ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1999, т. 225, с. 21–45

УДК 517.9

Дискретные аналоги метрик Дарбу–Егорова[1]

©1999 г. А. А. Ахметшин[2], Ю. С. Вольвовский[2], И. М. Кричевер[2]

Поступило в декабре 1998 г.

Построен дискретный аналог метрик Дарбу–Егорова и доказано, что геометрия соответствующих решеток в евклидовом пространстве описывается набором функций $h_i^{\pm}(u)$, $u \in \mathbb{Z}^n$. Найден дискретный аналог уравнений Ламе и доказано, что эти уравнения являются необходимыми и достаточными для того, чтобы его решения являлись с точностью до калибровочного преобразования коэффициентами вращения решетки Дарбу–Егорова. Предъявлена схема построения явных решений дискретных уравнений Ламе в терминах тэта-функций Римана.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительный интерес вызвали задачи построения дискретных аналогов различных координатных параметризаций двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве [1] и более общие задачи построения дискретных аналогов многомерных сопряженных координатных сетей [2, 3].

В первую очередь этот интерес вызван тем, что сами по себе соответствующие (непрерывные) проблемы классической дифференциальной геометрии оказались глубоко связанными с современными проблемами математической и теоретической физики. Так, одна из центральных проблем дифференциальной геометрии прошлого века: проблема построения n-ортогональных криволинейных координат или *плоских* диагональных метрик

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} H_i^2(u)(du^i)^2, \qquad u = (u^1, \dots, u^n), \tag{1.1}$$

оказалась связанной с теорией интегрируемых квазилинейных $(1+1)$-мерных систем гидродинамического типа, играющих центральную роль в теории усреднения (теории Уизема) конечнозонных решений интегрируемых одномерных эволюционных уравнений типа уравнения Кортевега–де Фриза [4–6]. Более того, как было замечено в [7], проблема классификации так называемых метрик Дарбу–Егорова, т.е. плоских диагональных метрик, таких, что

$$\partial_j H_i^2 = \partial_i H_j^2, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{1.2}$$

эквивалентна проблеме классификации массивных топологических моделей теории поля [8–10].

Следует подчеркнуть, что классические результаты [11] в теории n-ортогональных криволинейных систем координат носили в основном классификационный характер и были недостаточно эффективны для построения явных примеров. Как следствие список явных примеров таких координат был весьма невелик. Настоящим прорывом явилась работа [12], в которой

---

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке NSF (грант DMS-98-02577).

[2]Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау, Россия, и Колумбийский университет, США.

было обнаружено, что широкий класс решений уравнений Ламе, описывающих коэффициенты вращений плоских диагональных метрик

$$\beta_{ij} = \frac{\partial_i H_j}{H_i}, \qquad i \neq j, \tag{1.3}$$

может быть получен в рамках процедуры “одевания”, широко известной в теории интегрируемых солитонных уравнений. Работы [12, 13] послужили отправной точкой работы одного из авторов [14], в которой была предложена конструкция явных алгебро-геометрических n-ортогональных систем координат и найден новый тип решений уравнений ассоциативности, которые выражаются в терминах тэта-функции Римана вспомогательных алгебраических кривых.

Исходно целью настоящей работы являлось построение *дискретных* аналогов алгебро-геометрических координатных систем. Следует подчеркнуть, что в общем случае построение *интегрируемых* дискретных аналогов интегрируемой непрерывной системы является некорректно поставленной задачей и не имеет универсального решения. Вместе с тем развитые в рамках теории солитонов методы дискретизации систем, к которым применимы различные формы метода обратной задачи, достаточно универсальны. Они используют естественную дискретизацию вспомогательных линейных задач или еще более естественную замену непрерывных переменных на дискретные в аналитических свойствах по вспомогательному спектральному параметру для совместных собственных функций линейных задач.

Как оказалось, дискретизация алгебро-геометрической конструкции приводит к построению решеток векторов $\mathbf{x}(u) = (x^1(u), \dots, x^n(u))$ в стандартном евклидовом пространстве, параметризованных целочисленными n-мерными векторами $u = (u^1, \dots, u^n)$, $u^i \in \mathbb{Z}$, и удовлетворяющих условиям *планарности* и *вписанности*. Эти условия были предложены в [15] в качестве естественного дискретного аналога общих n-ортогональных систем координат.

Условие планарности означает, что для любой пары индексов i, j соответствующий элементарный четырехугольник решетки, т.е. четырехугольник с вершинами $\{\mathbf{x}(u), T_i\mathbf{x}(u), T_j\mathbf{x}(u), T_iT_j\mathbf{x}(u)\}$, является плоским. Здесь T_i — оператор сдвига по дискретной переменной u^i: $T_i\mathbf{x}(u^1, \dots, u^i, \dots, u^n) = \mathbf{x}(u^1, \dots, u^i + 1, \dots, u^n)$. Условие вписанности означает, что вокруг каждого элементарного четырехугольника можно описать окружность, т.е. что суммы противоположных углов равны π.

Основной целью работы является доказательство интегрируемости задачи построения планарных решеток, удовлетворяющих более сильному ограничению, чем условие вписанности. А именно таких, что для любой пары индексов $i \neq j$ ребра решетки

$$X_i^+(u) = T_i\mathbf{x}(u) - \mathbf{x}(u), \qquad X_j^-(u) = T_j^{-1}\mathbf{x}(u) - \mathbf{x}(u) \tag{1.4}$$

с вершинами $\{\mathbf{x}(u), T_i\mathbf{x}(u)\}$ и $\{\mathbf{x}(u), T_j^{-1}\mathbf{x}(u)\}$ ортогональны, т.е.

$$\langle X_i^+, X_j^- \rangle = 0. \tag{1.5}$$

Здесь и далее $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение n-мерных векторов. Отметим, что (1.5) означает, что два внутренних угла каждого элементарного четырехугольника являются прямыми и как следствие он является вписанным.

Такие решетки в дальнейшем будут называться решетками Дарбу–Егорова, поскольку соотношение (1.5) влечет существование потенциальной функции $\Phi(u)$ такой, что ее разностные производные равны квадратам длин ребер решетки

$$\Delta_i\Phi(u) = \langle X_i^+(u), X_i^+(u) \rangle, \tag{1.6}$$

аналогично тому, как в непрерывном случае определяющие соотношения (1.2) метрик Дарбу–Егорова эквивалентны существованию функции Φ такой, что $\partial_i\Phi = H_i^2 = \langle \partial_i x, \partial_i x\rangle$.

Естественность условия (1.5) была подсказана "дискретизацией" алгебро-геометрической конструкции работы [14][3]. Более того, конструкция алгебро-геометрических решеток Дарбу–Егорова подсказала и возможность введения дискретных аналогов коэффициентов Ламе $h_i^{\pm}(u)$. Следует отметить, что в отличие от непрерывного случая определение этих коэффициентов локально, но не ультралокально и включает в себя скалярные произведения ребер решетки, выходящих как из одной, так и из соседних вершин. Как следствие корректность определения этих коэффициентов оказывается далеко не очевидной.

Доказательству корректности определения дискретных аналогов коэффициентов Ламе посвящен следующий раздел работы. В разд. 3 получена полная система уравнений, описывающая коэффициенты Ламе решеток Дарбу–Егорова и доказана их интегрируемость. Конструкция алгебро-геометрических решеток Дарбу–Егорова приводится в заключительном разд. 4.

На протяжении всех разделов работы мы используем следующие обозначения для разностных производных:

$$\Delta_i F(u) = T_i F(u) - F(u), \qquad \Delta_i^- F(u) = T_i^- F(u) - F(u), \qquad T_i^- = T_i^{-1}.$$

Различные объекты в работе имеют обозначения с верхними индексами + и −. Для того чтобы не загромождать формулы, мы часто опускаем индекс +, т.е. придерживаемся соглашения $F(u) = F^+(u)$. Также нам будут нужны следующие дискретные аналоги правила Лейбница:

$$\Delta_i(F(u)G(u)) = \Delta_i F(u)\, G(u) + T_i F(u)\, \Delta_i G(u) = \Delta_i F(u)\, G(u) + F(u)\, \Delta_i G(u) + \Delta_i F(u)\, \Delta_i G(u)$$

и правила дифференцирования частного:

$$\Delta_i\left(\frac{F(u)}{G(u)}\right) = \frac{\Delta_i F(u)\, G(u) - F(u)\, \Delta_i G(u)}{G(u)\, T_i G(u)}.$$

В заключение этого введения подчеркнем, что предложенное нами определение дискретных коэффициентов Ламе существенно использует специфику решеток Дарбу–Егорова. Вопрос о том, как описать *внутреннюю* геометрию дискретных аналогов общих плоских диагональных метрик, остается открытым. Мы планируем вернуться к этому вопросу и к более общей задаче построения внутренней римановой геометрии на графах в дальнейшем.

2. ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛАМЕ

Мы начнем этот раздел с переформулировки исходного определения решеток Дарбу–Егорова, которое может быть дано только в терминах ортогональности некоторых наборов ее ребер. При этом мы предполагаем, что все рассматриваемые решетки являются невырожденными, т.е. что при любом u векторы $X_i(u)$, $i = 1, \dots, n$, линейно независимы.

Лемма 2.1. *Следующие определения* 1°–3° *решеток* $\mathbf{x}(u)$ *Дарбу–Егорова являются эквивалентными.*

1°. *Решетка* $\mathbf{x}(u)$ *является планарной и для любых* $i \neq j$ *имеет место равенство* (1.5):

$$\langle X_i, X_j^- \rangle = 0.$$

[3] Как стало известно авторам, уже после того, как ими был найден дискретный аналог метрик Дарбу–Егорова, эта же редукция была предложена в работе [16].

2°. *Для любых троек попарно различных индексов i, j, m выполняются равенства*

$$\langle X_i^+, X_j^- \rangle = 0, \qquad \langle T_m X_i^+, X_j^- \rangle = 0. \tag{2.1}$$

3°. *Для любого $j \neq i$ и любого набора попарно различных индексов $\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$, не содержащего i, выполняются равенства*

$$\langle X_i^+, X_j^- \rangle = 0, \qquad \left\langle \left(\prod_k T_{m_k} \right) X_i^+, X_j^- \right\rangle = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Условие планарности решетки $\mathbf{x}(u)$ означает, что вектор $T_m X_i$ является линейной комбинацией векторов X_i и X_m. Следовательно, в силу (1.5) он ортогонален вектору X_j^- и, значит, равенства (2.1) вытекают из определения 1°.

В обратную сторону. Из равенств (2.1) следует, что векторы X_i, X_j и $T_i X_j$ ортогональны всем векторам X_m^-, $m \neq i, j$, а значит, в силу предположения о невырожденности решетки они принадлежат двумерной плоскости, ортогональной всем X_m^-, $m \neq i, j$. Эквивалентность определений 1° и 2° доказана. Доказательство эквивалентности определений 2° и 3° полностью аналогично.

Теорема 2.1. *Для любой решетки $\mathbf{x}(u)$ Дарбу–Егорова существуют и единственны функции $h_i^\pm(u)$, $i = 1, \ldots, n$, нормированные условием $h_i^+(0, \ldots, 0) = 1$ и такие, что для скалярных произведений ребер решетки выполнены соотношения*

$$\langle X_i, X_i \rangle = 2(T_i h_i^+) \cdot h_i^-; \tag{2.3}$$

$$\langle X_i, X_i^- \rangle = -(T_i h_i^+) \cdot (T_i^- h_i^-); \tag{2.4}$$

$$\langle T_j X_i, X_i^- \rangle = -(T_i T_j h_i^+) \cdot (T_i^- h_i^-), \qquad i \neq j. \tag{2.5}$$

Отметим, что соотношения (2.3)–(2.5) инвариантны относительно калибровочного преобразования $h_i^\pm(u) \mapsto a_i^{\pm 1} h_i^\pm$, где $\{a_i\}$ — набор произвольных ненулевых констант. Выбор начального условия $h_i^+(0) = 1$ нужен лишь для того, чтобы зафиксировать калибровку.

