Функциональный анализ и его приложения
1994, т. 28, вып. 1, с. 26–40

УДК 517.9

Алгебро-геометрические двумерные операторы с самосогласованными потенциалами

© 1994. И. М. Кричевер[1]

Посвящается И. М. Гельфанду
к его восьмидесятилетию

§1. Введение. Формулировка результатов

Динамика струн в сильных гравитационных полях и особенно в окрестности пространственно-временных сингулярностей вызывает в последнее время повышенный интерес. Одной из целей настоящей работы является построение точных решений струнных уравнений в $(2+1)$-мерном пространстве–времени де Ситтера. Простейшие решения этих уравнений были построены в работе [1], которая стимулировала появление настоящей статьи и в которой можно найти подробное обсуждение физической постановки задачи и соответствующую библиографию.

С геометрической точки зрения задача состоит в построении минимальных поверхностей в псевдосфере, т.е. если $q = \{q_i(\sigma, \tau)\}$ — параметрическая запись вложения поверхности, то

$$\langle q, q \rangle = \sum_{i=1}^{D} \eta_i q_i q_i = 1\,. \tag{1.1}$$

Константы η_i, определяющие метрику, предполагаются в дальнейшем, если не оговорено противное, равными $\eta = (-1, 1, \dots)$. Уравнения вложения минимальных поверхностей в квадрику (1.1) имеют вид

$$(\partial_+\partial_- + u)\,q = 0, \qquad \partial_\pm = \partial/\partial x_\pm,\ x_\pm = (\tau \pm \sigma)/2\,. \tag{1.2}$$

Как следует из (1.1), (1.2), множитель Лагранжа $u = u(x_+, x_-)$ в (1.2) равен

$$u = \langle \partial_+ q, \partial_- q \rangle. \tag{1.3}$$

Уравнения (1.2), (1.3) являются системой нелинейных уравнений на функции $q_i(\sigma, \tau)$. Они представляют собой частный случай уравнений общих σ-моделей

$$\partial_+\partial_-\Psi + \langle \partial_+\Psi, \partial_-\Psi \rangle_* \Psi = 0, \tag{1.4}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_*$ — скалярное произведение, задаваемое некоторой матрицей (g_{ij}). Уравнения (1.4) можно отнести к классу уравнений, которые условно могут

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №93-011-16087).

быть названы *линейными уравнениями с самосогласованными потенциалами.* К числу таких уравнений относится нелинейное уравнение Шрёдингера, которое можно представить как комбинацию линейного уравнения

$$(i\partial_t - \partial_x^2 + u(x,t))\,\psi = 0 \tag{1.5}$$

и условия «самосогласования»

$$u = \alpha|\psi|^2. \tag{1.6}$$

Многие физические модели, описывающие взаимодействие длинных и коротких волн, также имеют вид системы, состоящей из уравнения (1.5) и различных типов условий самосогласования. Упомянем модели, в которых эти условия имеют вид

$$u_t + u_x = |\psi|_x^2 \quad [2], \tag{1.7}$$

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_{xxxx} + \beta(u^2)_{xx} = |\psi|_{xx}^2 \quad [3]\,. \tag{1.8}$$

Единая схема построения точных решений нестационарного уравнения Шрёдингера (1.5) с различными условиями самосогласования была предложена в работе [4] (ее реализация для построения солитонных решений этих моделей содержится в [5]). Впервые подобная конструкция была предложена в [6] для построения решений нелинейного уравнения Шрёдингера и его векторных аналогов.

Основной целью настоящей работы является демонстрация того, что предлагаемая схема достаточно универсальна и может быть применена и к случаю более общих уравнений. Для σ-моделей она может быть рассмотрена как альтернатива методу обратной задачи. При этом следует отметить, что, как представляется автору, существенным преимуществом этой схемы является то, что в ее рамках удается решить уравнения σ-модели так, чтобы при этом удовлетворялись *струнные ограничения.*

Струнные ограничения вытекают из репараметризационной инвариантности мировой поверхности струны. Они имеют вид

$$T_{+,+} = \langle \partial_+ q, \partial_+ q\rangle = 0, \qquad T_{-,-} = \langle \partial_- q, \partial_- q\rangle = 0\,. \tag{1.9}$$

(Уравнения (1.9) являются классическими аналогами квантовых уравнений

$$L_n|0\rangle = 0, \quad n > -1, \qquad \langle 0|L_n = 0, \quad n < 1,$$

определяющих вакуумный вектор в модели бозонной струны. Здесь операторы L_n — это генераторы алгебры Вирасоро.) Общую идею предлагаемого метода построения точных решений системы уравнений (1.4) можно представить следующим образом. На первом шаге строятся «интегрируемые» потенциалы $u = u(x_+, x_-)$ двумерного волнового уравнения

$$(\partial_+\partial_- + u(x_+, x_-))\,\psi(x_+, x_-, Q) = 0, \tag{1.10}$$

т.е. потенциалы, для которых известно семейство решений уравнения (1.10), зависящих от «спектрального» параметра Q, который пробегает точки вспомогательной римановой поверхности конечного рода. Будем говорить, что выполнены *условия самосогласования*, если найдутся такие значения спектрального параметра Q_i, $i = 1, \ldots, 2N$, что

$$u(x_+, x_-) = \sum_{i,j} g_{ij} \partial_+ \psi_i \partial_- \psi_j , \tag{1.11}$$

где

$$\psi_i(x_+, x_-) = \psi_i(x_+, x_-, Q_i) . \tag{1.12}$$

Линейное уравнение (1.10), дополненное условиями самосогласования, приводит к нелинейным уравнениям (1.4) для вектора $\Psi(x_+, x_-) = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$, компонентами которого являются значения «волновой функции» $\psi(x_+, x_-, Q)$ в выделенных точках Q_i.

