Функциональный анализ и его приложения,
т. 15, вып. 2, 1981, 22—35.

УДК 517.9 + 513.015.7

УРАВНЕНИЯ БАКСТЕРА И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

И. М. Кричевер

В начале семидесятых годов Бакстером была проинтегрирована (см. [1] — [5]) квантовомеханическая модель магнетика, предложенная Гейзенбергом [6] и получившая название XYZ модели.

Эта модель описывает систему N взаимодействующих частиц со спином 1/2. Ее гамильтониан H действует в гильбертовом пространстве состояний $\mathfrak{H}_N$,

$$\mathfrak{H}_N = \prod_{n=1}^{N} \otimes \mathfrak{h}_n, \qquad \mathfrak{h}_n = C^2,$$

и имеет следующий вид:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (J_x \sigma_n^1 \sigma_{n+1}^1 + J_y \sigma_n^2 \sigma_{n+1}^2 + J_z \sigma_n^3 \sigma_{n+1}^3). \tag{1}$$

Здесь J_x, J_y, J_z — вещественные константы, σ_n^j — спиновые операторы,

$$\sigma_n^j = I \otimes \ldots \otimes \sigma^j \otimes \ldots \otimes I,$$

где σ^j — матрицы Паули, $j = 1, 2, 3$; $\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Основной целью Бакстера было исследование так называемой восьмивершинной двумерной модели классической статистической физики. Оказалось, что эта задача тесно связана с квантовой XYZ моделью.

Развитие методов обратной задачи теории рассеяния в применении к исследованию квантовых систем, предпринятое Л. Д. Фаддеевым и его учениками, позволило им на определенном этапе заметить замечательный параллелизм между основными формулами Бакстера и формулами, возникшими в рамках метода обратной задачи на квантовом уровне. Это и ряд других соображений привело к конечном итоге Фаддеева, Тахтаджяна, Склянина к формулировке квантового метода обратной задачи. Этот метод включает естественным образом все основные достижения классической статистической физики и теории одномерных квантовых систем — идеи Крамерса — Ванье, Онзагера, Бакстера, анзатц Бете и ряд других.

Основным соотношением квантового метода обратной задачи являются уравнения Бакстера

$$R(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^1) = (\mathscr{L}^1 \otimes \mathscr{L}) R, \tag{2}$$

где $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^1$ — матрицы (2×2), элементы которых являются операторами в двумерном пространстве $\mathfrak{h} = C^2$. Тензорное произведение рассматривается в алгебре матриц (2×2) с операторными коэффициентами. Матрица R является числовой матрицей (4×4).

Элементы матрицы $\mathscr{L}$ нумеруются двумя парами индексов: $\mathscr{L}_{j\beta}^{i\alpha}$, $i, j, \alpha, \beta = 1, 2$. Латинские индексы нумеруют блоки $\mathscr{L}$, а греческие — внутренние индексы элементов блока.

Каждой матрице $\mathscr{L}$ соответствует матрица монодромии $\mathscr{T}$, являющаяся матрицей (2×2), элементы которой являются операторами в пространстве $\mathfrak{H}_N$ (здесь и далее мы будем в основном следовать терминологии и обозначениям [8]),

$$\mathscr{T}^{i,\,\alpha_1,\ldots,\alpha_N}_{j,\,\beta_1,\ldots,\beta_N} = \mathscr{L}^{i\alpha_1}_{j_1\beta_1}\cdot\mathscr{L}^{j_1\alpha_2}_{j_2\beta_2}\ldots\mathscr{L}^{j_{N-1}\alpha_N}_{j\quad\beta_N}. \tag{3}$$

(Во всех формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.)

Если $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}^1$ — матрицы монодромии, построенные по матрицам $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^1$, удовлетворяющим уравнениям (2), то они также удовлетворяют соотношению

$$R\,(\mathscr{T}\otimes\mathscr{T}^1) = (\mathscr{T}^1\otimes\mathscr{T})\,R. \tag{4}$$

Трансфер-матрицей T называется оператор $\operatorname{tr}\mathscr{T}$ в $\mathfrak{H}_N$, где след берется в кольце матриц (2×2) с операторными элементами.

Каждому решению уравнений (4) отвечают коммутирующие трансфер-матрицы $[T,\ T^1] = 0$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взять след от равенства (4).

Бакстером были найдены решения уравнения (2) для матриц специального вида, отвечающих взаимодействию восьмивершинной модели

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Оказывается, элементы таких матриц могут быть (с точностью до общего множителя) параметризованы с помощью эллиптических функций тремя параметрами $\lambda,\ \eta,\ k$,

$$a = \operatorname{sn}(\lambda + 2\eta),\quad b = \operatorname{sn}\lambda,\quad c = \operatorname{sn}2\eta,\quad d = k\operatorname{sn}2\eta\cdot\operatorname{sn}\lambda\cdot\operatorname{sn}(\lambda + 2\eta), \tag{6}$$

где $\operatorname{sn}\lambda = \operatorname{sn}(\lambda, k)$ — эллиптический синус Якоби (см. [9]) с модулем k.

При фиксированных параметрах η и k трансфер-матрицы, отвечающие $\mathscr{L}(\lambda)$, коммутируют при различных значениях λ, т. е.

$$[T(\lambda),\ T(\mu)] = 0. \tag{7}$$

Из (7) следует, что коэффициенты разложения $T(\lambda)$ по λ коммутируют между собой и, значит, коммутируют любые функции от них. Замечательным оказалось то, что среди этих операторов содержится гамильтониан XYZ модели

$$H = -\operatorname{sn}2\eta\frac{d}{d\lambda}\ln T(\lambda)\big|_{\lambda=0} + \frac{1}{2}J_z N I_N. \tag{8}$$

Наличие бесконечного набора коммутирующих с H операторов-интегралов системы приводит к интегрируемости XYZ модели.

В настоящей работе уравнения Бакстера (2) рассматриваются без каких бы то ни было ограничений на вид матриц $\mathscr{L}$. В первом параграфе для любой четномерной матрицы строится ее параметризация некоторыми алгебро-геометрическими данными, аналогичными параметрам Бакстера. Эта параметризация тензора $R\,(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}^1)$ позволяет естественно ввести понятие ранга решений уравнений Бакстера. Оказывается, что все решения ранга 1 с точностью до «калибровочной эквивалентности» и некоторых простейших симметрий совпадают с решениями Бакстера. В третьем параграфе найдены все остальные решения. Они имеют ранг 2.

