Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 3, 43—56.

УДК 512.3

МЕТОД ЛАПЛАСА, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И. М. Кричевер

Первоначально настоящая работа была стимулирована задачей построения интегрируемых случаев уравнения

$$-\varphi'' + e\,(Ex + u\,(x))\,\varphi = \varepsilon\varphi, \tag{1}$$

где $u\,(x)$ — периодическая функция. Уравнение (1) описывает поведение электрона в физически важном случае периодической решетки, к которой приложено постоянное внешнее электрическое поле E.

Нестационарное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + e\,(Ex + u\,(x, t))\,\varphi = 0, \tag{2}$$

где $u\,(x,\,t)$ — периодическая по x и t функция с периодами T_1 и T_2 соответственно, рассматривалось в работе [1]. Если топологический заряд — поток сквозь элементарную ячейку

$$\Phi = \int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_2} (E + E_0\,(x, t))\,dx\,dt = ET_1T_2$$

($E_0\,(x,\,t)$ — периодическое электрическое поле с нулевым средним, $E_0 = -\partial_x u\,(x,\,t)$) удовлетворяет условию целочисленности $e\Phi = 2\pi N$, то можно ввести «электрические блоховские решения». Это решения (2), собственные для группы трансляций

$$T_1^*\varphi\,(x,\,t) = \varphi\,(x + T_1,\,t)\exp\,(-ieEt),$$
$$T_2^*\,\varphi\,(x,\,t) = \varphi\,(x,\,t + T_2).$$

Как показано в [1], уже в простейших примерах аналитические свойства «электрических блоховских решений» весьма интересны и пока абсолютно не исследованы. Отметим, что если u не зависит от t, то в общем случае семейство блоховских решений двумерно, в отличие от случая $E = 0$.

Уравнение (1) рассматривалось и в связи с задачей интегрирования цилиндрического уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ). Для достаточно быстро убывающего потенциала u прямое и обратное спектральные преобразования были построены в работах [2—4] (см. также [5, 6]). Ряд точных решений цилиндрического КдФ (и соответственно интегрируемых случаев (1)), убывающих на бесконечности, был построен в [2—6, 37] с помощью преобразований Дарбу—Бэклунда (см. [36]). Во всех этих работах отправной точкой служили функции Эйри — решения уравнения (1) при $u = 0$. Эти функции строятся с помощью известного метода Лапласа [7].

В настоящей работе предлагается алгебро-геометрический вариант обобщения метода Лапласа, широко использующий идеи «конечнозонного интегрирования», обзоры которого можно найти в [1, 8—15]. Это обобщение позволяет строить интегрируемые случаи уравнения (1) с $\varepsilon = 0$. Соответствующие потенциалы $u\,(x)$ при $|\,x\,| \to \infty$ стремятся к периодическим или квазипериодическим конечнозонным потенциалам u_0 оператора Штурма—Лиувилля [8, 9]. При этом решения (1) выражаются в виде квадратур от дифференциалов на римановой поверхности Г блоховских функций соответствующего конечнозонного оператора Штурма—Лиувилля. Эти дифференциалы, называемые далее дифференциалами типа Лапласа, однозначно определяются своими специфическими аналитическими свойствами на Г.

Оказывается, что многопараметрическое обобщение дифференциалов типа Лапласа позволяет для уравнений типа Кадомцева—Петвиашвили (КП) строить новые классы решений, зависящих от функциональных параметров. Решения уравнения КП другого типа, также зависящие от функциональных параметров, были построены в работах [12, 16, 17] с помощью методов теории многомерных голоморфных расслоений над алгебраическими кривыми. Это так называемые конечнозонные решения ранга $l > 1$.

В той степени, в которой конечнозонные решения ранга 1 являются обобщениями многосолитонных решений уравнения КП, решения, которые дает конструкция настоящей работы, являются обобщениями решений, зависящих от функциональных параметров, построенных в [18]. В достаточно общей ситуации полученные решения стремятся к конечнозонным решениям ранга 1 при $|x, y| \to \infty$. Следует отметить, что «фаза» конечнозонного решения зависит от направления ухода на бесконечность.

Как обратил внимание автора В. Е. Захаров, такое поведение решений указывает на то, что они должны описывать поведение «дислокаций» в периодической решетке. Пользуясь случаем, автор благодарит его и С. П. Новикова, проявившего большое внимание к работе и оказавшего большую помощь своими советами.

Распределение материала в работе следующее. В первом параграфе вводятся дифференциалы типа Лапласа и приводится конструкция решений уравнений типа КП. Во втором параграфе даются явные формулы через тэта-функции для дифференциалов типа Лапласа и находятся асимптотики построенных решений. Собственно алгебро-геометрический метод Лапласа для уравнения (1) приводится в § 3. В § 4 кратко намечены возможности применения разрабатываемого метода для разностных и дифференциально-разностных систем.

§ 1. Дифференциалы типа Лапласа и уравнение Кадомцева — Петвиашвили

Пусть Г — неособая алгебраическая кривая рода g с отмеченной точкой P_0, в окрестности которой фиксирован локальный параметр $k^{-1}(P), k^{-1}(P_0) = 0$.

Дифференциалами типа Лапласа будут называться дифференциалы $\Lambda(\mathbf{x}, P)$, которые:

1° мероморфны на Г вне отмеченной точки P_0;

2° в окрестности P_0 дифференциал

$$\omega_\infty = \Lambda(\mathbf{x}, P) \exp\left(-\sum_{n=1}^{M} x_n k^n(P)\right) \tag{1.1}$$

мероморфен.

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_M)$ — произвольные параметры.

Пусть $\psi(\mathbf{x}, P)$ — функция Бейкера—Ахиезера [19, 20], т. е. функция, имеющая вне P_0 g полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, а в окрестности P_0 представимая в виде

$$\psi(\mathbf{x}, P) = \exp\left(\sum_{n=1}^{M} x_n k^n(P)\right)\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right). \tag{1.2}$$

Тогда для любого дифференциала Λ типа Лапласа дифференциал $\omega = \Lambda/\psi$ является мероморфным на Г. Отсюда размерность линейного пространства дифференциалов типа Лапласа с заданными полюсами легко находится с помощью теоремы Римана—Роха [21]. В общем случае эта размерность связана со степенью дивизора полюсов соотношением $\dim \mathscr{L}(D) = \deg D + g - 1$ (степень дивизора — это число точек, входящих в него с кратностями; точка P_0 входит в D с кратностью, равной порядку полюса w_∞ и P_0).