Таким образом, в рамках указанного подхода решение задачи построения решений нелинейных уравнений (1.4) состоит в построении интегрируемых линейных задач и последующем отборе среди них тех, для которых соответствующие потенциалы удовлетворяют условиям самосогласования.

Реализация изложенной идеи для построения решений полной совокупности уравнений (1.1)–(1.3), (1.9), описывающих струнную динамику, приведена в следующих двух параграфах работы. В § 2 излагаются необходимые сведения о конструкции интегрируемых потенциалов двумерного уравнения Шрёдингера [8, 9]. В § 3 найдены ограничения на параметры конструкции, которые приводят к условиям самосогласования вида (1.11) и к струнным ограничениям (1.9).

Построенные алгебро-геометрические решения задаются вспомогательной алгебраической кривой Γ_0 рода g_0 с парой отмеченных точек $P_\pm$ и мероморфной функцией $E(P)$, $P \in \Gamma_0$, с простыми полюсами Q_i^0, $i = 1, \ldots, N$. Пусть Γ — двулистное накрытие кривой Γ_0, ветвящееся лишь в отмеченных точках $P_\pm$. Матрица b-периодов нечетных (относительно перестановки листов) голоморфных дифференциалов на Γ определяет тэта-функцию Прима $\theta_{\mathrm{Pr}}(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_{g_0})$, через которую и выражаются искомые решения. По каждому набору данных Γ, $P_\pm$, $E(P)$ с помощью квадратур строятся константы r_j, $p_j^\pm$ и g_0-мерные векторы $U^\pm$, A_j, $j = 1, \ldots, N$, такие, что функции

$$\begin{aligned} \varphi_j(x_+, x_-) &= r_j \, \frac{\theta_{\mathrm{Pr}}(A_j + U^+ x_+ + U^- x_- + Z)\,\theta_{\mathrm{Pr}}(Z)}{\theta_{\mathrm{Pr}}(A_j + Z)\,\theta_{\mathrm{Pr}}(U^+ x_+ + U^- x_- + Z)} \, e^{ip_j^+ x_+ + ip_j^- x_-} , \\ \varphi_j^\sigma(x_+, x_-) &= r_j \, \frac{\theta_{\mathrm{Pr}}(-A_j + U^+ x_+ + U^- x_- + Z)\,\theta_{\mathrm{Pr}}(Z)}{\theta_{\mathrm{Pr}}(-A_j + Z)\,\theta_{\mathrm{Pr}}(U^+ x_+ + U^- x_- + Z)} \, e^{-(ip_j^+ x_+ + ip_j^- x_-)} \end{aligned} \tag{1.13}$$

при произвольном векторе Z удовлетворяют уравнению (1.10), в котором

$$u = \partial_+ \partial_- \theta_{\mathrm{Pr}}(U^+ x_+ + U^- x_- + Z) + \mathrm{const} . \tag{1.14}$$

При этом имеют место равенства

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i \varphi_i^\sigma = 1, \tag{1.15}$$

$$2u = \sum_{i=1}^N \partial_+ \varphi_i \partial_- \varphi_i^\sigma + \partial_+ \varphi_i^\sigma \partial_- \varphi_i . \tag{1.16}$$

Следовательно, функции

$$\begin{gathered} q_1 = (\varphi_1 - \varphi_1^\sigma)/2, \quad q_2 = (\varphi_1 + \varphi_1^\sigma)/2, \\ q_{2j} = (\varphi_j - \varphi_j^\sigma)/2i, \quad q_{2j+1} = (\varphi_j + \varphi_j^\sigma)/2, \qquad j = 2, \ldots, N, \end{gathered} \tag{1.17}$$

удовлетворяют системе уравнений (1.1)–(1.3).

В терминах исходных алгебро-геометрических данных Γ_0, $P_\pm$, $E(P)$ выделение решений, удовлетворяющих струнным ограничениям, достигается следующим условием. Если дифференциал функции $E(P)$ равен нулю в отмеченных точках, т.е. $dE(P_\pm) = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_\pm \varphi_i \partial_\pm \varphi_i^\sigma = 0\,. \tag{1.18}$$

Решениям струнных уравнений для случая $(2+1)$-мерного пространства де Ситтера, которое может быть представлено как однополостный гиперболоид

$$1 = -q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \tag{1.19}$$

в плоском пространстве Минковского с координатами q_1, q_2, q_3, q_4 и метрикой

$$ds^2 = H^{-2}(-dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2 + dq_4^2), \tag{1.20}$$

где H называется константой Хаббла, отвечает случай $N = 2$. Это означает, что исходная алгебраическая кривая Γ_0 должна быть гиперэллиптической. В §4 детально разобран этот случай. Явно, в квадратурах, представлены выражения всех параметров r_j, $p_j^\pm$, A_j, $U^\pm$, $j = 1, 2$, входящих в формулу (1.13), через исходные данные. Этими данными являются точки ветвления $E_- < E_1 < \ldots < E_{2n} < E_+$, $n = g_0$, гиперэллиптической кривой. Любой такой набор данных задает решения струнных уравнений в пространстве де Ситтера. Эти решения являются квазипериодическими функциями переменной σ. Условие 2π-периодичности полученных решений (что необходимо для случая замкнутых струн) эквивалентно соотношениям

$$p_2^+ - p_2^- = 2\pi, \qquad U_k^+ - U_k^- = \pi m_k, \quad m_k \in \mathbb{Z}, \tag{1.21}$$

где $U_k^\pm$, $k = 1, \ldots, n$, — координаты векторов $U^\pm$, входящих в формулу (1.13). Параметры E_s определяют с помощью квадратур эти координаты, поэтому (1.21) являются набором $n+1$ уравнений на $2n+2$ параметра. Таким образом, для каждого n построено $2n+1$-параметрическое (напомним, что в формуле (1.13) вектор Z произволен) семейство 2π-периодических по переменной σ решений струнных уравнений в пространстве де Ситтера. При $\tau \to \pm\infty$ функции $q_i(\sigma, \tau)$, $i = 1, 2$, стремятся к $\pm\infty$. Однако важно отметить, что «внутренний размер» струны, определяемый инвариантной метрикой

$$ds^2 = u(x_+, x_-)(d\sigma^2 - d\tau^2)/2H^2, \tag{1.22}$$

является, как следует из формулы (1.14), квазипериодической функцией τ.