Интересно отметить, что для решений Бакстера характерно то, что матрицы, удовлетворяющие (2), параметризуются эллиптическими функциями с одинаковыми модулями, а сами уравнения после параметризации превращаются в варианты теорем сложения для эллиптических функций. Для решений ранга 2 модули эллиптических функций различны. Тем самым уравнения (2) дают соотношения для эллиптических функций с разными модулями.

§ 1. «Вакуумные» векторы и алгебраические кривые

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольная четномерная матрица. Будем ее рассматривать как матрицу (2×2), элементы которой являются матрицами $(n\times n)$. В соответствии с этим матричные элементы $\mathcal{L}$ будут нумероваться двумя парами индексов, $\mathcal{L}^{i\alpha}_{j\beta}$, $1\leqslant i, j\leqslant n$, $1\leqslant \alpha, \beta\leqslant 2$. Оператор $\mathcal{L}$ действует в пространстве C^{2n}, которое порождено векторами вида $X\otimes U$, где U — двумерный, а X — n-мерный векторы с координатами U_α и X_i соответственно. (Далее все векторы, если не оговорено противное, считаются нормированными так, что их последняя координата равна 1, т. е. $X_n=U_2=1$.)

«*Вакуумным*» *вектором* оператора $\mathcal{L}$ будет называться вектор $X\otimes U$, который под действием $\mathcal{L}$ переходит в вектор, также являющийся тензорным произведением, т. е.

$$\mathcal{L}\,(X\otimes U)=h\,(Y\otimes V), \tag{9}$$

где h — число. В координатной записи (9) имеет вид

$$\mathcal{L}^{i\alpha}_{j\beta}\;X_i\,U_\alpha=h\,Y_jV_\beta. \tag{9'}$$

Умножим (9) слева на ковектор $(\tilde V^\beta)=(1,\;-v)$, ортогональный V, $\tilde V^\beta V_\beta=0$.

Здесь $v=V_1$ (обозначим аналогично $u=U_1$). Тогда

$$LX=0, \tag{10}$$

где L — оператор с координатами

$$L^i_j=\tilde V^\beta\mathcal{L}^{i\alpha}_{j\beta}U_\alpha. \tag{11}$$

Для того чтобы существовал вектор X, удовлетворяющий (10), необходимо и достаточно, чтобы u и v удовлетворяли алгебраическому соотношению

$$P\,(u, v)=\det L=0. \tag{12}$$

Уравнение (12) задает в C^2 алгебраическую кривую Γ.

В общем положении можно считать, что при почти всех u корни v_i, $1\leqslant i\leqslant n$, уравнения (12) различны. Тогда каждой точке $z\in\Gamma$ (т. е. паре $z=(u, v)$, удовлетворяющей (12)) отвечает единственный вектор X, удовлетворяющий (10) и такой, что $X_n=1$.

Все остальные координаты X_i являются рациональными функциями u и v, а значит, мероморфными функциями z на Γ.

Как и в теории «конечнозонного» интегрирования [10], доказывается, что число полюсов $X\,(z)$ равно $N=g+n-1$, где g — род кривой Γ.

Уравнение (12) имеет вид

$$P\,(u, v)=\sum a_{ij}\,u^iv^j=0,\qquad 1\leqslant i,\;j\leqslant n. \tag{13}$$

В общем положении род кривой Γ, заданной уравнением (13), равен $g=(n-1)^2$ (см. [12]).

Функция h и вектор Y (z) определяются из равенства (9′). Так как $V_2 = 1$, то

$$\mathcal{L}^{i\alpha}_{j2} X_i(z)\, U_\alpha(z) = h(z)\, Y_j(z). \tag{14}$$

Функция $h(z)$ равна левой части равенства (14) при $j = n$.

Теорема 1. *В общем положении оператор $\mathcal{L}$ с точностью до умножения на число однозначно определяется коэффициентами a_{ij} полинома* (13) *и мероморфными векторами $X(z)$ и $Y(z)$, дивизоры полюсов которых имеют степень $n^2 - n = g + n - 1$ и удовлетворяют условию эквивалентности*

$$D_X + D_U \sim D_Y + D_V. \tag{15}$$

Доказательство. Условие эквивалентности двух дивизоров означает, что найдется функция $h(z)$, мероморфная на Г, дивизор полюсов которой совпадает с одним дивизором, а дивизор нулей — с другим. Своими нулями и полюсами h определена с точностью до умножения на константу.

С каждым дивизором D ассоциировано линейное пространство $M(D)$ функций, имеющих полюсы в точках D кратности не выше той кратности, с которой эта точка входит в D.

Теорема Римана—Роха утверждает, что

$$\dim M(D) \geqslant N - g + 1, \tag{16}$$

и что если N — степень дивизора D (т. е. число точек D с кратностями) не меньше g, то для дивизоров общего положения в (16) достигается равенство (см. [11]).

Степень дивизора $D_X + D_U = n^2 = g + 2n - 1$. Базис в пространстве функций, ассоциированных с этим дивизором, образуют функции $X_i(z) U_\alpha(z)$. Другим базисом в этом же пространстве являются функции $h(z)\, Y_j(z)\, V_\beta(z)$.

Значит, матрица $\mathcal{L}$ связывает между собой два этих базиса. (Чтобы найти $\mathcal{L}$ по заданным X, U, Y, V, достаточно воспользоваться равенством (9′) в произвольном наборе точек z_s, $1 \leqslant s \leqslant 2n$, общего положения.)

Следствие. *Матрицам $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ тогда и только тогда отвечают одинаковые полиномы $P(u, v)$ и «вакуумные» векторы с эквивалентными дивизорами $D_X \sim D_{X'}$ и $D_Y \sim D_{Y'}$, когда они связаны соотношением*

$$\widetilde{\mathcal{L}}^{i\alpha}_{j\beta} = G^i_p \mathcal{L}^{p\alpha}_{q\beta} G'^{\,q}_j, \tag{17}$$

где G и G' — матрицы $(n \times n)$.

Утверждение вытекает из того, что если дивизоры D_X, $D_{X'}$ эквивалентны, то «вакуумные» векторы X и X' связаны соотношением $G'X'(z) = f(z)\, X(z)$.