Зададим на Γ набор контуров (не обязательно замкнутых) σ_i, $i = 1, \ldots, N + g$, и набор функций на них $G_i(t)$, $t \in \sigma_i$. Тогда

Лемма 1.1. *Для произвольного набора точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ общего положения существует единственный дифференциал $\Lambda(\mathbf{x}, P)$ типа Лапласа с полюсами в точках γ_i, имеющий в окрестности P_0 вид*

$$\Lambda(\mathbf{x}, P) = \exp\left(\sum x_n k^n\right)\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s(\mathbf{x}) k^{-s}\right) dk \tag{1.3}$$

и нормированный условиями

$$\int_{\sigma_i} G_i(t)\, \Lambda(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N + g. \tag{1.4}$$

Доказательство леммы следует из простого сравнения числа линейных уравнений (1.4) и размерности пространства дифференциалов типа Лапласа с дивизором полюсов $(\gamma_1 + \ldots + \gamma_{N+g} + 2P_0)$ (дифференциал dk имеет в P_0 полюс второго порядка).

Теорема 1.1. *Существуют единственные операторы*

$$L_n = \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(\mathbf{x}) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tag{1.5}$$

такие, что

$$L_n \Lambda(\mathbf{x}, P) = \frac{\partial}{\partial x_n} \Lambda(\mathbf{x}, P), \tag{1.6}$$

где $x = x_1$.

Доказательство этой теоремы практически идентично доказательству аналогичных утверждений для функций Бейкера—Ахиезера [19, 20]. Действительно, как отмечалось в этих работах, для любого формального ряда (1.4) существует единственный оператор L_n такой, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - L_n\right) \Lambda = \exp\left(\sum x_n k^n\right) O(k^{-1})\, dk. \tag{1.7}$$

Дифференциал $\widetilde{\Lambda} = \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - L_n\right) \Lambda$ удовлетворяет всем требованиям, определяющим Λ, кроме одного. В точке P_0 дифференциал $\widetilde{\Lambda}$ в силу (1.7) имеет полюс не выше первого порядка. Из единственности Λ следует, что $\widetilde{\Lambda} = 0$.

Коэффициенты оператора L_n являются дифференциальными полиномами от $\chi_i(\mathbf{x})$. В частности, $u_{n-2} = -n \frac{\partial}{\partial x} \chi_1$.

Следствие. *Построенные операторы удовлетворяют уравнениям*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_n} - L_n, \frac{\partial}{\partial x_m} - L_m\right] = 0. \tag{1.8}$$

Пример. Обозначим $x_2 = y$, $x_3 = t$. Операторы L_2 и L_3 имеют вид

$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, y, t); \quad L_3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2} u \frac{\partial}{\partial x} + w(x, y, t).$$

Из (1.8) следует, что $u(x, y, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \chi_1(x, y, t)$ есть решение уравнения КП

$$\frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t + \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx})\right). \tag{1.9}$$

(Представление (1.8) для уравнения КП было найдено в [18, 22].) Покажем, что в частном случае предлагаемая конструкция содержит решения КП, зависящие от функционального параметра, которые были построены в [18].

Пусть Γ — рациональная кривая, т. е. комплексная плоскость. Дифференциал $\Lambda(x, y, t, k)$, имеющий единственный полюс в точке $\varkappa$ и вид (1.3) в бесконечности, равен

$$\Lambda(x, y, t, k) = \frac{k+a}{k-\varkappa} e^{kx+k^2y+k^3t}.$$

Коэффициент $a(x, y, t)$ находится из условия (1.4). Если обозначить через $\varphi(x, y, t)$, $f(x, y, t)$

$$\varphi = \int\limits_\sigma G(k) e^{kx+k^2y+k^3t}; \qquad f = \int\limits_\sigma \frac{G(k)}{k-\varkappa} e^{kx+k^2y+k^3t},$$

то $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y, t) e^{-\varkappa x}) = \varphi(x, y, t) e^{-\varkappa x}$. Так как

$$\varphi(x, y, t) + (a-\varkappa) f(x, y, t) = 0,$$

то выражение для решения КП

$$u(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x} a = 2\frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi(x, y, t)}{f(x, y, t)}$$

совпадает с точностью до переобозначений с формулой в [18].

Предположим, что на кривой Γ имеется антиголоморфная инволюция τ: $\Gamma \to \Gamma$, оставляющая точку P_0 неподвижной. Кроме того, пусть действие этой инволюции на локальный параметр таково, что $\tau^*(k) = \bar{k}$.

Лемма 1.2. *Если набор полюсов* $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ *инвариантен относительно* τ *и если инварианты относительно* τ *данные* σ_i, G_i (т. е. $\tau(\sigma_i) = \sigma_j$ и $\overline{G}_j(\tau(t))= G_i(t)$, *то операторы* L_n, *построенные в силу теоремы* 1.1 *по соответствующему этому набору данных дифференциалу* $\Lambda(\mathrm{x}, P)$, *являются вещественными* (*при вещественных* x_n).

Рассмотрим дифференциал $\overline{\Lambda}(\mathrm{x}, \tau(P))$. Он удовлетворяет всем требованиям, определяющим $\Lambda(\mathrm{x}, P)$. Из единственности последнего следует, что $\overline{\Lambda}(\mathrm{x}, \tau(P)) = \Lambda(\mathrm{x}, P)$, и утверждение леммы доказано.

Замечание. Проблема выделения вещественных неособых решений для большинства уравнений даже в рамках традиционного конечнозонного интегрирования является нетривиальной. В последнее время значительные продвижения в этом направлении были получены Б. А. Дубровиным (см. [15], историю этого вопроса и библиографию). В рамках предлагаемой конструкции критерий вещественности, аналогичный критерию вещественности для уравнения sine = gordon и нелинейного уравнения Шредингера, предложенному в [22] для случая так называемого уравнения КП-II, не получен. Уравнение КП-II отличается от КП-I (1.9) заменой $y \to iy$.

Далее в этом параграфе и в следующем основное внимание будет уделено дифференциалам типа Лапласа, которые голоморфны вне P_0 и имеют в окрестности P_0 вид (1.3). Формально в соответствующем классе решений содержатся и обычные конечнозонные решения ранга 1. Если положить, что $G_i(k)$ есть дельта-функции, то условия (1.4) дадут

$$\Lambda(\mathrm{x}, \tilde{\gamma}_i) = 0. \tag{1.10}$$

(Здесь $i = 1, \ldots, g$.) Существует единственный дифференциал второго рода ω на Γ, имеющий единственный полюс второго порядка в P_0, $\omega \sim dk(1 + O(k^{-1}))$ и такой, что $\omega(\tilde{\gamma}_i) = 0$. Дифференциал ω имеет, кроме $\tilde{\gamma}_i$, еще g нулей $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Рассмотрим функцию Бейкера—Ахиезера, имеющую полюсы в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Тогда дифференциал типа Лапласа, нормированный условиями (1.10), равен

$$\Lambda(x, P) = \psi(x, P)\,\omega(P), \tag{1.11}$$

так как обе части равенства имеют одинаковые аналитические свойства. Дифференциал ω не зависит от x, поэтому $\psi(x, P)$ удовлетворяет тем же самым уравнениям (1.6), что и $\Lambda(x, P)$.

