Функциональный анализ и его приложения
2002, т. 36, вып. 4, с. 1–17

УДК 517.9

Эллиптические семейства решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили и полевой аналог эллиптической системы Калоджеро–Мозера*

© 2002. А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кричевер

§1. Введение

В настоящей работе устанавливается соответствие между полевым аналогом эллиптической системы Калоджеро–Мозера (КМ), впервые предложенным в работе [10], и уравнением Кадомцева–Петвиашвили (КП). Данное соответствие можно рассматривать как очередной шаг в развитии идей, восходящих к работе [1], где динамика полюсов рациональных решений уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) была описана в терминах ограничения высшего потока рациональной системы КМ на стационарные точки самой системы. Аналогичная связь имеет место и в эллиптическом случае.

Эллиптическая система КМ описывает движение N попарно взаимодействующих частиц q_i, $i=1,\dots,N$, на эллиптической кривой; гамильтониан системы имеет вид

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - 2\sum_{i\neq j}\wp(q_i-q_j), \tag{1.1}$$

где $\wp(q)$ — классическая $\wp$-функция Вейерштрасса. Для данной системы известно представление Лакса $\partial L/\partial t = [L,M]$, где L и M являются матрицами размера $N\times N$, зависящими от динамических переменных p_i и q_i (см. [4]). Набор первых интегралов системы можно получить с помощью матрицы Лакса: $H_k = (1/k)\operatorname{tr} L^k$, $k=1,\dots,N$. Согласно [16], эти интегралы независимы и находятся в инволюции. Следовательно, система с гамильтонианом (1.1) вполне интегрируема.

В работе [7] одним из авторов было показано, что ограниченное соответствие между эллиптической системой КМ и эллиптическими решениями уравнения КдФ становится изоморфизмом при переходе к уравнению КП. Оказывается, что функция $u(x,y,t)$, эллиптическая по x, является решением уравнения КП тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$u(x,y,t) = -2\sum_{i=1}^{N}\wp(x-q_i(y,t)) + c\,, \tag{1.2}$$

а ее полюсы $q_i(y,t)$ как функции переменной y удовлетворяют уравнениям движения эллиптической системы КМ. Динамика полюсов по переменной t совпадает с потоком, отвечающим интегралу H_3.

---

*Работа выполнена при поддержке National Science Foundation, грант DMS-01-04621.

Для алгебро-геометрических решений уравнения КП известна явная формула в терминах тета-функций [5], которая в качестве следствия дает *алгебраическое* решение задачи Коши для эллиптической системы КМ [7]. Положения частиц $q_i(y)$ в любой момент времени y удовлетворяют уравнению

$$\theta(\vec{U} q(y) + \vec{V} y + \vec{Z} \mid B) = 0.$$

Тета-функция Римана $\theta(z \mid B)$ определяется с помощью матрицы b-периодов нормированных голоморфных дифференциалов на постоянной во времени спектральной кривой Γ, а векторы $\vec{U}$, $\vec{V}$ и $\vec{Z}$ определяются начальными условиями.

Соответствие между конечномерными интегрируемыми системами и системами полюсов различных солитонных уравнений широко изучалось и представлено, например, в работах [2, 9, 11, 12]. Общая схема построения таких систем, основанная на специальной обратной задаче для линейных операторов с эллиптическими коэффициентами, предложена в работе [8].

В настоящей работе мы исследуем следующую задачу. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили

$$\frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t - \frac{1}{4} u_{xxx} - \frac{3}{2} u u_x\right) \tag{1.3}$$

является первым уравнением иерархии коммутирующих потоков, называемой *иерархией КП*. Общее решение всей совокупности уравнений иерархии задается так называемой *тау-функцией*:

$$u(x, y, t, t_4, \dots) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \tau(x, y, t, t_4, \dots), \qquad x = t_1,\ y = t_2,\ t = t_3.$$

Мы рассматриваем только такие решения u, которые являются эллиптическими функциями одного из времен t_k иерархии КП или же некоторой их линейной комбинации $\lambda = \sum_k \alpha_k t_k$.

Остановимся сначала на алгебро-геометрических решениях уравнения КП. В соответствии с работой [6] каждая гладкая алгебраическая кривая Γ рода g с отмеченной точкой определяет решение всей иерархии КП по формуле

$$u(x, \dots) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta\left(\sum_k \vec{U}_k t_k + \vec{Z} \,\Big|\, B\right), \quad \text{где } x = t_1. \tag{1.4}$$

Здесь, как и ранее, B обозначает матрицу b-периодов нормированных голоморфных дифференциалов на кривой Γ, а $\vec{Z}$ — вектор римановых констант. Компонентами векторов $\vec{U}_k$ служат b-периоды нормированных абелевых дифференциалов второго рода с заданными особенностями в окрестности отмеченной точки. Алгебро-геометрическое решение u будет эллиптическим по некоторому направлению, если найдется такой вектор $\vec{\Lambda} \in \mathbb{C}^g$, который определяет вложение эллиптической кривой $\mathscr{E}$ в якобиан $J(\Gamma)$. Данное условие нетривиально, и пространство соответствующих алгебраических кривых имеет коразмерность $g-1$ в пространстве модулей всех кривых. Если такой вектор $\vec{\Lambda}$ существует, то тета-дивизор пересекает сдвинутую эллиптическую кривую $\mathscr{E} + \sum_k \vec{U}_k t_k$ в конечном числе точек $\lambda_i(t_1, t_2, \dots)$.

Легко проверить прямой подстановкой, что если семейство $u(x, y, t, \lambda)$ решений уравнения КП, гладко зависящее от параметра λ, является двоякопериодической функцией по λ, то имеет место формула

$$u = -2\sum_{i=1}^{N}\bigl[\lambda_{i\,x}^2\wp(\lambda-\lambda_i) - \lambda_{i\,xx}\zeta(\lambda-\lambda_i)\bigr] + c(x,y,t), \qquad \lambda_i = \lambda_i(x,y,t). \quad (1.5)$$

Поскольку сумма вычетов равна нулю для любой эллиптической функции $u(\lambda)$, мы имеем $\sum_i \lambda_{i\,xx} = 0$. Мы ограничимся рассмотрением только таких семейств решений уравнения КП, которые удовлетворяют следующему дополнительному условию. Назовем набор полюсов λ_i семейства $u(\lambda)$ *сбалансированным*, если они представляются в виде

$$\lambda_i(x,y,t) = q_i(x,y,t) - hx, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \qquad \sum_{i=1}^{N} q_i(x,y,t) = \mathrm{const}, \quad (1.6)$$

где h — некоторая ненулевая постоянная. Мы доказываем, что если полюсы семейства u сбалансированны, то функции $q_i(x,y)$ удовлетворяют уравнениям

$$q_{i\,yy} = -\left\{\frac{q_{i\,y}^2}{h-q_{i\,x}}\right\}_x + \frac{1}{Nh}(h-q_{i\,x})\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{q_{k\,y}^2}{h-q_{k\,x}}\right\}_x + 2(h-q_{i\,x})\frac{\delta U(q)}{\delta q_i}$$
$$- \frac{2}{Nh}(h-q_{i\,x})\sum_{k=1}^{N}(h-q_{k\,x})\frac{\delta U(q)}{\delta q_k}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad (1.7)$$