Рассмотрим теперь случай, когда полином $P(u, v)$, отвечающий матрице $\mathcal{L}$, имеет тождественно кратные корни v_i при всех u, т. е. $P(u, v) = \widetilde{P}^l(u, v)$, где $\widetilde{P}(u, v)$ — полином степени n' по каждой переменной, $n = n'l$. Это означает, что для каждой точки (u, v) кривой Г, заданной уравнением $\widetilde{P}(u, v) = 0$, ранг матрицы L равен $n - l$. Тем самым l линейно независимых решений X^a, $a = 1, \ldots, l$, уравнения (10) образуют l-мерное расслоение, т. е. расслоение ранга l, над кривой Г.

Нормируем $X^a = (X^a_i)$ следующим условием: $X^a_i = \delta^a_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$. В теории «конечнозонного» интегрирования понятие ранга решений было введено в работах [13], [14]. Аналогично [13] устанавливаются следующие аналитические свойства векторов X^a. Все координаты X_i^a являются мероморфными функциями на Г, имеющими $N = l\,(g + n' - 1)$ полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$. Ранг матрицы вычетов X_i^a в полюсах равен 1, т. е. существуют векторы $\alpha_s = (\alpha_{sa})$ такие, что $\operatorname{res}_{\gamma_s} X_i^a = \alpha_{sa} \operatorname{res}_{\gamma_s} X_i^l$. Набор параметров (γ_s, α_s) называется набором «параметров Тюрина» или матричным дивизором, так как согласно [15] он однозначно определяет оснащенное расслоение ранга l (стабильное в смысле Мамфорда).

Теорема 1'. *Пусть задан полином $\tilde{P}\,(u, v)$ и тем самым кривая* Г. *Для каждых мероморфных матриц $X_i^a\,(z)$, $Y_j^a\,(z)$, $1 \leqslant a \leqslant l$, матричные дивизоры которых удовлетворяют условию эквивалентности*

$$D_X + D_U^l \sim D_Y + D_V^l, \tag{15'}$$

существует единственная матрица $\mathscr{L}$ размерности $(2n \times 2n)$ такая, что

$$\mathscr{L}_{j\beta}^{i\alpha} X_i^a U_\alpha = Y_j^b V_\beta g_b^a,$$

где $g_b^a\,(z)$ — матрица, осуществляющая эквивалентность (15'). *Последнее означает, что g_b^a имеет полюсы в точках дивизора полюсов $U\,(z)$ и точках γ_s. При этом $\operatorname{res}_{\gamma_s} g_b^a = \alpha_{sa} \operatorname{res}_{\gamma_s} g_b^l$. Кроме того, g_b^a имеет нули в полюсах $V\,(z)$, а в точках γ_s' удовлетворяет соотношениям $\beta_{sb} g_b^a\,(\gamma_s') = 0$. Матричные дивизоры $D_X = (\gamma_s, \alpha_{sa})$, $D_Y = (\gamma_s', \beta_{sb})$ имеют степень $N = l\,(g + n' - 1)$, $1 \leqslant s \leqslant N$.*

Следствие. *Матричные дивизоры $D_X \sim D_{X'}$ и $D_Y \sim D_{Y'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие матрицы $\mathscr{L}$, $\tilde{\mathscr{L}}$ связаны соотношением* (17).

§ 2. Уравнения Бакстера

Пусть $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^1$ — матрицы порядка (4×4). По теореме 1 эти матрицы определяются полиномами

$$P\,(u, v) = \Sigma\, a_{ij} u^i v^j = 0, \quad P_1\,(u, v) = \sum a_{ij}^1 u^i v^j = 0, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant 2, \tag{18}$$

и мероморфными функциями $x\,(z)$, $y\,(z)$, $x^1\,(z^1)$, $y^1\,(z^1)$, имеющими по два полюса, удовлетворяющими условию (15). Кривые Г и Γ^1, заданные уравнениями (18), имеют род 1, т. е. являются эллиптическими кривыми. Далее,

$$\mathscr{L}\,(X\,(u, v) \otimes U) = h\,(u, v)\,(Y\,(u, v) \otimes V), \tag{19}$$

$$\mathscr{L}^1\,(X^1\,(u^1, v^1) \otimes U^1) = h_1\,(u^1, v^1)\,(Y^1\,(u^1, v^1) \otimes V^1). \tag{20}$$

(Большими буквами обозначены двумерные векторы, вторая координата которых равна 1, а первая обозначается соответствующей малой буквой. Точки кривой Г будут обозначаться либо просто через z, либо через (u, v). В последнем случае автоматически считается, что пара (u, v) удовлетворяет уравнению, определяющему Г.)

Рассмотрим тензоры Λ_1 и Λ_2,

$$\Lambda_1 = \Lambda_{1,\,pq\beta}^{\;ij\alpha} = \mathscr{L}_{p\beta}^{1k\gamma} \mathscr{L}_{q\gamma}^{l\alpha} R_{kl}^{ij}, \tag{21}$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_{2,\,pq\beta}^{\;ij\alpha} = R_{pq}^{kl} \mathscr{L}_{k\beta}^{i\gamma} \mathscr{L}_{l\gamma}^{1,\,j\alpha}. \tag{22}$$

Каждый из этих тензоров может рассматриваться как матрица (2×2) с матричными элементами (4×4). Индексы α, β — внешние, а пары (i, j), (p, q) — внутренние.

По теореме 1 тензорам Λ_i соответствуют кривые $\hat{\Gamma}_i$, заданные уравнениями

$$Q_i (u, w) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{23}$$

степени 4 по каждой переменной.

Если тройка чисел u, v, w удовлетворяет условиям

$$P (u, v) = 0, P_1 (v, w) = 0, \tag{24}$$

то из (19) и (20) следует, что

$$\Lambda_1 (\hat{X} (u, w) \otimes U) = h (u, v) h_1 (v, w) (Y^1 (v, w) \otimes Y (u, v) \otimes W), \tag{25}$$

где

$$\hat{X} (u, w) = R^{-1} (X^1 (v, w) \otimes X (u, v)).$$

Следовательно, (u, w) удовлетворяет уравнению $Q_1 (u, w) = 0$ и векторы $\tilde{X} (u, w)$ и $Y^1 (v, w) \otimes Y (u, v)$ — «вакуумные» векторы Λ_1.