§2. Конечнозонные при одном уровне энергии операторы Шрёдингера

Обратная задача для двумерного оператора Шрёдингера в магнитном поле
$$H=(\partial_x-iA_1(x,y))^2+(\partial_y-iA_2(x,y))^2+u(x,y), \tag{2.1}$$
основанная на спектральных данных, отвечающих одному уровню энергии $E=E_0$, была поставлена и рассматривалась в работе [7]. В ней был построен класс «конечнозонных на данном уровне энергии» операторов. Этот класс с точки зрения спектральной теории выделяется тем, что риманова поверхность блоховских функций, отвечающих этому уровню энергии, — «комплексная ферми-поверхность» — имеет конечный род.

В работах [8, 9] были указаны условия на алгебро-геометрические данные конструкции [7], выделяющие вещественные гладкие потенциальные ($A_i=0$) операторы $H=H_0$,
$$H_0=\partial_x^2+\partial_y^2+u(x,y)\,. \tag{2.2}$$
Приведем необходимые для дальнейшего результаты этих работ вместе с незначительными изменениями, вызванными тем, что рассматриваемый нами оператор (1.10) является не эллиптическим (как (2.2)), а гиперболическим. Отметим, что комплексная теория обоих операторов (1.10) и (2.2) одинакова. Различие проявляется лишь в условиях вещественности и неособости потенциалов.

Пусть Γ — неособая алгебраическая кривая рода g с двумя отмеченными точками $P_\pm$, в окрестности которых фиксированы локальные координаты $k_\pm^{-1}(Q)$, $k_\pm^{-1}(P_\pm)=0$. Предположим, что на кривой Γ имеется голоморфная инволюция
$$\sigma\colon\Gamma\mapsto\Gamma, \tag{2.3}$$
имеющая только две неподвижные точки, совпадающие с $P_\pm$, т.е.
$$\sigma(P_\pm)=P_\pm\,. \tag{2.4}$$
При этом локальные параметры выбраны так, что
$$k_\pm(\sigma(Q))=-k_\pm(Q)\,. \tag{2.5}$$
Обозначим через Γ_0 факторкривую. Проекция
$$\pi\colon\Gamma\mapsto\Gamma_0=\Gamma/\sigma \tag{2.6}$$
представляет Γ как двулистное накрытие кривой Γ_0 с ветвлениями в точках $P_\pm$. Инволюция σ при такой реализации является просто перестановкой листов. Род g_0 кривой Γ_0 связан с родом кривой Γ соотношением
$$g=2g_0\,. \tag{2.7}$$
Рассмотрим произвольный дифференциал $d\Omega(Q)$ третьего рода на Γ_0 с вычетами ∓1 в точках $P_\pm$ (вне точек $P_\pm$ он голоморфен). Обозначим через $\widehat{\gamma}_i$, $i=1,\dots,2g_0=g$, нули этого дифференциала, т.е.
$$d\Omega(\widehat{\gamma}_i)=0\,. \tag{2.8}$$

Выберем по одному из прообразов на Γ для каждой точки $\widehat{\gamma}_i$, т.е. зафиксируем на Γ набор g точек $\gamma_1, \dots, \gamma_g$, таких, что

$$\pi(\gamma_i) = \widehat{\gamma}_i, \qquad i = 1, \dots, g. \tag{2.9}$$

(В дальнейшем такие дивизоры γ_s будут называться допустимыми.) Функцией Бейкера–Ахиезера $\psi(x_+, x_-, Q)$, отвечающей перечисленному набору данных, по определению называется функция, которая однозначно определяется следующими своими аналитическими свойствами по переменной $Q \in \Gamma$:

1) вне точек $P_\pm$ функция ψ мероморфна и имеет не более чем простые полюсы в точках γ_s (если они все различны);
2) в окрестности точек $P_\pm$ функция ψ имеет вид

$$\psi(x_+, x_-, Q) = e^{k_\pm x_\pm}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^\pm(x_+, x_-)\, k_\pm^{-s}\right), \tag{2.10}$$

$k_\pm = k_\pm(Q)$, $Q \to P_\pm$.

Для почти всех значений $x_\pm$ (которые в определении играют роль внешних параметров) функция $\psi(x_+, x_-, Q)$ существует и единственна. Имеет место такая теорема:

Теорема 2.1 [8]. *Функция Бейкера–Ахиезера $\psi(x_+, x_-, Q)$ удовлетворяет уравнению*

$$(\partial_+\partial_- + u(x_+, x_-))\,\psi(x_+, x_-, Q) = 0, \tag{2.11}$$

где

$$u(x_+, x_-) = -\partial_-\xi_1^+ = -\partial_+\xi_1^-, \tag{2.12}$$

а $\xi_1^\pm = \xi_1^\pm(x_+, x_-)$ *— первые коэффициенты разложения* (2.10).

В общем случае потенциал $u(x_+, x_-)$ является комплексной и мероморфной функцией переменных $x_\pm$. Его явное выражение в терминах тэта-функций Прима было получено в [9] (см. формулу (1.14)). Сформулируем достаточные условия вещественности и регулярности потенциала $u(x_+, x_-)$.