где

$$U(q) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_{i\,xx}^2}{4(h-q_{i\,x})} - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}[(h-q_{j\,x})q_{i\,xx} - (h-q_{i\,x})q_{j\,xx}]\zeta(q_i-q_j)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}[(h-q_{j\,x})^2(h-q_{i\,x}) + (h-q_{j\,x})(h-q_{i\,x})^2]\wp(q_i-q_j). \quad (1.8)$$

Здесь $\delta/\delta q_i$ обозначает вариационную производную. Поскольку $U(q)$ зависит только от самих функций q_i и их первых двух производных по x,

$$\frac{\delta U(q)}{\delta q_i} = \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial U(q)}{\partial q_{i\,x}} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial U(q)}{\partial q_{i\,xx}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Уравнения (1.7) представляют собой некоторую редукцию гамильтоновой системы, которую мы называем *полевой эллиптической системой Калоджеро–Мозера*. В работе [10] эта система была рассмотрена в рамках общей теории уравнений нулевой кривизны на алгебраических кривых. Точкой фазового пространством для полевой системы КМ является набор функций (полей) $q_1(x),\dots,q_N(x),p_1(x),\dots,p_N(x)$, скобка Пуассона определена равенствами $\{q_i(x),p_j(\tilde{x})\} = \delta_{ij}\delta(x-\tilde{x})$, а гамильтониан имеет вид

$$\widehat{H} = \int H(x)\,dx, \qquad H = \sum_{i=1}^{N} p_i^2(h-q_{i\,x}) - \frac{1}{Nh}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(h-q_{i\,x})\right)^2 - \widetilde{U}(q), \quad (1.9)$$

где

$$\widetilde{U}(q) = U(q) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{2}\sum_{i\neq j}(q_{i\,x}-q_{j\,x})\zeta(q_i-q_j)\right).$$

Соответствующие уравнения движения представлены в третьем параграфе работы, см. (3.1). Заметим, что если q_i не зависят от x, то (1.9) сводится к (1.1).

В частном случае $N=2$ гамильтонова редукция полевой системы КМ, соответствующая ограничению $\sum_i q_i = 0$, будет гамильтоновой системой на пространстве двух полей $q(x)$, $p(x)$, где

$$q = q_1 = -q_2, \qquad \frac{1}{h}\, p(h^2 - q_x^2) = p_1(h - q_x) = -p_2(h - q_x),$$

Скобка Пуассона имеет стандартный вид $\{q(x), p(\tilde{x})\} = \delta(x - \tilde{x})$, а плотность гамильтониана H в новых координатах переписывается следующим образом:

$$H = \frac{2}{h}\, p^2(h^2 - q_x^2) - h\,\frac{q_{xx}^2}{2(h^2 - q_x^2)} - 2h(h^2 - 3q_x^2)\wp(2q).$$

А. Б. Шабат заметил, что уравнения движения в этом случае эквивалентны уравнению Ландау–Лифшица. Данный частный случай был независимо исследован в работе [13].

Второй и третий параграфы настоящей работы посвящены доказательству того, что полевая система КМ описывает решения обратной задачи типа Пикара для линейного уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \mathscr{L}\right)\psi(x, y, \lambda) = 0, \qquad \mathscr{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, y, \lambda). \tag{1.10}$$

Напомним, что уравнение (1.10) является одним из уравнений вспомогательной линейной задачи для уравнения КП. Мы показываем, что если уравнение (1.10) при эллиптическом по λ семействе потенциалов вида (1.5) имеет N линейно независимых *двояко-блоховских* решений, то функции $q_i = \lambda_i + hx$ удовлетворяют уравнениям движения, порожденным гамильтонианом (1.9). Как и в [7], данная обратная задача приводит к представлению Лакса для гамильтоновой системы (3.1).

В четвертом параграфе мы показываем, что если полюсы эллиптического по λ семейства решений уравнения КП $u(x, y, t, \lambda)$ сбалансированны, то соответствующее семейство операторов $\partial/\partial y - \mathscr{L}$ имеет бесконечный запас двояко-блоховских собственных функций. В качестве следствия мы получаем, что динамика функции $q_i(x, y, t)$ по переменной y совпадает с уравнениями движения полевой системы КМ. Мы убеждены, что динамика функций q_i по отношению ко всем временам иерархии КП совпадает с иерархией высших потоков системы (3.1), но в настоящий момент этот вопрос остается открытым. Мы планируем рассмотреть его в следующих работах.

В пятом параграфе мы рассматриваем конечнозонные решения иерархии КП, построенные по алгебраическим кривым, N-листно накрывающим эллиптическую кривую. Мы показываем, что такие решения являются эллиптическими функциями некоторой линейной комбинации λ времен t_k. Более того, они имеют ровно N полюсов по λ, и набор этих полюсов сбалансирован. Таким образом, мы получаем широкий класс точных решений полевой эллиптической системы КМ.

Определения и свойства классических эллиптических функций и тета-функции Римана собраны в приложении.

§ 2. Порождающая линейная задача

Зафиксируем пару периодов $2\omega_1, 2\omega_2 \in \mathbb{C}$ так, что $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$. Мероморфная функция $f(\lambda)$ называется *двояко-блоховской*, если она обладает следующими свойствами монодромии по отношению к сдвигам на периоды:

$$f(\lambda + 2\omega_a) = B_a f(\lambda), \qquad a = 1, 2.$$

Комплексные постоянные B_a носят название *блоховских множителей*. Другими словами, двояко-блоховская функция $f(\lambda)$ является сечением некоторого линейного расслоения над эллиптической кривой $\mathscr{E} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[2\omega_1, 2\omega_2]$.

Рассмотрим нестационарный оператор Шрёдингера

$$\partial_y - \mathscr{L} = \partial_y - \partial_{xx}^2 - u(x, y, \lambda), \qquad \partial_x = \partial/\partial x,\ \partial_y = \partial/\partial y,$$

в котором потенциал $u(x, y, \lambda)$ зависит от параметра λ и является двояко-периодической функцией этого параметра. Мы не предполагаем никакой специальной зависимости потенциала по отношению к другим переменным. Поставим задачу найти все такие потенциалы $u(x, y, \lambda)$, для которых уравнение

$$(\partial_y - \mathscr{L})\psi(x, y, \lambda) = 0 \tag{2.1}$$

имеет *достаточный запас* двояко-блоховских решений. Оказывается, что существование таких решений накладывает существенные ограничения на вид потенциала (подробное обсуждение см. в [8]).

Базис в пространстве двояко-блоховских функций можно описать с помощью функции Ламе $\Phi(\lambda, z)$, которая определяется формулой

$$\Phi(\lambda, z) = \frac{\sigma(z - \lambda)}{\sigma(z)\sigma(\lambda)}\, e^{\zeta(z)\lambda}, \tag{2.2}$$

где σ и ζ — эллиптические функции Вейерштрасса (см. приложение). Из свойств монодромии σ- и ζ-функций Вейерштрасса вытекает, что функция $\Phi(\lambda, z)$ двоякопериодична по переменной z. Однако она не является, строго говоря, эллиптической функцией по z, поскольку имеет существенную особенность в точке $z = 0$ при $\lambda \neq 0$. По отношению к переменной λ функция Ламе является двояко-блоховской:

$$\Phi(\lambda + 2\omega_a, z) = T_a(z)\Phi(\lambda, z), \quad T_a(z) = \exp[2\omega_a\zeta(z) - 2\eta_a z], \qquad a = 1, 2,$$

где $\eta_a = \zeta(\omega_a)$ (см. приложение). Функция $\Phi(\lambda, z)$ имеет ровно один полюс по λ в параллелограмме периодов, а именно простой полюс в точке $\lambda = 0$. В окрестности этой точки имеет место разложение

$$\Phi(\lambda, z) = \lambda^{-1} + O(\lambda). \tag{2.3}$$

Другие свойства функции Ламе, которые понадобятся нам в дальнейшем, собраны в приложении.

