B+C=0. \qquad (39)$$

Из (38) следует, что $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. По определению χ_1 ее вычеты в точках γ_1 и γ_2 имеют ранг 1, т. е.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 a & a\\ \alpha_1 b & b\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\alpha_2 c & c\\ \alpha_2 d & d\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $A=(\alpha_2-\alpha_1)^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\\alpha_1&1\end{pmatrix}$, $B=(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\\alpha_2&1\end{pmatrix}$. Свободный член в равенстве (38) равен $\begin{pmatrix}0&1\\-u&0\end{pmatrix}$. Значит,

$$D-A\zeta(\gamma_1)-B\zeta(\gamma_2)=\begin{pmatrix}0&1\\-u&0\end{pmatrix}. \tag{40}$$

Суммируя сказанное, получим

$$\chi_1=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\begin{pmatrix}0&0\\\alpha_1&1\end{pmatrix}\zeta(\lambda-\gamma_1)+\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\begin{pmatrix}0&0\\\alpha_2&1\end{pmatrix}\zeta(\lambda-\gamma_2)+ \\ +\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\zeta(\lambda)+D, \tag{41}$$

где D определено из равенства (40). По формулам (29)

$$\begin{cases}\gamma_{1x}=-\operatorname{Sp}A=(\alpha_1-\alpha_2)^{-1},\\ \gamma_{2x}=-\operatorname{Sp}B=(\alpha_2-\alpha_1)^{-1}.\end{cases} \tag{42}$$

Матрица $\chi_{1,1}$, определяющая динамику α_1 по x, в силу уравнений (30) равна

$$\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\begin{pmatrix}0&0\\\alpha_2&1\end{pmatrix}\zeta(\gamma_1-\gamma_2)+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\zeta(\gamma_1)+D.$$

Следовательно,

$$\alpha_{1x}=\alpha_1^2+u-\Phi(\gamma_1,\gamma_2). \tag{43}$$

Аналогично

$$\alpha_{2x}=\alpha_2^2+u+\Phi(\gamma_1,\gamma_2). \tag{44}$$

Здесь

$$\Phi(\gamma_1,\gamma_2)=\zeta(\gamma_2-\gamma_1)+\zeta(\gamma_1)-\zeta(\gamma_2).$$

Разложения логарифмических производных $\Psi_y\Psi^{-1}$ и $\Psi_t\Psi^{-1}$ в окрестности $\lambda=0$ имеют вид

$$\chi_2=\Psi_y\Psi^{-1}=\begin{pmatrix}k&0\\v&k\end{pmatrix}+O(\lambda),\quad \lambda=k^{-1}, \tag{45}$$

$$\chi_3=\Psi_t\Psi^{-1}=\begin{pmatrix}\omega_1 & k+\frac{u}{2}\\ k^2-\frac{uk}{2}+\omega_2 & -\omega_1\end{pmatrix}+O(\lambda). \tag{46}$$

Так же как и χ_1, разложения (45) и (46) однозначно определяют функции χ_2 и χ_3, для которых может быть явно выписано представление в виде суммы ζ-функций; при этом уравнения на параметры Тюрина приобретут следующую форму:

$$\gamma_{iy}=1;\quad \alpha_{iy}=-v(x,y,t); \tag{47}$$

$$\gamma_{it}=(-1)^i\left(\alpha_1\alpha_2+\frac{u}{2}\right)(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}; \tag{48}$$

$$\alpha_{it}=-2\alpha_i\omega_1+\alpha_i^2\frac{u}{2}-\omega_2-(-1)^i\left(\frac{u}{2}+\alpha_i^2\right)\Phi-\wp(\gamma_i). \tag{49}$$

Введем обозначения $\gamma_1 = y + c(x, t)$; $\gamma_2 = y - c(x, t) + c_0$; $c_0 = \text{const}$; $\alpha_1 - \alpha_2 = z(x, t)$; $\alpha_1 + \alpha_2 = w(x, y, t)$; $\Phi = \Phi(y, c, c_0)$.