Предположим, что на кривой Γ определена антиголоморфная инволюция

$$\tau \colon \Gamma \mapsto \Gamma, \tag{2.13}$$

оставляющая точки $P_\pm$ неподвижными,

$$\tau(P_\pm) = P_\pm, \qquad k_\pm(\tau(Q)) = \overline{k_\pm(Q)}. \tag{2.14}$$

Лемма 2.1. *Если дивизор полюсов $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ функции Бейкера–Ахиезера $\psi(x_\pm, x_-, Q)$ инвариантен относительно антиинволюции τ, т.е.*

$$\tau(D) = D, \qquad D = \gamma_1 + \dots + \gamma_g, \tag{2.15}$$

то

$$\psi(x_+, x_-, \tau(Q)) = \overline{\psi(x_+, x_-, Q)}, \tag{2.16}$$

а соответствующий потенциал $u(x_+, x_-)$ *уравнения* (2.11) *вещественен,*

$$u(x_+, x_-) = \overline{u(x_+, x_-)}\,. \tag{2.17}$$

Число неподвижных овалов антиголоморфной инволюции на алгебраической кривой рода g в силу теоремы Гурвица не превосходит $g+1$. Кривые с максимально возможным числом таких овалов называются М-кривыми.

Лемма 2.2. *Пусть* Γ *является* М-*кривой относительно* τ (*т.е. антиинволюция* τ *имеет* $g+1$ *неподвижных овалов* $a_0, a_1, \dots, a_g$), *и пусть неподвижные точки* $P_\pm$ *и дивизор полюсов* $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ *выбраны так, что*

$$P_\pm \in a_0, \quad \gamma_s \in a_s\,. \tag{2.18}$$

Тогда определяемый этими данными потенциал $u(x_+, x_-)$ *является вещественным и неособым для всех вещественных значений* $x_\pm$.

Замечание. Представляется естественной гипотеза, что указанные условия являются не только достаточными, но и необходимыми для вещественности и гладкости алгебро-геометрических потенциалов.

Доказательства обеих лемм практически идентичны доказательствам их аналогов для эллиптического уравнения (2.2) (см. [8, 9]; их также можно найти в [10]).

§3. Условия самосогласования

Пусть $E(P)$ — мероморфная функция на кривой Γ_0 с простыми полюсами, которые мы обозначим через $Q_i^0 \in \Gamma_0$, $i = 1, \dots, N$. Прообразы этих точек на двулистной накрывающей Γ обозначим через Q_i, $Q_i^\sigma = \sigma(Q_i)$.

Лемма 3.1. *Имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x_+, x_-)\varphi_i^\sigma(x_+, x_-) = 1, \tag{3.1}$$

где функции

$$\varphi_i(x_+, x_-) = r_i\psi(x_+, x_-, Q_i), \tag{3.2}$$

$$\varphi_i^\sigma(x_+, x_-) = r_i\psi(x_+, x_-, Q_i^\sigma) \tag{3.3}$$

равны, с точностью до постоянного множителя, значениям функции Бейкера–Ахиезера, определенной в предшествующем параграфе, в точках Q_i, Q_i^σ. *Константы пропорциональности* r_i *даются формулой*

$$r_i^2 = \frac{\operatorname{res}_{Q_i} E(Q)\, d\Omega(Q)}{E_+ - E_-}, \qquad E_\pm = E(P_\pm)\,. \tag{3.4}$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциал

$$\widehat{d\Omega}(x_+, x_-, Q) = \frac{\psi(x_+, x_-, Q)\,\psi^\sigma(x_+, x_-, Q)\,E(Q)\,d\Omega(Q)}{E_+ - E_-}, \tag{3.5}$$

где по определению

$$\psi^{\sigma}(x_+, x_-, Q) = \psi(x_+, x_-, \sigma(Q)). \tag{3.6}$$

Функции $\psi(x_+, x_-, Q)$, $\psi^{\sigma}(x_+, x_-, Q)$ мероморфны вне точек $P_{\pm}$, где они имеют существенные особенности. Из (2.5) и (2.10) следует, что дифференциал $\widehat{d\Omega}$ мероморфен всюду на Γ, включая точки $P_{\pm}$. Условие (2.8) означает, что этот дифференциал голоморфен в точках γ_s, γ_s^{σ}. Следовательно, его возможные полюсы — это точки Q_i, Q_i^{σ} и точки $P_{\pm}$. Его вычеты в этих точках равны

$$\operatorname{res}_{Q_i} \widehat{d\Omega} = \operatorname{res}_{Q_i^{\sigma}} \widehat{d\Omega} = \varphi_i(x_+, x_-)\,\varphi_i^{\sigma}(x_+, x_-), \tag{3.7}$$

$$\operatorname{res}_{P_{\pm}} \widehat{d\Omega} = \mp \frac{E_{\pm}}{E_+ - E_-}\,. \tag{3.8}$$

Сумма вычетов мероморфного дифференциала на компактной кривой равна нулю, т.е. сумма выражений (3.7), (3.8) равна нулю, что и доказывает равенство (3.1).

