Математические заметки

том 49 выпуск 6 июнь 1991

МНОГОФАЗНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕНДЖАМИНА—ОНО И ИХ УСРЕДНЕНИЕ

С. Ю. Доброхотов, И. М. Кричевер

Уравнение Бенджамина — Оно [1]

$$u_t + 2uu_x + \mathrm{P.\,V.}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_{yy}(y)}{y-x}\,dy = 0, \tag{0.1}$$

возникающее в ряде задач математической физики, является нелокальным аналогом уравнения Кортевега — де Фриза. В частности, как показано в [2—3], оно описывает распространение волновых пакетов в пограничном слое. Именно указанные работы и обсуждения с О. С. Рыжовым стимулировали нас к проведению излагаемых ниже исследований.

К уравнению (0.1) применима общая идеология метода обратной задачи, т. е. оно представимо в виде условия совместности переопределенной системы вспомогательных линейных задач [4, 5]. Как следствие, прямая и обратная задачи рассеяния для вспомогательной линейной системы позволяют решить задачу Коши с быстроубывающими начальными данными. В рамках такого подхода естественно выделяются точные «многосолитонные решения», являющиеся рациональными функциями своих аргументов (этим вопросам посвящена обширная литература; не претендуя на полноту, укажем на работы [6—8], где можно найти и более подробную библиографию).

Одной из основных целей настоящей работы является получение широкого класса квазипериодических решений уравнения (0.1) с помощью идей и методов теории конечнозонного интегрирования.

Здесь следует сделать некоторые замечания. Общая схема конечнозонного интегрирования позволяет строить периодические и квазипериодические решения нелинейных уравнений, допускающих различные типы коммутационного представления. Соответствующие решения в общем случае выражаются через тэта-функции вспомогательных римановых поверхностей конечного рода (алгебраических кривых). В качестве предельных случаев, отвечающих вырождениям алгебраических кривых до рациональной кривой с особенностями, конечнозонная конструкция дает весьма простой и эффективный способ построения многосолитонных и рациональных решений исходных нелинейных уравнений (см. [9, 10]). Изложение конструкции таких предельных решений может быть сделано в замкнутой форме, использующей лишь простейшие элементы линейной алгебры. Подобное изложение конструкции интегрируемых потенциалов нестационарного оператора Шредингера

$$(i\partial_t + \partial_x^2 + v(x, t))\,\psi(x, t, k) = 0 \tag{0.2}$$

и решений ряда связанных с ним нелинейных уравнений было приведено в работе [10]. Последняя работа особенно существенна для наших целей, поскольку, как видно в дальнейшем, при специальном выборе параметров интегрируемые потенциалы (0.2) приводят к решениям уравнения Бенджамина — Оно. Получающиеся решения с точки зрения общей алгебро-геометрической схемы полностью аналогичны многосолитонным решениям нелинейного уравнения Шредингера и ряда других нелинейных уравнений (т. е. они отвечают рациональным кривым с двойными особыми точками). Однако специфика уравнения (0.1) такова, что они оказываются квазипериодическими. Поэтому мы избегаем в дальнейшем называть их многосолитонными, предпочитая термин «многофазные решения».

Эти решения имеют вид

$$u = u_0(K_x + Wt + \Phi \mid I_1, \ldots, I_N), \tag{0.3}$$

где $u_0(z_1, \ldots, z_n \mid I)$ — 2π-периодическая функция по каждому из аргументов z_i, зависящая, как от параметров, от набора параметров $\{I_k\}$, векторы $K(I)$ и $W(I)$ также зависят от параметра I_k, вектор Φ — произволен.

Решения вида (0.3) были получены с помощью аналога метода Хироты в [8]. Здесь для их получения, как уже отмечалось, применены другие рассуждения, которые существенно используются затем в процедуре осреднения. В частности, мы применяем отличный от [8] способ параметризации.

К уравнениям, имеющим достаточно большой запас решений вида (0.3), применим метод усреднения Уизема (нелинейный ВКБ-метод) (см. [11—13]), позволяющий строить асимптотические решения вида

$$u(x, t) = u_0(\varepsilon^{-1}S(X, T) + \Phi(X, T) \mid I(X, T)) + \tilde{u}_1 + \ldots, \tag{0.4}$$

где теперь параметры I и Φ становятся функциями «медленных» переменных $X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$. Если вектор $S(X, T)$ удовлетворяет соотношениям

$$\partial_X S = K(I(X, T)); \qquad \partial_T S = W(I(X, T)), \tag{0.5}$$

то $u(x, t)$ удовлетворяет исходному нелинейному уравнению с точностью до $O(\varepsilon)$ [11—13].

Уравнениями Уизема называются уравнения, описывающие зависимость $I_k(X, T)$ от медленных переменных. Во втором параграфе настоящей работы уравнения Уизема на параметры многофазных решений уравнения Бенджамина — Оно будут получены, следуя схеме работы [14]. Они являются необходимыми условиями существования асимптотического решения вида (0.4) с равномерно (по x, t) ограниченным первым членом $u_1(x, t)$.

Замечательным образом оказывается, что в исходных параметрах конструкции эти уравнения распадаются и имеют вид уравнений Римана — Хопфа

$$\partial_T I_k = \partial_X I_k^2. \tag{0.6}$$

Следовательно, решения уравнений Уизема определяются как неявные функции из соотношений

$$I_k(X, T) = f_k(X + I_k T), \tag{0.7}$$

где функции $f_k(x)$ равны начальным данным для задачи Коши: $f_k(X) = I_k(X, 0)$.

§ **1. Конструкция многофазных решений уравнения Бенджамина — Оно.** Уравнение Бенджамина — Оно эквивалентно условию совместимости системы линейных уравнений

$$(i\partial_t + \partial_x^2 - 2U_{j,x})\psi_j = 0, \qquad j = 1,\ 2, \tag{1.1}$$
$$i\partial_x\psi_1 + u\psi_1 = \lambda\psi_2,$$

при условии, что $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ по переменной x аналитически продолжимы в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно [4, 5]. Действительно, из (1.1) вытекает, что

$$iu = U_1 - U_2 + c(t), \tag{1.2}$$

$$u_t + 2uu_x + (U_{1,xx} + U_{2,xx}) = 0. \tag{1.3}$$

Поскольку U_1 и U_2 аналитически продолжаются в верхнюю и нижнюю полуплоскости, то из (1.2) следует, что соответствующая кусочно-аналитическая функция выражается через $u(x, t)$ с помощью интеграла типа Коши. По формулам Племеля — Сохоцкого

$$U_1 = \frac{i}{2}u + \frac{1}{2\pi}\int\frac{u-c}{x-y}\,dy, \qquad U_2 = -\frac{i}{2}u + \frac{1}{2\pi}\int\frac{u-c}{x-y}\,dy. \tag{1.4}$$

Подстановка (1.4) в (1.3) приводит к (0.1).