Аналогично рассмотрим тройки чисел u, v, w, удовлетворяющие уравнениям

$$P_1 (u, \tilde{v}) = 0, \quad P (\tilde{v}, w) = 0. \tag{26}$$

Тогда

$$\Lambda_2 (X (\tilde{v}, w) \otimes X^1 (u, \tilde{v}) \otimes U) = h_1 (u, \tilde{v}) h (\tilde{v}, w) (\hat{Y} (u, w) \otimes W), \tag{27}$$

где

$$\hat{Y} (u, w) = R (Y (\tilde{v}, w) \otimes Y^1 (u, \tilde{v})). \tag{28}$$

Значит, пары u, w, входящие в тройку (26), удовлетворяют уравнению $Q_2 (u, w) = 0$.

Уравнения Бакстера — это равенство $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

Следовательно, доказано следующее утверждение.

Л е м м а 1. *Если $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^1$ и R удовлетворяют уравнениям Бакстера, то полиномы P и P_1 «коммутируют» в смысле композиции, т. е. уравнения* (24) *и* (26) *определяют одну и ту же кривую $\hat{\Gamma}$ с уравнением*

$$Q (u, w) = Q_1 (u, w) = Q_2 (u, w) = 0.$$

Л е м м а 2. *Полином $Q (u, w)$ приводим, т. е. разлагается в произведение двух полиномов.*

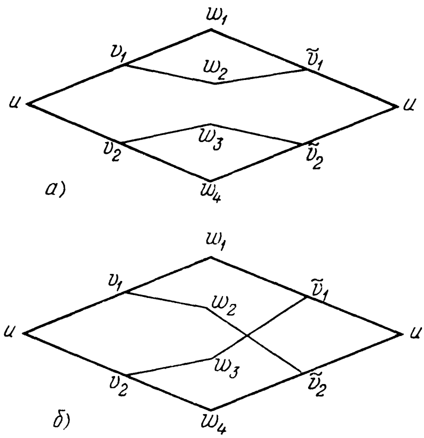
Д о к а з а т е л ь с т в о. Если полином Q неприводим, то при почти всех значениях u уравнение $Q (u, w) = 0$ имеет четыре различных корня. Значит, тензор Λ имеет ранг 1 и согласно результатам предшествующего параграфа каждой точке $\hat{\Gamma}$ отвечают «вакуумные» векторы тензора $\Lambda = \Lambda_1 = \Lambda_2$,

$$\Lambda (\hat{X} (u, w) \otimes U) = f (u, w) (\hat{Y} (u, w) \otimes W). \tag{29}$$

Сравнивая «вакуумные» векторы в равенствах (25) и (27), получим, что

$$\begin{aligned} R (X (\tilde{v}, w) \otimes X^1 (u, \tilde{v})) &= g (u, w) (X^1 (v, w) \otimes X (u, v)), \\ R (Y (\tilde{v}, w) \otimes Y^1 (u, \tilde{v})) &= g_1 (u, w) (Y^1 (v, w) \otimes Y (u, v)). \end{aligned} \tag{30}$$

Так как полиномы $P (u, v)$, $P_1 (u, v)$ «коммутируют» в смысле композиции, то структура троек (u, v, w) и $(u, \tilde{v}, w)$ может иметь два типа, которые наглядно представляются следующими графами:



(Линиями соединены пары, удовлетворяющие соответствующим уравнениям.)

Покажем, что структура типа а) невозможна. Действительно, если она имеет место, то паре $x^1(u, \tilde{v}_1)$ и $x(u, v_1)$, которая согласно (30) удовлетворяет уравнению $P_R(x(u, v_1), x^1(u, \tilde{v}_1)) = 0$ «вакуумной» кривой матрицы R, отвечают два «вакуумных» вектора $X(\tilde{v}_1, w_1)$, $X(\tilde{v}_1, w_2)$, что противоречит их единственности.

В случае б) четверка $w_1, \ldots, w_4$ распадается на две пары (w_1, w_4) и (w_2, w_3), которые инвариантно выделяются условием: значения v и $\tilde{v}$, отвечающие w_i, w_j, объединенным в одну пару, различны.

Таким образом, кривая $\hat{\Gamma}$ распадается на объединение двух эллиптических кривых $\hat{\Gamma}'$ и $\hat{\Gamma}''$, а полином $Q(u, w)$ — в произведение $Q(u, w) = Q'(u, w) \cdot Q''(u, w)$. Точками кривых $\hat{\Gamma}'$ и $\hat{\Gamma}''$ будут пары (u, w_1) и (u, w_4), (u, w_2) и (u, w_3) соответственно. Утверждение леммы доказано.

Рассмотрим кривую $\hat{\Gamma}'$. Каждой ее точке, например (u, w_1), отвечают единственные точки кривых Γ и Γ_1 ((u, v_1) и $(u, \tilde{v}_1)$ соответственно). Следовательно, кривые Γ и Γ_1 изоморфны $\hat{\Gamma}'$. Любая эллиптическая кривая может быть параметризована точками z комплексного тора с периодами $(1, \tau)$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$.

Пусть $u(z)$ и $w(z)$ — параметризация точек $\hat{\ }'$, тогда $(u(z), v(z))$ и $(u(z), \tilde{v}(z))$ — параметризация решений уравнений (18). Так как $(v(z), w(z))$ удовлетворяет уравнению $P_1(v(z), w(z)) = 0$, то $v(z) = u(z - \eta)$, соответственно $\tilde{v}(z) = u(z - \eta_1)$.

Уравнения (30) в параметре z приобретут вид

$$R(X(z - \eta_1) \otimes X^1(z)) = g(z)(X^1(z - \eta) \otimes X(z)). \tag{31}$$

Так как дивизоры правых и левых частей равенства (31) должны быть эквивалентны, то $\eta_1 = \eta + \frac{m + n\tau}{2}$, m, n — целые.

(Эквивалентность двух дивизоров γ_i и γ_i' на эллиптической кривой означает, что $\sum \gamma_i \equiv \sum \gamma_i'$ (сравнимы по модулю периодов); при сдвиге на вектор η дивизор полюсов функции, имеющей два полюса, меняется на 2η.)