Лемма 3.2. *Имеет место равенство*

$$2u(x_+, x_-) = \sum_{i=1}^{N} \partial_+\varphi_i(x_+, x_-)\,\partial_-\varphi_i^{\sigma}(x_+, x_-) + \partial_-\varphi_i(x_+, x_-)\,\partial_+\varphi_i^{\sigma}(x_+, x_-), \tag{3.9}$$

где $u(x_+, x_-)$ — *потенциал оператора* (2.11), *отвечающего функции Бейкера–Ахиезера.*

Доказательство. Рассмотрим мероморфный дифференциал

$$d\Omega_1(x_+, x_-, Q) = \frac{E(Q)\,d\Omega(Q)}{E_+ - E_-}\,(\partial_+\psi\partial_-\psi^{\sigma} + \partial_-\psi\partial_+\psi^{\sigma})\,. \tag{3.10}$$

Этот дифференциал голоморфен вне точек Q_i, Q_i^{σ}, $P_{\pm}$. Сумма его вычетов в точках Q_i, Q_i^{σ} равна правой части равенства (3.9). Подставляя разложение (2.10) и используя (2.12), получим

$$\operatorname{res}_{P_{\pm}} d\Omega_1 = \mp 2\,\frac{E_{\pm}}{E_+ - E_-}\,\partial_{\mp}\xi_1^{\pm} = \mp 2\,\frac{E_{\pm}}{E_+ - E_-}\,u\,. \tag{3.11}$$

Сумма вычетов мероморфного дифференциала равна нулю, что и доказывает лемму.

Лемма. *Предположим, что дифференциал функции* $E(Q)$ *равен нулю в точках* $P_{\pm}$, *т.е.* $dE(P_{\pm}) = 0$. *Тогда для значений функции Бейкера–Ахиезера в точках* Q_i, Q_i^{σ} *выполнены равенства*

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_{\pm}\varphi_i(x_+, x_-)\,\partial_{\pm}\varphi_i^{\sigma}(x_+, x_-) = 0\,. \tag{3.12}$$

Доказательство. Левые части равенства (3.12) равны суммам вычетов вне точек $P_{\pm}$ дифференциалов

$$d\Omega_{\pm} = (E(Q) - E_{\pm})\,\partial_{\pm}\psi(x_+, x_-, Q)\,\partial_{\pm}\psi^{\sigma}(x_+, x_-, Q)\,d\Omega(Q)\,. \tag{3.13}$$

Поэтому для доказательства (3.12) достаточно показать, что равны нулю вычеты соответствующих дифференциалов в точках $P_\pm$. Условие $dE(P_\pm) = 0$ означает, что в окрестностях точек $P_\pm$ функция $E(Q)$ имеет вид

$$E(Q) = E_\pm + O(k_\pm^{-4})\,. \tag{3.14}$$

Подставляя разложение (2.10) для функции Бейкера–Ахиезера, получим

$$\operatorname{res}_{P_\pm} d\Omega_+ = 0, \qquad \operatorname{res}_{P_\pm} d\Omega_- = 0\,. \tag{3.15}$$

Как и при построении интегрируемых потенциалов уравнения (2.11), мы изложили вначале конструкцию комплексных решений рассматриваемых уравнений. Перейдем теперь к условиям вещественности и неособости полученных решений. Ниже предполагается, что выполнены условия леммы 3.3, гарантирующие вещественность и неособость потенциала $u(x_+, x_-)$, отвечающего набору алгебро-геометрических данных

$$\{\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_g, P_\pm\}\,. \tag{3.16}$$

Факторкривая $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ является в этом случае M-кривой относительно антиинволюции $\tau_0\colon \Gamma_0 \to \Gamma_0$, индуцированной антиинволюцией $\tau\colon \Gamma \mapsto \Gamma$. Над каждым из ее неподвижных овалов a_i^0, $i = 1, \dots, g_0$, расположено по два неподвижных овала a_i, a_i^σ антиинволюции τ, которые переставляются инволюцией $\sigma(a_i) = a_i^\sigma$. Неподвижный овал a_0, содержащий отмеченные точки $P_\pm$, разбивается этими точками на две дуги a_0^+ и a_0^-. Прообразом дуги a_0^+ является цикл a_0, неподвижный относительно τ, т.е. такой, что

$$\tau(Q) = Q, \qquad Q \in a_0\,. \tag{3.17}$$

Прообразом дуги a_0^- является цикл $\tilde a_0$, неподвижный относительно антиинволюции $\tau\sigma$,

$$\tau\sigma(Q) = Q, \qquad Q \in \tilde a_0\,. \tag{3.18}$$

В дополнение к условиям леммы 3.3 мы предположим, что мероморфная функция $E(Q)$ вещественна, а вычеты дифференциала $E\,d\Omega$ в ее полюсах положительны, т.е.

$$r_i^2 = \frac{1}{E_+ - E_-}\operatorname{res}_{Q_i^0} E(Q)\,d\Omega(Q) > 0\,. \tag{3.19}$$

Кроме того, мы предположим, что полюс Q_1^0 лежит на дуге a_0^+, а все остальные полюсы — на дуге a_0^-. В этом случае для прообразов полюсов функции E на кривой Γ будут выполнены соотношения

$$\tau(Q_1) = Q_1, \quad \tau(Q_1^\sigma) = Q_1^\sigma, \tag{3.20}$$

$$\tau(Q_i) = Q_i^\sigma, \qquad i > 1\,. \tag{3.21}$$

Из (2.16) следует, что при этом будут выполнены следующие условия вещественности:

$$\varphi_1 = \overline{\varphi_1}, \quad \varphi_1^\sigma = \overline{\varphi_1^\sigma}, \tag{3.22}$$

$$\varphi_i = \overline{\varphi_i^\sigma}, \qquad i > 1\,. \tag{3.23}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\psi(x_+, x_-, Q)$ — функция Бейкера–Ахиезера, задаваемая кривой Γ, дивизором полюсов γ_i, точками $P_\pm$ и локальными параметрами в их окрестностях, которые удовлетворяют условиям леммы* 3.2. *Пусть мероморфная функция $E(Q)$ удовлетворяет условиям* (3.19)–(3.21). *Тогда вектор-функция $q = q_i(x_+, x_-)$ с координатами, заданными формулами* (1.17), *в которых функции φ_i, φ_i^σ определены в* (3.2), (3.3), *является вещественным и неособым решением системы уравнений*

$$\begin{aligned} &(\partial_+\partial_- + u)q = 0, \qquad &&\langle q, q\rangle = 1, \\ &u = \langle \partial_+ q, \partial_- q\rangle, &&\langle \partial_\pm q, \partial_\pm q\rangle = 0\,. \end{aligned} \tag{3.24}$$

