УДК 513.836

Действия конечных циклических групп на квазикомплексных многообразиях

И. М. Кричевер (Москва)

Как было впервые отмечено в работе [1], инварианты теории бордизмов весьма удобны для описания неподвижных точек действия компактной группы Ли G.

В настоящей работе под действиями и отображениями, если не оговорено противное, подразумеваются бесконечно гладкие действия и отображения, сохраняющие комплексную структуру в стабильном касательном пучке.

В дальнейшем U_*^G будет обозначать несуженный модуль G-бордизмов (см. [1], § 21).

Особыми точками действия группы G на многообразии M называются точки $m \in M$, стационарные подгруппы которых нетривиальны. *Неподвижными точками* называются те особые точки, стационарные подгруппы которых совпадают с G.

Множество неподвижных точек является несвязным объединением гладких подмногообразий, нормальные пучки к которым являются комплексными G-пучками.

Рассмотрим векторные G-пучки над тривиальными G-многообразиями такие, что они не представлены в виде суммы двух векторных G-пучков, на одном из которых действие группы G тривиально. Введем в классе этих пучков естественное соотношение бордантности. Если U_* — кольцо унитарных бордизмов, то структура U_*-модуля задается умножением пространства расслоения на квазикомплексное многообразие. Полученный таким образом U_*-модуль обозначим через R_*^G. Градуировка задается вещественной размерностью пространства расслоения.

Отображение, ставящее в соответствие G-многообразиям набор нормальных G-пучков к неподвижным подмногообразиям, задает гомоморфизм градуированных U_*-модулей $\beta^G : U_*^G \to R_*^G$. Наборы G-пучков, которые являются наборами нормальных пучков к неподвижным подмногообразиям действия группы G, т. е. которые принадлежат $\operatorname{Im} \beta^G$, будем называть *допустимыми*. Для группы $\mathbf{Z}_p$ (p — простое) допустимые наборы неподвижных подмногообразий с тривиальными нормальными пучками были найдены в [2]—[4]; доказательство, не использующее технику формальных групп, получено в [5]. С использованием метода работы [6] ответ для произвольных нормальных пучков найден в [7].

Основной целью § 1 является описание допустимых наборов нормальных G-пучков к неподвижным подмногообразиям действия группы $\mathbf{Z}_{p^k}$, однако метод доказательства позволяет дополнительно получить более геометричную интерпретацию результатов работы [8].

Редукция к группам вида $\mathbf{Z}_{p^k}$ позволяет в § 2 получить необходимые и достаточные условия на неподвижные подмногообразия действия конечной циклической группы произвольного порядка.

В § 3 построен гомоморфизм $\gamma_p^k : R_*^{\mathbf{Z}_{p^k}} \to U_*\otimes Q$ такой, что значение его на допустимом наборе совпадает по модулю идеала pU_* с классом бордизмов многообразия, реализующего этот набор.

Автор весьма обязан С. П. Новикову за постановку задачи, В. М. Бухштаберу и С. М. Гусейн-Заде за ценную помощь и советы.

§ 1. Допустимые наборы неподвижных подмногообразий действия группы $\mathbf{Z}_{p^k}$

1.1. Под представлением группы G в дальнейшем будет подразумеваться векторное пространство с действием G на нем, задаваемым некоторым линейным представлением G. Прямая сумма задает структуру полугруппы в множестве классов изоморфных представлений. Эта полугруппа порождена множеством неприводимых представлений Δ_j, $j\in J(G)$.

Для произвольного векторного G-пучка над тривиальным G-многообразием существует разложение

$$\zeta=\bigoplus_j (\zeta_j\otimes\Delta_j),$$

где $\zeta_j=\mathrm{Hom}_G(\zeta, \Delta_j)$ (предложение 2.2 из [9]). Действие группы G на пучке $\zeta_j\otimes\Delta_j$ задается действием G на втором сомножителе. Это разложение задает изоморфизм модулей

$$R_*^G = \oplus\, U_*\Big(\prod_j \mathbf{BU}(n_j)\Big),$$

суммирование ведется по наборам $(n_1, \ldots, n_j, \ldots)$ таким, что, кроме конечного числа, все n_j равны нулю.

