# ПОРОЖДАЮЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ АССОЦИАТИВНОСТИ

А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кричевер

**1. Введение.** Уравнения асссоциативности (или WDDV уравнения) были введены в начале 90-х годов для описания свободной энергии топологических квантовых моделей теории поля (см. [1], [2]). В последние годы эти уравнения привлекают к себе все большее внимание благодаря их связям с инвариантами Громова–Виттена, квантовыми когомологиями и теорией Уизема.

Как было замечено в [3], проблема классификации топологических квантовых моделей теории поля, или проблема построения общих решений уравнения ассоциативности эквивалентна проблеме классификации Егоровских метрик специального типа. Егоровские метрики – это *плоские* диагональные метрики $ds^2 = \sum_{i=1}^n h_i^2(u)(du^i)^2$ такие, что $\partial_i h_j^2(u) = \partial_j h_i^2(u)$, где $\partial_i = \partial/\partial u^i$. Оказывается, что для любой Егоровской метрики, удовлетворяющей дополнительному условию $\sum_{j=1}^n \partial_j h_i = 0$, функции

$$c_{kl}^m(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^m}{\partial u^i}\,\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\,\frac{\partial u^i}{\partial x^l}\,, \tag{1}$$

где $x^k(u)$ плоские координаты метрики, удовлетворяют уравнениям

$$c_{ij}^k(x)c_{km}^l(x) = c_{jm}^k(x)c_{ik}^l(x), \tag{2}$$

которые эквивалентны условию ассоциативности алгебры $\phi_k\phi_l = c_{kl}^m\phi_m$. Более того, оказывается, что существует функция $F(x)$ такая, что ее третьи производные равны

$$\frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^k \partial x^l \partial x^m} = c_{klm}(x) = \eta_{mi}c_{kl}^i(x), \quad \text{где} \quad \eta_{pq} = \sum_{i=1}^n h_i^2(u)\frac{\partial u^i}{\partial x^p}\,\frac{\partial u^i}{\partial x^q}\,. \tag{3}$$

Кроме того, существуют константы $r^m$ такие, что для постоянной матрицы, задающей метрику в плоских координатах имеет место соотношение $\eta_{kl} = r^m c_{klm}(x)$.

Уравнения (2) и условие существования функции $F$, для которой выполнены равенства (3), эквивалентны условиям совместности линейных уравнений (см. [3])

$$\partial_k\Phi_l - \lambda c_{kl}^m\Phi_m = 0, \tag{4}$$

где $\lambda$ спектральный параметр. Отметим, что это утверждение носит в определенном смысле характер теоремы существования, поскольку в общем случае явное выражение $F$ через горизонтальные сечения плоской связности $\nabla_k = \partial/\partial x^k - \lambda c_{kl}^m$ было неизвестно (в ряде частных случаев такие выражения были найдены в [3]–[5]). Основной целью настоящей заметки является получение явной порождающей формулы для $F$. Она была мотивирована результатами работы [6], где соответствующая формула была получена для алгебро-геометрических решений уравнений ассоциативности. Отметим при этом, что хотя общая формула в [6] (теорема 5.1) правильна, в её частном случае (теорема 5.2), который представляет основной интерес, один из членов был пропущен. Мы воспользуемся настоящей возможностью исправить эту неточность.

**2.** Рассмотрим $\beta_{ij}(u) = \beta_{ji}(u)$ решение уравнений Дарбу–Егорова: $\partial_k\beta_{ij} = \beta_{ik}\beta_{kj}$; $\sum_{m=1}^n \partial_m\beta_{ij} = 0$, $i \neq j \neq k$. Следуя [3], зафиксируем единственную Егоровскую метрику, определив коэффициенты Ламе $h_i(u)$ с помощью уравнений $\partial_j h_i(u) = \beta_{ij}(u)h_j(u)$; $\partial_i h_i(u) = -\sum_{j\neq i}\beta_{ij}(u)h_j(u)$ и начальных условий $h_i(0) = 1$.

Плоские координаты этой метрики находятся из системы линейных уравнений $\partial_i\partial_j x^k = \Gamma_{ij}^i\partial_i x^k + \Gamma_{ji}^j\partial_j x^k$, $i \neq j$; $\partial_i\partial_i x^k = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ii}^j\partial_j x^k$, где $\Gamma_{ij}^k$ являются символами Кристофеля: $\Gamma_{ij}^i = \partial_j h_i/h_i, \Gamma_{ii}^j = (2\delta_{ij}-1)(h_i\partial_j h_i)/(h_j^2)$. Зафиксируем единственное решение этой системы с помощью начальных условий: $x^k(0) = 0$, $\sum_{k,l}\eta_{kl}\,\partial_i x^k(0)\partial_j x^l(0) = \delta_{ij}$. Здесь $\eta_{kl}$ заданная симметрическая невырожденная матрица.