§ 4. Тэта-функциональные формулы

Построение тэта-функциональных формул для решений струнных уравнений для случая $(2+1)$-мерного пространства де Ситтера мы начнем с явного построения двулистной накрывающей гиперэллиптической кривой Γ_0. Пусть Γ_0 — гиперэллиптическая кривая рода n, заданная уравнением

$$y^2 = (E - E_-)(E - E_+)\prod_{i=1}^{2n}(E - E_i) = R_{2n+2}(E)\,. \tag{4.1}$$

Вещественные корни полинома R_{2n+2} будут предполагаться занумерованными следующим образом:

$$E_- < E_1 < E_2 < \ldots < E_{2n-1} < E_{2n} < E_+\,. \tag{4.2}$$

Вещественными овалами антиголоморфной инволюции

$$\tau_0\colon (y, E) \mapsto (\overline{y}, \overline{E}) \tag{4.3}$$

являются циклы a_i^0, расположенные над запрещенными зонами $[E_{2i-1}, E_{2i}]$.

Стандартным образом определяется базис голоморфных дифференциалов

$$\omega_j = \frac{1}{\sqrt{R}}\sum_{j=0}^{n-1} r_{ij}E^j\,dE, \tag{4.4}$$

нормированных условиями

$$\int_{E_{2i-1}}^{E_{2i}} \omega_j = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,. \tag{4.5}$$

Матрицей Римана называется матрица

$$B_{kj} = 2\int_{E_-}^{E_{2j-1}} \omega_k\,. \tag{4.6}$$

Базисные векторы e_k и векторы B_k, образованные столбцами матрицы (4.6), порождают в n-мерном комплексном пространстве решетку $\mathcal{B}$, фактор по которой является n-мерным комплексным тором, называемый якобианом гиперэллиптической кривой Γ_0,

$$J(\Gamma_0) = \mathbb{C}^n/\mathcal{B}, \qquad \mathcal{B} = \sum n_k e_k + m_k B_k, \quad n_k, m_k \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

Вектор $A(P)$ с компонентами

$$A_k(P) = \int_{E_-}^{P} \omega_k \tag{4.8}$$

определяет отображение Абеля

$$A\colon \Gamma_0 \to J(\Gamma_0). \tag{4.9}$$

Матрица Римана симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть. Определяемая по этой матрице целая функция

$$\theta(z) = \theta(z|B) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i(z,m)+\pi i(Bm,m)}, \tag{4.10}$$

$$z = (z_1, \ldots, z_n), \quad m = (m_1, \ldots, m_n), \quad (z,m) = z_1 m_1 + \ldots + z_n m_n,$$

называется тэта-функцией Римана. Она имеет следующие трансляционные свойства:

$$\theta(z + e_k) = \theta(z), \qquad \theta(z + B_k) = e^{-2\pi i z_k - \pi i B_{kk}}\theta(z). \tag{4.11}$$

Функция $\theta(A(P) - Z)$ является многозначной функцией точки P. Однако в силу (4.11) нули этой функции определены однозначно. Для вектора Z общего положения эта функция имеет n нулей:

$$\theta(A(\gamma_s) - Z) = 0, \qquad s = 1, \ldots, n. \tag{4.12}$$

При этом

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_{2i}}^{\gamma_i} \omega_k. \tag{4.13}$$

Из (4.13) и (4.12) следует, что для векторов $Z^{\pm}$, координаты которых равны

$$Z_k^{\pm} = \int_{E_2}^{E_{\pm}} \omega_k, \tag{4.14}$$

корнями соответствующих уравнений (4.12) являются точки

$$E_{\pm}, \quad E_{2i},\ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Следовательно, функция $\lambda(P)$, определяемая формулой

$$\lambda(P) = \frac{\theta(A(P) - Z^+)\theta(A(P) - Z^-)}{\theta^2(A(P) - \xi)}, \qquad \xi = \frac{Z^+ + Z^-}{2}, \tag{4.15}$$

имеет простые нули в точках $E_{\pm}$ и двукратные нули в точках E_{2i}, $i = 2, \ldots, n$. Кроме того, она имеет двукратные полюсы в точках $\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_2, \widehat{\gamma}_3, \ldots, \widehat{\gamma}_n$, расположенных по одной на циклах $a_0^0, a_2^0, a_3^0, \ldots, a_n^0$. (Необходимо отметить, что, как следует из (4.11), правая часть формулы (4.15) не меняется при сдвиге на вектор решетки $\mathcal{B}$. Это означает, что $\lambda(P)$ является корректно определенной функцией на Γ_0.)

Функция $\lambda(P)$ вещественна на всех вещественных овалах. Поэтому в силу двукратности ее нулей и полюсов она имеет постоянные знаки на овалах $a_1^0, \dots, a_n^0$. Положим

$$s_i = \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}\lambda(P)|_{P\in a_i^0}, \quad \varepsilon_i = \tfrac{1}{2} + s_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{4.16}$$

Функция

$$\mu(P) = (-1)^{\varepsilon_1}\lambda(P)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{E-E_i}{E-E_{2i-1}}\right)^{\varepsilon_i} \tag{4.17}$$