Пусть антиголоморфная инволюция τ имеет $g+1$ неподвижный овал $a_1, \ldots, a_{g+1}$ на Г. (Такие кривые в вещественной алгебраической геометрии называются M-кривыми. В качестве основного примера таких кривых далее можно считать гиперэллиптические кривые.) Будем считать, что $P_0 \in a_{g+1}$.

Теорема 1.2. *Пусть контуры σ_i совпадают с циклами a_i и функции G_i вещественны и положительны. Тогда решения уравнений* 1.8, *которые дает теорема* 1.1 *в случае голоморфных вне P_0 дифференциалов $\Lambda(x, P)$, являются вещественными и неособыми.*

Доказательство. Вещественность построенных решений была доказана выше. Отсутствие особенностей эквивалентно тому, что ни один из $2g$ нулей дифференциала $\Lambda(x, P)$ не попадет в точку P_0. Так как овалы a_i неподвижны относительно τ, а $\Lambda(x, P) = \overline{\Lambda}(x, \tau(P))$, то дифференциал Λ вещественен на этих циклах. Из условий нормировки (1.4) и положительности G_i следует, что Λ имеет на каждом цикле по крайней мере два нуля. Поскольку всего нулей $2g$, то они отделены от P_0, и теорема доказана.

§ 2. Явные формулы и асимптотики построенных решений

Построение явных формул для дифференциалов типа Лапласа вполне аналогично построению формул для общей функции Бейкера — Ахиезера [20] (подобная формула для блоховских функций конечнозонных операторов Штурма — Лиувилля была впервые получена Итсом [29]).

Зафиксируем на кривой Г канонический базис циклов a_i, b_j с матрицей пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. Стандартным образом вводятся: базис голоморфных дифференциалов ω_i, нормированных условиями $\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$; матрица b-периодов этих дифференциалов $B_{ik} = \oint_{b_k} \omega_i$, и соответствующая тэта-функция Римана

$$\theta(u) = \sum_{m \in Z^g} \exp(2\pi i \langle m, u\rangle + \pi i \langle Bm, m\rangle) \tag{2.1}$$

$$u = (u_1, \ldots, u_g), \quad m = (m_1, \ldots, m_g), \quad \langle m, u\rangle = m_1 u_1 + \ldots + m_g u_g,$$
$$\langle Bm, m\rangle = \sum B_{ij} m_i m_j.$$

(Подробнее о тэта-функциях см. в [10, 13, 15].) Векторы δ_{ik} и B_{ik} образуют решетку в C^g. Фактор по этой решетке называется якобиевым многообразием $J(\Gamma)$ кривой Г. Отображение Абеля А: $\Gamma \to J(\Gamma)$ определяется формулой

$$A_k(P) = \int_Q^P \omega_k. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\Omega^{(n)}$ нормированные абелевы дифференциалы второго рода, имеющие единственный полюс в P_0 вида dk^{n+1}. Нормированность дифференциала означает, что

$$\oint_{a_i} \Omega^{(n)} = 0. \tag{2.3}$$

Общий (ненормированный) абелев дифференциал с полюсом второго порядка в P_0 может быть представлен с помощью так называемых прим-форм [30] (см. приложение к [15]) в виде

$$\widetilde{\Omega}^{(1)}=\frac{\theta(A(P)-\zeta)\,\theta(A(P)+\zeta)}{\theta[\nu](A(P)-A(P_0))\,\theta[\nu](A(P_0)-A(P))}\left(\sum_j\omega_j(P)\,\theta_j[\nu](0)\right). \quad (2.4)$$

Здесь $\theta[\nu](z)$ — тэта-функция с характеристикой $\nu=(\alpha,\ \beta)$; $\alpha,\beta\in R^g$

$$\theta[\alpha,\beta](z)=\exp(\pi i\langle B\alpha,\alpha\rangle+2\pi i\langle\alpha,\ z+\beta\rangle)\theta(z+\beta+B\alpha). \quad (2.5)$$

Вектор ζ в (2.4) произволен, а характеристика $[\nu]$ должна быть нечетным полупериодом, например $\alpha=(1/2,0,\ldots,0)$, $\beta=(1/2,0,\ldots,0)$.

Лемма 2.1. *Дифференциал типа Лапласа, голоморфный вне P_0 и имеющий в окрестности P_0 вид* (1.3), *может быть представлен в следующей форме*:

$$\Lambda=r(\mathrm{x})\exp(S(\mathrm{x},\ P))\frac{\theta(A(P)+\langle\mathrm{U},\mathrm{x}\rangle-\zeta)\,\theta(A(P)+\zeta)}{\theta[\nu](A(P)-A(P_0))\,\theta[\nu](A(P_0)-A(P))}\left(\sum_j\omega_j(P)\,\theta_j[\nu](0)\right);$$

$$\langle\mathrm{U},\mathrm{x}\rangle=\sum_n x_nU^{(n)}, \quad (2.6)$$

$$U^{(n)}=(U_1^{(n)},\ldots,U_g^{(n)}),\qquad U_k^{(n)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k}\Omega^{(n)},$$

где $S(\mathrm{x},P)=\sum x_n\int_Q^P\Omega^{(n)}$. Нормировочный множитель $r(\mathrm{x})$ равен значению в P_0 предэкспоненциального множителя в (2.6). Вектор ζ-произволен.

Доказательство леммы, как и доказательство соответствующих утверждений для функций Бейкера—Ахиезера [20], состоит в прямой проверке того, что в силу трансляционных свойств тэта-функций значение (2.6) не меняется при обходе по любому циклу на Г, т. е. что (2.6) корректно определяет дифференциал на Г. Из определения $\Omega^{(n)}$, кроме того, следует, что дифференциал (2.6) имеет нужные аналитические свойства.