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим задачу восстановления $h_i^\pm(u)$ для некоторого фиксированного значения индекса i. Прежде всего мы покажем, что эта задача эквивалентна системе частных разностных уравнений типа Пфаффа для функции h_i^+. Уравнения (2.3), (2.4) дают два различных выражения для h_i^-:

$$h_i^- = \frac{\langle X_i, X_i \rangle}{2 T_i h_i^+} = \frac{\langle T_i X_i, X_i \rangle}{T_i T_i h_i^+}. \tag{2.6}$$

(Здесь и далее мы пользуемся вытекающим из определения векторов $X_i^\pm$ соотношением $T_i X_i^- = -X_i$.) Из (2.6) следует, что h_i^+ удовлетворяет разностному уравнению

$$T_i h_i^+ = -2 h_i^+ \frac{\langle X_i, X_i^- \rangle}{\langle X_i^-, X_i^- \rangle} = -2 h_i^+ \cdot A. \tag{2.7}$$

Исключая h_i^- из (2.5) с помощью первого из равенств (2.6), получим

$$T_j T_i h_i^+ = -2 h_i^+ \frac{\langle T_j X_i, X_i^- \rangle}{\langle X_i^-, X_i^- \rangle} = -2 h_i^+ \cdot B_j. \tag{2.8}$$

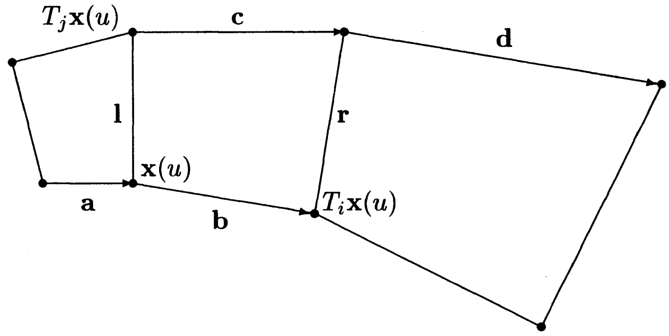

Рис. 1

Совместность уравнений (2.7) и (2.8) эквивалентна следующему уравнению на их коэффициенты: $T_jA\cdot T_i^{-1}B_j = B_j\cdot T_i^{-1}A$, или

$$T_j\left(\frac{\langle X_i, X_i^-\rangle}{\langle X_i^-, X_i^-\rangle}\right)\cdot T_i^{-1}\left(\frac{\langle T_jX_i, X_i^-\rangle}{\langle X_i^-, X_i^-\rangle}\right) = \frac{\langle T_jX_i, X_i^-\rangle}{\langle X_i^-, X_i^-\rangle}\cdot T_i^{-1}\left(\frac{\langle X_i, X_i^-\rangle}{\langle X_i^-, X_i^-\rangle}\right). \tag{2.9}$$

Применяя сдвиг T_i к (2.9), приходим к равенству

$$\frac{\langle T_jT_iX_i, T_jX_i\rangle\cdot\langle T_jX_i, X_i^-\rangle}{|T_jX_i|^2} = \frac{\langle T_jT_iX_i, X_i\rangle\cdot\langle X_i, X_i^-\rangle}{|X_i|^2}. \tag{2.10}$$

Введем обозначения: $\mathbf{a} = X_i^-$, $\mathbf{b} = X_i$, $\mathbf{c} = T_jX_i$, $\mathbf{d} = T_iT_jX_i$ (рис. 1). Скалярные произведения в (2.10) не изменятся, если заменить $\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}$ их ортогональными проекциями $\mathbf{a}'$, $\mathbf{d}'$ на плоскость плакета, порожденного векторами X_i и X_j (центрального плакета на рис. 1). При этом если поделить равенство (2.10) на $|\mathbf{a}'|\,|\mathbf{d}'|$, то оно приобретет вид

$$\frac{\langle\mathbf{a}',\mathbf{c}\rangle\,\langle\mathbf{c},\mathbf{d}'\rangle}{|\mathbf{a}'||\mathbf{c}|^2|\mathbf{d}'|} = \cos(\mathbf{a}',\mathbf{c})\cdot\cos(\mathbf{c},\mathbf{d}') = \cos(\mathbf{a}',\mathbf{b})\cdot\cos(\mathbf{b},\mathbf{d}') = \frac{\langle\mathbf{a}',\mathbf{b}\rangle\,\langle\mathbf{b},\mathbf{d}'\rangle}{|\mathbf{a}'||\mathbf{b}|^2|\mathbf{d}'|}.$$

Векторы $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{c}$ в силу определения решетки Дарбу–Егорова перпендикулярны вектору $\mathbf{l} = X_j$, а $\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}'$ перпендикулярны вектору $\mathbf{r} = T_iX_j$. Следовательно,

$$\cos(\mathbf{a}',\mathbf{c}) = \cos(\mathbf{b},\mathbf{d}') = 1, \qquad \cos(\mathbf{a}',\mathbf{b}) = \cos(\mathbf{c},\mathbf{d}').$$

Совместность уравнений (2.7) и (2.8) доказана.

Рассмотрим теперь два уравнения (2.8) для индексов j и k таких, что $i \neq j \neq k$. Совместность этих уравнений эквивалентна соотношению $B_k\cdot T_kB_j = B_j\cdot T_jB_k$ на их коэффициенты B_j и B_k. Получаем следующее равенство:

$$\frac{\langle T_kX_i^-, T_i^-X_i^-\rangle\cdot\langle T_kT_jX_i, T_kX_i^-\rangle}{|T_kX_i^-|^2} = \frac{\langle T_jX_i^-, T_i^-X_i^-\rangle\cdot\langle T_jT_kX_i, T_jX_i^-\rangle}{|T_jX_i^-|^2}. \tag{2.11}$$

Введем обозначения: $\mathbf{a} = T_i^-X_i^-$, $\mathbf{b} = T_kX_i^-$, $\mathbf{c} = T_jX_i^-$, $\mathbf{d} = T_kT_jX_i$ (рис. 2). Пусть $\mathcal{C}$ обозначает трехмерный куб решетки с ребрами $T_i^-X_i$, $T_i^-X_j$ и $T_i^-X_k$ (центральный куб на

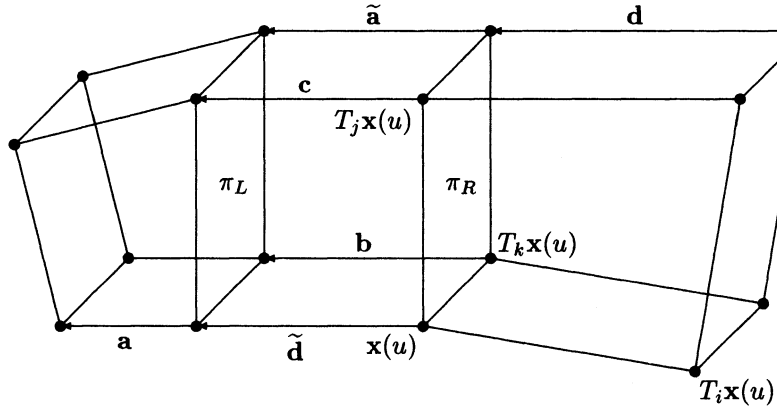

Рис. 2

рис. 2). Если заменить в (2.11) векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}$ их ортогональными проекциями $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{d}'$ на трехмерное пространство куба $\mathcal{C}$, ни одно скалярное произведение не изменится. Заметим также, что соотношение (2.11) выдерживает умножение вектора $\mathbf{a}'$, а также вектора $\mathbf{d}'$ на произвольные ненулевые константы.

В силу ортогональных свойств решетки Дарбу–Егорова вектор $\mathbf{a}'$ пропорционален вектору $\tilde{\mathbf{a}} = T_jT_kX_i^-$, поскольку и тот и другой ортогональны плоскости π_L, порожденной векторами $T_i^-X_j$ и $T_i^-X_k$ (левой грани $\mathcal{C}$). Аналогично вектор $\mathbf{d}'$ пропорционален вектору $\tilde{\mathbf{d}} = X_i^-$, поскольку они оба ортогональны плоскости π_R, порожденной векторами X_j и X_k (правой грани $\mathcal{C}$). Следовательно, мы можем считать, что в равенстве (2.11) вместо $\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}$ стоят векторы $\tilde{\mathbf{a}}$ и $\tilde{\mathbf{d}}$. После деления на $|\tilde{\mathbf{a}}|\,|\tilde{\mathbf{d}}|$ оно приобретет вид

$$\frac{\langle\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{c}\rangle\,\langle\mathbf{c},\tilde{\mathbf{d}}\rangle}{|\tilde{\mathbf{a}}||\mathbf{c}|^2|\tilde{\mathbf{d}}|} = \cos(\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{c})\cdot\cos(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{d}}) = \cos(\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{b})\cdot\cos(\mathbf{b},\tilde{\mathbf{d}}) = \frac{\langle\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{b}\rangle\,\langle\mathbf{b},\tilde{\mathbf{d}}\rangle}{|\tilde{\mathbf{a}}||\mathbf{b}|^2|\tilde{\mathbf{d}}|}.$$

Для доказательства последнего равенства мы воспользуемся следующим известным в элементарной стереометрии утверждением.

Лемма 2.2. *Пусть в трехгранной пирамиде один из двугранных углов между боковыми гранями прямой. Пусть α_1, α_2 и α_3 — углы при вершине, причем угол α_3 отвечает боковой грани, противолежащей прямому двугранному углу. Тогда*

$$\cos\alpha_3 = \cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2.$$

Верхняя грань центрального куба $\mathcal{C}$ (грань с ребрами $T_jT_i^-X_i$ и $T_jT_i^-X_k$) перпендикулярна ближней грани (грани с ребрами $T_i^-X_i$ и $T_i^-X_j$), и в то же время нижняя грань $\mathcal{C}$ (грань с ребрами $T_i^-X_i$ и $T_i^-X_k$) перпендикулярна дальней грани (грани с ребрами $T_kT_i^-X_i$ и $T_kT_i^-X_j$). Следовательно, в силу сформулированного выше утверждения

$$\cos(\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{b})\cdot\cos(\mathbf{b},\tilde{\mathbf{d}}) = \cos(\tilde{\mathbf{a}},\tilde{\mathbf{d}}) = \cos(\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{c})\cdot\cos(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{d}}).$$

Итак, соотношение (2.11), а вместе с ним и совместность уравнений (2.5) для различных индексов i и j доказаны.

Уравнения (2.7) и (2.8), совместность которых нами доказана, однозначно определяют искомые функции, если задано начальное условие $h_i^+(0) = 1$. Отметим, что функции $h_i^\pm(u)$ с индексом i находятся независимо от функций $h_j^\pm(u)$ с другими индексами. Теорема доказана.

Определение функций $h_i^\pm$ использовало некоторый минимальный набор скалярных произведений ребер решетки. Оказывается, что этот набор является *полным* в том смысле, что скалярное произведение любой пары ребер может быть выражено через скалярные произведения из минимального набора, а следовательно, через функции $h_i^\pm$, $i = 1, \dots, n$.