имеет простые нули в точках $E_\pm$, двукратные нули в точках E_{2i} или E_{2i-1} в зависимости от знака s_i и двукратные полюсы в точках $\widehat{\gamma}_s$, $s = 0, 2, 3, \dots, n$. Эта функция положительна на всех циклах a_i^0, $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим через Γ риманову поверхность функции

$$f = \sqrt{\mu(P)}\,. \tag{4.18}$$

Поверхность Γ двулистно накрывает исходную гиперэллиптическую кривую Γ_0 и имеет две точки ветвления $E_\pm$. Голоморфные дифференциалы на Γ_0 являются четными (относительно перестановки листов) дифференциалами на кривой Γ. Кроме того, имеется еще n-мерное пространство нечетных дифференциалов. В качестве базисных нечетных дифференциалов выберем

$$\widetilde{\omega}_j^{\mathrm{od}} = \frac{dE}{\sqrt{\mu(P)}}\,\frac{\theta(A(P)-\alpha_+)\theta(A(P)-\alpha_-)}{\theta(A(P))\theta(A(P)-e_1/2)}\,Y_j(P), \tag{4.19}$$

где

$$Y_j(P) = \frac{\theta(A(P)-e_j/2)\theta(A(P)-C_j)}{\theta(A(P)-\xi)\theta(A(P)+\hat{e}-\hat{s})}\,. \tag{4.20}$$

Векторы $\alpha_\pm$ в (4.19) равны

$$\alpha_\pm = A(\pm\infty) - A(E_2), \tag{4.21}$$

где $\pm\infty$ — прообразы на двух листах гиперэллиптической кривой Γ_0 бесконечно удаленной точки $E = \infty$. Вектор C_j однозначно определяется из условия, что правая часть формулы (4.19) должна не меняться при сдвигах на периоды,

$$C_j = -\alpha_+ - \alpha_- - \tfrac{1}{2}e_j + \tfrac{1}{2}e_1 + \xi + \hat{s} - \hat{e}\,. \tag{4.22}$$

В формулах (4.19)–(4.22) e_j — базисные векторы, $\hat{e}$ — вектор с координатами $(0, 1, 1, \dots, 1)$, а $\hat{s} = (0, s_2, \dots, s_n)$ (где s_i определены в (4.16)). Базис нормированных дифференциалов $\omega_j^{\mathrm{od}} = \sum \alpha_{ij}\widetilde{\omega}_i^{\mathrm{od}}$ определяется из условий

$$\oint_{E_{2i-1}}^{E_{2i}} \omega_j^{\mathrm{od}} = \delta_{ij}\,. \tag{4.23}$$

(Здесь и далее символ $\oint_P^Q$ означает интеграл по циклу, расположенному на одном из листов Γ над циклом на Γ_0, охватывающим точки P, Q.) Матрица b-периодов этих дифференциалов $B^{\mathrm{Pr}} = (B_{ij}^{\mathrm{Pr}})$,

$$B_{ij}^{\mathrm{Pr}} = \oint_{E_-}^{E_{2i-1}} \omega_j^{\mathrm{od}}, \tag{4.24}$$

определяет по формуле (4.10) тэта-функцию

$$\theta_{\mathrm{Pr}}(z) = \theta(z|B^{\mathrm{Pr}}),$$

которая в данном случае называется тэта-функцией Прима.

Для того чтобы предъявить явное выражение для функции Бейкера–Ахиезера в терминах тэта-функции Прима, нам потребуется ввести еще несколько обозначений. В первую очередь мы определим для любой точки $Q \in \Gamma$ вектор

$$A_k^{\mathrm{od}}(Q) = \int_{E_-}^{Q} \omega_k^{\mathrm{od}}, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{4.25}$$

Он определен с точностью до решетки периодов примиана. Тем не менее, как и в случае тэта-функции Римана, корни уравнения

$$\theta_{\mathrm{Pr}}(A^{\mathrm{od}}(\gamma_s) - Z) = 0, \qquad s = 1, \dots, 2n, \tag{4.26}$$

определены однозначно. Более того, для произвольного вектора Z эти корни образуют допустимый дивизор. А именно, проекции $\widehat{\gamma}_s = \pi(\gamma_s)$ этих точек на гиперэллиптическую кривую Γ_0 являются нулями дифференциала третьего рода $d\Omega$, т.е. $d\Omega(\widehat{\gamma}_s) = 0$. Соответствующий дифференциал равен

$$d\Omega(Q) = \frac{(E_- - E_+)\, dE}{(E - E_+)(E - E_-)} \, \frac{H(Q)}{H(E_-)}, \tag{4.27}$$

где $E = E(Q)$ — проекция точки Q на E-плоскость, а функция $H(Q)$ определяется формулой

$$H(Q) = \frac{\theta_{\mathrm{Pr}}(A^{\mathrm{od}}(Q) - Z)\,\theta_{\mathrm{Pr}}(A^{\mathrm{od}}(Q) + Z)\,\theta^2(A(P) - e_*/2)}{\theta_{\mathrm{Pr}}^2(A^{\mathrm{od}}(Q))\,\theta(A(P))\,\theta(A(P) - e_*)}. \tag{4.28}$$

(Здесь θ — тэта-функция Римана гиперэллиптической кривой Γ_0, $e_* = (1, 1, \dots, 1)$.)

Верно и обратное утверждение, что любой допустимый дивизор (γ_s) может быть получен как корни уравнения (4.26) при подходящем выборе вектора Z. Как следствие всюду далее вектор Z считается свободным параметром вместо дивизора полюсов функции Бейкера–Ахиезера.

Важное замечание. Построение двулистного накрытия Γ исходной кривой Γ_0, построение соответствующих нечетных дифференциалов и тэта-функции Прима было приведено для конкретного примера, когда Γ_0 является гиперэллиптической кривой. Вместе с тем формула (4.29) справедлива и в общем случае.