Функции $Y(z)$ и $Y^1(z)$ удовлетворяют согласно (30) тому же соотношению, что и $X(z)$, и $X^1(z)$. Значит, они совпадают с точностью до сдвига, т. е.

$$Y(z) = X(z + \eta_2), \tag{32}$$

$$Y^1(z) = X^1(z + \eta_2). \tag{33}$$

Окончательно равенства (19) и (20) приобретут вид

$$\mathscr{L}(X(z) \otimes U(z)) = h(z)(X(z + \eta_2) \otimes U(z - \eta)), \tag{34}$$

$$\mathscr{L}^1(X^1(z) \otimes U(z)) = h_1(z)(X^1(z + \eta_2) \otimes U(z - \eta_1)). \tag{35}$$

Условие эквивалентности (15) означает, что

$$\eta_2 = \eta + \frac{m' + n'\tau}{2}.$$

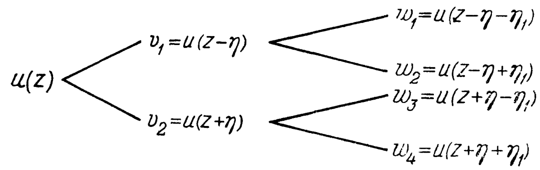
Рассмотрим теперь обратную задачу.

Пусть задана эллиптическая кривая Г, т. е. модуль k, произвольные функции $x(z)$, $x^1(z)$, $u(z)$, имеющие по два полюса на ней, а также точки η, η_1, η_2, отличающиеся на полупериоды. Тогда соотношения (31), (34), (35) определяют однозначно с точностью до умножения на константу матрицы $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$, R.

З а м е ч а н и е. В случае $n = 2$, т. е. в случае матриц четвертого порядка, задание полинома (13) эквивалентно заданию модуля эллиптической кривой Г и двух функций на ней с двумя полюсами, так как для любых таких функций $u(z)$ и $v(z)$ существует единственный полином P второй степени по каждой переменной такой, что $P(u(z), v(z)) = 0$.

Т е о р е м а 2. *Определенные равенствами* (31), (34), (35) *матрицы* $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$, R *удовлетворяют уравнениям Бакстера. Эти решения исчерпывают все решения общего положения, для которых полином* $Q(u, w)$, *отвечающий тензору* Λ, *не имеет двух тождественно вырожденных двукратных корней.*

В предположении, что полином $Q(u, w)$ имеет четыре различных корня w_i, при почти всех u мы получили, что его корни параметризуются эллиптическими функциями следующим образом:



Здесь мы предполагаем, что $u(z)$ — четная функция, так как сдвигом начала координат этого всегда можно добиться. Поскольку η и η_1 различаются на полупериод, то $w_2 = w_3$.

Таким образом, в дополнение к лемме 2 можно утверждать, что полином $Q(u, w)$ имеет в общем положении либо один, либо два двукратно вырожденных корня.

Решения уравнений Бактера этих двух типов мы будем называть решениями ранга 1 и 2 соответственно.

В случае ранга 1, повторяя те же рассуждения, что и в предположении простоты корней полинома $Q(u, w)$, придем к соотношениям (31), (34), (35). Это доказывает необходимость условий теоремы 2.

Для того чтобы доказать утверждение теоремы, осталось показать, что вакуумные векторы тензоров Λ_1 и Λ_2 совпадают. Из (31) следует совпадение «вакуумных» векторов, отвечающих простым корням w_1 и w_4 полинома $Q(u, w)$. Двукратному корню $w_2 = w_3$ отвечает двумерное подпространство «вакуумных» векторов. Сравнивая (25) и (27), получим, что базис в этом пространстве образуют векторы

$$X(-z) \otimes X^1(z), \quad X(z-\eta) \otimes X^1(-z+\eta) \tag{36}$$

и векторы

$$R^{-1}(X^1(-z) \otimes X(z)), \quad R^{-1}(X^1(z-\eta) \otimes X(-z+\eta)). \tag{37}$$

Значит, для того чтобы $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$, R удовлетворяли уравнениям Бакстера, необходимо и достаточно, чтобы, помимо соотношений (31), (34), (35), векторы (36) и (37) были линейно зависимы, т. е.

$$R(X(-z) \otimes X^1(z)) = \alpha(z)(X^1(-z) \otimes X(z)) + \beta(z)(X^1(z-\eta) \otimes \otimes X(-z+\eta)), \tag{38}$$

где α и β — мероморфные функции.

То, что соотношение (38) вытекает из (31), следует из более общего утверждения.

Утверждение. *Пусть произвольная четырехмерная матрица R определяется соотношением*

$$R(X(z) \otimes U(z)) = h(z)(Y(z) \otimes V(z)), \tag{39}$$

тогда имеет место

$$R(X(z) \otimes U(z')) = \alpha(z)(Y(z) \otimes V(z')) + \beta(z)(Y(z'-\mu) \otimes V(z+\mu)),$$

где вектор μ с точностью до полупериода совпадает с вектором, эквивалентным $(D_X - D_V)$.

Мы оставим это утверждение без доказательства и ограничимся лишь тем, что покажем, что «калибровочными преобразованиями» полученные матрицы $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$ и R приводятся к уже известным решениям Бакстера либо к решениям, получающимся из бакстеровских умножением на некоторую матрицу.

Пусть G_X, G_{X^1}, G_U — произвольные двумерные матрицы, тогда «калибровочное преобразование» переводит любое решение $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$, R уравнений Бакстера в решение этих же уравнений

$$\widetilde{\mathscr{L}} = (G_X \otimes G_U)\,\mathscr{L}\,(G_X^{-1} \otimes G_U^{-1}), \tag{40}$$

$$\widetilde{\mathscr{L}}^1 = (G_{X^1} \otimes G_U)\,\mathscr{L}^1\,(G_{X^1}^{-1} \otimes G_U^{-1}), \tag{41}$$

$$\widetilde{R} = (G_{X^1} \otimes G_X)\,R\,(G_X^{-1} \otimes G_{X^1}^{-1}). \tag{42}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что дивизор полюсов $u(z)$ эквивалентен дивизору полюсов $\operatorname{sn} z$. Пусть дивизоры полюсов $x(z)$ и $x^1(z)$ эквивалентны дивизорам полюсов $\operatorname{sn}(z+\lambda)$ и $\operatorname{sn}(z+\mu)$. Существуют единственные, с точностью до пропорциональности, матрицы G_X, G_{X^1}, G_U такие, что

$$G_U U(z) = f_1(z)\operatorname{Sn} z, \quad G_X X(z) = f_2 \operatorname{Sn}(z+\lambda),$$
$$G_{X^1} X^1(z) = f_3(z)\operatorname{Sn}(z+\mu), \tag{43}$$

где вектор $\operatorname{Sn} z$ равен $\operatorname{Sn} z = \begin{pmatrix} \sqrt{k}\operatorname{sn} z \\ 1 \end{pmatrix}$.