Из условия совместности потоков по x, y, t, задаваемых уравнениями (42) — (44), (47) — (49), получаем

$$\text{(50)}\quad \begin{cases} v = (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}(\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1)), \\ \omega_1 = -\dfrac{u_x}{4} + \dfrac{1}{2}(\wp(\gamma_1) - \wp(\gamma_2))(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}, \\ \omega_2 = \omega_{1x} - \dfrac{u^2}{2} + \wp(\gamma_1) + \wp(\gamma_2). \end{cases}$$

Сами уравнения в новых переменных приобретут вид

$$\text{(51)}\quad \begin{cases} c_x = z^{-1};\ z_x = zw - 2\Phi(y, c, c_0);\ c_y = z_y = 0; \\ c_t = 2z^{-1}(z^2 - \varphi); \\ u(x, y, t) = -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \varphi(x, t) = -\dfrac{z^2 + w^2}{2} + \varphi(x, t); \\ w_x = -\dfrac{z^2 + w^2}{2} + 2\varphi(x, t). \end{cases}$$

Подставляя в уравнение для w_x выражение $w = (\ln z)_x + 2\Phi z^{-1}$, получим

$$\text{(52)}\quad \varphi(x, t) = \frac{1 + 3c_{xx}^2}{4c_x^2} + Qc_x^2 - \frac{1}{2}\frac{c_{xxx}}{c_x},$$

$$\text{(53)}\quad u(x, y, t) = \frac{c_{xx}^2 - 1}{c_x^2} + 2\Phi c_{xx} + c_x^2(\Phi_c - \Phi^2) - \frac{1}{2}\frac{c_{xxx}}{c_x},$$

$$\text{(54)}\quad c_t = \frac{3}{8c_x}(1 - c_{xx}^2) - \frac{1}{2}Qc_x^3 + \frac{1}{4}c_{xxx};\ Q = \Phi_c + \Phi^2.$$

Утверждение. *Каждое решение $c(x, t)$ уравнения* (54) *задает согласно формуле* (53) *решение уравнения КП, которое является периодической функцией y. Если $c_x = z^{-1} \neq 0$, $z \neq 0$, то $u(x, y, t)$ неособо и ограничено по x.*

Сопоставление конструкций решений уравнения КП с помощью векторного аналога функции Бейкера — Ахиезера и с помощью уравнений на параметры Тюрина показывает, что уравнение (54) «скрыто изоморфно» уравнению КдФ, хотя изоморфизм трудно проследить.

Уравнение (54) является интегрируемой системой, допускающей представление нулевой кривизны, в котором операторы алгебраическим образом зависят от вспомогательного «спектрального параметра», лежащего на эллиптической кривой, в отличие от всех известных ранее случаев, где λ входило рационально. Это представление имеет вид

$$\text{(55)}\qquad \chi_{1t} - \chi_{3x} + [\chi_1, \chi_3] = 0,$$
$$\chi_i = \chi_i(x, y, t, \lambda).$$

Представление (55) позволяет обычным образом получать из разложения χ_1 по спектральному параметру λ интегралы уравнения (54). Анализ общих систем вида (55) приводится в следующем параграфе работы.

Рассмотрим стационарные решения уравнения (54) вида $u(x + at, y)$, отвечающие решениям уравнения Буссинеска. Простая замена (см. [3] с. 309) позволяет из них получить и более общее решение уравнения КП типа кноидальной волны $u(x + a_1t, y + b_1t)$.

Подстановка $z = h^{-2}(c)$ приводит (54) ($c_t = ac_x$) к гамильтонову виду

$$\text{(56)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2h}{dc^2} = -\dfrac{\partial W(h, c)}{\partial h}, \\ W = -\dfrac{1}{2}Q(c, c_0)h^2 + ah^{-2} - \dfrac{1}{8}h^{-6}, \end{cases}$$

где $Q = \Phi_c + \Phi^2$ — эллиптическая функция. Эта система является вполне интегрируемой. Из (55) следует, что она допускает коммутационное представление

$$\chi_{3x} = [\chi_1, \chi_3]. \tag{57}$$

Следовательно, величина $R(\mu, \lambda) = \det(\mu 1 - \chi_3(x, \lambda))$ не зависит от x и является интегралом уравнений

$$R(\mu, \lambda) = \det(\mu 1 - \chi_3(c, \lambda)) = \mu^2 - \wp'(\lambda) - I(c, c_0).$$

Соответствующий интеграл $I(c, c_0)$ равен

$$I(c, c_0) = -\frac{u}{2}\left(\frac{\alpha_1 - 2\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\wp(\gamma_1) + \frac{2\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\wp(\gamma_2) - \frac{u^2}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\wp'(\gamma_1) - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\wp'(\gamma_2)\right). \tag{58}$$

Уравнения (54) параметризованы константой c_0. Совокупность их стационарных решений при всех c_0 изоморфна пространству параметров Тюрина.