Ограничимся пока лишь тем, что приведем те из соответствующих формул, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 2.3. *Для любой решетки Дарбу–Егорова имеют место формулы*

$$\langle X_i, X_j \rangle = -2\frac{(\Delta_i T_j h_j^+)(T_i h_i^+) h_j^-}{T_i T_j h_i^+}, \qquad i \neq j, \tag{2.12}$$

$$\langle X_i^-, X_j^- \rangle = -2\frac{(\Delta_i^- T_j^- h_j^-)(T_i^- h_i^-)\, h_j^+}{T_i^- T_j^- h_i^-}, \qquad i \neq j, \tag{2.13}$$

где $h_i^\pm(u)$, $i = 1, \dots, n$, *— функции, построенные в теореме* 2.1.

Доказательство. Из планарности решетки следует, что вектор $T_j X_i$ является линейной комбинацией векторов X_i и X_j, т.е.

$$T_j X_i = \alpha X_i + \beta X_j. \tag{2.14}$$

Найдем коэффициенты этого разложения. Умножая (2.14) скалярно на X_i^-, получаем соотношение, из которого находим

$$\alpha = \frac{\langle T_j X_i, X_i^- \rangle}{\langle X_i, X_i^- \rangle} = \frac{T_i T_j h_i^+}{T_i h_i^+}.$$

Если же умножить (2.14) скалярно на X_j^- и воспользоваться векторным равенством $T_j X_i = T_i X_j + X_i - X_j$, то получим формулу

$$\beta = \frac{\langle T_i X_j, X_j^- \rangle - \langle X_j, X_j^- \rangle}{\langle X_j, X_j^- \rangle} = \frac{\Delta_i T_j h_j^+}{T_j h_j^+}.$$

Умножим теперь разложение (2.14) скалярно на вектор X_j. Последний перпендикулярен вектору $T_j X_i$, поэтому мы получим уравнение $\alpha \langle X_i, X_j \rangle + \beta \langle X_j, X_j \rangle = 0$, из которого следует формула (2.12):

$$\langle X_i, X_j \rangle = \left(\frac{\langle T_i X_j, X_j^- \rangle}{\langle X_j, X_j^- \rangle} - 1 \right) \frac{\langle X_i, X_i^- \rangle}{\langle T_j X_i, X_i^- \rangle} |X_j^2| = -2\frac{(\Delta_i T_j h_j^+)(T_i h_i^+) h_j^-}{T_i T_j h_i^+}.$$

Формула (2.13) доказывается аналогично.

Ниже будет доказано, что скалярные произведения $\langle X_i^\pm, X_j^\pm \rangle$ могут быть выражены через коэффициенты Ламе и другим образом.

Лемма 2.4. *Для любой решетки Дарбу–Егорова имеют место формулы*

$$\langle X_i, X_j\rangle = -2(T_i h_i^+)(\Delta_j h_i^-), \tag{2.15}$$

$$\langle X_i^-, X_j^-\rangle = -2(T_i^- h_i^-)(\Delta_j^- h_i^+), \tag{2.16}$$

где $h_i^\pm(u)$, $i = 1, \dots, n$, *— функции, построенные в теореме* 2.1.

Доказательство. Выразим $\langle X_i, X_j\rangle$ через скалярные произведения, входящие в минимальный набор (2.3)–(2.5). По определению решетки Дарбу–Егорова $0 = \langle X_i, T_i X_j\rangle = \langle X_i, X_j\rangle - \langle X_i, X_i\rangle + \langle X_i, T_j X_i\rangle$. Для того чтобы выразить последнее слагаемое в правой части этого равенства через скалярные произведения минимального набора, заметим, что вектор $T_j X_i$ пропорционален ортогональной проекции $\mathbf{d}$ вектора X_i^- на плоскость, порожденную X_i и X_j. Следовательно,

$$\langle X_i, T_j X_i\rangle = \langle X_i, X_i^-\rangle \frac{|T_j X_i|}{|\mathbf{d}|} = \langle X_i, X_i^-\rangle \frac{\langle T_j X_i, T_j X_i\rangle}{\langle T_j X_i, X_i^-\rangle}.$$

Получаем искомое выражение

$$\langle X_i, X_j\rangle = |X_i|^2 - \langle X_i, X_i^-\rangle \frac{|T_j X_i|^2}{\langle T_j X_i, X_i^-\rangle}.$$

Прямая подстановка формул (2.3)–(2.5) в это выражение приводит к (2.15). Аналогично доказывается и формула (2.16).

Леммы 2.3 и 2.4 позволяют получить соотношения, связывающие функции $h_i^\pm(u)$. Из симметричности скалярного произведения из (2.15) и (2.16) следуют соотношения

$$\frac{\Delta_i h_j^-}{T_i h_i^+} = \frac{\Delta_j h_i^-}{T_j h_j^+}, \qquad \frac{\Delta_i^- h_j^+}{T_i^- h_i^-} = \frac{\Delta_j^- h_i^+}{T_j^- h_j^-}, \qquad i \neq j. \tag{2.17}$$

Сравнение формул (2.12) и (2.15) доказывает равенство

$$\beta_{ij}^+ = -\beta_{ji}^-, \tag{2.18}$$

где функции $\beta_{ij}^\pm(u)$ определяются формулами

$$\beta_{ij}^+ = \frac{\Delta_i h_j}{T_i h_i}, \qquad \beta_{ji}^- = \frac{\Delta_j^- h_i^-}{T_j^- h_j^-}, \qquad i \neq j. \tag{2.19}$$

Функции $\beta_{ij}^\pm(u)$ являются дискретными аналогами коэффициентов вращения (1.3) непрерывных метрик. Следуя принятому соглашению, в дальнейшем мы часто будем опускать верхний индекс $+$ у функций $\beta_{ij}^+(u)$.

Соотношения (2.17) и (2.18) представляют собой дискретные аналоги условий симметричности коэффициентов вращения метрик Дарбу–Егорова. Начиная с размерности $n = 3$ существует еще один дискретный аналог условий симметричности, который может быть записан как соотношения лишь на коэффициенты β_{ij}.

Лемма 2.5. *Пусть $\beta_{ij}(u)$ являются коэффициентами Ламе решетки Дарбу–Егорова. Тогда для любой тройки попарно различных индексов i, j, k выполнено соотношение*

$$(T_k\beta_{ik})(T_i\beta_{ji})(T_j\beta_{kj}) = (T_k\beta_{jk})(T_j\beta_{ij})(T_i\beta_{ki}). \tag{2.20}$$

Доказательство. В силу (2.12) и определения дискретных коэффициентов вращения

$$\langle X_i, X_k\rangle = (T_k\beta_{ik})\frac{h_k^-}{T_k h_k^+}.$$

Поделим тождество $\langle X_i, X_k\rangle\langle X_j, X_i\rangle\langle X_k, X_j\rangle = \langle X_j, X_k\rangle\langle X_i, X_j\rangle\langle X_k, X_i\rangle$ на симметричное по всем трем индексам выражение

$$\frac{h_i^-}{T_i h_i^+}\,\frac{h_j^-}{T_j h_j^+}\,\frac{h_k^-}{T_k h_k^+}$$

и получим требуемое соотношение.

Соотношения (2.17) и (2.18) безусловно не дают полного набора уравнений на дискретные аналоги коэффициентов Ламе. Получение такого набора составляет основную цель следующего раздела работы.

3. ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ

Как и в непрерывном случае, дискретный аналог уравнений Ламе получается как условия совместности линейных уравнений, которым удовлетворяют ребра решетки $X_i^{\pm}(u)$. Эти линейные уравнения упрощаются, если подходящим образом перенормировать эти ребра.

Определим для любой решетки Дарбу–Егорова векторы $Y_i^{\pm}(u)$ формулами

$$Y_i(u) = \frac{1}{T_i h_i^+(u)} X_i(u), \qquad Y_i^-(u) = \frac{1}{T_i^- h_i^-(u)} X_i^-(u), \tag{3.1}$$

где $h_i^{\pm}(u)$ — функции, построенные в теореме 2.1. Из (2.4) следует, что эти векторы образуют биортогональную систему

$$\langle Y_i, Y_j^-\rangle = -\delta_{ij}. \tag{3.2}$$

Для удобства приведем и другие скалярные произведения, которые непосредственно вытекают из соотношений (2.3)–(2.5):

$$\langle Y_i, Y_i\rangle = 2\frac{h_i^-}{T_i h_i^+}, \qquad \langle T_i Y_i, Y_i\rangle = \frac{h_i^-}{T_i h_i^+}, \qquad \langle T_j Y_i, Y_i^-\rangle = -1, \tag{3.3}$$

а также из равенств (2.12) и (2.15):

$$\langle Y_i, Y_j\rangle = -2\frac{(\Delta_i T_j h_j^+)h_j^-}{(T_i T_j h_i^+)(T_j h_j^+)} = -2\frac{\Delta_j h_i^-}{T_j h_j^+}. \tag{3.4}$$

(Аналогичные формулы можно выписать для $\langle Y_i^-, Y_j^-\rangle$.)

Теорема 3.1. *Для любой решетки Дарбу–Егорова векторы $Y_i^{\pm}(u)$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\Delta_j^{\pm} Y_i^{\pm} = (T_j^{\pm} \beta_{ij}^{\pm}) Y_j^{\pm}, \qquad i \neq j, \tag{3.5}$$

$$\Delta_i^{\pm} Y_i^{\pm} = b_i^{\pm} Y_i^{\pm} - \sum_{j \neq i} \beta_{ij}^{\pm} Y_j^{\pm}, \tag{3.6}$$

где коэффициенты $\beta_{ij}^{\pm}(u)$ определяются формулами (2.19), *а коэффициенты $b_i^{\pm}(u)$ определяются формулами*

$$b_i^{+} = -\frac{1}{2} - \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(T_i \beta_{ji}), \qquad b_i^{-} = -\frac{1}{2} - \sum_{j \neq i} \beta_{ij}^{-}(T_i^{-} \beta_{ji}^{-}). \tag{3.7}$$

Доказательство. Из условия планарности решетки следует, что вектор $\Delta_j Y_i$ $(i \neq j)$ является линейной комбинацией векторов Y_i и Y_j, т.е. $\Delta_j Y_i = a_{ij} Y_i + d_{ij} Y_j$. Для того чтобы найти коэффициент a_{ij}, умножим это равенство скалярно на вектор Y_i^{-}. Используя равенства (3.2) и (3.3), получим $a_{ij} = \langle T_j Y_i - Y_i, Y_i^{-} \rangle = 0$. Следовательно, $\Delta_j Y_i = d_{ij} Y_j$. Умножая это равенство скалярно на вектор Y_j, получим

$$\langle \Delta_j Y_i, Y_j \rangle = d_{ij} \langle Y_j, Y_j \rangle = 2 d_{ij} \frac{h_j^{-}}{T_j h_j^{+}}.$$

С другой стороны, согласно (3.4) имеем

$$\langle \Delta_j Y_i, Y_j \rangle = \langle T_j Y_i, Y_j \rangle - \langle Y_i, Y_j \rangle = -\langle Y_i, Y_j \rangle = 2 T_j \left(\frac{\Delta_i h_j^{+}}{T_i h_i^{+}} \right) \frac{h_j^{-}}{T_j h_j^{+}}.$$

Сравнение правых частей двух последних формул дает $d_{ij} = T_j \beta_{ij}$. Аналогично доказывается (3.5) для векторов Y_i^{-}.