Используя указанное представление Бенджамина — Оно, мы докажем следующее основное утверждение этого параграфа. Зафиксируем наборы чисел a_i, b_i, c_i $(i = 1, \ldots, n)$ и определим матрицу

$$M_{jm} = c_m e^{i(a_m - b_m)x - i(a_m^2 - b_m^2)t}\delta_{jm} - \frac{1}{b_j - a_m}. \tag{1.5}$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть C, a_m, b_m — вещественные числа такие, что*

$$C < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n, \tag{1.6}$$

и пусть

$$|c_i|^2 = -\frac{(b_i - C)\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{(a_i - C)\prod_j (b_i - a_j)(a_i - b_j)}. \tag{1.7}$$

Тогда формула

$$u(x,t) = C + \sum_m (a_m - b_m) - 2\,\mathrm{Im}\,\partial_x \ln \det M(x,t) \tag{1.8}$$

задает вещественное неособое квазипериодическое решение уравнения Бенджамина — Оно.

Замечание. Решения (1.8) имеют вид

$$u = u_0(Kx + Wt + \Phi \mid a_i,\ b_i,\ C), \tag{1.9}$$

где n-периодическая функция u_0, векторы K, W определяются данными a_i, b_i, C, а компоненты вектора Φ равны

$$\Phi_i = \arg c_i. \tag{1.10}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\psi_1(x, t, k)$ вида

$$\psi_1 = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{r_m(x,t)}{k - a_m}\right) e^{ikx - ik^2 t}, \tag{1.11}$$

удовлетворяющую условиям

$$c_m \operatorname{res}_{k=a_m} \psi_1 = \psi_1(x,\ t,\ b_m). \tag{1.12}$$

Линейные условия (1.12) эквивалентны неоднородной системе линейных уравнений на величины r_m

$$\sum_{m=1}^{n} M_{jm}(x,t)\, r_m(x,t) = 1. \tag{1.13}$$

ЛЕММА 1.1. *Матрица M невырождена при* $\mathrm{Im}\, x \geqslant 0$.

Доказательство. Предположим, что $M(x_0, t_0)$ вырождена для некоторых вещественных x_0, t_0. Это означает, что существует функция ψ_0 вида

$$\psi_0(k) = \sum_{m=1}^{n} \frac{r_m^0}{k - a_m} e^{ikx_0 - ik^2 t_0}, \tag{1.14}$$

удовлетворяющая соотношениям (1.12). Рассмотрим дифференциал

$$d\Omega = \psi_0(k)\, \overline{\psi}_0(\bar{k})\, dk \prod_{i=1}^{n} \frac{k - a_i}{k - b_i} \tag{1.15}$$

Этот дифференциал мероморфен по k и имеет нулевой вычет в бесконечности

$$\operatorname{res}_\infty d\Omega = 0.$$

В то же самое время из (1.12) и (1.6), (1.7) следует, что

$$\operatorname{res}_{k=a_m} d\Omega + \operatorname{res}_{k=b_m} d\Omega =$$

$$= |R_m|^2 \frac{\prod_{i\neq m}(a_m - a_i)}{\prod_i (a_m - b_i)} \left(1 - \frac{b_m - C}{a_m - C}\right) > 0, \tag{1.16}$$

где

$$R_m = r_m^0 \exp(ia_m x_0 - ia_m^2 t_0).$$

Следовательно, сумма всех вычетов $d\Omega$ положительна, что невозможно. Это противоречие доказывает невырожденность $M(x, t)$ для вещественных x, t.

Рассмотрим функцию

$$U_1 = i \sum_{m=1}^{n} (a_m - b_m) - \partial_x \ln \det M(x, t). \tag{1.17}$$

Из определения M следует, что

$$U_1(x, t) = O(e^{-\alpha \operatorname{Im} x}), \qquad \alpha = \min_m (b_m - a_m). \tag{1.18}$$

Если все разности $a_m - b_m$ имеют вид

$$(a_m - b_m) = \frac{2\pi}{T} s_m, \qquad s_m \text{ — целые}, \tag{1.19}$$

то матрица $M(x, t)$ является периодической функцией переменной x. Число нулей функции $\det M$ в области: $\operatorname{Im} x > 0$, $0 < \operatorname{Re} x \leqslant T$ равно

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^T U_1(x, t)\, dx.$$

Это число не меняется, если непрерывно менять параметры a_i, b_i, сохраняя соотношения (1.19). При $|a_i - a_j| \to \infty$ легко видеть, что $N = 0$. Следовательно, утверждение леммы доказано для всюду плотного подмножества параметров, отвечающего периодическим матрицам M. Функция U_1 аналитически зависит от параметров. Следовательно, она регулярна для $\operatorname{Im} x \geqslant 0$ в общем случае. Лемма доказана.

Как известно, функция $\psi_1(x, t, k)$ удовлетворяет уравнению

$$(i\partial_t + \partial_x^2 - 2U_{1,x}(x, t))\, \psi_1(x, t, k) = 0, \tag{1.20}$$

где $U_1 = i\sum_m r_m(x, t)$ совпадает с (1.17) (см. подробнее [11]). Более того, как следует из (1.5), имеют место оценки (1.18) и (1.21)

$$\psi_1 = e^{ikx - ik^2 t}(1 + O(e^{-\alpha \operatorname{Im} x})). \tag{1.21}$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi_2(x, t, k)$ вида

$$\psi_2 = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{r}_j(x, t)}{k - b_j}\right) e^{ikx - ik^2 t}, \tag{1.22}$$

нормированную условиями

$$\tilde{c}_j \operatorname{res}_{k=b_j} \psi_2 = \psi_2 (x, t, a_j), \tag{1.23}$$

где $\tilde{c}_j$ произвольный набор констант. Тогда полностью аналогично предыдущему получаем, что

$$(i\partial_t + \partial_x^2 - 2U_{2,x}(x, t))\, \psi_2 (x, t, k) = 0, \tag{1.24}$$

$$U_2 = i \sum\nolimits_{m=1}^{n} (b_m - a_m) - \partial_x \ln \det \tilde{M} (x, t), \tag{1.25}$$