Многообразие уровня интеграла $I(c, c_0) = I$ изоморфно трехмерному многообразию Якоби $J(\Gamma_2)$ кривой Γ_2, двулистно накрывающей исходную эллиптическую кривую и заданной уравнением $R(\mu, \lambda) = 0$. Пересечение линий уровня $I = \text{const}$ и $c_0 = \text{const}$ выделяет в якобиане Γ_2 его нечетную часть «многообразие Прима».

Таким образом, многообразие модулей голоморфных оснащенных расслоений ранга 2 над эллиптической кривой расслаивается на двумерные абелевы многообразия Прима, отвечающие некоторым накрывающим эллиптической кривой.

Вывод. Кноидальные волны уравнения КП ранга 2 и рода 1 выражаются через θ-функции двух комплексных переменных; они не совпадают с решениями КП рода 2 ранга 1, которые также выражаются через θ-функции двух переменных.

Сформулированные утверждения непосредственно вытекают из результатов приложения.

В заключение параграфа приведем явную формулу для оператора L_4, входящего в коммутативную пару $[L_4, L_6] = 0$ ранга 2.

Из результатов работы [11] (§ 3) следует, что коммутативное кольцо однозначно определяется из уравнений (42), (43), (44), где $u(x)$ — произвольная функция. Однако нет необходимости решать эти уравнения, для того чтобы получить все коммутативные кольца ранга два, отвечающие эллиптической кривой. Если в качестве независимого функционального параметра выбрать $c(x)$, то формулы (51) определяют $\gamma_i(x)$, $\alpha_i(x)$, $u(x)$. Тем самым задание $c(x)$ однозначно определяет с помощью (41) логарифмическую производную

$$\Psi_x \Psi^{-1} = \chi_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{pmatrix}, \tag{59}$$

где $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_{1x} & \psi_{2x} \end{pmatrix}$; ψ_i — собственные функции оператора $L_4\psi_i(x, \lambda) = \wp(\lambda)\psi_i(x, \lambda)$.

Из равенства (59), означающего $\psi_i'' = \chi_{21}\psi_i + \chi_{22}\psi_i'$, следует рекуррентно формулы для следующих производных. Например,

$$\psi_i''' = \chi_{21}'\psi_i + \chi_{21}\psi_i' + \chi_{22}'\psi_i' + \chi_{22}(\chi_{21}\psi_i + \chi_{22}\psi_i').$$

Для определения коэффициентов оператора

$$L_4 = \frac{d^4}{dx^4} + v_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + v_1(x)\frac{d}{dx} + v_0(x) \tag{60}$$

представим $L_4\psi_i$ с помощью предшествующих формул в виде $b_1(x, \lambda)\psi_i + b_2(x, \lambda)\psi_i'$. Функции $b_1(x, \lambda)$, $b_2(x, \lambda)$ мероморфны по λ и линейно зависят от коэффициентов L_4. Последние находятся из сравнения лорановских разложений b_1 и b_2 в окрестности $\lambda = 0$:

$$b_1(x, \lambda) = \lambda^{-2} + O(\lambda); \quad b_2(x, \lambda) = O(\lambda).$$

Проделав это, получим

$$\begin{aligned} L_4 &= L^2 + c_x[\wp(c+c_0) - \wp(c+c_1)]\frac{d}{dx} - \wp(c+c_0) - \wp(c+c_1); \\ L &= \frac{d^2}{dx^2} + u(x). \end{aligned} \tag{61}$$

§ 6. Уравнения нулевой кривизны для алгебраических пучков операторов

В предшествующем параграфе было показано, что построение конечнозонных решений рода $g = 1$ ранга 2 уравнения КП приводит к интегрируемой системе, допускающей представление нулевой кривизны, но операторы в котором алгебраическим образом зависят от «спектрального параметра»— точки эллиптической кривой.

Общее представление подобного типа

$$u_t - v_x + [u, v] = 0 \tag{62}$$

означает совместность уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - u(x, t, P)\right)\Psi(x, t, P) = 0, \tag{63}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v(x, t, P)\right)\Psi(x, t, P) = 0, \tag{64}$$

где P — точка алгебраической кривой Γ рода g с отмеченными точками $P_1, \ldots, P_m$, Ψ — матричный аналог функции Бейкера — Ахиезера.