Покажем теперь, что векторы $Y_i(u)$ удовлетворяют уравнению (3.6). При любом фиксированном u векторы $Y_1(u), \dots, Y_n(u)$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$ (в силу невырожденности рассматриваемой решетки). Следовательно, существует разложение

$$\Delta_i Y_i = b_i Y_i + \sum_{j \neq i} c_{ij} Y_j. \tag{3.8}$$

Коэффициент c_{ij} можно найти, если умножить это равенство скалярно на вектор Y_j^{-}. Получим $\langle \Delta_i Y_i, Y_j^{-} \rangle = c_{ij} \langle Y_j Y_j^{-} \rangle = -c_{ij}$. В то же самое время имеем

$$\langle \Delta_i Y_i, Y_j^{-} \rangle = \Delta_i \langle Y_i, Y_j^{-} \rangle - \langle T_i Y_i, \Delta_i Y_j^{-} \rangle = T_i \langle Y_i, \Delta_i^{-} Y_j^{-} \rangle.$$

Используя доказанное нами равенство (3.5), получаем

$$-c_{ij} = \langle \Delta_i Y_i, Y_j^{-} \rangle = T_i \langle Y_i, (T_i^{-} \beta_{ji}^{-}) Y_i^{-} \rangle = -\beta_{ji}^{-} = \beta_{ij}.$$

Для того чтобы определить $b_i(u)$, умножим разложение (3.8) скалярно на вектор Y_i:

$$\langle \Delta_i Y_i, Y_i \rangle = b_i \langle Y_i, Y_i \rangle - \sum_{i \neq j} \beta_{ij} \langle Y_i, Y_j \rangle. \tag{3.9}$$

Подставим формулы (3.3) и (3.4) в равенство (3.9) и получим для $b_i(u)$ формулу (3.7). Второе из уравнений (3.6) проверяется аналогично.

Условия совместности линейной системы (3.5), (3.6) являются дискретными аналогами уравнений Ламе на коэффициенты вращения метрик Дарбу–Егорова. Нашей следующей целью является доказательство обратного утверждения: любое решение соответствующих уравнений однозначно определяет коэффициенты вращения некоторой решетки Дарбу–Егорова.

Теорема 3.2. *Пусть функции $\beta_{ij}(u)$, $i \neq j$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, при $n \geq 3$ удовлетворяют соотношениям* (2.20)

$$(T_k\beta_{ik})(T_i\beta_{ji})(T_j\beta_{kj}) = (T_k\beta_{jk})(T_j\beta_{ij})(T_i\beta_{ki})$$

и уравнениям

$$\Delta_k\beta_{ij} = (T_k\beta_{ik})\beta_{kj}, \qquad i \neq j \neq k, \tag{3.10}$$

$$\Delta_j v_i = \Delta_i(\beta_{ji}T_j\beta_{ij}), \qquad i \neq j, \tag{3.11}$$

$$\Delta_i\Delta_j\beta_{ij} + \Delta_i\beta_{ij} + \Delta_j\beta_{ij} = T_j\beta_{ij}(T_jv_i - v_j) - \sum_{k\neq i,j} T_j(\beta_{ik}\beta_{kj}), \qquad i \neq j, \tag{3.12}$$

в которых $v_i(u)$ определяется формулой

$$v_i = -\sum_{p\neq i}\beta_{ip}(T_i\beta_{pi}). \tag{3.13}$$

Тогда существует единственная константа η такая, что функции

$$\widetilde{\beta}_{ij}(u) = (2\eta)^{u_j-u_i-1}\beta_{ij}(u) \tag{3.14}$$

являются коэффициентами вращения решетки Дарбу–Егорова.

Уравнения (3.10)–(3.12) эквивалентны условиям совместности системы линейных уравнений

$$\Delta_j\Psi_i = (T_j\beta_{ij})\Psi_j, \qquad i \neq j, \tag{3.15}$$

$$\Delta_i\Psi_i = (\mu + v_i)\Psi_i - \sum_{j\neq i}\beta_{ij}\Psi_j, \tag{3.16}$$

где μ — произвольная комплексная константа. Преобразование (3.14) переводит решения системы уравнений (3.10)–(3.13) в решения этой же системы и сохраняет соотношения (2.20), поскольку отвечает калибровочному преобразованию

$$Y_i = \widetilde{\Psi}_i = (2\eta)^{-u_i}\Psi_i \tag{3.17}$$

линейной системы (3.15), (3.16). Следовательно, утверждение теоремы дает необходимые и достаточные условия того, что набор функций $\beta_{ij}(u)$ является с точностью до калибровочного преобразования набором коэффициентов некоторой решетки Дарбу–Егорова.

Доказательство теоремы 3.2. В отличие от непрерывного случая задача восстановления решетки Дарбу–Егорова по набору функций β_{ij}, удовлетворяющих условиям теоремы, требует выбора весьма нетривиальных начальных условий для решения системы (3.5), (3.6).

Эти условия определяются заданием матрицы скалярных произведений соответствующих векторов. В следующих двух леммах строятся функции $\beta^*_{ij}(u)$, с помощью которых эти скалярные произведения впоследствии и будут заданы.

Лемма 3.1. *Пусть функции* $\beta_{ij}(u)$ *удовлетворяют соотношениям* (2.20) *и* (3.10)–(3.13). *Тогда существует единственное решение* $f_i(u)$, $i = 1, \dots, n$, *системы*

$$\Delta_k f_i = -(T_k\beta_{ik})\,(T_i\beta_{ki})f_i, \qquad i \neq k, \tag{3.18}$$

$$(T_i\beta_{ki})f_i = (T_k\beta_{ik})f_k, \qquad i \neq k, \tag{3.19}$$

нормированное условием $f_1(0) = 1$.

Доказательство. Система (3.18), (3.19) переопределена, однако мы докажем, что она сводится к системе из n совместных уравнений на функцию $f_1(u)$. Заметим, что уравнения (3.19) совместны благодаря соотношению (2.20).

Во-первых, докажем совместность двух уравнений (3.18) с разными значениями индекса k, например p и q. Для этого достаточно показать, что следующее выражение для $\Delta_p\Delta_q f_i$ симметрично по индексам p и q:

$$\Delta_p\Delta_q f_i = -\Big[\Delta_p(T_q\beta_{iq}\cdot T_i\beta_{qi}) - T_p(T_q\beta_{iq}\cdot T_i\beta_{qi})\,(T_p\beta_{ip}\cdot T_i\beta_{pi})\Big]f_i.$$

Действительно, в силу соотношения (3.10) для выражения в квадратных скобках получаем

$$\begin{aligned}[\dots] &= T_q(T_p\beta_{ip}\cdot\beta_{pq})(T_i\beta_{qi}) + (T_pT_q\beta_{iq})T_i(T_p\beta_{qp}\cdot\beta_{pi}) - (T_pT_q\beta_{iq})T_p(T_i\beta_{qi}\cdot\beta_{ip})(T_i\beta_{pi}) = \\ &= (T_qT_p\beta_{ip})(T_q\beta_{pq})(T_i\beta_{qi}) + (T_pT_q\beta_{iq})[T_iT_p\beta_{qp} - T_p\Delta_i\beta_{qp}](T_i\beta_{pi}).\end{aligned}$$

Несложно заметить, что последняя формула обладает необходимой симметрией.

Во-вторых, рассмотрим два уравнения (3.18) с разными индексами i, пусть p и q. Покажем, что одно из них следует из другого, если f_p и f_q связаны соотношением (3.19). Именно

$$\begin{aligned}\Delta_k f_p &= \Delta_k\left(\frac{T_q\beta_{pq}}{T_p\beta_{qp}}f_q\right) = \Delta_k\left(\frac{T_q\beta_{pq}}{T_p\beta_{qp}}\right)f_q - T_k\left(\frac{T_q\beta_{pq}}{T_p\beta_{qp}}\right)(T_k\beta_{qk})(T_q\beta_{kq})f_q = \\ &= \left(T_q(T_k\beta_{pk}\cdot\beta_{kq}) - \frac{T_q\beta_{pq}}{T_p\beta_{qp}}T_p(T_k\beta_{qk}\cdot\beta_{kp}) - T_k(T_q\beta_{pq}\cdot\beta_{qk})(T_q\beta_{kq})\right)\frac{f_q}{T_kT_p\beta_{qp}} = \\ &= \left((T_q\beta_{kq})(T_k\beta_{pk}) - \frac{T_q\beta_{pq}}{T_p\beta_{qp}}(T_pT_k\beta_{qk})(T_p\beta_{kp})\right)\frac{f_q}{T_kT_p\beta_{qp}}.\end{aligned}$$

Из соотношения (2.20) следует, что $(T_q\beta_{kq})(T_k\beta_{pk})f_q = (T_k\beta_{qk})(T_p\beta_{kp})f_p$. Окончательно получаем

$$\Delta_k f_p = \Big((T_k\beta_{qk})(T_p\beta_{kp}) - (T_pT_k\beta_{qk})(T_p\beta_{kp})\Big)\frac{f_p}{T_kT_p\beta_{qp}} = -(T_k\beta_{pk})(T_p\beta_{kp})f_p,$$

что нам и хотелось.

Рассмотрим теперь уравнение (3.18) на $\Delta_1 f_i$, $i > 1$. Если подставить в обе его части выражение $f_i = \alpha_{i1}f_1$, где $\alpha_{i1} = (T_1\beta_{i1})/(T_i\beta_{1i})$, то получим уравнение вида $\Delta_1 f_1 = \mathcal{F}_i(u)f_1$, где функция $\mathcal{F}_i(u)$ рационально выражается через $\beta_{1i}(u)$ и $\beta_{i1}(u)$. На самом деле функция $\mathcal{F}_i(u)$, а вместе с ней и уравнение на $\Delta_1 f_1$ не зависят от индекса i. Для того чтобы доказать это, выберем индекс $j > 1$, отличный от i, и рассмотрим уравнение (3.18) для $\Delta_1 f_j$. Как было показано на втором шаге доказательства, подстановка $f_j = \alpha_{ji}f_i$ в это уравнение приводит в точности к уравнению (3.18) на $\Delta_1 f_i$. С другой стороны, подстановка

$f_j = \alpha_{j1} f_1$ в уравнение на $\Delta_1 f_j$ приводит к уравнению $\Delta_1 f_1 = \mathcal{F}_j(u) f_1$. Следовательно, уравнение $\Delta_1 f_1 = \mathcal{F}_i(u) f_1$ должно получаться из уравнения $\Delta_1 f_1 = \mathcal{F}_j(u) f_1$ подстановкой $f_1 = (\alpha_{j1})^{-1} \alpha_{ji} \alpha_{i1} f_1$. Однако $(\alpha_{j1})^{-1} \alpha_{ji} \alpha_{i1} = \alpha_{1j} \alpha_{ji} \alpha_{i1} = 1$ согласно соотношению (2.20). Следовательно, $\mathcal{F}_i(u) = \mathcal{F}_j(u) = \mathcal{F}(u)$, что и требовалось доказать.

Итак, мы получили n уравнений на функцию $f_1(u)$, а именно уравнения

$$\Delta_1 f_1 = \mathcal{F}(u) f_1, \qquad \Delta_i f_1 = -(T_1 \beta_{i1})(T_i \beta_{1i}) f_1, \qquad i = 2, \ldots, n, \tag{3.20}$$

Мы показали на первом шаге доказательства, что любые два уравнения из второй группы совместны. Для того чтобы показать совместность уравнений $\Delta_1 f_1 = \mathcal{F}(u) f_1$ и $\Delta_i f_1 = -(T_1 \beta_{i1})(T_i \beta_{1i}) f_1$, $i > 1$, достаточно заметить, что они калибровочно эквивалентны совместным уравнениям $\Delta_1 f_j = -(T_1 \beta_{j1})(T_j \beta_{1j}) f_j$ и $\Delta_i f_j = -(T_j \beta_{ij})(T_i \beta_{ji}) f_j$ для любого индекса j, отличного от i и 1.