где матричные элементы $\tilde{M}$

$$\tilde{M}_{jm} = \tilde{c}_m \delta_{jm} \exp [i (b_m - a_m) x - i (b_m^2 - a_m^2) t] - \frac{1}{a_j - b_m}. \tag{1.26}$$

При этом $U_2 (x, t)$ и $\psi_2 (x, t, k)$ аналитичны по переменной в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} x \leqslant 0$. Кроме того,

$$U_2 (x, t) = O (e^{\alpha \operatorname{Im} x}), \tag{1.27}$$

$$\psi_2 = e^{ikx - ik^2 t} (1 + O (e^{\alpha \operatorname{Im} x})). \tag{1.28}$$

Введем функцию

$$\lambda (k) = -(k - c) \prod\nolimits_{i=1}^{n} \frac{(k - b_i)}{(k - a_i)}. \tag{1.29}$$

ЛЕММА 1.2. *Если константы c_i и $\tilde{c}_i$ связаны соотношением*

$$\tilde{c}_i^{-1} = - c_i \frac{b_i - c}{a_i - c} \frac{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_j (b_i - a_j)(b_j - a_i)}, \tag{1.30}$$

то функции $\psi_1 (x, t, k)$ и $\psi_2 (x, t, k)$ удовлетворяют соотношению

$$i\partial_x \psi_1 + u (x, t)\, \psi_1 - \lambda (k)\, \psi_2 (x, t, k) = 0, \tag{1.31}$$

где

$$u = \sum\nolimits_{i=1}^{n} (r_i - \tilde{r}_i) + C - \sum\nolimits_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \\ = C - \sum\nolimits_{i=1}^{n} (a_i - b_i) + i (U_2 (x, t) - U_1 (x, t)). \tag{1.32}$$

Доказательство. Из определения $\lambda (k)$ и соотношений (1.30) непосредственно следует, что функция $\lambda (k) \psi_2 (x, t, k)$ удовлетворяет соотношениям (1.12). Обозначим через $\tilde{\psi} (x, t, k)$ функцию, заданную левой частью (1.31). Из (1.32) вытекает, что она имеет вид

$$\tilde{\psi} (x, t, k) = e^{ikx - ik^2 t} \sum\nolimits_{j=1}^{n} \frac{\hat{r}_j (x, t)}{k - a_j}. \tag{1.33}$$

Поскольку она удовлетворяет соотношениям (1.12), то $\hat{r}_m$ должны быть решениями однородной системы уравнений

$$\sum\nolimits_m M_{jm} \hat{r}_m = 0.$$

Матрица M невырождена. Значит, все $\hat{r}_m$ равны нулю и лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. *Предположим, что* $\tilde{c}_j$, *заданные формулой* (1.30), *таковы, что*

$$\tilde{c}_i = -\bar{c}_i, \tag{1.34}$$

тогда

$$U_1(x, t) = \overline{U}_2(\bar{x}, t). \tag{1.35}$$

Доказательство. Введем функции

$$\overset{+}{\psi}_1 = \overline{\psi_2(\bar{x}, t, \bar{k})}, \qquad \overset{+}{\psi}_2 = \overline{\psi_1(\bar{x}, t, \bar{k})}. \tag{1.36}$$

Функция $\psi_1(x, t, k)\overset{+}{\psi}_1(x, t, k)$ является рациональной функцией с полюсами в точках a_m, b_m. Из определяющих соотношений (1.12) и (1.23) и условия (1.34), следует, что при каждом m сумма вычетов этой функции в точках a_m и b_m равна нулю. Следовательно, равен нулю и вычет в бесконечности

$$0 = \operatorname{res}_\infty \psi_1\overset{+}{\psi}_1 = \sum\nolimits_m r_m(x, t) + \overline{\tilde{r}_m(\bar{x}, t)} = i\,(\bar{U}_2(\bar{x}, t) - U_1(x, t)). \tag{1.37}$$

Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.

Из утверждения леммы 1.3 вытекает, что функции $\overset{+}{\psi}_1$ и $\overset{+}{\psi}_2$ удовлетворяют сопряженным к (1.1) уравнениям

$$(-i\partial_t + \partial_x^2 - 2U_{j,x})\overset{+}{\psi}_j = 0, \tag{1.38}$$

$$-i\partial_x\overset{+}{\psi}_2 + u\overset{+}{\psi}_2 = \lambda\overset{+}{\psi}_1.$$

В заключение параграфа отметим, что функции ψ_j и $\overset{+}{\psi}_j$ ($j = 1, 2$) имеют вид

$$\psi_j = R_j(Kx + Wt + \Phi, k)e^{ikx - ik^2t}, \tag{1.39}$$

$$\overset{+}{\psi}_j = \overset{+}{R}_j(Kx + Wt + \Phi, k)e^{-ikx + ik^2t},$$

где функции $R_j(z_1, \ldots, z_n, k)$, $\overset{+}{R}_j(z_1, \ldots, z_n, k)$ — периодические функции аргументов z_i.

§ 2. Усреднение и уравнения Уизема. Займемся построением асимптотических решений вида (0.4) и выводом уравнений, связывающих фазы $S_1(X, T), \ldots, S_n(X, T)$ и медленно изменяющиеся параметры.

Сначала покажем, что при условии выполнения соотношений (0.5) функция $\tilde{u} = u_0(S(X, T)/\varepsilon + \Phi(X, T), I(X, T))$ удовлетворяет уравнению (0.1) с точностью до $O(\varepsilon)$. Нам удобно переписать интегро-дифференциальный оператор в (0.1) в виде псевдодифференциального оператора. Несложные вычисления (см. [6—8]) дают

$$\mathrm{P.\,V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{yy}(y)}{y - x}\,\mathrm{d}y = L\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \qquad L(p) = -\pi i p\,|p|.$$

Таким образом, в переменных $X = \varepsilon x$ и $T = \varepsilon t$ уравнение (0.1) можно записать в виде:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial T} + 2\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial X} + L\left(-i\varepsilon \frac{\partial}{\partial X}\right) u = 0. \tag{2.1}$$