Выберем произвольный набор векторов ζ_i, $i=1,\ldots,g+1$, и обозначим через Λ_i дифференциалы, заданные формулой (2.6), в которой положено $\zeta=\zeta_i$. Любой дифференциал Λ вида (2.6) однозначно представим в виде

$$\Lambda(\mathrm{x},P)=\sum_{i=1}^{g+1}\alpha_i(\mathrm{x})\,\Lambda_i(\mathrm{x},P). \quad (2.7)$$

Определим константы α_i из системы линейных уравнений

$$\begin{gathered}0=\sum_i\alpha_i(\mathrm{x})\int_{\sigma_j}G_j(t)\,\Lambda_i(\mathrm{x},t),\quad j=1,\ldots,g,\\ \sum_i\alpha_i(\mathrm{x})=1.\end{gathered} \quad (2.8)$$

Соответствующий дифференциал Λ будет удовлетворять условиям (1.4).

Для разложения Λ_i в окрестности P_0 надо воспользоваться соотношением $A(P)=A(P_0)-U^{(1)}k^{-1}+O(k^{-2})$.

Следствие теоремы 1.1. *Функция*

$$u(x,y,t)=2\frac{\partial}{\partial x}\sum\alpha_i(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(U^{(1)}x+U^{(2)}y+U^{(3)}t-\zeta_i) \quad (2.9)$$

является решением уравнения КП.

Найдем асимптотику полученных решений уравнения КП в предположениях теоремы 1.2 (гарантирующих вещественность и неособость этих решений).

Пусть r, φ, θ_1 — сферические координаты трехмерного вектора x, y, t. Обозначим через $\tilde{S}(\varphi,\ \theta_1,\ P)=\int_Q^P d\tilde{S}(\varphi,\theta_1,P)$ абелев интеграл на Г такой,

что
$$d\tilde{S} = \cos\theta_1(\cos\varphi\Omega^{(1)} + \sin\varphi\Omega^{(2)}) + \sin\theta_1\Omega^{(3)}. \tag{2.10}$$

Дифференциал $d\tilde{S}$ имеет по два нуля на каждом из a-циклов. Один из них отвечает максимуму $\tilde{S}$ на этом цикле, а второй — минимуму. Пусть $Z(\varphi, \theta_1)$ — вектор такой, что $\theta(A(P) - Z(\varphi, \theta_1))$ обращается в нуль в точках $\tilde{\gamma}_i$ максимумов на циклах a_i. Вектор $Z(\varphi, \theta_1)$ равен
$$Z(\varphi, \theta_1) = \sum_i A(\tilde{\gamma}_i) + \mathcal{K}.$$

Теорема 2.1. *В предположениях теоремы* 1.2 *решения уравнения КП, заданные формулами* (2.8), (2.9), *при* $r \to \infty$ *имеют вид*
$$u(x, y, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(U^{(1)}x + U^{(2)}y + U^{(3)}t + Z(\varphi, \theta_1)) + O(e^{-\mathrm{const}\, r}). \tag{2.11}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо перейти от представления (2.7) для дифференциала Λ к формуле (2.6). Параметр ζ в формуле (2.6) должен определяться из условий (1.4).

При вычислении интегралов (1.4) воспользуемся соображениями метода перевала. В предположениях теоремы 1.2 векторы $U^{(n)}$ вещественны. Тэта-функция периодична относительно сдвигов своих аргументов на векторы $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Отсюда множитель при экспоненте в (2.6) является квазипериодической функцией x, y, t. Для равенства интегралов (1.4) нулю при $r \to \infty$ необходимо, чтобы нули дифференциала Λ экспоненциально стремились к точкам максимума $\tilde{S}(\varphi, \theta_1, P)$ на a_i. Следовательно, $\zeta \to Z(\varphi, \theta_1)$ и, разлагая (2.6) в окрестности P_0, получим выражение (2.11).

Эта формула имеет вид обычного конечнозонного решения, что согласуется со сделанным в первом параграфе замечанием о том, что условия (1.10) вместо (1.4) приводят к конечнозонным решениям ранга 1.

В заключение параграфа рассмотрим в качестве примера случай эллиптической кривой Γ с периодами 2ω, $2\omega'$. Формула 2.6 может быть в этом случае представлена как
$$\Lambda(x, y, t, z) = \exp\left(\zeta(z)x + \wp(z)y - \frac{1}{2}\wp'(z)t\right)\frac{\sigma(z+x-a)\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\sigma(x-a)\sigma(a)}, \tag{2.12}$$
$$z \in \Gamma.$$

Здесь σ, ζ, $\wp$ — функции Вейерштрасса (все необходимые сведения о которых можно найти в [31].

Зафиксируем пару комплексных чисел a_i и обозначим через Λ_i дифференциалы (2.12), в которых $a = a_i$.

Частным случаем предшествующих теорем является следующее утверждение.

Функция
$$u(x, y, t) = 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\left(\oint G(z)\Lambda_1\right)\zeta(x-a_1) - \left(\oint G(z)\Lambda_2\right)\zeta(x-a_2)}{\left(\oint G(z)(\Lambda_1 - \Lambda_2)\right)}, \tag{2.13}$$
$$\Lambda_i = \Lambda_i(x, y, t, z)$$

является решением уравнения КП. Здесь интегралы берутся от $\omega' - \omega$ *до* $\omega' + \omega$.

Если период ω веществен, а ω' — чисто мнимый, то для вещественной положительной функции $G(z)$ эта формула дает вещественное и неособое решение (сделанные предположения эквивалентны предположениям теоремы 1.2). При $r \to \infty$, где r, φ, θ — сферические координаты x, y, t, $u(x, y, t) \to 2\wp(x + Z(\varphi, \theta))$, где $Z(\varphi, \theta)$ — максимум на цикле $[\omega' - \omega, \omega' + \omega]$

функции

$$\cos\theta\,(\cos\varphi\,(\zeta(z)\,2\omega - 2\eta z) + \wp(z)\sin\varphi) - \frac{1}{2}\sin\theta\,\wp'(z),$$

и является решением уравнения

$$-\cos\theta\,(\cos\varphi\,(\wp(z)\,2\omega + 2\eta) - \wp'(z)\sin\varphi) - \frac{1}{2}\sin\theta\,\wp''(z) = 0.$$

§ 3. Алгебро-геометрический метод Лапласа

В предшествующих параграфах мы ограничили рассмотрение в основном дифференциалами типа Лапласа, голоморфными вне P_0. В этом параграфе центральными будут несколько иные дифференциалы.