Из всего вышесказанного следует, что решение системы (3.18), (3.19) может быть получено следующим образом. Сначала определяется функция $f_1(u)$ из начального условия $f_1(0) = 1$ и совместной системы уравнений (3.20). После этого с помощью (3.19) строятся все остальные функции $f_i(u)$, $i = 1, \ldots, n$. Как показано на втором шаге доказательства, все уравнения системы оказываются выполненными. Доказательство леммы завершено.

Положим по определению $\beta^*_{ii}(u) = f_i(u)$, $i = 1, \ldots, n$, где $f_i(u)$ построены в лемме. Определим β^*_{ij} для $i \neq j$ из равенства

$$-\beta^*_{ij} = (T_j \beta_{ij})\, \beta^*_{jj}, \qquad j \neq i. \tag{3.21}$$

Заметим, что из соотношений (3.19) следует, что $\beta^*_{ij}(u) = \beta^*_{ji}(u)$.

Лемма 3.2. *Функции $\beta^*_{ij}(u)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, определенные выше, удовлетворяют системе уравнений*

$$\Delta_j \beta^*_{ik} = (T_j \beta_{ij})\, \beta^*_{jk}, \qquad j \neq i, k, \tag{3.22}$$

$$\Delta_i \beta^*_{ij} = (v_i - 1) \beta^*_{ij} - \sum_{k \neq i} \beta_{ik} \beta^*_{kj}, \qquad i \neq j. \tag{3.23}$$

Доказательство. Утверждение леммы доказывается прямыми выкладками. Проделаем их, полагая всюду $i \neq j \neq k$. Заметим, что из леммы 3.1 и определения β^*_{ii} следует

$$\Delta_j \beta^*_{ii} = -(T_j \beta_{ij})(T_i \beta_{ji}) \beta^*_{ii} = (T_j \beta_{ij}) \beta^*_{ji}.$$

Далее, по определению $\Delta_j \beta^*_{ki} = -\Delta_j (T_i \beta_{ki} \cdot \beta^*_{ii}) = -(T_j T_i \beta_{ki}) \Delta_j \beta^*_{ii} - \Delta_j (T_i \beta_{ki}) \beta^*_{ii}$. Используя доказанную выше формулу и равенство (3.10), находим

$$\Delta_j \beta^*_{ki} = (T_j T_i \beta_{ki})(T_j \beta_{ij})(T_i \beta_{ji}) \beta^*_{ii} - (T_j T_i \beta_{kj})(T_i \beta_{ji}) \beta^*_{ii} =$$
$$= (\Delta_i T_j \beta_{kj})(T_i \beta_{ji}) \beta^*_{ii} - (T_j T_i \beta_{kj})(T_i \beta_{ji}) \beta^*_{ii} = -(T_j \beta_{kj})(T_i \beta_{ji}) \beta^*_{ii} = (T_j \beta_{kj}) \beta^*_{ji}.$$

Таким образом мы установили выполнение уравнений (3.22). Докажем равенство (3.23).

Используя соотношение (3.12), получаем

$$\Delta_j\beta^*_{ji} = -\Delta_j(T_i\beta_{ji}\cdot\beta^*_{ii}) = -(T_jT_i\beta_{ji})\Delta_j\beta^*_{ii} - (\Delta_jT_i\beta_{ji})\beta^*_{ii} =$$
$$= (T_jT_i\beta_{ji})(T_j\beta_{ij})(T_i\beta_{ji})\beta^*_{ii} - \Big[T_i\beta_{ji}(-v_i+T_iv_j) - \sum_{k\neq i,j}T_i(\beta_{jk}\beta_{ki}) - \Delta_i\beta_{ji}\Big]\beta^*_{ii} =$$
$$= \Big(T_i\beta_{ji}[v_i - T_iv_j + (T_jT_i\beta_{ji})T_j\beta_{ij}] + \sum_{k\neq i,j}T_i(\beta_{jk}\beta_{ki}) + \Delta_i\beta_{ji}\Big)\beta^*_{ii} =$$
$$= -\beta^*_{ji}(v_i - T_iv_j + T_j(T_i\beta_{ji}\cdot\beta_{ij})) - \sum_{k\neq i,j}(T_i\beta_{jk})\beta^*_{ki} - \beta^*_{ji} - \beta_{ji}\beta^*_{ii}.$$

Заменяя в последней строке операторы сдвига T на $\Delta+1$ и используя равенство (3.11), приходим к следующему:

$$\Delta_j\beta^*_{ji} = -\beta^*_{ji}\Big(v_i - v_j + (T_i\beta_{ji})\beta_{ij}\Big) - \sum_{k\neq j}\beta_{jk}\beta^*_{ki} - \sum_{k\neq i,j}(\Delta_i\beta_{jk})\beta^*_{ki} - \beta^*_{ji} =$$
$$= -\beta^*_{ji}(v_i + 1 - v_j + (T_i\beta_{ji})\beta_{ij}) - \sum_{k\neq j}\beta_{jk}\beta^*_{ki} - \sum_{k\neq i,j}(T_i\beta_{ji}\cdot\beta_{ik})\beta^*_{ki} =$$
$$= \sum_{k\neq i,j}(T_i\beta_{ki}\cdot\beta_{ik})\beta^*_{ji} - \sum_{k\neq i,j}(T_i\beta_{ji}\cdot\beta_{ik})\beta^*_{ki} - \sum_{k\neq j}\beta_{jk}\beta^*_{ki} + (v_j-1)\beta^*_{ji} =$$
$$= -\sum_{k\neq i,j}\Big[(T_i\beta_{ki}\cdot\beta_{ik})(T_i\beta_{ji})\beta^*_{ii} - (T_i\beta_{ji}\cdot\beta_{ik})(T_i\beta_{ki})\beta^*_{ii}\Big] - \sum_{k\neq j}\beta_{jk}\beta^*_{ki} + (v_j-1)\beta^*_{ji} =$$
$$= -\sum_{k\neq j}\beta_{jk}\beta^*_{ki} + (v_j-1)\beta^*_{ji}.$$

Лемма доказана.

Нашей следующей целью является доказательство дискретного аналога такого фундаментального свойства метрик Дарбу–Егорова, как независимость коэффициентов вращения от суммы переменных, т.е. свойства $\sum_k \partial_k\beta_{ij} = 0$.

Лемма 3.3. *Решения уравнений* (3.10)–(3.12), *удовлетворяющие соотношениям* (2.19), *удовлетворяют и следующему условию монодромии*:

$$\widetilde{T}\beta_{ij}(u) = \beta_{ij}(u), \qquad \widetilde{T} = \prod_{k=1}^{n}T_k. \tag{3.24}$$

Доказательство. Прежде всего докажем по индукции, что если функции $\Psi_i(u)$ удовлетворяют уравнениям (3.15), то для любого набора I попарно различных индексов $I=\{i_1,\dots,i_s\}$ имеет место равенство

$$(T_I - 1)\Psi_j = \sum_{i\in I}(T_I\beta_{ji})\Psi_i, \quad j\notin I, \qquad T_I = T_{i_1}\dots T_{i_s}. \tag{3.25}$$

Действительно, если равенство (3.25) доказано для любого набора I длины s, то для любого $k\neq j$, $k\notin I$, имеем

$$(T_kT_I - 1)\Psi_j = T_I\Delta_k\Psi_j + (T_I-1)\Psi_j = T_I\big[(T_k\beta_{jk})\Psi_k\big] + \sum_{i\in I}(T_I\beta_{ji})\Psi_i =$$
$$= (T_IT_k\beta_{jk})\Psi_k + (T_IT_k\beta_{jk})\big[(T_I-1)\Psi_k\big] + \sum_{i\in I}(T_I\beta_{ji})\Psi_i =$$
$$= (T_IT_k\beta_{jk})\Psi_k + \sum_{i\in I}\big[T_I(T_k\beta_{jk}\beta_{ji} + \beta_{ji})\big]\Psi_j = (T_IT_k\beta_{jk})\Psi_k + \sum_{i\in I}(T_kT_I\beta_{ji})\Psi_i.$$

Последнее равенство доказывает шаг индукции и завершает доказательство равенства (3.25).

Отметим, что условия совместности уравнений (3.15) и (3.25) приводят к следующей формуле для "длинных" разностных производных $\Delta_I = (T_I - 1)$ дискретных аналогов коэффициентов вращения:

$$\Delta_I \beta_{jk} = \sum_{s \in I} (T_I \beta_{js}) \beta_{sk}, \qquad j \neq k, \quad j, k \notin I.$$

Отметим также, что поскольку в силу (3.22) функции β^*_{ij} для каждого индекса $k \neq i, j$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и Ψ_i, то одновременно с доказательством (3.25) мы получаем и доказательство следующего равенства:

$$\Delta_I \beta^*_{jk} = \sum_{s \in I} (T_I \beta_{js}) \beta^*_{sk}, \qquad j, k \notin I. \tag{3.26}$$

Из (3.25) следует, что

$$(T^{(i)} - 1)\Psi_i = \sum_{j \neq i} (T^{(i)} \beta_{ij}) \Psi_j, \qquad T^{(i)} = \prod_{j \neq i} T_j.$$

Поскольку $(\widetilde{T} - 1) = T_i(T^{(i)} - 1) + \Delta_i$, то, учитывая (3.16), приходим к равенству

$$(\widetilde{T} - 1)\Psi_i = (\mu + B_i(u))\Psi_i + \sum_{j=1}^{n} ((\widetilde{T} - 1)\beta_{ij}) \Psi_j(u, \mu),$$

где $B_i(u)$ — некоторая функция, явный вид которой в данный момент несуществен. Таким образом, в силу независимости векторов Ψ_j для доказательства утверждения леммы достаточно доказать, что векторы Ψ_i и $\widetilde{T}\Psi_i$ параллельны.

Зафиксируем некоторую точку u_0 и рассмотрим решение $\Psi_i(u) = \Psi_i(u; u_0)$ уравнений (3.15), (3.16) со следующими начальными условиями в точке u_0:

$$\langle \Psi_j(u_0), \Psi_k(u_0) \rangle = \beta^*_{jk}(u_0), \qquad j, k = 1, \ldots, n. \tag{3.27}$$

Эти соотношения задают векторы $\Psi_i(u_0)$ однозначно с точностью до общего ортогонального преобразования объемлющего пространства.