Подставим в (2.1) функцию $\tilde{u}$ и для вычисления разложения $L\left(-i\varepsilon \frac{\partial}{\partial X}\right)\tilde{u}$, воспользуемся приемом [15]. Именно, запишем $\tilde{u}$ в виде $\tilde{u} = e^{(iS\cdot\hat{\omega})/\varepsilon} u_0 (z + \Phi, I)|_{z=0}$, $\hat{\omega} = -i\partial/\partial z$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j \in [0, 2\pi]$. Используя формулы коммутации псевдодифференциального оператора с экспонентой [16], получим

$$L\left(-i\varepsilon \frac{\partial}{\partial X}\right)\tilde{u} = e^{iS\hat{\omega}/\varepsilon} L\left(\frac{\partial S}{\partial X}\hat{\omega} - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial X}\right) u_0 (z + \Phi, I) =$$
$$= L\left(\frac{\partial S}{\partial X}\hat{\omega}\right) - i\varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial p}\left(\frac{\partial S}{\partial X}\hat{\omega}\right)\frac{\partial}{\partial X} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial p^2}\left(\frac{\partial S}{\partial X}\hat{\omega}\right)\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\hat{\omega}\right) u_0 (z + \Phi, I)\Big|_{z=S/\varepsilon} + O(\varepsilon^2). \tag{2.2}$$

Таким образом, если мы сохраним после подстановки в уравнение (2.1) слагаемые нулевого порядка по ε, то получим выражение

$$Q = \left(S_T \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{u} + 2\tilde{u}\left(S_x \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{u} + L\left(-iS_x \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{u}\Big|_{z=S/\varepsilon},$$

$S_{T,X}\cdot \partial/\partial z = S_{1T,X}\partial/\partial z_1 + \ldots + S_{nT,X}\partial/\partial z_n$. Покажем, что $Q = 0$, если $\tilde{u}$ имеет вид (1.9), а S и I связаны соотношениями (0.5). Действительно, перейдем от координат $z = (z_1, \ldots, z_n)$ к координатам $t, x, y_1, \ldots, y_{n-2}$ по формулам $z = Kx + Wt + U_1 y_1 + \ldots + U_{n-2}y_{n-2}$, векторы K, W, U_j линейно независимы с учетом (0.5) получим

$$Q = \frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + L\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) u\Big|_{z=S/\varepsilon}, \tag{2.3}$$

где $u = u_0 (Kx + Wt + \Phi', I)$, $\Phi' = U_1 y_1 + \ldots + U_{n-2}y_{n-2} + \Phi(X, T)$, $I = I(X, T)$. Поскольку по переменным X, T, $y_1, \ldots, y_{n-2}$ в выражении (2.3) дифференцирование отсутствует, а функция $u_0 (Kx + Wt + \Phi', I)$ удовлетворяет уравнению Бенджамина — Оно при любых Φ' и K, W и I связанных (0.5), то и невязка, полученная при подстановке $\tilde{u}$ в (2.1), равна $O(\varepsilon)$. Используя формулу (2.2), легко получим эту невязку $\tilde{F} = \varepsilon\partial\tilde{u}/\partial T + 2\varepsilon\tilde{u}\partial\tilde{u}/\partial X + L(-i\varepsilon\partial/\partial X)\tilde{u}$:

$$\tilde{F} = \varepsilon F + O(\varepsilon^2), \tag{2.4}$$
$$F = \left(\frac{\partial u_0}{\partial T} + 2u_0\frac{\partial u_0}{\partial X} + \frac{\partial L}{\partial p}\left(-iK\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u_0}{\partial X} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial p^2}\left(-iK\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)\Big|_{z=S/\varepsilon}.$$

Дадим вывод соотношений, дополняющих (0.5) до замкнутой системы уравнений. Такие соотношения получаются при рассмотрении уравнений для поправки к главному члену асимптотики $\tilde{u}$. Процедуры вычисления поправок существенно различаются в одно- и многофазовых ситуациях. В первом случае она достаточно хорошо разработана (см., например, [11]), и имеется алгоритм теории возмущений, дающий асимптотическое решение в виде ряда по степеням ε: $u = u_0(S/\varepsilon + \Phi, I(x, t)) + \varepsilon u_1(S/\varepsilon, x, t) + \varepsilon^2 u_2(S/\varepsilon, x, t)^+ \ldots$ Каждый член ряда имеет одинаковую «однофазную» структуру. В 2-х и более фазовых случаях такое представление асимптотического решения не справедливо, что обусловлено резонансами — появлением множества точек (X_p, T_p), где меняется размерность коядра оператора, который приходится обращать, если предполагать, что поправки к $\tilde{u}$ имеют ту же «n-фазовую» структуру (см. (2.5′)). Появление резонансных точек, заполняющих всюду плотно прямую $\mathbf{R}_X$ при каждом фиксированном T, существенно изменяет и усложняет теорию возмущений. Имеющиеся здесь результаты касаются лишь двухфазового случая для уравнения Кортевега — де Фриза [17]. Уже в этом случае даже построение первой поправки оказывается весьма нетривиальной задачей, требующей, в частности, рассмотрения, вообще говоря, нелинейного уравнения для ее определения.

Мы не будем заниматься здесь теорией возмущений и лишь покажем, каким образом можно получить необходимые условия малости поправки к $\tilde{u}$, исходя из предположения, что для малости этой поправки во всяком случае необходима малость решения $\tilde{u}_1$ линеаризованного на фоне $\tilde{u}$ (неоднородного) уравнения (0.1)— уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial T} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial X}(\tilde{u}\tilde{u}_1) + L\left(-i\varepsilon \frac{\partial}{\partial X}\right)\tilde{u}_1 = -\varepsilon F(S/\varepsilon, X, T), \tag{2.5}$$

Сопоставим линейному оператору в левой части (2.5) семейство операторов $\mathcal{L}$ на торе $\mathbf{T}^n = (z_1, \ldots, z_n \mid z_j \in [0, 2\pi])$, зависящих от X, T как от параметров, и получающихся из (2.5) в результате замены $\varepsilon\partial/\partial t \to S_t \cdot \partial/\partial z = W \cdot \partial/\partial z$ и $\varepsilon\partial/\partial x \to S_X \cdot \partial/\partial z = K \cdot \partial/\partial z$:

$$\mathcal{L} = W \frac{\partial}{\partial z} + 2K \frac{\partial}{\partial z}((\tilde{u}(z+\Phi, X, T))\cdot) + L\left(-iK \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{2.5′}$$

Предположим, что гладкая функция $w(z, X, T)$, 2π-периодическая по каждому из аргументов $z_1, z_2, \ldots, z_n$, принадлежит коядру оператора $\mathcal{L}$ при каждом $(X, T) \in \Omega$, т. е.

$$-\mathcal{L}^+ w \equiv \left(W \cdot \frac{\partial}{\partial z} + 2u_0(z + \Phi, X, T)K \cdot \frac{\partial}{\partial z} + L\left(-iK \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) w = 0.$$

Относительно функций $S_j(X, T)$ сделаем предположение, обобщающее при $n > 2$ известное в теории усреднения «условие А» (см., например, [18, с. 175]). Именно, будем считать, что при $X, T \in$