Рассмотрим некоторую двояко-блоховскую функцию $f(\lambda)$ с блоховскими множителями B_a, $a = 1, 2$. Калибровочное преобразование

$$f(\lambda) \longmapsto \widetilde{f}(\lambda) = f(\lambda)e^{k\lambda}$$

не изменяет положения полюсов функции f и переводит ее в двояко-блоховскую функцию $\widetilde{f}(\lambda)$ с блоховскими множителями $\widetilde{B}_a = B_a e^{2k\omega_a}$. Две пары блоховских множителей B_a и $\widetilde{B}_a$, связанные подобным соотношением, называются эквивалентными. Отметим, что произведение $B_1^{\omega_2} B_2^{-\omega_1}$ зависит только от класса эквивалентности. Заметим также, что любая пара блоховских множителей представляется в виде

$$B_a = T_a(z)e^{2\omega_a k}, \qquad a = 1, 2,$$

при подходящем выборе значений переменных z и k.

Поскольку уравнение (2.1) не содержит дифференцирования по переменной λ, можно ограничиться рассмотрением только таких двояко-блоховских решений $\psi(x,t,\lambda)$, для которых блоховские множители B_a имеют вид $B_a = T_a(z)$ для некоторого z.

Из (2.3) следует, что двояко-блоховская функция $f(\lambda)$ с блоховскими множителями $B_a = T_a(z)$, имеющая в параллелограмме периодов N простых полюсов λ_i, представима в виде

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} s_i \Phi(\lambda - \lambda_i, z), \tag{2.4}$$

где s_i — вычет функции $f(\lambda)$ в точке λ_i. В самом деле, разница левой и правой частей равенства (2.4) будет двояко-блоховской функцией с теми же блоховскими множителями, что и $f(\lambda)$. Более того, эта разница будет голоморфной функцией во всей фундаментальной области. Следовательно, она тождественно равна нулю, поскольку любая ненулевая двояко-блоховская функция имеет по крайней мере один полюс в параллелограмме периодов при условии, что хотя бы один из блоховских множителей отличен от 1.

Следующее утверждение содержит порождающую линейную задачу для уравнений (1.7) и является основной теоремой этого раздела. Для краткости мы будем использовать выражение *сбалансированный потенциал,* имея в виду семейство потенциалов $u(x,t,\lambda)$ с полюсами по λ, удовлетворяющими условиям (1.6).

Теорема 1. *Уравнение* (2.1) *со сбалансированным потенциалом вида*

$$u(x,y,\lambda) = -2\sum_{i=1}^{N}\big[(\lambda_{i\,x})^2\wp(\lambda-\lambda_i) + \lambda_{i\,xx}\,\zeta(\lambda-\lambda_i)\big] + c(x,y) \tag{2.5}$$

имеет N линейно независимых двояко-блоховских решений с блоховскими множителями $T_a(z)$, т. е. решений вида (2.4)*, тогда и только тогда, когда*

$$c(x,y) = \frac{2}{Nh}U(q) - \frac{1}{2Nh}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_{i\,y}^2}{h - q_{i\,x}}, \tag{2.6}$$

а функции $q_i(x,y)$ удовлетворяют системе (1.7).

Если (2.1) *имеет N линейно независимых решений вида* (2.4) *для одного значения z, то такие решения существуют для любого z.*

Доказательство. Мы докажем, что явный вид потенциала (2.5) можно вывести, предполагая, что уравнение (2.1) имеет N линейно независимых двояко-блоховских решений для всех z из некоторой окрестности точки $z = 0$.

Предположим, что потенциал $u(x,y,\lambda)$ сбалансирован. Подставляя (2.4) в уравнение (2.1), немедленно получаем, что полюсы потенциала могут находиться только в точках λ_i и они не более чем второго порядка. Следовательно, мы имеем

$$u(\lambda,x,y) = \sum_{i=1}^{N}[a_i\wp(\lambda-\lambda_i) + b_i\zeta(\lambda-\lambda_i)] + c(x,y)$$

с неизвестными пока коэффициентами $a_i = a_i(x,y)$, $b_i = b_i(x,y)$ и $c = c(x,y)$.

Приравняем нулю старшие коэффициенты разложения правой части уравнения (2.1) в окрестности полюсов λ_i. Из уравнения на коэффициент при $(\lambda-\lambda_i)^{-3}$ получим $a_i = -2(\lambda_{i\,x})^2$. Уравнение на коэффициент при $(\lambda-\lambda_i)^{-2}$ имеет вид

$$2s_{i\,x}\lambda_{i\,x} = s_i(\lambda_{i\,y} - \lambda_{i\,xx} - b_i) - \sum_{j\neq i} s_j a_i \Phi(\lambda_i - \lambda_j, z), \tag{2.7}$$

а уравнение на коэффициент при $(\lambda-\lambda_i)^{-1}$ имеет вид

$$s_{i\,y} - s_{i\,xx} = s_i\left(\lambda_{i\,x}^2\wp(z) + \sum_{j\neq i}[a_i\wp(\lambda_i-\lambda_j) + b_j\zeta(\lambda_i-\lambda_j)] + c\right) \\ + \sum_{j\neq i} s_j(a_i\Phi'(\lambda_i-\lambda_j,z) + b_j\Phi(\lambda_i-\lambda_j,z)). \tag{2.8}$$

Рассмотрим уравнения (2.7) и (2.8) как систему линейных уравнений на коэффициенты $s_i = s_i(x,y,z)$ двояко-блоховской функции (2.4). Введем вектор $\vec{S} = (s_1,\ldots,s_N)$, матрицу $L = (L_{ij})$ с матричными элементами

$$L_{ij} = \delta_{ij}\xi_i + (1-\delta_{ij})\lambda_{i\,x}\Phi(\lambda_i-\lambda_j,z), \quad \text{где } \xi_i = \frac{\lambda_{i\,y} - \lambda_{i\,xx} - b_i}{2\lambda_{i\,x}}, \tag{2.9}$$

и матрицу $A = (A_{ij})$ с матричными элементами

$$A_{ij} = \delta_{ij}\left(\lambda_{i\,x}^2\wp(z) + \sum_{j\neq i}[-2\lambda_{i\,x}^2\wp(\lambda_i-\lambda_j) + b_j\zeta(\lambda_i-\lambda_j)] + c\right) \\ + (1-\delta_{ij})(-2\lambda_{i\,x}^2\Phi'(\lambda_i-\lambda_j,z) + b_j\Phi(\lambda_i-\lambda_j,z)).$$

Линейные уравнения (2.7) и (2.8) переписываются в матричном виде

$$\vec{S}_x = L\vec{S}, \qquad \vec{S}_y = \vec{S}_{xx} + A\vec{S} = (L^2 + L_x + A)\vec{S}. \tag{2.10}$$

Пусть $M = L^2 + L_x + A$; тогда условием совместности линейных уравнений (2.10) является уравнение нулевой кривизны для матриц L и M:

$$L_y - M_x + [L,M] = 0. \tag{2.11}$$

С помощью тождеств (A.3) (см. приложение) для матричных элементов M получаются выражения

$$\begin{aligned} M_{ii} &= \lambda_{i\,x}\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_{k\,x}\right)\wp(z) + m_i^0, \\ M_{ij} &= -\lambda_{i\,x}\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_{k\,x}\right)\Phi'(\lambda_i-\lambda_j,z) + m_{ij}\Phi(\lambda_i-\lambda_j,z), \qquad i\neq j, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$m_i^0 = \xi_i^2 + \xi_{i\,x} - \sum_{k\neq i}\lambda_{k\,x}(2\lambda_{k\,x}^2 + \lambda_{i\,x})\wp(\lambda_i-\lambda_k) + \sum_{k\neq i} b_k\zeta(\lambda_i-\lambda_k) + c,$$

$$m_{ij} = \lambda_{i\,x}(\xi_i+\xi_j) + \lambda_{i\,xx} + b_i + \sum_{k\neq i,j}\lambda_{i\,x}\lambda_{k\,x}\,\eta(\lambda_i,\lambda_k,\lambda_j),$$

а функция $\eta(\lambda,\mu,\nu)$ определена формулой (A.4).