Докажем по индукции, что соотношение (3.27) выполнено в точке $u_I = T_{i_1} \ldots T_{i_s} u_0$ для любого набора попарно различных индексов $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$, не содержащего j, т.е.

$$\langle \Psi_j(u_I), \Psi_k(u_I) \rangle = \beta^*_{jk}(u_I), \qquad j \notin I. \tag{3.28}$$

Пусть $i \neq j, k$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_i \langle \Psi_j, \Psi_k \rangle &= \langle \Delta_i \Psi_j, \Psi_k \rangle + \langle \Psi_j, \Delta_i \Psi_k \rangle + \langle \Delta_i \Psi_j, \Delta_i \Psi_k \rangle = \\ &= (T_i \beta_{ji}) \langle \Psi_i, \Psi_k \rangle + (T_i \beta_{ki}) \langle \Psi_j, \Psi_i \rangle + (T_i \beta_{ji})(T_i \beta_{ki}) \langle \Psi_i, \Psi_i \rangle.\end{aligned}$$

Если предположение индукции выполнено в точке u_I и $i \notin I$, то для скалярного произведения в точке $T_i u_I$ получим

$$\Delta_i \langle \Psi_j(u_I), \Psi_k(u_I) \rangle = (T_i \beta_{ji}) \beta^*_{ik} + (T_i \beta_{ki}) \beta^*_{ij} + (T_i \beta_{ki})(T_i \beta_{ji}) \beta^*_{ii} = (T_i \beta_{ki}) \beta^*_{ij} = \Delta_i \beta^*_{jk} \tag{3.29}$$

(значения всех функций в правой части равенства берутся в точке u_I). Аналогично, используя предположения индукции, получим

$$\Delta_i\langle\Psi_j,\Psi_i\rangle(u_I)=(T_i\beta_{ji})\beta^*_{ii}+(\mu+v_i)\beta^*_{ij}-\sum_{k\neq i}\beta_{ik}\beta^*_{kj}+(T_i\beta_{ji})\Big((\mu+v_i)\beta^*_{ii}-\sum_{k\neq i}\beta_{ik}\beta^*_{ki}\Big)=$$
$$=(v_i-1)\beta^*_{ij}-\sum_{k\neq i}\beta_{ik}\beta^*_{kj} \qquad (3.30)$$

(как и в предшествующем случае, значения всех функций в правой части берутся в точке u_I). Сравнивая правую часть последнего равенства с правой частью равенства (3.23), получим

$$\Delta_i\langle\Psi_j,\Psi_i\rangle(u_I)=\Delta_i\beta^*_{ji}(u_I),\qquad j\neq i,\quad j\notin I. \qquad (3.31)$$

Равенства (3.29) и (3.31) доказывают (3.28) для точки T_iu_I.

Приступим теперь непосредственно к доказательству того, что векторы $\Psi_i(u_0)$ и $\widetilde{T}\Psi_i(u_0)$ параллельны. Сначала мы докажем ортогональность векторов $\Psi_m(u_I)$ и $T_mT_J\Psi_k(u_I)$ для непересекающихся наборов индексов $I,J\subset\{1,\dots,n\}$ таких, что $m,k\notin I$, $m\notin J$ ($m\neq k$). Согласно формуле (3.25) имеем

$$\langle\Psi_m(u_I),T_mT_J\Psi_k(u_I)\rangle=\langle\Psi_m,\Psi_k\rangle+\sum_{j\in J}(T_mT_J\beta_{kj})\langle\Psi_m,\Psi_j\rangle+(T_mT_J\beta_{km})\langle\Psi_m,\Psi_m\rangle \qquad (3.32)$$

(значения всех функций в правой части равенства берутся в точке u_I). К скалярным произведениям в правой части применима формула (3.28), поэтому

$$\langle\Psi_m(u_I),T_mT_J\Psi_k(u_I)\rangle=\beta^*_{mk}+\sum_{j\in J}(T_mT_J\beta_{kj})\beta^*_{jm}+(T_mT_J\beta_{km})\beta^*_{mm}=$$
$$=\beta^*_{mm}T_m\Big(\Delta_J\beta_{km}-\sum_{j\in J}(T_J\beta_{kj})\beta_{jm}\Big)=0.$$

Из доказанного факта следует, в частности, что векторы

$$\Psi_1(u_0),\ T_1\Psi_2(u_0),\ T_1T_2\Psi_3(u_0),\dots,\ T_1T_2\dots T_{n-1}\Psi_n(u_0) \qquad (3.33)$$

образуют ортогональный базис объемлющего пространства. С другой стороны, полагая $I=\{1,2,\dots,s\}$, $m=s+1$, $J=\{s+2,\dots,n\}$ и $k=1$ последовательно для s от 1 до $n-1$, получим ортогональность вектора $\widetilde{T}\Psi_1(u_0)$ всем векторам этого базиса, кроме первого $\Psi_1(u_0)$. Отсюда следует, что векторы $\Psi_1(u_0)$ и $\widetilde{T}\Psi_1(u_0)$ параллельны. Идентично доказывается параллельность векторов $\Psi_i(u_0)$ и $\widetilde{T}\Psi_i(u_0)$ для $i\neq 1$. Как уже отмечалось выше, параллельность этих векторов влечет равенство $\beta_{ij}(u_0)=\widetilde{T}\beta_{ij}(u_0)$. Произвольность выбора начальной точки u_0 завершает доказательство леммы.

Из определения β^*_{ij} и (3.24) имеем

Следствие 3.1. *Существует константа η^2 такая, что выполнены равенства*

$$\widetilde{T}\beta^*_{ij}=\eta^2\beta^*_{ij}. \qquad (3.34)$$

Приступим теперь к завершению доказательства теоремы 3.2.

Лемма 3.4. *Пусть функции β_{ij} удовлетворяют условиям теоремы, и пусть η^2 — соответствующий блоховский множитель, определяемый равенством* (3.34). *Тогда при выборе спектрального параметра $\mu = \eta - 1$ существует решение $\Psi_i(u)$ уравнений* (3.15) *и* (3.16), *удовлетворяющее соотношениям* (3.27) *тождественно по u, т.е.*

$$\langle \Psi_j(u), \Psi_k(u) \rangle = \beta^*_{jk}(u), \qquad j,k = 1,\dots,n. \tag{3.35}$$

Доказательство. Рассмотрим решение $\Psi_i(u;u_0)$ для некоторой точки u_0. Согласно определению этого решения соотношения (3.35) выполнены для него в точке u_0. Покажем, что если эти соотношения выполнены в точке u, то они выполнены и в точке $T_i u$. Пусть, например, $i=1$. В ходе доказательства леммы 3.3 было уже доказано, что в точке $T_1 u$ равенства (3.27) выполнены для всех пар индексов, кроме пары $j=1$, $k=1$. Поэтому нам необходимо доказать дополнительно лишь равенство

$$|T_1\Psi_1|^2 = \langle T_1\Psi_1, T_1\Psi_1\rangle = T_1\beta^*_{11}.$$

Из того что векторы (3.33) образуют ортогональный базис объемлющего пространства, следует

$$|T_1\Psi_1|^2 = \frac{\langle T_1\Psi_1, \Psi_1\rangle^2}{|\Psi_1|^2} + \frac{\langle T_1\Psi_1, T_1\Psi_2\rangle^2}{|T_1\Psi_2|^2} + \dots + \frac{\langle T_1\Psi_1, T_1\dots T_{n-1}\Psi_n\rangle^2}{|T_1\dots T_{n-1}\Psi_n|^2}. \tag{3.36}$$

Аналогично выводу равенства (3.30) получаем

$$\langle T_1\Psi_1, \Psi_1\rangle = (v_1 + \mu + 1)\beta^*_{11} - \sum_{j\neq 1}\beta_{1i}\beta^*_{i1} = (\mu+1)\beta^*_{11}. \tag{3.37}$$

Из (3.28) следует, что

$$\langle T_1\Psi_1, T_1\Psi_2\rangle = T_1\beta^*_{12}. \tag{3.38}$$

Кроме того, аналогично выводу равенства (3.32) получим равенство

$$\langle T_1\Psi_1, T_1\dots T_i\Psi_{i+1}\rangle = T_1\left(\sum_{p=2}^{i}(T_2\dots T_i\beta_{i+1,p})\beta^*_{p1} + \beta^*_{i+1,1}\right) = T_1\dots T_i\beta^*_{1,i+1} \tag{3.39}$$

(при получении последнего равенства в (3.39) мы воспользовались формулой (3.26)). Подставляя выражения (3.37)–(3.39) в (3.36), получим

$$|T_1\Psi_1|^2 = \frac{(\mu+1)^2(\beta^*_{11})^2}{\beta^*_{11}} + \frac{(T_1\beta^*_{12})^2}{T_1\beta^*_{22}} + \dots + \frac{(T_1\dots T_{n-1}\beta^*_{1n})^2}{T_1\dots T_{n-1}\beta^*_{nn}}.$$

Используя равенства (3.21) и (3.22), преобразуем последнее выражение к виду

$$\begin{gathered}|T_1\Psi_1|^2 = (\mu+1)^2\beta^*_{11} - T_1[(T_2\beta_{12})\beta^*_{12}] - \dots - T_1\dots T_{n-1}[(T_n\beta_{1n})\beta^*_{1n}] = \\ = (\mu+1)^2\beta^*_{11} - T_1\Delta_2\beta^*_{11} - \dots - T_1\dots T_{n-1}\Delta_n\beta^*_{11} = (\mu+1)^2\beta^*_{11} + T_1\beta^*_{11} - \widetilde{T}\beta^*_{11} = T_1\beta^*_{11}.\end{gathered}$$

Таким образом нами доказано, что соотношения (3.35) выполнены для $\Psi_i(u;u_0)$ в положительном октанте с началом в точке u_0.

Заметим, что решения $\Psi_i(u;u_0')$ и $\Psi_i(u;u_0'')$ совпадают на пересечении соответствующих октантов с точностью до общего ортогонального преобразования. Зафиксируем решение $\Psi(u,0)$ и выберем для любого u_0 начальные данные для $\Psi_i(u;u_0)$ так, чтобы $\Psi_i(u,u_0)$ совпадало с $\Psi_i(u,0)$ на пересечении областей их определения. Тогда совокупность $\Psi_i(u) = \Psi_i(u;u_0)$ для всех u_0 корректно определяет решение системы (3.15), (3.16) во всем пространстве, удовлетворяющее соотношениям (3.35) при всех u. Доказательство леммы 3.4 закончено.

Следствие 3.2. *Построенные выше вектор-функции $\Psi_i(u)$ удовлетворяют соотношению*

$$\langle T_j\Psi_i(u), \Psi_j(u)\rangle = 0, \qquad i \neq j. \tag{3.40}$$

Пусть функции $\beta_{ij}(u)$ удовлетворяют условиям теоремы. Определим функции $h_i(u)$ как решения системы уравнений

$$\Delta_i h_j(u) = \beta_{ij}(u) T_i h_i(u), \qquad i \neq j. \tag{3.41}$$

Эти уравнения совместны в силу (3.10). Решения системы (3.41) зависят от n произвольных функций одной переменной, задающих начальные условия, т.е. от функций $h_i(0,\dots,0,u_i,0,\dots,0)$.

Рассмотрим вектор-функции

$$X_i(u) = T_i h_i(u)\Psi_i(u), \tag{3.42}$$

где $\Psi_i(u)$ определены в предшествующей лемме. Из (3.15) следует, что

$$\Delta_j X_i = \left(T_i\frac{\Delta_j h_i}{h_i}\right) X_i + \left(T_j\frac{\Delta_i h_j}{h_j}\right) X_j = \Delta_i X_j. \tag{3.43}$$

Значит, существует вектор-функция $\mathbf{x}(u)$ такая, что $X_i(u) = \Delta_i\mathbf{x}(u)$. В силу (3.43) функция $\mathbf{x}(u)$ задает планарную решетку, которая в силу (3.40) является решеткой Дарбу–Егорова.

Для завершения доказательства теоремы 3.2 нам осталось показать, что функции $\beta_{ij}(u)$ связаны с коэффициентами вращения этой решетки калибровочными соотношениями (3.14).

Пусть $\widetilde{h}_i(u)$ — коэффициенты Ламе, соответствующие построенной решетке в силу результатов предшествующего раздела. Из (3.5) следует, что X_i удовлетворяют тому же уравнению (3.43), но с коэффициентами, в которых h_i заменены на $\widetilde{h}_i$. Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta_j h_i}{h_i} = \frac{\Delta_j \widetilde{h}_i}{\widetilde{h}_i}.$$

Значит, $h_i = f_i\widetilde{h}_i$, где $f_i = f_i(u_i)$ зависит только от переменной u_i.