Система Дарбу–Егорова эквивалентна условиям совместности системы линейных уравнений

$$\partial_j \Psi_i(u,\lambda) = \beta_{ij}(u)\Psi_j(u,\lambda); \qquad \partial_i \Psi_i(u,\lambda) = \lambda\Psi_i(u,\lambda) - \sum_{k\neq i} \beta_{ik}(u)\Psi_k(u,\lambda). \tag{5}$$

Рассмотрим единственное решение $\Psi_i = (\Psi_i^1, \dots, \Psi_i^n)$, нормированное начальными условиями $\Psi_i^k(0,\lambda) = \lambda\partial_i x^k(0)$. Из системы уравнений (5) следует, что разложение $\Psi_i$ имеет вид $\Psi_i(u,\lambda) = h_i^{-1}(u)\sum_{s=0}^{\infty}\partial_i\xi_s^k(u)\lambda^s$, где $\xi_0^k = r^k$ константы (которые мы определим позже), $\xi_1^k(u) = x^k(u)$ являются плоскими координатами, а $\xi_s^k$ для $s \geqslant 2$ находятся рекуррентно из уравнений $\partial_i\partial_j\xi_s^k = \Gamma_{ij}^i\partial_i\xi_s^k + \Gamma_{ji}^j\partial_j\xi_s^k$, $i \neq j$; $\partial_i\partial_i\xi_s^k = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ii}^j\partial_j\xi_s^k + \partial_i\xi_{s-1}^k$ и начальных условий $\xi_s^k(0) = 0$, $\partial_i\xi_s^k(0) = 0$. Отсюда следуют уравнения

$$\frac{\partial^2\xi_s^m}{\partial x^k\partial x^l} = \sum_{p=1}^n c_{kl}^p\,\frac{\partial\xi_{s-1}^m}{\partial x^p}, \tag{6}$$

где $c_{kl}^p$ определены в (1). Обозначим $\xi_2^k(u)$ и $\xi_3^k(u)$ через $y^k(u)$ и $z^k(u)$, соответственно.

Из (5) следует, что $\lambda\Psi_i = \sum_{j=1}^n\partial_j\Psi_i$. Отсюда имеем $\sum_{i=1}^n\partial_i\xi_s^k(u) = \xi_{s-1}^k$ для $s \geqslant 1$. Последнее равенство для $s = 1$ определяет константы $r^k$.

**3.** Определим порождающую вектор-функцию $\psi$ равенством $\lambda\psi(u,\lambda) = \sum_{i=1}^n h_i(u)\Psi_i(u,\lambda)$. Непосредственно проверяется, что $\partial_i\psi(u,\lambda) = h_i(u)\Psi_i(u,\lambda)$. Первые коэффициенты разложения $k$-ой компоненты этой функции по параметру $\lambda$ имеют вид: $\psi^k(u,\lambda) = r^k + x^k(u)\lambda + y^k(u)\lambda^2 + z^k(u)\lambda^3 + \sum_{s=4}^{\infty}\xi_s^k(u)\lambda^s$. Отметим, что из (6) следует, что $\psi$ является порождающей функцией и для плоских сечений связности $\nabla_k$. Точнее, из (6) непосредственно вытекает, что функции $\Phi_k(x) = \partial\psi(x)/\partial x^k$ удовлетворяют уравнениям (4). Более того, $\lambda\psi(x) = \sum_{k=1}^n r^k\Phi_k(x)$.

Лемма 1. *Функции $x^k(u)$, $y^k(u)$ и $z^k(u)$ удовлетворяют соотношениям*:

$$\sum_{q=1}^n \eta_{kq}y^q = \sum_{p,q=1}^n \eta_{pq}\left(x^q\frac{\partial y^p}{\partial x^k} - r^q\frac{\partial z^p}{\partial x^k}\right).$$

Теорема. *Функция $F(x) = F(u(x))$, $F(u) = \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^n \eta_{pq}\big(x^q(u)y^p(u) - r^q z^p(u)\big)$, удовлетворяет уравнению* (3).

Заметим, что из утверждения леммы вытекает равенство $\partial F/\partial x^k = \sum_{q=1}^n \eta_{kq}y^q$. После этого, утверждение теоремы непосредственно следует из (1) и (6) для $s = 2$.

Доказанные равенства могут быть представлены в виде уравнения типа ренорм-группы: $F(x) - \sum_{k=1}^n x^k\,\frac{\partial F}{\partial x^k} = -\sum_{p,q=1}^n \eta_{pq}\,r^q z^p$. В следующей работе мы планируем получить более общее равенство, включающее в $F$ зависимость от бесконечного числа переменных, отвечающих гравитационным потомкам примарных полей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H. Notes on topological string theory and 2D quantum gravity // String theory and quantum gravity (Trieste, 1990). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1991. P. 91–156. [**2**] Dijkgraaf R., Witten E. // Nucl. Phys. B. 1990. V. 342. № 3. P. 486–522. [**3**] Dubrovin B. A. Geometry of 2D topological field theories // Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993). Lecture Notes in Math. V. 1620. Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 120–348. [**4**] D'Hoker E., Krichever I. M., Phong D. H. // Nucl. Phys. B. 1997. V. 494. № 1–2. P. 89–104. [**5**] Krichever I. M. // Comm. Math. Phys. 1992. V. 143. № 2. P. 415–429. [**6**] Krichever I. M. // Funct. Anal. Appl. 1997. V. 31. № 1. P. 25–39.

Columbia University, New York,
ИТФ РАН им. Ландау, Москва

Принято редколлегией
17.03.1999