Теорема 4.1 [9]. *Функция Бейкера–Ахиезера, определенная в §2, может быть представлена в виде*

$$\psi = \frac{\theta_{\mathrm{Pr}}(A^{\mathrm{od}}(Q) + U^+x_+ + U^-x_- - Z)\,\theta_{\mathrm{Pr}}(A^{\mathrm{od}}(Z))}{\theta_{\mathrm{Pr}}(A^{\mathrm{od}}(Q) - Z)\,\theta_{\mathrm{Pr}}(U^+x_+ + U^-x_- - Z)}\, e^{i(p^+(Q)x_+ + p^-(Q)x_-)}. \quad (4.29)$$

Здесь $p^\pm(Q)$ *абелевы интегралы нормированных дифференциалов второго рода с полюсами второго порядка в точках* $P_\pm$, *а векторы* $2\pi U^\pm$ *— это векторы b-периодов этих дифференциалов.*

Для рассматриваемого в этом разделе случая двулистного накрытия гиперэллиптической кривой Γ_0 нормированные дифференциалы второго рода $dp_\pm$ с полюсами второго порядка в точках $E_\pm$ имеют вид

$$dp^\pm = \frac{h^\pm\, dE}{(E - E_\pm)\sqrt{\mu(P)}} + \alpha_j^\pm \omega_j^{\mathrm{od}}. \quad (4.30)$$

Константы $\alpha_j^\pm$ определяются из условий нормировки

$$\oint_{E_{2i-1}}^{E_{2i}} dp^\pm = 0\,. \quad (4.31)$$

Векторы $U^\pm$, входящие в формулу (4.29), — это в данном случае

$$U_k^\pm = \frac{1}{\pi} \oint_{E_-}^{E_{2k-1}} dp^\pm. \quad (4.32)$$

Прообразами бесконечно удаленной точки $E = \infty$ на гиперэллиптической кривой Γ_0 являются две точки $\pm\infty$. Условимся обозначать через $Q_1^0 = +\infty$ ту из них, в которой функция $\mu(Q_1^0) > 0$. Прообразы Q_1, Q_1^σ этой точки и прообразы Q_2, Q_2^σ второй бесконечности $Q_2^0 = -\infty$ составляют ту четверку точек, значения в которых функций Бейкера–Ахиезера и определяют решения струнных уравнений в пространстве де Ситтера.

Итак, пусть

$$A_j = A^{\mathrm{od}}(Q_j), \quad p_j^\pm = \int_{E_-}^{Q_j} dp^\pm, \qquad j = 1, 2, \quad (4.33)$$

и

$$r_j^2 = H(Q_j)/H(E_-), \quad (4.34)$$

где функция $H(Q)$ дается формулой (4.28). (Величины r_j^2 — это вычеты в соответствующих точках дифференциала (3.5), в котором $d\Omega$ дается формулой (4.27).)

Теорема 4.2. *Любой набор* (4.2) *вещественных точек* E_s, *n-мерный вещественный вектор* Z *и вещественные константы* $h^\pm$ *определяют с помощью формул* (1.13), (1.17) (*в которых векторы* $U^\pm$, A_j *и константы* $p_j^\pm$ *и* r_j, $j = 1, 2$, *даются формулами* (4.32), (4.33), (4.34) *соответственно*) *вещественные неособые решения струнных уравнений* (3.24) *в* $(2+1)$*-мерном пространстве де Ситтера.*

В общем случае компоненты q_1, q_2 соответствующих решений неограниченно возрастают или стремятся к нулю при $\tau, \sigma \to \pm\infty$, так как константы $p_1^{\pm}$ являются чисто мнимыми,

$$\operatorname{Im} p_1^{\pm} \neq 0 .$$

Величины $p_2^{\pm}$ являются вещественными. Поэтому координаты q_3, q_4 являются квазипериодическими функциями переменных τ, σ всегда.

Следствие. *Если при заданных параметрах E_s (см. (4.2)) константы $h^{\pm}$ выбрать из условия*

$$p_1^{+} - p_1^{-} = 0, \tag{4.35}$$

то соответствующие решения струнных уравнений будут квазипериодическими функциями переменной σ. Дополнительные соотношения (1.21) выделяют $2n+1$-параметрическое семейство 2π-периодических по переменной σ решений.

Литература

1. *De Vega H., Mikhailov A., Sanchez N.* Exact string solutions in $2+1$-dimensional de Sitter spacetime. Теор. и мат. физика, **94**, вып. 2, 232–240 (1993).
2. *Yajima N., Oikawa M.* Formation and interaction of sonic-Langmuir solitons. Progr. Theor. Phys., **56**, 1719–1739 (1976).
3. *Makhankov V. G.* On stationary solutions of the Schrödinger equation with self-consistent potential satisfying Boussinesq's equation. Phys. Lett. A, **50**, 42–44 (1974).
4. *Кричевер И. М.* Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шрёдингера. Нестационарная модель Пайерлса. Функц. анализ и его прил., **20**, вып. 3, 42–54 (1986).
5. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М.* Точные решения нестационарного уравнения Шрёдингера с самосогласованными потенциалами. Физика элементарн. частиц и атом. ядра, **19**, вып. 3, 579–621 (1988).
6. *Чередник И. В.* Дифференциальные уравнения для функций Бейкера–Ахиезера алгебраических кривых. Функц. анализ и его прил., **12**, вып. 3, 45–54 (1978).
7. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шрёдингера в магнитном поле и римановы поверхности. ДАН СССР, **229**, №1, 15–18 (1976).
8. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные периодические операторы Шрёдингера: потенциальный случай. ДАН СССР, **279**, №4, 784–788 (1984).
9. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные периодические операторы Шрёдингера: явные формулы и эволюционные уравнения. ДАН СССР, **279**, №1, 20–24 (1984).
10. *Кричевер И. М.* Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения. УМН, **44**, вып. 2, 121–184 (1989).

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН

Поступило в редакцию
27 мая 1993 г.