$\in \Omega$ отличен от нуля вронскиан

$$\Delta(X,T)=\begin{vmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_n \\ K_1' & K_2' & \dots & K_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_1^{(n-1)} & K_2^{(n-1)} & \dots & K_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad K_j^{(l)}=\frac{\partial^l K_j}{\partial X^l}. \tag{2.6}$$

ЛЕММА 2.1. *Пусть для решения $\tilde u_1(x,t,\varepsilon)$ уравнения* (2.5) *справедлива оценка $\tilde u_1 = o(1)$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда при $(X,T)\in\Omega$ выполнено условие ортогональности*

$$\int_{\mathbf{T}^n} w(z,X,T)\,F(z,X,T)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{2.7}$$

Пусть при всех X, $T\in\Omega$ существует и гладко зависит от X среднее по переменной x:

$$\langle wF\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} w(Kx,X,T)\,F(Kx,X,T)\,\mathrm{d}x.$$

Тогда условие (2.7) *эквивалентно равенству*

$$\langle wF\rangle = 0. \tag{2.8}$$

Для доказательства этой леммы и для дальнейшего нам понадобится следующее полезное вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Пусть выполнено условие* (2.6) *и $f(z,X,T)$ — гладкая функция, 2π-периодическая по каждой из переменных $z_1,\dots,z_2$ и финитная по переменной $X\in\Omega_T=\Omega\cap\{t=T\}$, тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{S(X,T)}{\varepsilon},X,T\right)\mathrm{d}X = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbf{T}^n} f(z,X,T)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}X + O(\varepsilon^{1/n}). \tag{2.9}$$

Если при этом среднее

$$\langle f\rangle = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(Kx,X,T)\,\mathrm{d}x$$

— гладкая функция X, то

$$\langle f\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{T}^n} f(z,X,T)\,\mathrm{d}z. \tag{2.10}$$

Доказательство. Оценим производные от фаз $S\cdot\nu$. Обозначим k-ю производную от $S\cdot\nu$ через $\rho_{\nu k}|\nu|$, $|\nu| = \sqrt{\nu_1^2+\dots+\nu_n^2}$. Тогда в силу условия (2.6) равенства $S^{(k)}\cdot\nu = \rho_{\nu k}|\nu|$ $(k=1,\dots,n)$ можно разрешить относительно вектора $\nu/|\nu|$:

$$\nu_m/|\nu| = \frac{1}{\Delta(X,T)}\sum_{k=1}^{n} A_{mk}(X,T)\,\rho_{\nu k}, \tag{2.11}$$

где A_{mk} (X, T) состоят из сумм произведений производных $S^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ и, следовательно, ограничены в Ω. Из (2.11) немедленно получим

$$1 = \sum_{m=1}^{n} \nu_m^2 / |\nu|^2 \leqslant C(\Omega) \sum_{k=1}^{n} \rho_{\nu k}^2, \qquad C(\Omega) = \mathrm{const}.$$

Поэтому $\sum_{k=1}^{n} \rho_{\nu k}^2 \geqslant \tilde{\delta}^2$, $\tilde{\delta} > 0$ не зависит от ν. Таким образом, при каждом фиксированном T в каждой точке X по крайней мере для одного из l $(1 \leqslant l \leqslant n)$

$$| S^{(l)} \cdot \nu | \geqslant \delta \, | \nu |, \tag{2.12}$$

где $\delta = \delta(\Omega) > 0$ константа. Поскольку вектор $\nu / |\nu|$ лежит на единичной сфере, то в дальнейшем без уменьшения общности будем считать, что неравенство (2.12) выполнено для данного k для всех $X \in \Omega_T$. Из оценки (2.12) вытекает тогда и тот факт, что функция $K \cdot \nu = S_X \cdot \nu$ при каждом фиксированном T может иметь не более n нулей. В самом деле, если предположить противное, то в силу гладкости K $(X, T) \cdot \nu$ у производной K_X $(X, T) \cdot \nu$ будет не менее $(n - 1)$ нуля, K_{XX} $(X, T) \cdot \nu$ — $(n - 2)$ нуля и так далее, и у $S^{(l)} \cdot \nu$ — $(n - l + 1)$ нуля, что противоречит (2.12). Тем самым мы установили, в частности, что множество точек в Ω_T, в которых одно из выражений K $(X, T) \cdot \nu$ обращается в нуль — не более чем счетно, если $\nu \in \mathbf{Z}^n$.

Теперь рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f\,(S\,(X, T)/\varepsilon, X, T) \mathrm{d}X$. Разложим функцию $f\,(z, X, T)$ в многомерный ряд Фурье по переменной z:

$$f(z, X, T) = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \mathrm{e}^{i\nu \cdot z} f_\nu (X, T). \tag{2.13}$$

В силу гладкости f коэффициенты Фурье f_ν удовлетворяют для всех $X, T \in \Omega$ и любого натурального N оценкам

$$\left| \frac{\partial^m f_\nu}{\partial X^m} \right| < \frac{Q_N^{(m)}(\Omega, f)}{|\nu|^N}, \qquad Q_N^{(m)}(\Omega, f) = \mathrm{const}.$$

В силу этих оценок и неравенства (2.12) и известных оценок для интегралов от быстроосциллирующих экспонент [19] получим для любого $\varkappa > 0$

$$\left| \int_\Omega \mathrm{d}X f_\nu (X, T) \, \mathrm{e}^{\frac{iS \cdot \nu}{\varepsilon}} \right| \leqslant \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}\, c_\varkappa}{|\nu|^\varkappa}, \tag{2.14}$$

где $c_\varkappa$ — константа, зависящая от Ω и f. Представляя теперь в левой части (2.9) функцию f в виде ряда (2.12) и используя (2.14), немедленно получаем равенство (2.9).

Для доказательства (2.10) достаточно заметить, что в силу счетности множества «резонансных» точек, т. е. точек $X \in \Omega_T$, где для какого-либо $\nu \in \mathbf{Z}^n$ K $(X, T) \cdot \nu = 0$, существует всюду плотное в Ω_T множество точек, в которых K $(X, T) \cdot \nu \neq 0$ для всех $\nu \in \mathbf{Z}^n$. Для этих точек равенство (2.10) имеет место в силу известных утверждений теории усреднения (см., например, [18]). Для остальных точек X оно следует из гладкости левой и правой частей (2.10).