Пусть матричные функции $u(x, t, P)$ и $v(x, t, P)$ определены, как в § 4, своими особенностями в точках P_s, значениями в фиксированной точке P_0, $u_0 = u(x, t, P_0)$, $v_0 = v(x, t, P_0)$. Особенности u; v в точках P_s — это матричные функции

$$u_s = \sum_{i=1}^{n_s} u_{si}(x, t)k^i; \quad v_s = \sum_{i=1}^{m_s} v_{si}(x, t)k^i,$$

полиномиально зависящие от k.

В случае кривой рода $g = 0$ функции v и u — рациональные функции k. Уравнение (62), которое должно выполняться при всех k, в этом случае очевидно эквивалентно конечному числу уравнений. Последние получаются приравниванием нулю сингулярных частей $w = u_t - v_x + [u, v]$ в точках $P_1, \ldots, P_m$ и значения w в точке P_0.

Если род кривой Γ $g \geqslant 1$, то u, v имеют помимо особенностей в точках P_s особенности, связанные с параметрами Тюрина (γ, α), удовлетворяющими уравнениям (28) — (30). Тем не менее уравнения (62) по-прежнему эквивалентны уравнениям, связанным лишь с точками $P_1, \ldots, P_m$.

Утверждение. *Система уравнений* (63) *и* (64) *совместна тогда и только тогда, когда*

$$u_{0t} - v_{0x} + [u_0, v_0] = 0, \tag{65}$$

$$u_t - v_x + [u, v] = O(1)\,|_{P=P_s}. \tag{66}$$

Последние уравнения означают, что функция $w = u_t - v_x + [u, v]$ не имеет особенностей в точках $P_1, \ldots, P_m$.

Число матричных уравнений (65), (66) равно $M + N + 1$, где $M = \sum m_s$, $N = \sum n_s$. Число же независимых матричных функций, определяющих u, v, равно $M + N + 2$. Недоопределенность системы связана с ее «калибровочной инвариантностью». Преобразование

$$u \to \partial_x g g^{-1} + g u g^{-1},$$
$$v \to \partial_t g g^{-1} + g v g^{-1}$$

с любой невырожденной матрицей $g(x, t)$ переводит решения (65), (66) в решение этих же уравнений.

Набросок доказательства. Рассмотрим матричную функцию $w = u_t - v_x + [u, v]$. Уравнения (29), определяющие динамику полюсов $\gamma_s(x, t)$ функций u, v, эквивалентны тому, что функция w, которая априори имеет в точках γ_s полюса второго порядка, имеет в этих точках простые полюса. Непосредственная подстановка лорановских разложений u, v в окрестности $\gamma = y_s(x, t)$

$$u = \frac{u^0}{k-\gamma} + u^1 + u^2 (k-\gamma) + O((k-\gamma)^2),$$
$$v = \frac{v^0}{k-\gamma} + v^1 + v^2 (k-\gamma) + O((k-\gamma)^2)$$

в w показывает, что следствием уравнений (30) является соотношенпе на вычеты элементов w^{ab} в точках γ_s

$$\operatorname{res}_{\gamma_s} w^{ab} = \alpha_{sb} \operatorname{res}_{\gamma_s} w^{al}.$$

Значит w — функция того же типа, что и u, v, и тем самым однозначно определяется своими особенностями в точках P_s и значением $w(x, t, P_0)$. По условию эти параметры равны нулю. Значит,

$$w = u_t - v_x + [u, v] = 0. \tag{67}$$

Чтобы завершить доказательство утверждения, достаточно доказать совместность пар уравнений на γ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, 1)$. Так как в силу (67) $\operatorname{Sp} w = 0$, то

$$\operatorname{Sp} u_t^0 - \operatorname{Sp} v_x^0 = 0 \leftrightarrow \gamma_{xt} = \gamma_{tx}.$$

Чтобы доказать совместность уравнений (30) для α_x и α_t, введем вектор-строку $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\beta_x = -\beta u^1, \tag{68}$$

$$\beta_t = -\beta v^1. \tag{69}$$

Совместность этой пары уравнений эквивалентна совместности уравнений для α и $\alpha_i = \beta_i \beta_l^{-1}$. Совместность (68) и (69) означает, что

$$\beta(u_t^1 - v_x^1 + [u, v]) = 0. \tag{70}$$

Приравнивая нулю свободный член лорановского разложения w в точке $\gamma = \gamma_s(x, t)$, получим

$$u_t^1 - v_x^1 + [u^1, v^1] = [v^0, u^2] + [v^2, u^0]. \tag{71}$$

Значит, для совместности (69) и (68) достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\beta([u^0, v^2] + [u^2, v^0)] = 0. \tag{72}$$