Частным случаем леммы 1.1 является следующее утверждение. Для любого набора точек общего положения $\gamma_i(\varepsilon, E)$ существует единственный дифференциал $\Lambda^*(x, \varepsilon, E, P)$, точный вне P_0, с полюсами второго порядка в точках $\gamma_s(\varepsilon, E)$. В окрестности P_0 этот дифференциал имеет вид

$$\Lambda^* = \exp\left(k\left(x - \frac{\varepsilon}{E}\right) - \frac{k^3}{3E}\right) dk\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s(x, \varepsilon, E)\,k^{-s}\right). \tag{3.1}$$

Для сопоставления с леммой 1.1 заметим, что дивизор полюсов Λ^* имеет степень $2g+2$. Условие же точности Λ^* означает, что $\oint_{\sigma_i}\Lambda^* = 0$, где σ_i набор a и b-циклов на Γ и циклов, окружающих точки γ_s.

Дифференциал Λ^* зависит от функциональных параметров $\gamma_s(\varepsilon, E)$, которые будут определены далее (см. (3.17)). Пока же сформулируем теорему, справедливую при любом их выборе.

Пусть $\psi(x, \varepsilon, E, P)$ — функция Бейкера — Ахиезера, имеющая полюсы в точках $\gamma_s(\varepsilon, E)$ и представимая в окрестности P_0 в виде

$$\psi = \exp\left(k\left(x - \frac{\varepsilon}{E}\right) - \frac{k^3}{3E}\right)\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, \varepsilon, E)\,k^{-s}\right). \tag{3.2}$$

Обозначим через $c(x, \varepsilon, E)$ и $u(x, \varepsilon, E)$ функции такие, что

$$\frac{c'}{c} = \frac{1}{2}(\xi_1 - \chi_1), \tag{3.3}$$

$$u = 2\chi_1' + \chi_1(\xi_1 - \chi_1) + \frac{1}{2}(\xi_1' - \chi_1') + \frac{1}{4}(\xi_1 - \chi_1)^2. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Дифференциал $\Lambda^*(x, \varepsilon, E, P)$ удовлетворяет уравнению*

$$-(c\Lambda^*)'' + (Ex - \varepsilon + u)(c\Lambda^*) = Ec\,d\psi. \tag{3.5}$$

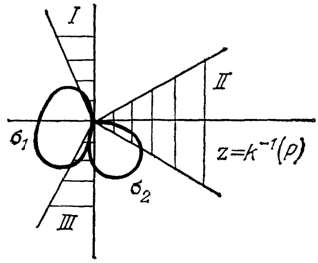
Доказательство теоремы стандартно. Дифференциал $\tilde\Lambda$, равный разности правой и левой частей равенства (3.5), точен вне P_0 и имеет возможные полюсы второго порядка в точках γ_s. Из (3.1)—(3.4) следует, что в окрестности P_0 он имеет вид

$$\tilde\Lambda = \exp\left(k\left(x - \frac{\varepsilon}{E}\right) - \frac{k^3}{3E}\right) dk\,(O(k^{-1})).$$

Из единственности Λ^* имеем $\tilde\Lambda = 0$, и равенство (3.5) доказано.

Рассмотрим в окрестности P_0 секторы, в которых $\operatorname{Re}\frac{k^3}{3E} > 0$. Пусть они занумерованы так, как показано на рисунке.

Если σ_i, $i = 1, 2,$ — контуры, выходящие из P_0 в секторе III и уходящие в P_0 в секторах I и II соответственно, то при $P \to P_0$ на этих контурах $\psi(x, \varepsilon, E, P) \to 0$. Отсюда, интегрируя (3.5), получим



Следствие. *Функции* $Y_i(x, \varepsilon, E)$,

$$Y_i = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma_i} (c\Lambda^*(x, \varepsilon, E, P)), \quad c = c(x, \varepsilon, E),$$

удовлетворяют уравнению

$$-Y'' + (Ex + u(x, \varepsilon, E))\,Y = \varepsilon Y. \qquad (3.6)$$

Найдем теперь в предположениях теоремы 1.2 асимптотики потенциалов $u(x, \varepsilon, E)$ и соответствующих решений $Y_i(x, \varepsilon, E)$.

Лемма 3.1. *Любой дифференциал* $\Lambda(x, \varepsilon, E, P)$, *имеющий вид* (3.1) *в окрестности* P_0 *и полюсы второго порядка в точках* $\gamma_s(\varepsilon, E)$, *однозначно представим в виде*

$$\Lambda = r(x, E, \varepsilon)\cdot\exp(S)\,\frac{\left(\sum\limits_j \omega_j(P)\,\theta_j[\nu](0)\right)}{\theta[\nu](A(P) - A(P_0))\,\theta[\nu](A(P_0) - A(P))} \times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{i=1}^{4}\theta(A(P) + \zeta_i)}{\theta^2(A(P) + \zeta_0(\varepsilon, E))}, \qquad (3.7)$$

где

$$S = S(x, \varepsilon, E, P) = \left(x - \frac{\varepsilon}{E}\right)\int\limits_Q^P \Omega^{(1)} - \frac{1}{3E}\int\limits_Q^P \Omega^{(3)}, \qquad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^{4}\zeta_i = 2\zeta_0 + \left(x - \frac{\varepsilon}{E}\right)U^{(1)} - \frac{1}{3E}U^{(3)}. \qquad (3.9)$$

Вектор $-\zeta_0$ с точностью до сдвига на вектор римановых констант равен отображению Абеля от точек $\gamma_s(\varepsilon, E)$

$$\zeta_0(\varepsilon, E) = -\sum_s A(\gamma_s(\varepsilon, E)) + \mathcal{K}. \qquad (3.10)$$

Доказательство леммы сводится к прямой проверке корректности на Γ дифференциала, заданного формулой (3.10).

При $|x| \to \infty$ отсутствие вычетов у Λ^* в точках $\gamma_s(\varepsilon, E)$ дает

$$\zeta_1 = \zeta_0 + O\left(\frac{1}{|x|}\right). \qquad (3.11)$$

Равенство нулю интегралов Λ^* по a-циклам означает, что g нулей Λ^* экспоненциально стремятся к нулям $\Omega^{(1)}$, отвечающим максимумам $\int\Omega^{(1)}$ на этих циклах. Аналогично равенство нулю интегралов Λ^* по b-циклам означает, что Λ^* стремится к нулю и в остальных нулях $\Omega^{(1)}$. Отсюда следует, что с экспоненциальной точностью

$$\Lambda^* = r(x, \varepsilon, E)\exp(S)\,\Omega^{(1)}(P)\,\frac{\theta(A(P) + \zeta_1)\,\theta(A(P) + \tilde{\zeta})}{\theta^2(A(P) + \zeta_0)}, \qquad (3.12)$$