Коэффициент b_i разложения потенциала в окрестности $\lambda=\lambda_i$ определяется из внедиагональной части уравнения нулевой кривизны. Матричный элемент левой части формулы (2.11), отвечающий паре индексов $i\neq j$, представляет собой двоякопериодическую функцию от z. Данная функция голоморфна в параллелограмме периодов всюду, кроме точки $z=0$, в которой она имеет существенную особенность вида $O(z^{-3})\exp[(\lambda_i-\lambda_j)\zeta(z)]$. Для того чтобы такая функция равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы в множителе перед экспонентой равнялись нулю коэффициенты при z^{-3}, z^{-2} и z^{-1}. Непосредственное вычисление показывает, что коэффициент при z^{-3} равен нулю тождественно, а коэффициент при z^{-2} равен

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{N}\lambda_{k\,x}\Bigr)(b_i+2\lambda_{i\,xx}).$$

Так как потенциал сбалансирован, первый сомножитель равен $-Nh\neq 0$, и, следовательно, $b_i=-2\lambda_{i\,xx}$. После этого непосредственное вычисление показывает, что и коэффициент при z^{-1} становится равным нулю.

Уравнение нулевой кривизны (2.11) является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы уравнение (2.1) имело решения вида (2.4). Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Лемма. *Пусть $L=(L_{ij}(x,y,z))$ и $M=(M_{ij}(x,y,z))$ определены формулами* (2.9) *и* (2.12)*, где $b_i=-2\lambda_{i\,xx}$, и набор $\lambda_i(x,y)$, $i=1,\dots,N$, сбалансирован. Тогда L и M удовлетворяют уравнению* (2.11)*, если и только если $c(x,y)$ имеет вид* (2.6)*, а функции $q_i(x,y)$ удовлетворяют уравнениям* (1.7).

Доказательство. Как отмечалось ранее, все внедиагональные уравнения в (2.11) превращаются в тождества, если положить $b_i=-2\lambda_{i\,xx}$. Диагональная часть уравнений нулевой кривизны (2.11) упрощается с помощью тождеств (A.3) и (A.5) и после подстановки $\lambda_i=q_i-hx$ переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{i\,yy}=-2(h-q_{i\,x})c_x+\biggl\{\frac{q_{i\,xx}^2-q_{i\,y}^2}{h-q_{i\,x}}+q_{i\,xxx}\biggr\}_x \\ +4(h-q_{i\,x})\sum_{j\neq i}[(h-q_{j\,x})^3\wp'(q_i-q_j)-3(h-q_{j\,x})q_{j\,xx}\,\wp(q_i-q_j) \\ +q_{j\,xxx}\,\zeta(q_i-q_j)]. \end{aligned}\tag{2.13}$$

Здесь индекс i принимает значения от 1 до N. Просуммируем уравнения (2.13) по всем индексам i. Из условия сбалансированности следует, что левая часть суммы равна нулю, а коэффициент при c_x в правой части равен $-2Nh$. Остальные слагаемые в правой части могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(-\sum_{i=1}^{N}\frac{q_{i\,y}^2}{h-q_{i\,x}}+4U(q)\Bigr).$$

Таким образом, $c(x,y)$ имеет вид (2.6) с точностью до прибавления произвольной функции, не зависящей от x, которая никак не повлияет на уравнения (2.13). Наконец, подставляя (2.6) в (2.13), мы получаем уравнения (1.7). $\square$

§ 3. Полевой аналог эллиптической системы Калоджеро–Мозера

Полевая эллиптическая система КМ впервые появилась в недавней работе [10] одного из авторов как частный случай общей гамильтоновой теории уравнений нулевой кривизны на алгебраических кривых, соответствующий эллиптической кривой с отмеченной точкой. Уравнения нулевой кривизны на алгебраических кривых можно рассматривать как бесконечномерный полевой аналог систем Хитчина. В частном случае эллиптической кривой с отмеченной точкой система Хитчина эквивалентна эллиптической системе КМ (см. [14, 15, 17]).

Полевая эллиптическая система КМ представляет собой гамильтонову систему на фазовом пространстве $\mathcal{N}$, точками которого являются наборы полей $\{q_i(x), p_i(x)\}_{i=1}^N$. Скобка Пуассона задается соотношениями

$$\{q_i(x), q_j(\tilde{x})\} = \{p_i(x), p_j(\tilde{x})\} = 0, \quad \{q_i(x), p_j(\tilde{x})\} = \delta_{ij}\,\delta(x-\tilde{x}), \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant N.$$

Гамильтониан системы имеет вид (1.9). Заметим, что $\widetilde{U}(q)$, в отличие от $U(q)$, является эллиптической функцией от q_i для всех i от 1 до N. Подставляя определение функции $\widetilde{U}(q)$ в формулу (1.9), мы получим следующее выражение для плотности гамильтониана:

$$\begin{aligned} H = {}& \sum_{i=1}^N p_i^2(h-q_{i\,x}) - \frac{1}{Nh}\biggl(\sum_{i=1}^N p_i(h-q_{i\,x})\biggr)^2 \\ & - \sum_{i=1}^N \frac{q_{i\,xx}^2}{4(h-q_{i\,x})} - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\bigl[q_{i\,x}q_{j\,xx} - q_{j\,x}q_{i\,xx}\bigr]\zeta(q_i-q_j) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\bigl[(h-q_{i\,x})^2(h-q_{j\,x}) + (h-q_{i\,x})(h-q_{j\,x})^2 - h(q_{i\,x}-q_{j\,x})^2\bigr]\wp(q_i-q_j). \end{aligned}$$

Уравнения движения полевой эллиптической системы КМ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= 2p_i(h-q_{i\,x}) - \frac{2}{Nh}\sum_{k=1}^N p_k(h-q_{k\,x})(h-q_{i\,x}), \\ \dot{p}_i &= -2p_ip_{i\,x} + \frac{2}{Nh}\biggl\{\sum_{k=1}^N p_ip_k(h-q_{k\,x})\biggr\}_x + \biggl\{\frac{q_{i\,xxx}}{2(h-q_{i\,x})} + \frac{q_{i\,xx}^2}{4(h-q_{i\,x})^2}\biggr\}_x \\ & \quad + 2\sum_{j\neq i}\bigl[q_{j\,xxx}\zeta(q_i-q_j) - 3(h-q_{j\,x})q_{j\,xx}\wp(q_i-q_j) + (h-q_{j\,x})^3\wp'(q_i-q_j)\bigr]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Необходимо пояснить, что в этом разделе мы обозначаем точкой производную по временно́й переменной, подразумевая, что в этой роли выступает y. Такой выбор объясняется тем, что уравнения (3.1), как отмечалось во введении, описывают динамику полюсов эллиптических семейств решений иерархии КП по y (второму времени иерархии).