Подставляя (3.42) в (3.16) и используя (3.41), получим

$$T_i X_i = \frac{T_i^2 h_i}{T_i h_i}\left((\eta + v_i)X_i - \sum_{j\neq i}\frac{\Delta_i h_j}{T_j h_j}X_j\right).$$

Из (3.6) следует такое же равенство с заменой h_i на $\widetilde{h}_i$ и с заменой η на $1/2$. Поэтому из сравнения коэффициентов при X_j мы получаем сначала, что $f_i = c^{u_i}$, где c — некоторая константа, а потом из сравнения коэффициента при X_i находим, что эта константа равна $(2\eta)^{-1}$. Теорема доказана.

В следующем разделе мы предложим конструкцию широкого класса решеток Дарбу–Егорова, явно выражающихся в терминах тэта-функций вспомогательных римановых поверхностей.

4. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ

Рассмотрим гладкую алгебраическую кривую Γ_0 рода g_0, на которой существует мероморфная функция $E(P)$, $P \in \Gamma_0$, имеющая n простых полюсов и n простых нулей. Пусть точки $P_1, \dots, P_n$ являются полюсами, а точки $Q_1, \dots, Q_n$ — нулями функции $E(P)$. Рассмотрим риманову поверхность Γ функции $\sqrt{E(P)}$. Γ двулистно накрывает Γ_0 и ветвится над ней в $2n$ точках — полюсах и нулях функции $E(P)$. Для рода g кривой Γ по формуле Римана–Гурвица получаем формулу $g = 2g_0 + n - 1$. На кривой Γ имеется голоморфная инволюция σ: $\Gamma \to \Gamma$, переставляющая листы накрытия. Точки P_i и Q_j являются неподвижными точками этой инволюции.

Функция $E(P)$ на Γ_0 принимает каждое значение n раз. Зафиксируем константу c^2 и рассмотрим точки $P_i^c \in \Gamma_0$, $i = 1, \dots, n$, в которых $E(P_i^c) = c^2$. Функция $\lambda = c^{-1}\sqrt{E(P)}$ является нечетной по отношению к инволюции σ, имеет простые полюсы в $P_1, \dots, P_n$ и простые нули в $Q_1, \dots, Q_n$. Обозначим через $P_i^\pm$ прообразы на кривой Γ точек P_i^c так, что $\lambda(P_i^\pm) = \pm 1$ и $\sigma(P_i^+) = P_i^-$.

Локальные координаты в окрестности отмеченных точек $P_i^\pm$ на кривой Γ выберем так: $w_i^+ = \lambda - 1$ в окрестности P_i^+ и $w_i^- = \lambda + 1$ в окрестности P_i^-. Легко видеть, что при таком определении $\sigma(w_i^+) = -w_i^-$.

Пусть $l \ge 1$ — целое число. Рассмотрим на кривой Γ два набора точек в общем положении: набор $\mathcal{R}$ из l точек $R_1, \dots, R_l$ и набор $\mathcal{D}$ из $g + l - 1$ точек $\gamma_1, \dots, \gamma_{g+l-1}$. Пару дивизоров $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ назовем допустимой [14], если на кривой Γ_0 существует мероморфный дифференциал $d\Omega_0$ со следующими свойствами:

(a^0) $d\Omega_0$ имеет $n + l$ простых полюсов в точках Q_i, $i = 1, \dots, n$, и в точках $\widehat{R}_\alpha$, которые являются проекциями точек R_α, $\alpha = 1, \dots, l$, на кривую Γ_0;

(b^0) дифференциал $d\Omega_0$ имеет $g + l - 1$ нулей в проекциях $\widehat{\gamma}_s$ точек γ_s, $s = 1, \dots, g + l - 1$.

Дифференциал $d\Omega_0$ можно воспринимать как четный относительно инволюции σ мероморфный дифференциал на накрывающей кривой Γ, где он имеет следующие аналитические свойства:

(a) $n + 2l$ простых полюсов в точках Q_i, $i = 1, \dots, n$, а также в точках R_α и $\sigma(R_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, l$;

(b) $2(g + l - 1)$ нулей в точках γ_s и $\sigma(\gamma_s)$, $s = 1, \dots, g + l - 1$, а также простые нули в точках P_i, $i = 1, \dots, n$.

Стандартным в теории конечнозонного интегрирования способом доказывается, что существует единственная функция $\psi(u, Q|\mathcal{D}, \mathcal{R})$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, $Q \in \Gamma$, такая, что

(1) $\psi(u, Q|\mathcal{D}, \mathcal{R})$ как функция переменной Q мероморфна на Γ вне отмеченных точек $P_i^\pm$ при любом u и дивизор ее полюсов не превосходит $\mathcal{D}$;

(2) в окрестности точки $P_i^\pm$ функция $\psi(u, Q|\mathcal{D}, \mathcal{R})$ имеет вид

$$\psi = (w_i^\pm)^{\mp u_i} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{s,\pm}^i(u)(w_i^\pm)^s \right); \tag{4.1}$$

(3) ψ удовлетворяет нормировочным условиям

$$\psi(u, R_\alpha|\mathcal{D}, \mathcal{R}) \equiv 1, \qquad \alpha = 1, \dots, l. \tag{4.2}$$

В дальнейшем мы будем часто использовать обозначение $\psi(u, Q)$ для определенного выше дискретного аналога функции Бейкера–Ахиезера, опуская для краткости явное указание на то, что она зависит от дивизоров $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$. Явное выражение для этой функции через тэта-функции практически полностью идентично непрерывному случаю (см. [14]).

Тэта-функцией Римана, соответствующей алгебраической кривой Γ рода g, называется целая функция g комплексных переменных $z = (z_1, \dots, z_g)$, задаваемая своим рядом Фурье

$$\theta(z_1, \dots, z_g) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(m,z) + \pi i(Bm,m)},$$

где $B = B_{ij}$ — матрица b-периодов

$$B_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j$$

нормированных голоморфных дифференциалов $\omega_j(P)$ на Γ:

$$\oint_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}.$$

Здесь a_i, b_i — базис циклов на Γ с канонической матрицей пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$.

Тэта-функция имеет следующие автоморфные свойства относительно матрицы $\mathcal{B}$, порожденной базисными векторами $e_i \in \mathbb{C}^g$ и векторами $B_j \in \mathbb{C}^g$ с координатами B_{ij}: для любых $l \in \mathbb{Z}^g$ и $z \in \mathbb{C}^g$

$$\theta(z + l) = \theta(z), \qquad \theta(z + Bl) = \exp[-i\pi(Bl, l) - 2i\pi(l, z)]\theta(z).$$

Комплексный тор $J(\Gamma)$

$$J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \mathcal{B}$$

называется якобиевым многообразием алгебраической кривой Γ.

Вектор $A(P)$ с координатами

$$A_k(Q) = \int_{q_0}^{Q} \omega_k$$

определяет так называемое отображение Абеля.

Как следует из теоремы Римана–Роха, для любых дивизоров $\mathcal{D} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{g+l-1}$ и $\mathcal{R} = R_1 + \ldots + R_l$ в общем положении существует и единственна мероморфная функция $r_\alpha(Q)$ такая, что ее дивизор полюсов совпадает с дивизором $\mathcal{D}$, и такая, что

$$r_\alpha(R_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Эта функция может быть представлена в следующем виде (см. подробнее в [14]):

$$r_\alpha(Q) = \frac{f_\alpha(Q)}{f_\alpha(R_\alpha)}, \qquad f_\alpha(Q) = \theta(A(Q) + Z_\alpha) \frac{\prod_{\beta \neq \alpha} \theta(A(Q) + F_\beta)}{\prod_{m=1}^{l} \theta(A(Q) + S_m)},$$

где

$$F_\beta = -\mathcal{K} - A(R_\beta) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s), \qquad S_m = -\mathcal{K} - A(\gamma_{g-1+m}) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s),$$

$$Z_\alpha = Z_0 - A(R_\alpha), \qquad Z_0 = -\mathcal{K} - \sum_{s=1}^{g+l-1} A(\gamma_s) + \sum_{\alpha=1}^{l} A(R_\alpha)$$

и $\mathcal{K}$ — вектор римановых констант.

Рассмотрим единственный мероморфный дифференциал $d\Omega_j$ на Γ, голоморфный вне точек $P_j^{\pm}$, имеющий в этих точках простые полюсы с вычетами ∓ 1 и нормированный условиями

$$\oint_{a_k} d\Omega_j = 0.$$

Он задает вектор $V^{(j)}$ с координатами

$$V_k^{(j)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k} d\Omega_j.$$

Функция Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q|D, R)$ имеет вид

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{l} r_\alpha(Q)\frac{\theta(A(Q) + \sum_{i=1}^{n}(u^i V^{(i)}) + Z_\alpha)\theta(Z_0)}{\theta(A(Q) + Z_\alpha)\theta(\sum_{i=1}^{n}(u^i V^{(i)}) + Z_0)} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} u^i \int_{R_\alpha}^{Q} d\Omega_i\right).$$

Теорема 4.1. *Функция Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q)$ удовлетворяет уравнению*

$$\Delta_i\Delta_j\psi(u, Q) = a_{ij}^i(u)\Delta_i\psi(u, Q) + a_{ij}^j(u)\Delta_j\psi(u, Q), \tag{4.3}$$

где коэффициенты a_{ij}^i и a_{ij}^j выражаются через старшие коэффициенты разложения $\xi_{0,+}^s$ функции $\psi(u, Q)$ в окрестности точек P_s^+ по формулам

$$a_{ij}^i = \frac{\Delta_j T_i \xi_{0,+}^i}{T_i \xi_{0,+}^i}, \qquad a_{ij}^j = \frac{\Delta_i T_j \xi_{0,+}^j}{T_j \xi_{0,+}^j}.$$

Доказательство. Благодаря выбору коэффициентов разность левой и правой части уравнения (4.3) удовлетворяет первым двум условиям определения функции Бейкера–Ахиезера, а в точках нормировки обращается в нуль. Из этого наблюдения и из единственности функции Бейкера–Ахиезера немедленно следует утверждение теоремы.

Пусть $\eta_k^2 = \mathrm{Res}_{Q_k} d\Omega_0$. Определим решетку $\mathbf{x}(u) = (x_1(u), \ldots, x_n(u))$ равенством

$$x_k(u) = \eta_k\psi(u, Q_k). \tag{4.4}$$

Ребрами этой решетки являются вектор-функции $X_i(u)$, k-я компонента которых равна $(X_i)^k(u) = \eta_k\Delta_i\psi(u, Q_k)$. Определим также векторы $X_i^-(u)$ равенствами $(X_i^-)^k = -T_i^-(X_i)^k = \eta_k\Delta_i^-\psi(u, Q_k)$. Равенства (4.3), рассмотренные в точках Q_k, показывают, что определенная таким образом решетка является планарной.

В общем случае вектор-функция $\mathbf{x}(u)$ является комплексной. Приведем условия, гарантирующие ее вещественность.

Предположим, что на кривой Γ существует антиголоморфная инволюция τ, коммутирующая с σ и обладающая следующими свойствами:

$$\tau(\mathcal{D}) = \mathcal{D}, \quad \tau(\mathcal{R}) = \mathcal{R}, \quad \tau(Q_i) = Q_i, \quad \tau(P_j^+) = P_j^+. \tag{4.5}$$

Заметим, что из определения дифференциала $d\Omega_0$ следует, что $\tau^* d\Omega_0 = \overline{d\Omega_0}$. Следовательно, вычет η_k^2 этого дифференциала в точке Q_k является вещественным числом. Потребуем дополнительно вещественности η_k (положительности η_k^2). Из (4.5) следует, что аналитические свойства, определяющие функцию $\psi(u, Q)$, совпадают с аналитическими свойствами функции $\overline{\psi(u,\tau(Q))}$. Это означает в силу единственности функции Бейкера–Ахиезера, что $\overline{\psi(u,\tau(Q))} = \psi(u,Q)$. Тогда $\mathbf{x}(u) = \eta_k(\psi(Q_1,u),\dots,\psi_i(Q_n,u)) = \overline{\mathbf{x}}(u)$, а значит, построенная решетка является решеткой в вещественном евклидовом пространстве.