Доказательство леммы 2.1. Пусть $\varphi(X, T)$ — некоторая гладкая финитная в Ω функция. Умножим уравнение (2.5) на $\varphi(X, T)\cdot w(S/\varepsilon, X, T)$, проинтегрируем результат по $X, T \in \Omega$ и перебросим операторы $\partial/\partial T$, $\partial/\partial X$ и $L(-i\varepsilon\partial/\partial X)$ на φw. Применяя эти операторы к функции φw, учитывая при этом равенства (2.2) и $\mathscr{L}^+ w = 0$, получим

$$\iint_\Omega R(S/\varepsilon, X, T, \varepsilon)\,\tilde{u}_1\, dX\, dT = \iint_\Omega \varphi w F\, dX\, dT,$$

где $R(z, X, T, \varepsilon)$ — гладкая функция, 2π-периодическая по z_j. Предел при $\varepsilon \to 0$ левой части этого равенства в силу нашего предположения $\tilde{u}_1 = o(1)$ равен 0. Предел правой части в силу леммы 2.2 равен

$$\iint_\Omega \varphi\left[\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{T}^n} w(z, X, T)\, R(z, X, T)\, dz\right] dX\, dT.$$

Ввиду произвольности φ и гладкости выражения в квадратных скобках, это выражение равно нулю. Равенство (2.8) есть следствие второго утверждения леммы 2.2.

Рассмотрим теперь функцию $\psi_1\overset{+}{\psi}_2$. Очевидно, при вещественных x, t она имеет следующую структуру:

$$\psi_1\overset{+}{\psi}_2(x, t, K) = w(Kx + Wt + \Phi', K, I),$$

где $w(z, K, I)$ 2π-периодична по каждому из $z_1, \ldots, z_n$, I — параметры решения (0.3).

ЛЕММА 2.3. *Функция $w(z, K, I(X, T))$ принадлежит коядру оператора $\mathscr{L}$, если выполнены соотношения* (0.5).

Доказательство. Пусть $p(z)$ — гладкая функция на торе $\mathbf{T}^n = [0, 2\pi]^n$. Рассмотрим выражение

$$\mathscr{E}(p) = -\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} (\mathscr{L}^+ w)\, p(z)\, dz.$$

Перебросим в нем оператор $\mathscr{L}^+$ на функцию $p(z)$ и запишем оператор $\mathscr{L}$ в координатах $x, t, y_1, \ldots, y_{n-2}$ (см. (2.3)), при этом оператор $L(-i\partial/\partial x)$ запишем с помощью формул $Lp = p_{1,xx} + p_{2,xx}$, $ip = p_1 - p_2$ (см. (1.2)), где $p_1(x, t, I)$ и $p_2(x, t, I)$ по переменной x аналитически продолжаются в верхнюю и нижнюю плоскости соответственно. Непосредственно из уравнений (1.1) и (1.37) следует

$$\begin{aligned} w\mathscr{L}p &\equiv \psi_1(p_t + 2u_0 p_x + 2u_{0x}p + p_{1,xx} + p_{2,xx})\overset{+}{\psi}_2 = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\psi_1 p\overset{+}{\psi}_2) - i\frac{\partial}{\partial x}(v(\psi_{1x}\overset{+}{\psi}_2 - \psi_1\overset{+}{\psi}_{2x})) + \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial x}((p_{1x} + p_{2x})\psi_1\overset{+}{\psi}_2) + 2ip_{1x}\psi_1\overset{+}{\psi}_1 - 2ip_{2x}\psi_2\overset{+}{\psi}_2, \end{aligned}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial t} = W_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + W_n\dfrac{\partial}{\partial z_n}$ и $\dfrac{\partial}{\partial x} = K_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + K_n\dfrac{\partial}{\partial z_n}$.

Средние по z от выражений, содержащих $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$, очевидно, равны нулю. Вычислим среднее по x т последних двух слагаемых: $2i\langle p_{1x}\psi_1\overset{+}{\psi}_1\rangle - 2i\langle p_{2x}\psi_2\overset{+}{\psi}_2\rangle$. Смещая контуры интегрирования в комплексную плоскость: в верхнюю полуплоскость для первого из этих выражений и в нижнюю — для второго, получим, что они равны нулю, поскольку подынтегральные выражения экспоненциально малы. Следовательно, в силу леммы 2.2 $\mathscr{E}(p) = 0$ для любой p. Отсюда и из гладкости функции $\mathscr{L}^+w$ вытекает утверждение леммы.

Замечание. Леммы 2.1—2.3, таким образом, утверждают, что с уравнением (2.5) мы можем обращаться так, как будто его решение представимо в «n-фазовом» виде, т. е. в виде $\tilde{u}_1 = \varepsilon w(S/\varepsilon, X, T)$. Как уже отмечалось, такое представление функции $\tilde{u}$ справедливо лишь в однофазовом случае (см. [10, 17]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Система уравнений* (2.4) *и* (0.5) *эквивалентна уравнениям*

$$\partial_T a_i = -\partial_X a_i^2, \qquad \partial_T b_i = -b_i^2, \qquad \partial_T C = -\partial_X C^2. \tag{2.15}$$

Доказательство. Пусть задана произвольная деформация параметров многофазных решений уравнения Бенджамина — Оно $a_i(\tau)$, $b_i(\tau)$, $C(\tau)$, тогда соответствующие решения $u(x, t, \tau)$ и функции $\psi_i, \overset{+}{\psi}_i$ становятся функциями параметра τ.

Усеченной производной $\hat{\partial}_\tau u$ и будет называться функция, полученная дифференцированием соответствующих формул вида (0.3), в которых векторы K и W считаются постоянными. По этому определению

$$\partial_\tau u = \hat{\partial}_\tau u + \sum_{i=1}^{n} (x\partial_\tau K + t\partial_\tau W_i)\frac{\partial u}{\partial \varphi_i}. \tag{2.16}$$

ЛЕММА 2.4. *Имеют место соотношения*

$$\langle\psi_1\hat{\partial}_\tau u\overset{+}{\psi}_2\rangle = \partial_\tau\lambda - i\partial_\tau K\langle\psi_1\overset{+}{\psi}_2\rangle, \tag{2.17}$$

$$\left\langle\psi_1\frac{\partial u}{\partial\varphi_i}\overset{+}{\psi}_2\right\rangle = 0. \tag{2.18}$$