Перейдем с помощью этих матриц от $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$, R, определяемых соотношениями (31), (34), (35), к калибровочно эквивалентным матрицам $\widetilde{\mathscr{L}}$, $\widetilde{\mathscr{L}}^1$, $\widetilde{R}$. Соотношение (31) перейдет в

$$\widetilde{R}(\operatorname{Sn}(z+\lambda-\eta_1) \otimes \operatorname{Sn}(z+\mu)) = \tilde{g}(z)(\operatorname{Sn}(z+\mu-\eta) \otimes \operatorname{Sn}(z+\lambda)). \tag{44}$$

Если $\eta_1 = \eta$, то $\widetilde{R}$ является бакстеровской матрицей, так как соотношение (44) совпадает с формулой (4.27) из [8] для бакстеровских матриц.

Аналогично преобразуются соотношения (34) и (35). (Формула (38) после «калибровочного преобразования» переходит в соотношение (4.28) из [8].)

Следствие. *Если* $\eta = \eta_1 = \eta_2$, *то* R, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$ *калибровочно эквивалентны решениям Бакстера.*

При сдвигах на полупериоды эллиптический синус преобразуется (см. [9]) таким образом, что

$$\operatorname{Sn}\left(z+\frac{1}{2}\right)=G_1\operatorname{Sn}z,\qquad G_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\tag{45}$$

$$\operatorname{Sn}\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=G_2\operatorname{Sn}z\cdot\sqrt{k}\operatorname{sn}z,\qquad G_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\tag{46}$$

При сдвиге вектора η_1 относительно η на полупериоды $\Pi_1 = 1/2$ и $\Pi_2 = \tau/2$ бакстеровские матрицы согласно (45), (46) и соотношению (44) преобразуются следующим образом:

$$T_i\colon\ \tilde{\mathscr{L}}, \tilde{\mathscr{L}}^1, \tilde{R} \to \tilde{\mathscr{L}}, (1\otimes G_i)\,\tilde{\mathscr{L}}^1, \tilde{R}\,(G_i\otimes 1).\tag{47}$$

Так как матрицы G_1 и G_2 коммутируют с точностью до умножения на число, то преобразования T_i задают проективное представление группы полупериодов в пространстве матриц.

Аналогичным образом сдвиги на полупериоды вектора η_2 задают проективное представление группы $Z_2 \times Z_2$, при котором образующие действуют следующим образом:

$$T_i'\colon\ \tilde{\mathscr{L}}, \tilde{\mathscr{L}}^1, \tilde{R} \to \tilde{\mathscr{L}}\,(G_i\otimes 1), \tilde{\mathscr{L}}^1\,(G_i\otimes 1), \tilde{R}.\tag{48}$$

Следствие. *Все решения ранга* 1 *уравнений Бакстера калибровочно эквивалентны либо решениям Бакстера, либо решениям, получающимся из бакстеровских с помощью проективных преобразований групп* $Z_2 \times Z_2$ *с действиями генераторов* (47) *и* (48).

§ 3. Решения ранга 2

Основной целью настоящего параграфа является доказательство того, что все решения ранга 2 уравнений Бакстера калибровочно эквивалентны решениям, найденным Фельдергофом [16] *).

Как было показано в предшествующем параграфе, помимо решений бакстеровского типа, уравнения (2) могут иметь решения ранга 2, т. е. решения, для которых полином $Q(u, w)$, отвечающий тензору $\Lambda = \Lambda_1 = \Lambda_2$, имеет два двукратно вырожденных корня при всех u,

$$Q(u, w) = \hat{Q}^2(u, w).\tag{49}$$

Рассмотрим уравнения (24), определяющие полином $Q(u, w)$. Если u_1, u_2 — корни полинома $\hat{Q}(u, w)$ при фиксированном w, а v_1, v_2 — корни $P_1(v, w)$, то из (49) следует, что

$$P(u_k, v_m) = 0,\qquad k, m = 1, 2.\tag{50}$$

Представим полином $P(u, v)$ в виде

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{2} r_i(u)\,v^i=\sum_{i=0}^{2} q_i(v)\,u^i.$$

Из (50) следует, что на кривой Γ, соответствующей $\mathscr{L}$, каждому значению

*) Автору о существовании решений, отличных от бакстеровских, а также их параметризацию (см. формулы (79) настоящей работы) сообщил Замолодчиков, получивший их независимо, но существенно позднее Фельдергофа.

функции $r(u)$ отвечает единственное значение функции $q(v)$, где $r(u) = r_2(u)/r_0(u)$, $q(v) = q_2(v)/q_0(v)$. Значит, на Γ эти функции связаны дробно-линейным преобразованием, а сама кривая определяется уравнением

$$p(r(u), q(v)) = 0, \quad p(r, q) = rq - \alpha r - \beta q + \gamma. \tag{51}$$

Аналогичным уравнением задается и кривая Γ_1, отвечающая матрице $\mathscr{L}^1$,

$$p^1(r^1(u), q^1(v)) = 0, \quad p^1 = rq - \alpha_1 r - \beta_1 q + \gamma_1. \tag{52}$$

Так как полиномы P и P_1 коммутируют в смысле композиции, то коммутируют в этом же смысле и полиномы p и p'. Кроме того, из этого вытекает, что

$$r(u) = q(u) = r'(u) = q^1(u). \tag{53}$$

Если матрице $\mathscr{L}$ отвечает полином $P(u, v)$, то калибровочно эквивалентной матрице $\widetilde{\mathscr{L}}$ отвечает полином

$$\widetilde{P}(u,v) = P\left(\frac{au+b}{cu+d}, \frac{av+b}{cv+d}\right)(cu+d)^2(cv+d)^2,$$

где $G_U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Используя дробно-линейные замены переменных, окончательно придем к такому результату.

Л е м м а 3. *Если $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^1$ — решения ранга 2, то с точностью до калибровочной эквивалентности можно считать, что Γ и Γ_1, отвечающие им, задаются уравнениями*

$$P(u, v) = u^2v^2 - \alpha u^2 - \beta v^2 + 1 = 0, \tag{54}$$

$$P_1(u, v) = u^2v^2 - \alpha_1 u^2 - \beta_1 v^2 + 1 = 0, \tag{55}$$

$$\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1. \tag{56}$$

Соотношение (56) необходимо и достаточно для того, чтобы композиции (24) и (26) полиномов (54) и (55) совпадали.