Это соотношение уже не содержит производных по x и t. Воспользуемся следующим приемом. Легко построить функцию Бейкера — Ахиезера $\widetilde{\Psi}(x, t, P)$ такую, что

$$\widetilde{u}(x_0, t_0, P) = u(x_0, t_0, P); \quad \widetilde{v}(x_0, t_0, P) = v(x_0, t_0, P).$$

Здесь $\widetilde{u} = \widetilde{\Psi}_x\widetilde{\Psi}^{-1}$, $\widetilde{v} = \widetilde{\Psi}_t\widetilde{\Psi}^{-1}$. Так как для этой функции уравнения (69) и (68) совместны, то имеет место соотношение

$$\widetilde{\beta}([\widetilde{v}^0, \widetilde{u}^2] + [\widetilde{v}^2, \widetilde{u}^0]) = 0$$

для всех x и t. При $x = x_0$, $t = t_0$ оно совпадает с (72).

§ 7. Приложение. Алгебраические связки коммутирующих потоков

В работе [22] для уравнения КдФ и всех его высших аналогов впервые было найдено λ-представление, т. е. представление всей совокупности этих уравнений в виде уравнений нулевой кривизны пучков операторов

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - u_i(t, \lambda), \ \frac{\partial}{\partial t_j} - u_j(t, \lambda)\right] = 0,$$

полиномиально зависящих от спектрального параметра λ, $t = (t_1, t_2, \ldots)$; $t_1 = x$, $t_2 = t$. В более общей ситуации рациональных пучков операторов или даже алгебраических пучков, определенных выше, инвариантное выделение алгебраических связок, аналогичное условию (2) для уравнения типа КдФ, дается следующим образом.

Пусть имеется набор алгебраических пучков операторов

$$L_i = \frac{\partial}{\partial t_i} - u_i(t, P),$$

$u_i(t, P)$ — мероморфные матричные функции описанного ранее типа на алгебраической кривой Γ рода g. При $g = 0$ u_i — рациональные функции на сфере Римана с постоянными (не зависящими от t) полюсами.

Определение 1. Совокупность операторов L_i будет называться *коммутативной связкой*, если для любых i, j операторы L_i, L_j коммутируют

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_j} - \frac{\partial u_j}{\partial t_i} + [u_i, u_j] = 0. \tag{73}$$

Определение 2. Если существует матричная функция $w(t, P)$, алгебраически зависящая от P, такая, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - u_i(t, P), \quad v(t, P)\right] = 0, \tag{74}$$

то коммутативная связка называется *алгебраической*.

Основной пример алгебраической связки — это условие стационарности всей связки относительно одной из переменных

$$\frac{\partial u_j}{\partial t_i} = 0 \quad (j = 1, 2, 3 \ldots).$$

В этом случае $w = u_i$. Однако априори не нужно предполагать, что w связано с набором $(u_1, \ldots, u_i, \ldots)$. Тем не менее общий случай сводится к этому.

Входящие в алгебраическую связку линейные операторы $L_i = \frac{\partial}{\partial t_i} - u_i(t, P)$ (если они обладают определенными свойствами эрмитовости) являются «конечнозонными или конечнолакунными» в смысле спектральной теории операторов [22]. Поэтому эти операторы и соответствующие решения нелинейных уравнений называют «конечнозонными».

По отношению к любому из уравнений (73) с номером (i, j) оставшиеся уравнения с номерами (i, k) играют роль «высших аналогов КдФ». Априори они все являются уравнениями в частных производных. Однако условие алгебраичности («конечнозонности») (74) приводит к тому, что эти уравнения рассыпаются в набор коммутирующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений по каждой переменной, которые явно записаны в виде конечномерного аналога пары Лакса (74).

Утверждение. *Если операторы L_i коммутируют с w, то они коммутируют между собой, т. е. из* (74) *следуют уравнения* (73).