Легко проверить, что подпространство $\mathcal{N}_1$ фазового пространства $\mathcal{N}$, определенное условием

$$\sum_{i=1}^N q_i(x) = \text{const}, \tag{3.2}$$

инвариантно по отношению к системе (3.1). Плотность гамильтониана H на этом подпространстве переписывается в виде

$$H = \frac{1}{2Nh}\biggl(\sum_{i\neq j}(p_i-p_j)^2(h-q_{i\,x})(h-q_{j\,x})\biggr)-\widetilde{U}(q). \tag{3.3}$$

Таким образом, гамильтониан (1.9), будучи ограничен на $\mathscr{N}_1$, не меняется при общем сдвиге

$$p_i(x)\to p_i(x)+f(x), \tag{3.4}$$

где $f(x)$ — произвольная гладкая функция. Левая часть формулы (3.2) есть не что иное, как первый интеграл, соответствующий симметрии (3.4). Поскольку симплектическая форма инвариантна по отношению к данной симметрии, гамильтонова система (3.1), ограниченная на $\mathscr{N}_1$, редуцируется на факторпространство по действию группы сдвигов (3.4).

Гамильтонова редукция системы (3.1) может быть описана следующим образом. Определим переменные $\ell_i = p_i+\kappa$, $i=1,\dots,N$, где

$$\kappa = -\frac{1}{Nh}\sum_{k=1}^{N}p_k(h-q_{k\,x}). \tag{3.5}$$

Легко видеть, что сдвиги (3.4) не меняют ℓ_i. Кроме того, на подпространстве $\mathscr{N}_1$ выполнено уравнение

$$\sum_{k=1}^{N}\ell_k(h-q_{k\,x})=0. \tag{3.6}$$

Непосредственное вычисление показывает, что из уравнений (3.1) вытекают уравнения

$$\begin{aligned}
&\dot q_i = 2\ell_i(h-q_{ix}),\\
&\dot\ell_i = -2\ell_i\ell_{i\,x}+\frac{2}{Nh}\biggl\{\sum_{k=1}^{N}\ell_k^2(h-q_{kx})-U(q)\biggr\}_x+\biggl\{\frac{q_{i\,xxx}}{2(h-q_{i\,x})}+\frac{q_{i\,xx}^2}{4(h-q_{i\,x})^2}\biggr\}_x\\
&\qquad+2\sum_{j\neq i}\bigl[(h-q_{j\,x})^3\wp'(q_i-q_j)-3(h-q_{j\,x})q_{j\,xx}\,\wp(q_i-q_j)+q_{j\,xxx}\,\zeta(q_i-q_j)\bigr].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Теорема 2. *Уравнения* (1.7) *эквивалентны ограничению системы* (3.7) *на подпространство* $\mathscr{N}_2$*, заданное условиями* (3.2) *и* (3.6).

Доказательство. Покажем, что уравнения (1.7) влекут за собой уравнения (3.7). Первое уравнение в системе (3.7) можно считать определением ℓ_i для всех $i=1,\dots,N$. Дифференцируя про времени, получим

$$\ddot q_i = 2\dot\ell_i(h-q_{i\,x})-2\ell_i\bigl(2\ell_{i\,x}(h-q_{i\,x})-2\ell_i q_{i\,xx}\bigr). \tag{3.8}$$

Следовательно,

$$\dot\ell_i = 2\ell_i\ell_{i\,x}-2\ell_i^2\frac{q_{i\,xx}}{h-q_{i\,x}}+\frac{\ddot q_i}{2(h-q_{i\,x})}\,.$$

Для того чтобы получить второе из уравнений (3.7), теперь достаточно заменить $\ddot q_i$ на правую часть уравнения (2.13) и учесть формулу (2.6).

Обратно, (1.7) выводится из системы (3.7) непосредственной подстановкой второго уравнения системы в уравнение (3.8). □

Заметим, что любое решение системы (3.7), ограниченное на подпространство $\mathscr{N}_2$, определяет решение системы (3.1) однозначно, с точностью до начальных условий. Нетрудно проверить, что если определить $\kappa=\kappa(x,y)$ из уравнения

$$\dot\kappa=\left\{-\kappa^2+\frac{2}{Nh}\sum_{k=1}^{N}\ell_i^2(h-q_{kx})-\frac{2}{Nh}U(q)\right\}_x, \tag{3.9}$$

где ℓ_i, q_i — некоторое решением системы (3.7) на пространстве $\mathscr{N}_2$, то q_i и $p_i=\ell_i-\kappa$ удовлетворяют системе (3.1).

В заключение раздела приведем пару Лакса для полевой эллиптической системы КМ.

Теорема 3. *Система* (3.1) *допускает представление нулевой кривизны, т. е. она эквивалентна матричному уравнению*

$$\widetilde{L}_y-\widetilde{M}_x+\bigl[\widetilde{L},\widetilde{M}\bigr]=0,$$

в котором матрицы Лакса $\widetilde{L}=\bigl(\widetilde{L}_{ij}\bigr)$ *и* $\widetilde{M}=\bigl(\widetilde{M}_{ij}\bigr)$ *имеют вид*

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_{ij}&=-\delta_{ij}p_i+(1-\delta_{ij})\alpha_i\alpha_j\Phi(q_i-q_j,z),\\ \widetilde{M}_{ij}&=\delta_{ij}[-Nh\alpha_i^2\wp(z)+\widetilde{m}_i^0]\\ &\qquad+(1-\delta_{ij})\alpha_i\alpha_j[Nh\Phi'(q_i-q_j,z)-\widetilde{m}_{ij}\Phi(q_i-q_j,z)],\end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\alpha_i^2=q_{i\,x}-h$,

$$\widetilde{m}_i^0=p_i^2+\frac{\alpha_{ixx}}{\alpha_i}+2\kappa p_i-\sum_{j\ne i}\bigl[\alpha_j^2(2\alpha_i^4+\alpha_j^2)\wp(q_i-q_j)+4\alpha_i\alpha_{i\,x}\zeta(q_i-q_j)\bigr],$$

$$\widetilde{m}_{ij}=p_i+p_j+2\kappa+\frac{\alpha_{i\,x}}{\alpha_i}-\frac{\alpha_{j\,x}}{\alpha_j}+\sum_{k\ne i,j}\alpha_k^2\eta(q_i,q_k,q_j),$$

а κ *определяется формулой* (3.5).

Доказательство. Применим к матрицам L и M, заданным формулами (2.9) и (2.12), калибровочное преобразование

$$L\mapsto g_xg^{-1}+gLg^{-1},\qquad M\mapsto g_yg^{-1}+gMg^{-1},$$

где g — диагональная матрица, $g=(g_{ij})$, $g_{ij}=\delta_{ij}(\lambda_{i\,x})^{-1/2}$, и после этого сделаем замену $\lambda_i=q_i-hx$ и $\lambda_{i\,y}/2\lambda_{i\,x}=\ell_i$. Нетрудно проверить, что получится пара Лакса для системы (3.7). Для того чтобы получить (3.10), необходимо применить еще одно калибровочное преобразование, где на этот раз $g=e^KI$, после чего сделать замену $\ell_i=p_i+\kappa$, $i=1,\dots,N$. Здесь $K=K(x,y)=\int_0^x\kappa(\tilde x,y)\,d\tilde x$. Заметим, что $K_y=-\kappa^2-c$ вследствие формул (3.9) и (2.6). □

§ 4. Эллиптические семейства решений уравнения КП

Уравнение КП (1.3) эквивалентно коммутационному соотношению

$$[\partial_y-\mathscr{L},\partial_t-\mathscr{A}]=0,\qquad \partial_y=\partial/\partial y,\ \partial_t=\partial/\partial t, \tag{4.1}$$

для вспомогательных линейных дифференциальных операторов

$$\mathscr{L}=\partial_{xx}^2+u(x,y,t),\qquad \mathscr{A}=\partial_{xxx}^3+\tfrac{3}{2}\,u\partial_x+w(x,y,t),\qquad \partial_x=\partial/\partial x.$$

Мы используем это представление для того, чтобы получить наш основной результат.