где

$$\tilde{\zeta} = 2\zeta_0 - \zeta_1 + \left(x - \frac{\varepsilon}{E}\right)U^{(1)} - \frac{1}{3E}U^{(3)}. \qquad (3.13)$$

Разлагая 3.12 в окрестности P_0 (и аналогичную формулу для

$$\psi = r_1(x, \varepsilon, E)\exp(S)\,\frac{\theta\left(A(P)+\zeta_0+\left(x-\frac{\varepsilon}{F}\right)U^{(1)}-\frac{1}{3E}U^{(3)}\right)}{\theta(A(P)+\zeta_0)}\Bigg),$$

получим

$$\chi_1 = \xi_1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \tag{3.14}$$

$$\chi_2 = \xi_2 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \tag{3.15}$$

и

$$u(x, \varepsilon, E) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(A(P_0)+\tilde{\zeta}). \tag{3.16}$$

Определим теперь зависимость $\gamma_s(\varepsilon, E)$, так, чтобы вектор ζ_0 в (3.10) удовлетворял условию

$$A(P_0)+\zeta_0-\frac{\varepsilon}{E}U^{(1)}-\frac{1}{3E}U^{(3)}=\zeta=\mathrm{const}. \tag{3.17}$$

Суммируя, приходим к утверждению.

Теорема 3.2. *Пусть отображение Абеля дивизора* $\gamma_s(\varepsilon, E)$ *удовлетворяет соотношению* (3.17). *Тогда потенциал* $u(x_0\varepsilon, E)$, *соответствующий по теореме* 3.1. *этим данным, при* $|x|\to\infty$ *ведет себя как*

$$u(x, \varepsilon, E) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(xU^{(1)}+\xi). \tag{3.18}$$

Вычисление асимптотик $Y_i(x, \varepsilon, E)$ проводится аналогично вычислению асимптотик функций Эйри (см., например, приложение в [32]). При $x\to+\infty$ показатель экспоненты имеет экстремали в точках $\pm z_0=\pm(Ex)^{-1/2}$, $z=k^{-1}(P)$. Контуры σ_i продеформируем так, чтобы σ_1 пересекал ось в точке $-z_0$, а контур σ_2 в окрестности z_0 совпадал с вещественной осью. Различие с вычислениями асимптотик функций Эйри проявляется лишь в наличии у выражения (3.12) предэкспоненциального множителя.

После несложных выкладок имеем

$$Y_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,y^{1/4}}e^{-2/3y^{3/2}}\left(1-y^{-1/2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\theta(Uz+\zeta)\Big|_{z=0}^{z=y}\right)+O(y^{-1})\right), \tag{3.19}$$

$$Y_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,y^{1/4}}e^{2/3y^{3/2}}\left(1+y^{-1/2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\ln\theta(Uz+\zeta)\Big|_{z=0}^{z=y}\right)+O(y^{-1})\right), \tag{3.20}$$

где $y=E^{1/3}x$.

Замечание. Можно убедиться, что разложения (3.19), (3.20) совпадают с формальными асимптотическими рядами, которые могут быть получены для уравнения (3.7), следуя общей схеме [33] построения ВКБ разложений. Это же утверждение относится и к двум последующим формулам. При таком сопоставлении следует обратить внимание на то, что

$$v(y) = \frac{\partial}{\partial z}\ln\theta(Uz+\zeta)\Big|_{z=0}^{z=y} \approx \int_0^y u(x, \varepsilon, E)\,dx.$$

При $x\to-\infty$ экстремали показателя экспоненты достигаются в точках $\pm z_0=\pm i(Ex)^{-1/2}$. Стандартно деформируя контуры σ_i так, чтобы они проходили через $\pm z_0$ и пересекали мнимую ось по направлению «наискорейшего спуска» (под углом $\pm\pi/4$), получим

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,|y|^{1/4}}\left[\sin\left(\frac{2}{3}|y|^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+O(|y|^{-1})\right)+\right.$$
$$\left.+|y|^{-1/2}\cos\left(\frac{2}{3}|y|^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)v(y)\left(1+O(|y|^{-1})\right)\right], \tag{3.21}$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,|y|^{1/4}} \Big[\cos\Big(\frac{2}{3}|y|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\Big)(1 + O(|y|^{-1})) - \\ - |y|^{-1/2}\sin\Big(\frac{2}{3}|y|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\Big) v(y)(1 + O(|y|^{-1}))\Big]. \quad (3.22)$$

З а м е ч а н и е. Как сам метод Лапласа, так и его алгебро-геометрический вариант, предложенный выше, позволяют строить решения соответствующих линейных уравнений лишь при одном значении «спектрального параметра» ε. Тем не менее оказывается возможным, используя полученные выше результаты, построить по аналогии с быстроубывающим случаем прямое и обратное спектральные преобразования для уравнения

$$-\varphi'' + (Ex + u_0(x))\varphi = \varepsilon\varphi, \quad (3.23)$$

где $u_0(x)$ — конечнозонный потенциал. Полное изложение этих результатов и анализ других возможностей алгебро-геометрического метода Лапласа будет опубликован во второй части работы.

§ 4. Дифференциально-разностные системы

Методы алгебраической геометрии, как известно, позволяют строить периодические и квазипериодические решения не только уравнений в частных производных, но и для некоторых дифференциально-разностных систем. В качестве примера рассмотрим построение решений двумеризованной цепочки Тода

$$\varphi_{n\xi\eta} = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n+1} - \varphi_n}. \quad (4.1)$$

Здесь $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ — конусные переменные. Эти уравнения, как и общие уравнения главного кирального поля, обладают замечательным свойством: метод обратной задачи позволяет сводить к линейной задаче Римана построение общих решений периодической, $\varphi_n = \varphi_{n+N}$, двумеризованной цепочки Тода [14, 23]. (Построение для этих уравнений решений, зависящих от нужного числа функциональных параметров, было предложено также в [24].) Решения представлялись в виде рядов, сходимость которых доказывалась с помощью методов бесконечномерных алгебр Ли. Связь функциональных параметров работы [24] с начальными данными была получена в [25].) Широкий класс периодических и квазипериодических решений (4.1), выражаемых через тэта-функции Римана, были получены автором (см. приложение к [13]).

Ниже, используя аналог конструкции § 1, будут построены решения уравнений (4.1), которые асимптотически стремятся к конечнозонным.