При фиксированном числе и порядке полюсов w пространство соответствующих матриц конечномерно и уравнения (74) определяют его коммутирующие деформации. Все уравнения (74) имеют общие интегралы. Пусть $\Psi(t, P)$ — решение уравнений

(75) $$\left(\frac{\partial}{\partial t_i}-u_i\right)\Psi(t, P)=0; \quad \Psi(0, P)=1.$$

Из (74) следует, что

(76) $$w(t, P)\Psi(t, P) = \Psi(t, P)w(0, P).$$

Значит, характеристический полином

(77) $$Q(\mu, P) = \det(\mu \cdot 1 - w(t, P)) = 0$$

не зависит от t. Его коэффициенты являются интегралами уравнений (74).

Определение 3. Алгебраическая связка будет называться *полной*, если потоки, заданные уравнениями (74), покрывают все многообразие уровней интегралов (77).

В общем положении собственные значения $w(0, P)$ при почти всех P различны и кривая $\hat{\Gamma}$, определенная уравнением (77), l-листно накрывает исходную кривую Γ. Каждой точке γ кривой $\hat{\Gamma}$ отвечает единственный собственный вектор $w(0, P)$ с нормированной на единицу первой координатой. Остальные координаты $h_i(\gamma)$ являются мероморфными функциями на $\hat{\Gamma}$. Вектор-функция

$$\psi(t, \gamma)=\sum_{i=1}^{l} h_i(\gamma). \Psi_i(t, P),$$

где $\Psi_i(t, P)$ — i-й столбец матрицы $\Psi(t, P)$, обладает следующими аналитическими свойствами.

1. Так как $\Psi(t, P)$ мероморфна вне точек $P_1, \ldots, P_m$, то $\psi(t, \gamma)$ мероморфна вне P_i^j $(j = 1, \ldots, l)$ — прообразов P_i на $\hat{\Gamma}$. Полюса $\psi(t, \gamma)$ не зависят от t, их число равно $g + l - 1$, где g — род $\hat{\Gamma}$.

2. Из уравнений (74) и того, что характеристический полином Q не зависит от t, следует, что собственные значения $u_i(t, P)$ при $P = P_s$ не зависят от t. Следовательно, в окрестности P_i^j координаты $\psi(t, \gamma)$ имеют вид

$$\psi=\exp\left(\sum_{\alpha} \lambda_a t_a k\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(t)\, k^{-s}\right),$$

где λ_a — константы и $k^{-1} = k^{-1}(\gamma)$ — локальные параметры в окрестности P_i^j.

Таким образом, $\psi(t, \gamma)$ является функцией Бейкера — Ахиезера ранга 1 и однозначно определяется дивизором полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+l-1}$. В соответствии с общими рецептами $\psi(t, \gamma)$ может быть явно выражена через θ-функцию. Матрица w по ψ определяется равенством

$$w(t, P)\psi(t, \gamma) = \mu(\gamma)\psi(t, \gamma),$$

где $\gamma = (P, \mu)$ — прообраз точки P на кривой $\hat{\Gamma}$, заданной (77).

Если отождествить матрицы w и AwA^{-1}, где A — постоянная диагональная матрица, то фактор-многообразие уровней интегралов (77) изоморфно тору-якобиану кривой $J(\hat{\Gamma})$, а уравнения (74) задают прямолинейные обмотки на этих торах (см. [18], гл. III, § 3).

В теории уравнений типа КдФ высшие аналоги образовывали полные алгебраические связки. Другим примером связки операторов с двумя переменными $t_1 = x + t'$, $t_2 = x - t'$, рационально зависящих от параметра λ, являются операторы вида (78), использованные в [23], [24] для теории киральных полей:

$$L_i = \frac{\partial}{\partial t_i} - \frac{A_i}{\lambda - a_i}. \tag{78}$$

Примеры алгебраических связок, содержащих операторы вида (78) в любом числе, были рассмотрены Гарнье [25][1]). Отправной точкой исследований [25] послужили уравнения Шлезингера, описывающие деформации обыкновенных дифференциальных уравнений, которые сохраняют монодромию особых точек этих уравнений, где $a_i \to t_i$ в формуле (78).