Лемма 4.1. *Выполняются следующие равенства*:

$$\langle X_i(u), X_j^-(u)\rangle = -\delta_{ij}\,(T_i h_i^+(u))\,(T_i^- h_i^-(u)),$$

где $h_i^\pm(u) = \varepsilon_i \xi_{0,\pm}^i(u)$, *а* ε_i^2 *— старший член разложения дифференциала* $d\Omega_0$ *по локальному параметру* w_i^+ *в окрестности точки* P_i^+.

Доказательство. Рассмотрим для $i \neq j$ дифференциал

$$d\Omega_{ij} = (\lambda(Q) - 1)\,\Delta_i\psi(u,Q)\,\Delta_j^-\psi(u,\sigma(Q))\,d\Omega_0.$$

У этого дифференциала есть полюсы только в точках Q_k, $k = 1,\dots,n$. Действительно, полюсы $\lambda(Q) - 1$ в точках P_k, $k = 1,\dots,n$, сокращаются с нулями дифференциала $d\Omega_0$. В точках γ_s и $\sigma(\gamma_s)$ есть полюсы у произведения $\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi^\sigma$, но есть и нуль $d\Omega_0$, а в точках R_α и $\sigma(R_\alpha)$ — наоборот. В точках $P_k^\pm$, $k \neq i,j$, взаимно сокращаются полюс одной из функций $\Delta_i\psi(u,Q)$, $\Delta_j^-\psi(u,\sigma(Q))$ и нуль другой. То же относится к точкам P_i^- и P_j^-. У произведения $\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi^\sigma$ остаются полюсы в точках P_i^+ и P_j^+, но там имеет нуль функция $\lambda(Q) - 1$.

Из теоремы о вычетах мероморфного дифференциала на компактной алгебраической кривой получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{Q_k}\, d\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \Delta_i \mathbf{x}^k(u)\cdot\Delta_j^-\mathbf{x}^k(u) = \langle \Delta_i\mathbf{x}(u), \Delta_j^-\mathbf{x}(u)\rangle = 0.$$

Дифференциал

$$d\Omega_{ii}(u,Q) = (\lambda(Q)-1)\Delta_i\psi(u,Q)\Delta_i^-\psi(u,Q^\sigma)d\Omega_0$$

имеет дополнительный полюс в точке P_i^+ с вычетом

$$\mathrm{Res}_{P_i^+}\, d\Omega_{ii} = \varepsilon_i^2 (T_i\xi_{0,+}^i)(T_i^-\xi_{0,-}^i).$$

Равенство нулю суммы вычетов этого дифференциала завершает доказательство леммы.

Таким образом, мы доказали, что определенная равенствами (4.4) решетка является решеткой Дарбу–Егорова.

Для установления полного соответствия с предыдущими разделами вычислим еще некоторые скалярные произведения.

Лемма 4.2. *Для скалярных произведений векторов* X_i *имеют место формулы* (2.3), (2.5)

$$\langle X_i, X_i\rangle = 2(T_i h_i^+)\,h_i^-, \qquad \langle T_j X_i, X_i^-\rangle = -(T_i T_j h_i^+)\,(T_i^- h_i^-), \quad i \neq j,$$

в которых $h_i^\pm = \varepsilon_i \xi_{0,\pm}^i$.

Доказательство. Рассмотрим дифференциал

$$d\Omega_{ii}^+ = \Delta_i\psi(u,Q)\,\Delta_i\psi(u,\sigma(Q))\,d\Omega_0.$$

Он является мероморфным дифференциалом на Γ и имеет только простые полюсы в точках $Q_1,\dots,Q_n$, а также в P_i^+ и P_i^-, что можно показать, повторив рассуждения предыдущей леммы. Следовательно, сумма вычетов дифференциала $d\Omega^+_{ii}$ в точках $Q_1,\dots,Q_n$, которая совпадает с левой частью (2.3), равна сумме вычетов в P_i^+ и P_i^-, взятой с обратным знаком. Имеем

$$\operatorname{Res}_{P_i^+} d\Omega^+_{ii} = \operatorname{Res}_{P_i^-} d\Omega^+_{ii} = (T_i h_i^+)(-h_i^-),$$

откуда и получаем (2.3).

Равенство (2.5) получается абсолютно аналогично. Для этого достаточно рассмотреть дифференциал

$$d\Omega^{(1)}_{ij} = T_j \Delta_i \psi(u,Q)\, \Delta_i \psi(u,\sigma(Q))\, d\Omega_0.$$

Определим функции $\beta^\pm_{ij}(u)$ и $\beta^*_{ij}(u)$ равенствами

$$\beta^+_{ij} = \frac{\Delta_i h_j^+}{T_i h_i^+}, \qquad \beta^-_{ij} = \frac{\Delta_i^- h_j^-}{T_i^- h_i^-}, \qquad \beta^*_{ij} = \frac{\Delta_i h_j^-}{T_i h_i}.$$

Лемма 4.3. *Функции $\beta^\pm_{ij}(u)$ и $\beta^*_{ij}(u)$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\beta^+_{ij} = -\beta^-_{ji}, \qquad \beta^*_{ij} = \beta^*_{ji}.$$

Доказательство. Выше нами были доказаны формулы (2.3)–(2.5) для векторов X_i и функций $h_i^\pm$. Это позволяет использовать результаты разд. 2, в котором требуемые соотношения уже были доказаны. Тем не менее покажем, что они могут быть получены и непосредственно в рамках алгебро-геометрической конструкции.

Единственными полюсами дифференциала

$$d\Omega^{(2)}_{ij} = \lambda(Q)\, \Delta_j^- \psi(u,Q)\, \Delta_i \psi(u,\sigma(Q))\, d\Omega_0$$

являются простые полюсы в точках P_j^- и P_i^-. Равенство нулю суммы вычетов в этих точках влечет первое равенство леммы. Для доказательства второго равенства следует рассмотреть вычеты дифференциала

$$d\Omega^{(3)}_{ij} = \lambda(Q)\, \Delta_j \psi(u,Q)\, \Delta_i \psi(u,\sigma(Q))\, d\Omega_0$$

в двух его полюсах P_j^+ и P_i^+.

В заключение покажем, что функции

$$\Psi_i(u,Q) = \frac{1}{T_i \xi^i_{0,+}} \Delta_i \psi(u,Q).$$

удовлетворяют уравнениям, калибровочно эквивалентным уравнениям (3.15) и (3.16) со спектральным параметром. Заметим, что вектор-функции Ψ_i однозначно определяются следующими аналитическими свойствами:

(1) $\Psi_i(u,Q)$ как функция переменной Q мероморфна на Γ вне отмеченных точек $P_i^\pm$ при любом u и дивизор ее полюсов не превосходит $\mathcal{D}$;

(2^+) в окрестности точки P_j^+ функция $\Psi_i(u,Q)$ имеет вид

$$\Psi_i = (w_j^+)^{-u_j-1}\left(\delta_{ij} + \sum_{s=1}^{\infty} \zeta^j_{s,+}(u)(w_j^+)^s\right);$$

(2$^-$) в окрестности точки P_j^- функция $\Psi_i(u,Q)$ имеет вид

$$\Psi_i = (w_j^-)^{u_j} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \zeta_{s,-}^j(u)(w_j^-)^s \right);$$

(3) Ψ_i удовлетворяет нормировочным условиям

$$\Psi_i(u,R_\alpha) \equiv 0, \qquad \alpha = 1,\dots,l.$$

Теорема 4.2. *Функции $\Psi_i(u,Q)$ удовлетворяют равенствам*

$$\Delta_j\Psi_i(u,Q) = (T_j\gamma_{ij}(u))\Psi_j(u,Q), \qquad i \neq j,$$
$$\Delta_i\Psi_i(u,Q) = (\mu + v_i)\Psi_i(u,Q) - \sum_{j\neq i}\gamma_{ij}(u)\Psi_j(u,Q),$$

где

$$\gamma_{ij}(u) = \frac{\Delta_i\xi_{0,+}^j(u)}{T_i\xi_{0,+}^i(u)}, \qquad v_i = -\sum_{j\neq i}\gamma_{ij}T_i\gamma_{ji}, \qquad \mu(Q) = \frac{1}{\lambda(Q)-1}.$$

Доказательство теоремы стандартно. Разность левой и правой частей первого равенства удовлетворяет первым двум условиям, определяющим функцию $\psi(u,Q)$, и обращается в нуль в точках нормировки, из чего следует, что она равна нулю тождественно. Аналогично разность левой и правой частей второго уравнения пропорциональна функции $T_i\psi(u,Q)$ (коэффициент v_i выбран таким образом, чтобы обращался в нуль старший член разложения разности в точке P_i^-), а ее значения в точках нормировки показывают, что коэффициент пропорциональности равен нулю.

Коэффициенты γ_{ij}, определенные в теореме, связаны с функциями β_{ij}^+ калибровочным преобразованием

$$\beta_{ij}^+(u) = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}\gamma_{ij}(u).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bobenko A., Pinkall U.* Discretization of surfaces and integrable systems // Discrete integrable geometry and physics / Eds A. Bobenko, R. Seiler. Oxford: Oxford Univ. Press, 1999. То же: Preprint Sfb 296. Berlin, 1997.
2. *Doliwa A., Santini P.M.* Multidimensional quadrilateral lattices are integrable // Phys. Lett. A. 1997. V. 233. P. 365–372.
3. *Doliwa A.* Geometric discretization of the Toda system // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 187–192.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема // ДАН СССР. 1983. Т. 270, №4. С. 781–785.
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток: Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // УМН. 1989. Т. 44, №6. С. 29–98.
6. *Царев С.П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, №5. С. 1048–1068.
7. *Dubrovin B.* Integrable systems in topological field theory // Nucl. Phys. B. 1992. V. 379, N 3. P. 627–689.
8. *Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H.* Topological strings in $d<1$ // Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59–86.

9. *Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H.* Notes on topological string theory and 2D quantum gravity // String theory and quantum gravity: Proc. Trieste Spring School, 1990 / Ed. M. Green. Singapore: World Sci., 1991.

10. *Dijkgraaf R., Witten E.* Mean field theory, topological field theory, and multi-matrix models // Nucl. Phys. B. 1990. V. 342. P. 486–522.

11. *Darboux G.* Leçons sur le systems ortogonaux et les coordones curvilignes. Paris, 1910.

12. *Zakharov V.* Description of the n-ortogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type. Pt 1: Integration of the Lamé equations // Duke Math. J. 1998. V. 94, N 1. P. 103–139.

13. *Захаров В.Е., Манаков С.В.* О редукциях в системах, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния // Докл. РАН. 1998. Т. 360, №3. С. 324–327.

14. *Кричевер И.М.* Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функцион. анализ и его прил. 1997. Т. 31, № 1. С. 32–50.

15. *Cieśliński J., Doliwa A., Santini P.M.* The integrable discrete analogues of orthogonal coordinate systems are multi-dimensional circular lattices // Phys. Lett. A. 1997. V. 235. P. 480–488.

16. *Santini P.M., Doliwa A.* Discrete geometry and integrability: The quadrilateral lattice and its reductions: Preprint. Sabaudia, May 1998.