Уравнение (4.1) было получено в [26] с помощью двумеризации по Захарову—Шабату пары Лакса

$$L\psi_n = c_n\psi_{n+1} + v_n\psi_n + c_{n-1}\psi_{n-1}, \quad (4.2)$$

$$A\psi_n = \frac{c_n}{2}\psi_{n+1} - \frac{c_{n-1}}{2}\psi_{n-1}, \quad (4.3)$$

для уравнений цепочки Тода $\ddot{x}_n = e^{x_{n+1} - x_n} - e^{x_n - x_{n-1}}$. Здесь $c_n^2 = e^{x_{n+1} - x_n}$, $v_n = \dot{x}_n$.

З а м е ч а н и е. В связи с отсутствием исторического обзора дискретных систем в работе автора [14] остановимся на этом вопросе подробнее.

Впервые последовательное построение алгебро-геометрической спектральной теории Блоха — Флоке в $\mathcal{L}_2(\mathbf{Z})$ разностного оператора Шредингера (4.2) было начато С. П. Новиковым ([8], гл. III, § 1) и Танакой — Дейтом [27]. Используя формулы следов для функции $\chi_n = \psi_{n+1}/\psi_n$, были получены формулы для v_n. В [8] изучен также симметричный случай $v_n \equiv 0$. Эта теория в [8] доведена, однако, до конца лишь в эллиптическом случае. Заметим, что оператор L в лаксовой паре для дискретного уравнения КдФ имеет вид (4.2), где $v_n = 0$ [34].

В работе [27] выражения для v_n записаны в следующем виде (в работе [8] при записи этой формулы допущена неточность, исправленная в книге [9])

$$v_n = \frac{d}{dt_1} \ln \frac{\theta((n-1)U + Vt + W)}{\theta(nU + Vt + W)} + \text{const}. \tag{4.4}$$

В случае цепочки Тода в силу условия $\dot{x}_n = v_n$ формула (4.4) определяет $x_n(t)$ с точностью до набора чисел $x_n(0)$, $-\infty < n < \infty$. Вопрос о разностном КдФ в [27] не рассматривался.

Эти исследования получили завершение в работе автора [35], в которой были получены явные выражения для x_n и решений разностного КдФ. Идея [35] состоит в использовании явных выражений для ψ_n через тэта-функции, в отличие от [8, 27], где,как уже говорилось, использовались формулы следов для χ_n, аналогично непрерывному случаю. В более поздней работе [36] автор нашел явно «локальные тождества следов» $c_n = c_n(\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$, существование которых было неэффективно доказано в [8].

Итак, пусть на кривой Γ отмечены две точки $P^\pm$ с локальными параметрами $k_\pm^{-1}$ в их окрестностях.

Лемма 4.1. *Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ — произвольный набор точек общего положения. Существуют единственные дифференциалы $\Lambda_n(\xi, \eta, P)$, которые*

1°. *Мероморфны на Γ вне $P^\pm$ и имеют полюсы в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$.*

2°. *В окрестностях $P^\pm$ эти дифференциалы имеют вид*

$$\Lambda_n^\pm = \pm dk^{\pm 1} k^{\pm(n-1)} \Big(\sum_{s=0}^{\infty} \chi_s^\pm(\xi, \eta, n) k^{-s}\Big) e^{k(x\pm t)}. \tag{4.5}$$

3°. *Удовлетворяют условиям нормировки*

$$\int_{\sigma_i} G_i(P) \Lambda_n(\xi, \eta, P) = 0, \quad P \in \sigma_i, \quad i = 1, \ldots, N + g, \tag{4.6}$$

$$\chi_0^+(\xi, \eta, n) \equiv 1. \tag{4.7}$$

Теорема 4.1. *Функции $\varphi_n = \ln \chi_0^-(\xi, \eta, n)$ удовлетворяют уравнениям двумеризованной цепочки Тода* (4.1).

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству соответствующих утверждений § 1. Из единственности Λ_n и сравнения главных частей разложений в $P^\pm$ правых и левых частей следующих равенств следует, что эти равенства действительно имеют место

$$\partial_\xi \Lambda_n = \Lambda_{n+1} + \varphi_{n\xi} \Lambda_n, \tag{4.8}$$

$$\partial_\eta \Lambda_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} \Lambda_{n-1}. \tag{4.9}$$

Условие совместности (4.8) и (4.9) эквивалентно уравнениям (4.1).

Ясно, что практически все результаты предшествующих параграфов переносятся без каких-либо принципиальных изменений и на дискретный случай. Приведем без доказательств лишь часть из них.

Лемма 4.2. *Дифференциалы $\tilde{\Lambda}_n(\xi, \eta, P)$, голоморфные вне $P^\pm$ и имеющие в окрестностях $P^\pm$ вид* (4.5), *однозначно представимы в виде*

$$\tilde{\Lambda}_n = r_n(\xi, \eta) \exp(S(n, \xi, \eta, P)) \Big(\sum_i \omega_i(P) \theta_i[\nu](0)\Big) \times$$

$$\times \frac{\theta(A(P) + Un + V^+\xi + V^-\eta + \zeta)\, \theta(A(P) - A(P^+) - A(P^-) - \zeta)}{\theta[\nu](A(P) - A(P^+))\, \theta[\nu](A(P^-) - A(P))}, \tag{4.10}$$

$$S(n, \xi, \eta, P) = \int_Q^P (n\Omega_3 + \xi\Omega_+ + \eta\Omega_-),$$

где $\Omega_{\pm}$ — нормированные дифференциалы второго рода с полюсами второго порядка в $P^{\pm}$; Ω_3 — нормированный дифференциал третьего рода с простыми полюсами в $P^{\pm}$ и вычетами ± 1. Векторы $2\pi i U$, $2\pi i\ V^{\pm}$ являются векторами b-периодов дифференциалов Ω_3, $\Omega_{\pm}$ соответственно. Нормировочная функция r_n (ξ, η) определяется из условия (4.7) и равна

$$r_n^{-1}(\xi, \eta) = \theta\,(A(P^+) + Un + V^+\xi + V^-\eta + \zeta)\, e^{d+nI_0+I_+\xi+I_-\eta} \cdot d, \quad I_0,\ I_{\pm} \text{ — const.} \tag{4.11}$$

Вектор ζ, который в формуле (4.10) произволен, должен определяться из условий нормировки (4.6). Соответствующие нелинейные уравнения можно свести к линейным, если обозначить через $\widetilde{\Lambda}_{nj}$ дифференциалы, заданные формулой (4.10), где ζ положено равным ζ_j — $j = 1, \ldots, g + 1$.