Выбор пары индексов тензора Λ, которые считаются внешними, произволен. Поэтому по тензору $\Lambda_{pq\beta}^{ij\alpha}$ можно построить набор полиномов $Q^{mn}(u, w)$, где $m, n = 1, 2, 3$ — номера соответствующих верхних и нижних индексов. Например,

$$Q^{12}(u, w) = \det(\widetilde{W}^q \Lambda_{pq\beta}^{ij\alpha} U_i) = 0 \tag{57}$$

(обозначения § 1). Условие (57) необходимо и достаточно для существования векторов $X_{j\alpha}$ и $Y_{p\beta}$ таких, что

$$\Lambda_{pq\beta}^{ij\alpha} X_{j\alpha} U_i = h Y_{p\beta} W_q. \tag{58}$$

В новых обозначениях старый полином $Q(u, w)$ есть $Q^{33}(u, w)$.

Пусть матрица R определена соотношением

$$R(X_R(z) \otimes U_R(z)) = g(z)(Y_R(z) \otimes V_R(z)), \tag{59}$$

где $z \in \Gamma_R$ — точка эллиптической кривой. Введем полиномы P_R^{12} и P_R^{21} такие, что

$$P_R^{12}(x_R(z), v_R(z)) = 0, \tag{60}$$

$$P_R^{21}(u_R(z), y_R(z)) = 0. \tag{61}$$

Если $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^1$ заданы, как и ранее, соотношениями (19) и (20), то определены полиномы P^{11} и P_1^{11} такие, что

$$P^{11}(x(z), y(z)) = 0, \quad P_1^{11}(x^1(z), y^1(z)) = 0. \tag{62}$$

Аналогично предшествующему параграфу, заменяя индексы α, β на i, q, получим, что полином $Q^{12}(u, w)$ тензора Λ задается композициями

$$P^{11}(u, v) = 0, \quad P_R^{12}(v, w) = 0, \tag{63}$$

$$P_R^{12}(u, \tilde{v}) = 0, \quad P^{11}(\tilde{v}, w) = 0. \tag{64}$$

Рассматривая полином $Q^{21}(u, w)$, получим, что коммутируют композиции полиномов P^{21} и P_1^{11}. Так же, как и лемма 3, доказывается

Лемма 4. *С точностью до калибровочной эквивалентности матриц $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$ и R можно считать, что им отвечают полиномы*

$$P^{11}(u, v) = u^2v^2 - \gamma u^2 - \delta v^2 + 1 = 0, \tag{65}$$

$$P_1^{11}(u, v) = u^2v^2 - \gamma_1 u^2 - \delta_1 v^2 + 1 = 0, \tag{66}$$

$$P_R^{12}(u, v) = u^2v^2 - \gamma_R u^2 - \delta_R v^2 + 1 = 0, \tag{67}$$

$$P_R^{21}(u, v) = u^2v^2 - \gamma_R^1 u^2 - \delta_R^1 v^2 + 1 = 0, \tag{68}$$

где

$$\gamma + \delta = \gamma_R + \delta_R, \quad \gamma^1 + \delta^1 = \gamma_R^1 + \delta_R^1. \tag{69}$$

Решения уравнения (54) могут быть параметризованы эллиптическими функциями с модулем $k = 1/\sqrt{\alpha\beta}$ следующим образом:

$$u(z) = \frac{\operatorname{sn}(z, k)}{\sqrt{\alpha}}, \quad v(z) = \frac{\operatorname{cn}(z, k)}{\sqrt{\beta}\operatorname{dn}(z, k)}. \tag{70}$$

Проверка этого может быть осуществлена простой подстановкой этих выражений в (56) и известными тождествами

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \quad k^2\operatorname{sn}^2(z, k) + \operatorname{dn}^2(z, k) = 1.$$

(Все необходимые соотношения между эллиптическими функциями, которые используются здесь и далее, можно найти в [9].)

Так как уравнения (54) и (65) задают одну и ту же кривую, то $\gamma\delta = \alpha\beta$.

Используя аналогичную параметризацию уравнения (65), которая может отличаться от (69) на некоторый вектор η и отражение, получим, что матрица $\mathscr{L}$ задается следующим равенством:

$$\mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{sn}(\eta - z)}{\sqrt{\gamma}} \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{sn} z}{\sqrt{\alpha}} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{cn}(z - \eta)}{\sqrt{\delta}\operatorname{dn}(z - \eta)} \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{cn} z}{\sqrt{\beta}\operatorname{dn} z} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Эта матрица, с точностью до умножения на константу, зависит от параметров α, β, γ, δ, η, где $k = 1/\sqrt{\alpha\beta} = 1/\sqrt{\gamma\delta}$, т. е.

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta), \quad \alpha\beta = \gamma\delta.$$

Из (71) можно найти явный вид для элементов матрицы

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} e^2a & 0 & 0 & ed \\ 0 & e^2b & ec & 0 \\ 0 & ec & b & 0 \\ ed & 0 & 0 & a' \end{pmatrix}, \tag{72}$$

где

$$a = \alpha\operatorname{sn}\eta\operatorname{dn}\eta, \quad a' = \beta\operatorname{sn}\eta\operatorname{dn}\eta, \quad d = \operatorname{sn}\eta\operatorname{cn}\eta, \tag{73}$$

$$b = \sqrt{\alpha\beta}\operatorname{cn}\eta, \quad c = \sqrt{\alpha\beta}\operatorname{dn}\eta, \quad e = \sqrt{\gamma/\alpha}.$$

Можно проверить, что элементы $\mathscr{L}$ удовлетворяют соотношению

$$aa' + b^2 - c^2 - d^2 = 0. \tag{74}$$

Следовательно, чтобы $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$ и R были решениями ранга 2 уравнений Бакстера, необходимо, чтобы они имели вид

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta), \quad \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1),$$
$$R = R(\gamma_R^1, \delta_R^1, \gamma_R, \delta_R, \eta_R),$$

где $R_{pq}^{ij}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta) = \mathscr{L}_{qp}^{ij}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta)$ и параметры этих матриц связаны соотношениями (56) и (69).