Доказательство. Пусть $\psi_i(x, t, k \mid \tau_1)$, $\overset{+}{\psi}_i(x, t, k \mid \tau)$ — функции Бейкера — Ахиезера и сопряженные функции, отвечающие разным значениям параметра τ. Тогда из уравнений (1.1) и (1.3) имеем

$$i\partial_x(\psi_1\overset{+}{\psi}_2) + \psi_1(u(x, t \mid \tau_1) - u(x, t \mid \tau))\overset{+}{\psi}_2 = \\ = (\lambda(k \mid \tau_1) - \lambda(k \mid \tau))\psi_2\overset{+}{\psi}_2. \tag{2.19}$$

Дифференцируя (2.19) по τ_1 и полагая $\tau_1 = \tau$, получим

$$i(\partial_\tau K)(\psi_1\overset{+}{\psi}_2) + (\psi_1\hat{\partial}_\tau u\overset{+}{\psi}_2) = \partial_\tau\lambda(\psi_2\overset{+}{\psi}_2) + Q. \tag{2.20}$$

Здесь остаточный член Q имеет вид

$$Q = \sum_s(\alpha_s x + \beta_s t + \gamma_s)\partial_x\tilde{w}_s(Kx + Wt + \Phi), \tag{2.21}$$

где α_s, β_s, γ_s — константы, функции $\widetilde{w}_s(z_1, \ldots, z_n)$ — периодические функции аргументов z_i.

Векторы K и W определяют прямолинейные обмотки на торе T^n. Обозначим через $T_1(\Phi)$ замыкание обмотки $Kx + Wt + \Phi$. Оно является некоторым подтором в T^n. Для любой функции вида $w(Kx + Wt + \Phi)$ среднее по подтору T_1, обозначаемое в дальнейшем через $\langle w\rangle_{T_1}$. Оно совпадает со средним по x, t, т. е. $\langle w\rangle_{T_1} = \langle w\rangle$.

Усредним равенство (2.20) по $T_1(\Phi)$ (отметим, что среднее по x, t брать нельзя, так как часть членов в (2.21) линейно зависит от x, t). Из (2.21) следует, что среднее от $\langle Q\rangle_{T_1} = 0$. Для получения (2.17) из усредненного по T_1 равенства (2.20) осталось заметить, что

$$\langle \psi_1\overset{+}{\psi_1}\rangle = \langle \psi_2\overset{+}{\psi_2}\rangle = 1. \tag{2.22}$$

Последние равенства получаются после смещения контура интегрирования по x в комплексную область. Равенства (2.18) следуют из (2.17), если рассмотреть вариацию u по φ_i при постоянных a_i, b_i, C. Так как λ и K не зависят от φ_i, то правая часть (2.17) будет в том случае равна нулю.

ЛЕММА 2.5. *Имеет место соотношение*

$$2\langle \psi_1(\partial_\tau(U_{1,x} + U_{2,x}) + u\partial_\tau u)\overset{+}{\psi_2}\rangle = 2k\partial_\tau\lambda + i\partial_\tau W\langle \psi_1\overset{+}{\psi_2}\rangle. \tag{2.23}$$

Доказательство. Из уравнений (1.1) и (1.37) имеем

$$i\partial_t(\psi_1\overset{+}{\psi_2}) + \partial_x(\psi_1'\overset{+}{\psi_2} - \psi_1\overset{+}{\psi_2}{}') = 2(\delta U_{1,x}\psi_1\overset{+}{\psi_2}) + 2i(u_x\psi_1\overset{+}{\psi_2}), \tag{2.24}$$

где $\delta U_1 = U_1(x, t, \tau_1) - U_1(x, t, \tau)$ (в дальнейшем мы будем использовать аналогичные обозначения $\delta\lambda$, δu для приращений соответствующих функций).

Кроме того, из тех же уравнений следует равенство

$$u(\psi_1\overset{+}{\psi_2})_x + \delta u\psi_1\overset{+}{\psi}_{2x} - \lambda(\psi_2\overset{+}{\psi}_{2x} + \psi_{1x}\overset{+}{\psi_1}) - \delta\lambda(\psi_2\overset{+}{\psi}_{2x}) = 0. \tag{2.25}$$

Используя (2.16) и уравнение $i\overset{+}{\psi}_{2x} = -u\overset{+}{\psi_2} + \lambda\overset{+}{\psi_1}$, получим из (2.25) следующее равенство

$$(2\delta U_{1,x} + 2\delta uu)\psi_1\overset{+}{\psi_2} - 2\delta u\lambda\psi_1\overset{+}{\psi_1} - 2i\delta\lambda(\psi_2\overset{+}{\psi}_{2x}) =$$
$$= i\partial_t(\psi_1\overset{+}{\psi_2}) - i\lambda(\psi_2\overset{+}{\psi_2} + \psi_1\overset{+}{\psi_1})_x - \delta\lambda(\psi_2\overset{+}{\psi_2})_x - 2i\lambda(\psi_2\overset{+}{\psi}_{2x} + \psi_{1x}\overset{+}{\psi_1}). \tag{2.26}$$

Дифференцируя это равенство по τ_1 и полагая затем $\tau_1 = \tau$, получим равенство, которое после усреднения примет вид

$$\langle \psi_1(2\partial_\tau U_{1,x} + 2u\partial_\tau u)\overset{+}{\psi_2}\rangle - 2\lambda\langle \partial_\tau u\psi_1\overset{+}{\psi_1}\rangle -$$
$$- 2i\partial_\tau\lambda\langle \psi_2\overset{+}{\psi}_{2x}\rangle = i\partial_\tau W\langle \psi_1\overset{+}{\psi_2}\rangle \tag{2.27}$$

(несложно убедиться, смещая контуры интегрирования по x в комплексную область, что вклады в средние от всех слагаемых правой части (2.26), кроме первого, равны нулю).

Преобразуем теперь предпоследнее слагаемое левой части равенства (2.27)

$$-2\lambda\langle\partial_\tau u\psi_1\overset{+}{\psi}_1\rangle = 2i\lambda\langle\psi_1(\partial_\tau U_1-\partial_\tau U_2)\overset{+}{\psi}_1\rangle - 2i\lambda A =$$
$$= -2i\lambda\langle\partial_\tau U_2\psi_1\overset{+}{\psi}_1\rangle - 2i\lambda A = 2i\lambda\langle\partial_\tau U_2(\psi_2\overset{+}{\psi}_2-\psi_1\overset{+}{\psi}_1)\rangle -$$
$$-2i\lambda A = -2\langle\partial_\tau U_2(\psi_1\overset{+}{\psi}_2)_x\rangle - 2i\lambda A =$$
$$= 2\langle\partial_\tau U_{2,x}\psi_1\overset{+}{\psi}_2\rangle - 2i\lambda A, \quad (2.28)$$

где $A = \partial_\tau(C + \Sigma(b_i - a_i))$.