Определим $\alpha_j^{(n)} = \alpha_j^{(n)}(\xi, \eta)$ из системы линейных уравнений

$$\sum_j \alpha_j^{(n)} \Bigl(\int_{\sigma_i} G_i \widetilde{\Lambda}_{nj}\Bigr) = 0, \tag{4.12}$$

$$\sum_j \alpha_j^{(n)} = 1. \tag{4.13}$$

Тогда из предшествующей теоремы получим

Следствие. *Функции*

$$\varphi_n = \ln \sum_j \alpha_j^{(n)} \frac{\theta\,(A\,(P^-) + Un + V^+\xi + V^-\eta + \zeta_j)}{\theta(A\,(P^+) + Un + V^+\xi + V^-\eta + \zeta_j)} + d + I_0 n + I_+\xi + I_-\eta \tag{4.14}$$

являются решениями уравнений (4.1).

Предположим, что на Γ имеется антиголоморфная инволюция τ с неподвижными овалами $a_1, \ldots, a_{g+1}$. Пусть циклы σ_i, входящие в условия нормировки (4.6) совпадают с a_i и $P^{\pm} \in a_{g+1}$.

Теорема 4.2. *В сделанных предположениях решения* (4.14) *уравнений* (4.1) *являются вещественными и неособыми, если вещественны и положительны функции G_i. При больших n, ξ, η эти решения стремятся к конечнозонным решениям (4.1)*

$$\varphi_n \to \frac{\theta\,(A\,(P^-) + Un + V^+\xi + V^-\eta + z\,(n, \xi, \eta))}{\theta\,(A\,(P^+) + Un + V^+\xi + V^-\eta + z\,(n, \xi, \eta))} + d + I_0 n + I_+\xi + I_-\eta.$$

Здесь фаза $z\,(n, \xi, \eta)$ отвечает преобразованию Абеля от набора нулей дифференциала dS, отвечающих максимумам $S\,(n, \xi, \eta, P)$ на циклах a_i. (Из определения видно, что эта фаза зависит лишь от направления трехмерного вектора (n, ξ, η) и не зависит от его длины.)

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков С. П.* Двумерные операторы Шредингера в периодических полях.— В кн.: Современные проблемы математики (Итоги науки и техники).— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983, т. 23, с. 3—32.
2. *Calogero F., Degasperis A.* Inverse spectral problem for the one-dimensional Schroedinger equation with an additional linear potential.— Lett. Nuovo Cimento, 1978, v. 23, p. 143—149.
3. *Calogero F., Degasperis A.* Solution by the spectral transform method of a nonlinear evolution equation including as a special case the cylindrical KdV equation. Lett. Nuovo Cimento, 1978, v. 23, p. 150—154.
4. *Calodgero F., Degasperis A.* Spectral transform and solitions: tools to solve and investigate nonlinear evolution equations. Amsterdam—New York—Oxford: North-Holland Pub. Com., 1982.
5. *Li Yishen.* One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis.— Chin. Ann. Math. 1981, v. 2, p. 147—156.
6. *Graffi S., Harrell E.* Inverse scattering for one-dimensional Starc effect and application to the cylindrical KdV equation.— Ann. Inst. Henri Poincaré, 1982, v. 36, p. 41—58.

7. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: ОНТИ, 1936.
8. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, т. 31, вып. 1, с. 55—136.
9. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
10. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, т. 32, вып. 6, с. 183—208.
11. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.— УМН, 1980, т. 35, вып. 6, с. 47—68.
12. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения.— УМН, 1981, т. 36, вып. 2, с. 11—80.
13. *Dubrovin B. A., Krichever I. M., Novikov S. P.* Topological and algebraic geometry methods in contemporary mathematical physics. II.— Soviet Scientific Reviews. Mathematical Phys. Reviews, 1982, v. 3, OPA, Amsterdam.
14. *Кричевер И. М.* Нелинейные уравнения и эллиптические кривые.— В кн.: Современные проблемы математики (Итоги науки и техники).— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983, т. 23, с. 79—136.
15. *Дубровин Б. А.* Матричные конечнозонные операторы.— В кн.: Современные проблемы математики (Итоги науки и техники).— М.:ВИНИТИ АН СССР, 1983, т. 23, с. 33—78.
16. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева — Петвиашвили. I.— Функц. анализ, 1978, т. 12, вып. 4, с. 41—52.
17. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения и нелинейные уравнения. Конечнозонные решения ранга 2.— ДАН СССР, 1979, т. 247, вып. 1, с. 33—37.
18. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. 1.— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 3, с. 43—53.
19. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова—Шабата и их периодических решений.— ДАН СССР, 1976, т. 227, вып. 2, с. 291—294.
20. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.— Функц. анализ, 1977, т. 11, вып. 1, с. 15—31.
21. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1961.
22. *Чередник И. В.* Об условиях вещественности в «конечнозонном интегрировании».— ДАН СССР, 1980, т. 252, вып. 5, с. 1104—1108.
23. *Кричевер И. М.* Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального поля и уравнения sine-gordon.— ДАН СССР, 1980, т. 253, вып. 2, с. 288—292.
24. *Leznov A. N., Saveliev M. N.* On the two-dimensional system differential equations.— Comm. Math. Phys., 1980, v. 74, p. 111—119.
25. *Mansfild P.* Solutions of Toda lattice.— Preprint Cambridge Univ., Cambridge, CB 39 EW, 1982.
26. *Михайлов А. В.* Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода.— Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 30, с. 443—448.
27. *Date E., Tanaka S.* Exact solutions for the periodic Toda lattice.— Prog. Theor. Phys., 1976, v. 53, p. 267—273.
28. *Кричевер И. М.* Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.— УМН, 1978, т. 33, вып. 4, с. 215—216.
29. *Итс А. Р., Матвеев В. Б.* Об одном классе решений уравнения Кортевега — де Фриза.— В кн.: Проблемы матем. физики, 1978, т. 8, Л.: Изд. ЛГУ.
30. *Fay J.* Theta-functions on Riemann surfaces.— Lect. Notes in Math., 1973, v. 352.
31. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974.
32. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1974.
33. *Маслов В. П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.
34. *Манаков С. В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, вып. 2, с. 543—555.
35. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрическая спектральная теория разностного оператора Шредингера и модель Пайерлса.— ДАН СССР, 1982, т. 265, вып. 5, с. 1054—1058.
36. *Bordag L. A., Matveev V. B.* Darboux transformation and explicit solutions of the cylindrical KdV.— Preprint LPTH E № 6, Leipzig, 1979.
37. *Дрюма В. С.* Аналитические решения аксиально-симметрического уравнения КдФ.— Изв. АН Молд. ССР, 1976, т. 3, с. 297—301.

Московский энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступила в редакцию
13 февраля 1984 г.