Теорема 4. *Пусть* $u(x,y,t,\lambda)$ *— эллиптическое семейство решений уравнения КП, обладающее сбалансированным набором полюсов* $\lambda_i(x,y,t) = q_i(x,y,t) - hx$, $i = 1,\dots,N$. *Тогда* $u(x,y,t,\lambda)$ *имеет вид* (1.5), *а динамика функций* $q_i(x,y,t)$ *по переменной* y *описывается системой* (1.7).

Доказательство. Подставляя u в уравнение (1.3), мы немедленно заключаем, что u может иметь полюсы по λ не более чем второго порядка. Более того, из сравнения коэффициентов разложения левой и правой частей формулы (1.3) в окрестности полюса λ_i следует, что главная часть функции u совпадает с той, что дается формулой (1.5).

Покажем теперь, что уравнение (4.1) влечет за собой существование двоякоблоховских решений уравнения $(\partial_y - \mathscr{L})\psi(x,y,t,\lambda) = 0$.

Определим матрицу $S(x,y,t,z)$ как решение линейного дифференциального уравнения $\partial_x S = LS$ с невырожденным начальным условием $S(0,y,t,z) = S_0(y,t,z)$. Здесь $L = (L_{ij})$,

$$L_{ij} = \delta_{ij}\left(\frac{\lambda_{i\,y} + \lambda_{i\,xx}}{2\lambda_{i\,x}}\right) + (1-\delta_{ij})\lambda_{i\,x}\,\Phi(\lambda_i - \lambda_j, z).$$

Пусть Φ обозначает вектор-строку $(\Phi(\lambda-\lambda_1,z),\dots,\Phi(\lambda-\lambda_N,z))$. Легко видеть, что вектор $(\partial_y - \mathscr{L})\Phi S$ имеет не более чем простые полюсы при $\lambda = \lambda_i$, $i = 1,\dots,N$. Следовательно, он представим в виде ΦD для некоторой матрицы D. Покажем, что из коммутационного соотношения (4.1) вытекает равенство $D_x = LD$. Действительно, рассмотрим вектор

$$(\partial_t - \mathscr{A})\Phi D = (\partial_t - \mathscr{A})(\partial_y - \mathscr{L})\Phi S.$$

A priori он должен иметь полюсы не выше третьего порядка, и, как следствие, вектор $(\partial_t - \mathscr{A})\Phi S$ должен иметь не более чем простые полюсы. Однако тогда в силу равенства

$$(\partial_t - \mathscr{A};)(\partial_t - \mathscr{L})\Phi S = (\partial_y - \mathscr{L})(\partial_t - \mathscr{A})\Phi S$$

вектор $(\partial_t - \mathscr{A})\Phi D$ имеет полюсы не более чем второго порядка. Отсутствие полюса третьего порядка оказывается эквивалентным уравнению $D_x = LD$.

Так как матрицы S и D являются решениями одного и того же линейного дифференциального уравнения по x, они отличаются лишь на некоторую постоянную по x матрицу, т. е. $D(x,y,t,z) = S(x,y,t,z)T(y,t,z)$. Определим $F(y,t,z)$ уравнением $\partial_y F + TF = 0$ и начальным условием $F(0,t,z) = I$, где I — единичная матрица. Пусть $\widetilde{S} = SF$; тогда

$$(\partial_y - \mathscr{L})\Phi\widetilde{S} = (\partial_y - \mathscr{L})\Phi SF = \Phi DF + \Phi SF_y = \Phi S(TF + F_y) = 0,$$

и, следовательно, компоненты вектора $\Phi\widetilde{S}$ представляют собой независимые двояко-блоховские решения уравнения (2.1).

Для завершения доказательства теперь достаточно применить теорему 1. □

§ 5. Алгебро-геометрические решения

Согласно [6], каждая гладкая алгебраическая кривая Γ рода g с отмеченной точкой P_0 и фиксированной локальной координатой w в окрестности отмеченной точки определяет решение иерархии КП по формуле

$$u(t) = 2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta\biggl(\sum_k \vec U_k t_k + \vec Z \,\big|\, B\biggr) + \mathrm{const}\,.$$

Здесь $B = (B_{jk})$ — матрица b-периодов нормированных голоморфных дифференциалов ω_k^h:

$$\oint_{a_i} \omega_j^h = \delta_{ij}, \qquad B_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j^h, \tag{5.1}$$

а компоненты вектора $\vec U_k = (\vec U_k^j)$ являются b-периодами нормированных абелевых дифференциалов второго рода $d\Omega_k$,

$$\vec U_k^j = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_j} d\Omega_k, \qquad \oint_{a_j} d\Omega_k = 0,$$

которые определяются своим разложением по локальному параметру

$$d\Omega_k = dw^{-k} + O(1)\,dw \tag{5.2}$$

в окрестности отмеченной точки P_0.

Пусть Γ является N-листным разветвленным накрытием над некоторой эллиптической кривой $\mathscr{E}$:

$$\rho\colon \Gamma \to \mathscr{E}.$$

В этом случае индуцированное отображение якобианов определяет вложение $\mathscr{E}$ в $J(\Gamma)$, т.е. $\rho^*\mathscr{E} \subset J(\Gamma)$. Как следствие каждое такое N-листное накрытие кривой $\mathscr{E}$ порождает семейство решений уравнения КП. Данное семейство является эллиптическим по λ, где λ — плоская координата на кривой $\mathscr{E}$. Следующее утверждение показывает, что решение КП, построенное по кривой Γ, имеет ровно N полюсов как функция параметра λ. Более того, если локальная координата w в окрестности отмеченной точки P_0 выбрана в виде $\rho^*(\lambda)$, то полюсы решения сбалансированны.

Теорема 5. *Пусть Γ гладко N-листно накрывает эллиптическую кривую $\mathscr{E}$, и пусть $P_0 \in \Gamma$ является прообразом точки $\lambda = 0$ кривой $\mathscr{E}$ при этом накрытии. Пусть $d\Omega_k$, $k = 1, 2$, является нормированным мероморфным дифференциалом на Γ с единственным полюсом в точке P_0 вида* (5.2), *где $w = \rho^*(\lambda)$, и пусть $2\pi i\vec U$ и $2\pi i\vec V$ являются векторами b-периодов дифференциалов $d\Omega_1$ и $d\Omega_2$ соответственно. Тогда уравнение*

$$\theta(\vec\Lambda\lambda + \vec U x + \vec V y \,|\, B) = 0 \tag{5.3}$$

имеет ровно N сбалансированных корней $\lambda_i(x,y) = q_i(x,y) - x/N$, $\sum_i q_i(x,y) = 0$, а функции $q_i(x,y)$ удовлетворяют системе (1.7).