Рассмотрим вновь вакуумные векторы Λ, отвечающие кривой $\hat{\Gamma}$, заданной уравнением $Q^{33}(u, w) = 0$. Сравнивая базисы в двумерных пространствах этих векторов для каждой точки $\hat{\Gamma}$, которые дают равенства (25) и (26), получим, что должны выполняться соотношения

$$R(X(\pm\tilde{v}, w) \otimes X^1(u, \pm\tilde{v})) = \alpha_\pm (X^1(v, w) \otimes X(u, v)) + \\ + \beta_\pm (X^1(-v, w) \otimes X(u, -v)), \tag{75}$$

$$R(Y(\pm\tilde{v}, w) \otimes Y^1(u, \pm\tilde{v})) = \tilde{\alpha}_\pm (Y^1(v, w) \otimes Y(u, v)) + \\ + \tilde{\beta}_\pm (Y^1(-v, w) \otimes Y(u, -v)). \tag{76}$$

Отображение $u, v \to -1/v, 1/u$ определяет автоморфизм четвертого порядка кривых, заданных уравнениями (54) и (55), который является сдвигом на четверть периода. Из (71) следует, что

$$y\left(\frac{1}{v}, -\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{x(u, v)}.$$

Аналогично связаны между собой и функции $x^1(u, \tilde{v})$ и $y^1(u, \tilde{v})$. Из (75) и (76) получаем, что тогда для матрицы R должно выполняться

$$M^{-1}RM = hR^{-1}, \tag{77}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и h — константа.

Для того чтобы R вида (72) удовлетворяла соотношению (77), необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $e^2 = 1$ или $\gamma_R^1 = \gamma_R$, $\delta_R^1 = \delta_R$.

Рассматривая вместо полинома Q^{33} полиномы Q^{12} и Q^{21}, аналогичные соотношения получим для параметров матриц $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$: $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $\alpha_1 = \gamma_1$, $\beta_1 = \delta_1$.

Теорема 3. *Для того чтобы $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^1$, R были решениями ранга 2 уравнений Бакстера, необходимо, чтобы они калибровочным преобразованием приводились к матрицам вида*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\alpha, \beta, \eta), \ \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}(\alpha_1, \beta_1, \eta_1), \quad R = R(\alpha_R, \beta_R, \eta_R), \tag{78}$$

где $\mathscr{L}(\alpha, \beta, \eta) = \mathscr{L}(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \eta)$, $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_R + \beta_R$. Для каждой матрицы $\mathscr{L}(\alpha, \beta, \eta)$ существует однопараметрическое семейство матриц $\mathscr{L}^1$ и R, удовлетворяющих уравнениям Бакстера.

Все утверждения теоремы, кроме заключительного, были доказаны выше.

Непосредственное его доказательство достаточно длинно и громоздко. Его можно избежать, сопоставляя полученные результаты с результатами Фельдергофа.

Формулы (73) при $\alpha = \gamma$ дают параметризацию всех матриц (с точностью до умножения на число) вида (72) ($e = \pm 1$) таких, что для их элементов выполняется соотношение (74). Фельдергофом были рассмотрены уравнения Бакстера для матриц именно этого вида. Он нашел, что для этих матриц существует параметризация

$$a = \operatorname{dn}\theta + \rho \operatorname{sn}\theta \operatorname{cn}\theta,\ a' = \operatorname{dn}\theta - \rho \operatorname{sn}\theta \operatorname{cn}\theta, \quad b = \varepsilon \operatorname{sn}\theta \operatorname{cn}\theta,$$
$$c = \operatorname{cn}\theta, \quad d = \operatorname{sn}\theta \operatorname{dn}\theta, \quad \varepsilon^2 = \rho^2 + k^2. \qquad (79)$$

При этом, если λ и модуль k эллиптических функций постоянны, то матрицы $\mathscr{L}(\theta)$, $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}(\theta')$, $R_{pq}^{ij} = \mathscr{L}_{qp}^{ij}(\theta - \theta')$ удовлетворяют уравнениям Бакстера.

Следствие. *Все решения ранга 2 уравнений Бакстера калибровочно эквивалентны решениям Фельдергофа.*

Важно отметить, что параметризации (79) и (73) — это две различные параметризации одних и тех же матриц. Очень интересно было бы понять, какой алгебро-геометрический объект отвечает параметризации (79) в той степени, в которой параметризации (73) отвечает понятие вакуумных векторов. Еще раз отметим, что, в отличие от решений Бакстера, модули кривых вакуумных векторов для матриц Фельдергофа различны.

Московский энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступила в редакцию
17 октября 1980 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Baxter R. J., Partition function of the eight-vertex lattice model, Ann. Phys. (N. Y.) **70** (1972), 193—228.
2. Baxter R. J., One-dimensional anisotropic Heisenberg chain, Ann. Phys. (N. Y.) **70** (1972), 323—337.
3. Baxter R. J., Eight-vertex model in lattice statistics, Phys. Rev. Letters **26** (1971), 832—833.
4. Baxter R. J., One-dimensional anisotropic Heisenberg chain, Phys. Rev. Letters **26** (1971), 834—835.
5. Baxter R. J., Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain. I. Some fundamental eigenvectors, Ann. Phys. (N. Y.) **76** (1973), 1—24.
6. Heisenberg W., Zur Theorie das Ferromagnetismus, Z. Physik **49**, № 9, 10 (1928), 619—636.
7. Фаддеев Л. Д., Квантовые вполне-интегрируемые модели теории поля, препринт ЛОМИ, Р-2-79, Ленинград, 1979.
8. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., Квантовый метод обратной задачи и *XYZ* модель Гейзенберга, УМН **34**, вып. 5 (1979), 13—63.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические функции. Функции Ламе и Матье, М., «Наука», 1967.
10. Кричевер И. М., Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии, Функц. анализ **11**, вып. 1 (1977), 15—32.
11. Спрингер Д., Введение в теорию римановых поверхностей, М., ИЛ, 1961.
12. Hodge W., The isolated singularities of an algebraic surface, Proc. London Math. Soc., Ser. **2**, **30** (1929), 133—143.
13. Кричевер И. М., Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов, Функц. анализ **12**, вып. 3 (1978), 20—31.
14. Кричевер И. М., Новиков С. П., Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева — Петвиашвили. I, Функц. анализ **12**, вып. 4 (1978), 41—52.
15. Тюрин А. Н., Классификация векторных расслоений над алгебраическими кривыми, Изв. АН СССР, серия матем. **29** (1965), 658—680.
16. Felderhof B., Diagonalization of the transfer matrix of the free-fermion model, Physica **66**, № 2 (1973), 279—298.