Гарнье рассмотрел уравнения типа (74) специального вида:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - \frac{A_i}{\lambda - a_i},\quad \sum_j \frac{A_j}{\lambda - a_j}\right] = 0, \tag{79}$$

где

$$w = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\lambda - a_j} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Связка (79) не является полной. Число операторов n существенно меньше рода кривой $\hat{\Gamma}$, заданной уравнением

$$Q(\lambda, \mu) = \det\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\lambda - a_j} - \mu \cdot 1\right) = 0.$$

Гарнье использовал уравнения (79) для построения новых интегрируемых конечномерных систем. Найденная им система

$$\xi_i'' = \xi_i\left(\sum_{i=1}^{l} \xi_i\eta_i + a_i\right), \quad \eta_i'' = \eta_i\left(\sum_{i=1}^{l} \xi_i\eta_i + a_i\right)$$

на различных инвариантных гиперплоскостях $\xi_i = b_i\eta_i$ совпадает с системой Неймана гармонических осцилляторов, «насильственно» ограниченных на сферу $\sum \xi_i^2 = 1$, [26] (что, конечно, разрушает гармоничность), а также с ангармонической системой осцилляторов [27].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортевега — Де-Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, 31:1, с. 55—136.

[2] И. М. Кричевер. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, 32:6, с. 183—208.

[1]) Авторы благодарны Г. Флашке и А. Ньюэллу, которые обратили их внимание на замечательную классическую работу [25].

[3] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.
[4] E. L. Ince. Ordinary differential equations.— London: Longmans Green, 1927.
[5] В. С. Дрюма. Об аналитическом решении двумерного уравнения Коргевега — де Фриза.— Письма в ЖЭТФ, 1974, **19**:12, с. 219—225.
[6] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния.— Функц. анализ, 1974, **8**:3, с. 43—53.
[7] И. М. Кричевер. Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений.— ДАН, 1976, **227**:2, с. 291—294.
[8] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева — Петвиашвили. I.— Функц. анализ, 1978, **12**:4, с. 41—52.
[9] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения и нелинейные уравнения. Конечнозонные решения ранга 2.— ДАН, 1979, **247**:1, с. 33—36.
[10] И. М. Кричевер. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.— Функц. анализ, 1977, **11**:2, с. 15—32.
[11] И. М. Кричевер. Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов.— Функц. анализ, 1978, **12**:3, с. 20—31.
[12] V. G. Drinfeld, I. M. Krichever, J. I. Manin, S. P. Novikov. Algebro-geometric methods in the modern mathematic physics. Soviet Science Reviews, Phys. Reviews 1978.— Amsterdam: Over. Pub. Ass., 1980.
[13] А. Н. Тюрин. Классификация векторных расслоений над алгебраическими кривыми.— Изв. АН, 1965, сер. матем., **29**, с. 658—680.
[14] W. Koppelman. Singular integral equations, boundary value problem and Rieman — Roch theorem.— J. Math. and Mech, 1961, **10**:2, p. 247—277.
[15] Ю. Л. Родин. Краевая задача Римана для дифференциалов на римановых поверхностях.— Ученые записки Пермск. ун-та, 1960, в. 2, с. 83—85.
[16] H. F. Baker. Note of foregoing paper «Commutative ordinary differential equations», Proc. Royal Soc. Lond., 1928, **118**, p. 570—577.
[17] С. В. Манаков. Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения, УМН, 1976, **31**:5, с. 245—246.
[18] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Уравнение Шрёдингера в периодическом магнитном поле и римановы поверхности.— ДАН, 1976, **229**:1, с. 15—18.
[19] И. В. Чередник. Об условиях вещественности в «конечнозонном интегрировании».— ДАН, 1980, **252**:5, с. 1104—1107.
[20] G. McKean, E. Trubovitz. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points.— Comm. Pure Appl. Math., 1976, **29**:2, p. 143—226.
[21] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье.— М.: Наука, 1967.
[22] С. П. Новиков. Периодическая задача Кортевега — де Фриза.— Функц. анализ, 1974, **8**:3, с. 54—66.
[23] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов. Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи.— ЖЭТФ, 1978, **74**:6, с. 1953—1972.
[24] K. Pohlmeyer. Integrable hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints.— Com. Math. Phys., 1976, **46**, p. 207—235.
[25] R. Garnier. Sur une de systemes differentiels abeliens deduits de la theorie des equations lineaires.— Rend. Circ. Matem. Palermo, 1919, **43**, p. 155—191.
[26] J. Moser. Variable aspects of integrable systems.— Preprint Kurant Ins., 1978.
[27] V. Glaser, H. Grosser, A. Martin. Bounds on the number of eigenvalues of the Schrödinger operator.— Comm. Math. Phys., 1978, **59**, p. 197—212.

Поступила в редакцию 5 июля 1980 г.