Доказательство. Пусть $2\omega_1$, $2\omega_2$ являются периодами эллиптической кривой $\mathscr{E}$, причем $\mathrm{Im}(\tau) = \mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$. Напомним, что якобиан $J(\Gamma)$ — это фактор пространства $\mathbb{C}^g$ по решетке $\mathscr{B}$, порожденной базисными векторами $\vec e_i \in \mathbb{C}^g$, $i = 1, \ldots, g$, а также столбцами $\vec B_i = (B_{ij}) \in \mathbb{C}^g$, $i = 1, \ldots, g$, матрицы периодов B. Обозначим через $\vec\Lambda$ вектор решетки $\mathscr{B}$, который порождает $\rho^*\mathscr{E} \subset J(\Gamma)$. Заметим, что при этом и вектор $\tau\vec\Lambda$ принадлежит решетке $\mathscr{B}$.

Функция $\theta(\sum_k \vec{U}_k t_k + \vec{\Lambda}\lambda + \vec{Z} \mid B)$ как функция от λ имеет конечное число D нулей в фундаментальной области. На основании свойств монодромии (A.6) мы заключаем, что данная функция может быть записана в виде

$$\theta\biggl(\sum_k \vec{U}_k t_k + \vec{\Lambda}\lambda + \vec{Z} \,\Big|\, B\biggr) = f(t) e^{c_1\lambda + c_2\lambda^2} \prod_{i=1}^{D} \sigma(\lambda - \lambda_i(t))$$

с некоторыми постоянными c_1, c_2.

Нули λ_i определены с точностью до сдвигов на периоды кривой $\mathscr{E}$. Для того чтобы вычислить их количество, рассмотрим контурный интеграл от $d\ln\theta$ по границе образа параллелограмма периодов $\rho^*\mathscr{E}$ в $\mathbb{C}^g$.

Вложение $\mathscr{E}$ в $J(\Gamma)$ определено классами эквивалентности дивизоров $\rho^*(z) - \rho^*(0)$, где $\rho^*(z)$ обозначает дивизор прообразов на кривой Γ точки $z \in \mathscr{E}$. Прообразы a- и b-циклов эллиптической кривой $\mathscr{E}$ при проекции ρ будут некоторыми линейными комбинациями базисных циклов кривой Γ, т. е.

$$\rho^* a = \sum_{k=1}^{g} n_k a_k + m_k b_k, \qquad \rho^* b = \sum_{k=1}^{g} n'_k a_k + m'_k b_k.$$

Следовательно, для векторов $\vec{\Lambda}$ и $\tau\vec{\Lambda}$ получаем

$$\vec{\Lambda} = \sum_{k=1}^{g} n_k \vec{e}_k + m_k \vec{B}_k, \qquad \tau\vec{\Lambda} = \sum_{k=1}^{g} n'_k \vec{e}_k + m'_k \vec{B}_k.$$

Применяя стандартное рассуждение о сумме вычетов, приходим к соотношению

$$2\pi i D = \oint_{\partial(\rho^*\mathscr{E})} d\ln\theta = \int_{\tau\vec{\Lambda}} \biggl(\int_{\vec{\Lambda}} d\ln\theta\biggr) - \int_{\vec{\Lambda}} \biggl(\int_{\tau\vec{\Lambda}} d\ln\theta\biggr).$$

Из свойств монодромии тета-функции следует, что

$$D = \sum_{k=1}^{g} (n_k m'_k - n'_k m_k).$$

Правая часть последней формулы есть не что иное, как индекс пересечения циклов $\rho^* a$ и $\rho^* b$, и, значит,

$$D = (\rho^* a) \cap (\rho^* b) = N(a \cap b) = N.$$

Таким образом, уравнение (5.3) имеет в точности N нулей λ_i, $i = 1, \dots, N$.

Покажем теперь, что набор нулей λ_i сбалансирован. Применяя теорему о сумме вычетов аналогично тому, как мы делали выше, получим

$$-2\pi i \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial\lambda_j}{\partial t_k} = \oint_{\partial(\rho^*\mathscr{E})} (\partial_{t_k} \ln\theta)\, d\lambda = \int_b d\lambda \biggl(\int_{\rho^* a} d\Omega_k\biggr) - \int_a d\lambda \biggl(\int_{\rho^* b} d\Omega_k\biggr). \tag{5.4}$$

Пусть $\operatorname{tr} d\Omega = \rho_*(d\Omega_k)$ обозначает сумму дифференциалов $d\Omega_k$ по всем листам накрытия ρ, висящим над точкой $\lambda \in \mathscr{E}$. Такую сумму можно считать мероморфным дифференциалом на $\mathscr{E}$. Поскольку локальная координата w в окрестности отмеченной точки определяется проекцией, мы имеем

$$\operatorname{tr} d\Omega_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \wp^{(k-1)}(\lambda)\, d\lambda + r_k\, d\lambda, \tag{5.5}$$

где r_k — некоторая константа. Правая часть равенства (5.4) может быть переписана в виде $2\pi i \operatorname{res}_{\lambda=0}(\operatorname{tr}\Omega_k)\,d\lambda$. Легко видеть, что для $k>1$ этот вычет равен нулю, в то время как для $k=1$

$$\operatorname*{res}_{\lambda=0}(\operatorname{tr}\Omega_1)\,d\lambda = \operatorname*{res}_{\lambda=0}\zeta(\lambda)\,d\lambda = 1.$$

Таким образом, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\lambda_j}{\partial x} = -1, \qquad \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_k} = 0, \quad k>1, \tag{5.6}$$

и, как следствие, набор λ_i, $i=1,\ldots,N$, удовлетворяет условиям (1.6). Заметим, что наш выбор локальной координаты в окрестности отмеченной точки приводит к тому, что $h=1/N$. Произвольное ненулевое значение постоянной h можно получить, если в качестве локальной координаты выбрать $w=\rho^*(\lambda/Nh)$. Теорема 5 доказана.

Замечание. Если функции $q_i(x,y)$, $i=1,\ldots,N$, периодичны по x, то алгебраическую кривую Γ можно отождествить со спектральной кривой для оператора $(\partial_x - L)\vec{S}=0$ (см. [10]).

A. Приложение

Эллиптические функции. Мы изложим определения и основные свойства классических эллиптических функций (подробности см. в [3]).

Зафиксируем два ненулевых комплексных числа $2\omega_1, 2\omega_2$, таких, что $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$. Функция Вейерштрасса $\sigma(z)=\sigma(z|\omega_1,\omega_2)$ определяется бесконечным произведением,

$$\sigma(z) = z\prod_{m^2+n^2\neq 0}\left(1-\frac{z}{\omega_{mn}}\right)\exp\left\{\frac{z}{\omega_{mn}}+\frac{z^2}{2\omega_{mn}^2}\right\}, \qquad \omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2.$$

Произведение сходится при каждом z и определяет целую трансцендентную функцию, имеющую лишь простые нули, которые лежат в точках $z=\omega_{mn}$. Функции Вейерштрасса $\zeta(z)=\zeta(z|\omega_1,\omega_2)$, $\wp(z)=\wp(z|\omega_1,\omega_2)$ определяются по формулам

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}, \qquad \wp(z) = -\zeta'(z).$$

Из определений немедленно вытекает, что функции $\sigma(z)$ и $\zeta(z)$ нечетные, а функция $\wp(z)$ четная. При сдвиге аргумента на периоды функции Вейерштрасса обнаруживают следующие свойства:

$$\sigma(z+2\omega_a) = e^{2\eta_a(z+\omega_a)}\sigma(z), \quad \zeta(z+2\omega_a) = \zeta(z)+2\eta_a, \qquad a=1,2,$$

где $\eta_a = \zeta(\omega_a)$ и имеет место соотношение $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i/2$. Функция $\wp(z)$ является двоякопериодической,

$$\wp(z+2\omega_1) = \wp(z+2\omega_2) = \wp(z) = \wp(-z),$$

и может рассматриваться как мероморфная функция на эллиптической кривой $\Gamma = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[2\omega_1, 2\omega_2]$, где она имеет единственный (двойной) полюс в точке $z=0$.