При выводе (2.28) были использованы равенства

$$\langle\partial_\tau U_1\psi_1\overset{+}{\psi}_1\rangle = \langle\partial_\tau U_2\psi_2\overset{+}{\psi}_2\rangle = 0, \quad (2.29)$$

которые опять же получаются при выходе в комплексную область по x. Подставляя (2.28) в (2.27), получим искомое равенство (2.23) (так как $\langle\psi_2\overset{+}{\psi}_{2x}\rangle = -ik$).

Из равенств (2.17) и (2.23), в которых надо положить $\tau = T$, и $\tau = X$ соответственно, получаем

$$\langle\psi_1 F[u_0]\overset{+}{\psi}_2\rangle = 2k\partial_X\lambda - i(\partial_T K - \partial_X W)\langle\psi_1\overset{+}{\psi}_2\rangle +$$
$$+ 2\lambda\partial_X\left(C + \textstyle\sum_i(b_i - a_i)\right). \quad (2.30)$$

Таким образом, уравнения (2.4) и (0.5) приводят к равенству

$$\partial_T \ln\lambda + 2k\partial_X\ln\lambda + 2\left(C + \textstyle\sum_i(b_i - a_i)\right)_X = 0, \quad (2.31)$$

которое должно выполняться при всех k. Подставляя в (2.31) формулу (1.29), определяющую $\lambda(k)$, получим (после приравнивания нулю вычетов в точках a_i, b_i, C) уравнения (2.6). Применяя затем (2.10), получаем утверждение теоремы.

З а м е ч а н и я. 1. Для полного описания главного члена асимптотического решения $\tilde{u}$ (0.4) следует получить уравнения для поправок $\Phi_j(X, T)$ к фазам. В однофазовом случае процедура вывода, требующая наряду с рассмотрением уравнения для $\tilde{u}_1 = O(\varepsilon)$ и уравнения для поправки $\tilde{u}_2 = O(\varepsilon^2)$, хорошо разработана (см. [11, 20]). В многофазовой ситуации вопрос об уравнениях для $\Phi_j(X, T)$ удовлетворительного решения не имеет. Это связано, как уже отмечалось, со сложным устройством спектра оператора $\mathcal{L}$ (2.5) — размерность его ядра и коядра зависит от медленных переменных X, T (ср. с [21]).

2. Разумеется, вместо «параметров» a_i, b_i, C можно выбрать другие, но уравнения для них будут зацепленными, хотя, возможно, и полезными при анализе конкретных физических задач. Например, в однофазовом случае для «параметров» $K = K(X, T) = \partial S/\partial X$,

$$M = M(X,T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}\,dz,$$

$$D = D(X,T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\tilde{u} - M)^2\,dz.$$

Они имеют вид

$$K_t + \frac{\partial}{\partial X}(K(2M - K) + D) = 0; \qquad M_t + \frac{\partial}{\partial X}(M^2 + D) = 0;$$

$$D_t + 2\frac{\partial}{\partial X}(D^2/K + (M - K)D) + 2D\partial M/\partial X = 0.$$

3. Условие (2.6) может быть ослаблено. Вместо (2.6), например, достаточно потребовать, чтобы при некотором $N \geqslant n$ матрица $\| \partial^j K_i/\partial X^j \|$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, N)$ имела полный ранг в каждой точке $(X, T) \in \Omega$.

Мы благодарим О. С. Рыжова за обсуждения постановки задачи.

Институт проблем механики
Институт теоретической физики им. Ландау

Поступило 12.06.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Benjamin T. B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid. Mech. 1967. V. 29. P. 559—592.
[2] Жук В. И., Рыжов О. С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ДАН СССР. 1982. Т. 263, № 1. С. 56—59.
[3] Smith F. T., Burggraf O. R. On the development of large-sized short-scaled distrubances in boundary layers // Proc. Roy. Soc. 1985. V. 339, N 1816. P. 25—55.
[4] Satsyma J., Ablowitz M. J., Kodama Y. On internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth // Phys. Lett. 1979. V. 73A. P. 283—286.
[5] Fokas A. S., Ablowitz M. J. The inverse scattering transform for the Benjamin — Ono equation — a pivot to multidimensional problems // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 1—10.
[6] Бобенко А. И., Матвеев В. Б., Салль М. А. Нелокальные уравнения Кортевега — де Фриза и Кадомцева — Петвиашвили // ДАН СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1357—1360.
[7] Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform // SIAM. Philadelphia, 1981.
[8] Satsuma J., Ishimory A. Periodic wave and rational soliton solutions of the Benjamin — Ono equation // J. Phys. Society Japan. 1979. V. 46, N 2.
[9] Кричевер И. М. О рациональных решениях уравнения Кадомцева — Петвиашвили и интегрируемых системах частиц на прямой // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12, № 1. С. 76—78.
[10] Дубровин Б. А., Маланюк Т. Г., Кричевер И. М., Маханьков В. Г. Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1988. Т. 19, № 3. С. 579—621.
[11] Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях // Итоги науки и техники. Современные проблемы. Т. 15. М.: ВИНИТИ, 1980. С. 3—94.
[12] Dobrokhotov S. Yu., Maslov V. P. Multiphase asymptotics of nonlinear partial differential equations // Sov. Sci. Rev. Math. Phys. Rev. V. 3. Amsterdam: OPA, 1982. P. 211—311.
[13] Flashka H., Forest M. G., McLaughlin D. W. Multiphase spectral solution of the Korteweg — de Vries equation // Comm. Pure Appl. Math. 1980. V. 33, N 6. P. 739—784.
[14] Кричевер И. М. Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22, № 3. С. 37—52.

[15] Маслов В. П. Переход при $h \to 0$ уравнения Гейзенберга в уравнения идеального газа и квантование релятивистской гидродинамики // ТМФ. 1969. № 3. С. 378—383.
[16] Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
[17] Доброхотов С. Ю. Резонансная поправка к адиабатически возмущенному конечнозонному почти периодическому решению уравнения Кортевега — де Фриза // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 4. С. 551—554.
[18] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Т. 3. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985.
[19] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
[20] Haberman R. The Modulated Phase Shift for Weakly Dissipated Nonlinear Oscillatory Waves of the Korteweg — de Vries Type // Stud. Appl. Math. 1988. V. 78. P. 73—90.
[21] Воробьев Ю. М., Доброхотов С. Ю. Базисные системы на торе, порожденные конечнозонным интегрированием уравнением Кортевега — де Фриза // Математические заметки. 1990. Т. 47, вып. 1. С. 47—61.