В окрестности этой точки имеют место следующие разложения по локальному параметру:

$$\sigma(z) = z + O(z^5), \qquad \zeta(z) = \frac{1}{z} + O(z^3), \qquad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + O(z^2).$$

Тождества на функцию Ламе. Мы приведем здесь некоторые из используемых нами тождеств, которые включают функцию $\Phi(\lambda, z)$, определенную формулой (2.2).

Функция $\Phi(\lambda, z)$ является решением уравнения Ламе:

$$\Phi''(\lambda, z) = \Phi(\lambda, z)\big[\wp(z) + 2\wp(\lambda)\big], \tag{A.1}$$

где штрихом обозначена производная по первому аргументу. Для первой производной функции $\Phi(\lambda, z)$ выполнено равенство

$$\Phi'(\lambda, z) = \Phi(\lambda, z)[\zeta(z) - \zeta(\lambda) - \zeta(z-\lambda)]. \tag{A.2}$$

Следующие тождества включают произведения функций Ламе при разных значениях первого аргумента:

$$\begin{gathered} \Phi(\lambda-\mu, z)\Phi(\mu-\lambda, z) = \wp(z) - \wp(\lambda-\mu), \\ \Phi(\lambda-\nu, z)\Phi(\nu-\mu, z) = -\Phi'(\lambda-\mu, z) + \Phi(\lambda-\mu, z)\eta(\lambda, \nu, \mu), \end{gathered} \tag{A.3}$$

где во второй формуле мы использовали обозначение

$$\eta(\lambda, \nu, \mu) = \zeta(\lambda-\nu) + \zeta(\nu-\mu) - \zeta(\lambda-\mu). \tag{A.4}$$

Заметим, что функция η полностью антисимметрична по отношению к перестановке аргументов. Завершают список тождества, которые получаются из (A.3) дифференцированием по λ:

$$\begin{gathered} \Phi'(\lambda-\mu, z)\Phi(\mu-\lambda, z) - \Phi(\lambda-\mu, z)\Phi'(\mu-\lambda, z) = -\wp'(\lambda-\mu), \\ \Phi'(\lambda-\nu, z)\Phi(\nu-\mu, z) - \Phi(\lambda-\nu, z)\Phi'(\nu-\mu, z) \\ = -\Phi(\lambda-\mu)[\wp(\lambda-\nu) - \wp(\nu-\mu)]. \end{gathered} \tag{A.5}$$

Тета-функция Римана. Пусть Γ является гладкой алгебраической кривой рода g. Зафиксируем на кривой базис циклов a_i, b_i, $i \leqslant 1 \leqslant g$, с матрицей пересечений $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. Пусть B обозначает матрицу b-периодов нормированных голоморфных дифференциалов ω_i^h, см. (5.1). Матрица B является матрицей Римана, т. е. симметричной матрицей размера $g \times g$ с положительно определенной мнимой частью, $\operatorname{Im} B > 0$.

Тета-функция Римана, отвечающая кривой Γ, определяется своим рядом Фурье:

$$\theta(\vec{z}\,|\,B) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{z}) + \pi i(B\vec{m},\vec{m})}.$$

Тета-функция является аналитической функцией g комплексных переменных $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_g)$. При сдвиге аргумента на векторы решетки $\mathscr{B}$, образованной базисными векторами $\vec{e}_i \in \mathbb{C}^g$, $i = 1, \ldots, g$, а также столбцами $\vec{B}_i \in \mathbb{C}^g$ матрицы B, тета-функция преобразуется по закону

$$\begin{gathered} \theta(\vec{z} + \vec{n}\,|\,B) = \theta(\vec{z}\,|\,B), \\ \theta(\vec{z} + B\vec{n}\,|\,B) = \exp[-2\pi i(\vec{n}, \vec{z}) - \pi i(B\vec{n}, \vec{n})]\theta(\vec{z}\,|\,B). \end{gathered} \tag{A.6}$$

Здесь $\vec{n}$ — произвольный вектор с целочисленными компонентами.

Литература

1. *Airault H., McKean H., Moser J.* Rational and elliptic solutions of the Korteweg–de Vries equation and related many-body problem. Commun. Pure Appl. Math., **30**, No. 1, 95–148 (1977).
2. *Babelon O., Billey E., Krichever I., Talon M.* Spin generalisation of the Calogero–Moser system and the matrix KP equation. In: Topics in Topology and Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 170. Amer. Math. Soc., Providence, 1995, pp. 83–119.
3. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions, Vol. II. McGraw-Hill, 1953.
4. *Calogero F.* Exactly solvable one-dimensional many-body systems. Lett. Nuovo Cimento (2), **13**, No. 11, 411–416 (1975).
5. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений. ДАН, **227**, №2, 291–294 (1976).
6. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии. Функц. анализ и его прил., **11**, вып. 2, 15–32 (1977).
7. *Кричевер И. М.* Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 1, 45–54 (1980).
8. *Krichever I.* Elliptic solutions to difference non-linear equations and nested Bethe ansatz equations. In: Calogero–Moser–Sutherland models (Montreal, QC, 1997), CRM Ser. Math. Phys., Springer-Verlag, New York, 2000, pp. 249–271.
9. *Krichever I.* Elliptic analog of the Toda lattice. Internat. Math. Res. Notices, No. 8, 383–412 (2000).
10. *Krichever I.* Vector bundles and Lax equations on algebraic curves, (2001) hep-th/0108110.
11. *Krichever I., Lipan O., Wiegmann P., Zabrodin A.* Quantum integrable models and discrete classical Hirota equations. Comm. Math. Phys., **188**, No. 2, 267–304 (1997).
12. *Забродин А. В., Кричевер И. М.* Спиновое обобщение модели Рейсенаарса–Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебр Склянина. УМН, **50**, вып. 6, 3–56 (1995).
13. *Levin A., Olshanetsky M., Zotov A.* Hitchin Systems — symplectic maps and two-dimensional version, (2001) arXiv:nlin.SI/0110045
14. *Gorsky A., Nekrasov N.* Elliptic Calogero–Moser system from two-dimensional current algebra, hep-th/9401021.
15. *Nekrasov N.* Holomorphic bundles and many-body systems. Comm. Math. Phys. **180**, No. 3, 587–603 (1996).
16. *Переломов А. М.* Вполне интегрируемые классические системы, связанные с полупростыми алгебрами Ли. Наука, М., 1990.
17. *Markman E.* Spectral curves and integrable systems. Compositio Math. **93**, 255–290 (1994).

Columbia University
e-mail: alakhm@math.columbia.edu

Columbia University
e-mail: yurik@math.columbia.edu

Институт теоретической физики РАН им. Л. Д. Ландау
Институт теоретической и экспериментальной физики
Columbia University,
e-mail: krichev@math.columbia.edu

Поступило в редакцию
13 мая 2002 г.