Отображение $\mathbf{BU}(n)\times\mathbf{BU}(m)\to\mathbf{BU}(n+m)$ вводит мультипликативную структуру в $\oplus\, U_*\Big(\prod_j \mathbf{BU}(n_j)\Big)$. Так как $U_*(\mathbf{BU}(n))$ является кольцом полиномов от переменных $(\mathbf{CP}^n)$ с коэффициентами в U_* ($(\mathbf{CP}^n)\in U_*(\mathbf{CP}^\infty)$ — класс бордизмов, соответствующий вложению многообразия $\mathbf{CP}^n$ в $\mathbf{CP}^\infty=\mathbf{BU}(1)$), то модуль R_*^G изоморфен кольцу полиномов с коэффициентами в U_* от переменных $(\mathbf{CP}_j^n)$, где $(\mathbf{CP}_j^n)$ означает G-пучок $\xi\otimes\Delta_j$ над $\mathbf{CP}^n$, ξ — канонический пучок. Образующими R_*^G как U_*-модуля являются мономы $(\mathbf{CP}_{j_1}^{n_1})\times\ldots\times(\mathbf{CP}_{j_r}^{n_r})$.

Все неприводимые представления группы $\mathbf{Z}_m$ одномерны. Образующая группы $\mathbf{Z}_m$ действует на C^1 умножением на $e^{\frac{2\pi i}{m}j}$. Соответствующее представление обозначим через Δ_j^1. Набор Δ_j^1, $1\leqslant j\leqslant m-1$, является набором всех неприводимых представлений группы $\mathbf{Z}_m$.

1.2. Рассмотрим векторные $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучки со свободным действием группы $\mathbf{Z}_{p^k}$ вне нулевого сечения, база которых является особым подмногообразием пространства расслоения. В классе таких пучков (аналогично тому как был введен модуль R_*^G), определим модуль $\mathfrak{M}_*^k$. Поставим в соответствие векторному $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучку ζ, класс бордизмов которого $[\zeta]$ принадлежит $\mathfrak{M}_*^k$, набор нормальных $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучков к неподвижным подмногообразиям в пространстве расслоения. Это соответствие определяет гомоморфизм $\mathfrak{M}_*^k \to R_*^{\mathbf{Z}_{p^k}}$. Ядром этого гомоморфизма является подмодуль $\widehat{\mathfrak{M}}_*^k$ классов бордизмов пучков, на пространстве расслоения которых нет неподвижных точек. Тогда χ — гомоморфизм,

$$\chi : \mathfrak{M}_*^k/\widehat{\mathfrak{M}}_*^k \to R_*^{\mathbf{Z}_{p^k}}.$$

Подгруппы группы $\mathbf{Z}_{p^k}$ образуют направленность по вложению, поэтому множество особых точек действия группы $\mathbf{Z}_{p^k}$ совпадает с множеством неподвижных точек действия подгруппы $\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Z}_{p^k}$. Значит, оно является несвязным объединением подмногообразий, причем набор нормальных $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучков, очевидно, определяет класс бордизмов, принадлежащий модулю $\mathfrak{M}_*^k$. Композицию соответствующего гомоморфизма $U_*^{\mathbf{Z}_{p^k}} \to \mathfrak{M}_*^k$ и проекции $\mathfrak{M}_*^k \to \mathfrak{M}_*^k/\widehat{\mathfrak{M}}_*^k$ обозначим через δ,

$$\delta : U_*^{\mathbf{Z}_{p^k}} \to \mathfrak{M}_*^k/\widehat{\mathfrak{M}}_*^k.$$

Из вышеизложенных определений гомоморфизмов вытекает, что $\beta^{\mathbf{Z}_{p^k}} = \chi \circ \delta$. Значит, класс бордизмов $r \in R_*^{\mathbf{Z}_{p^k}}$ тогда и только тогда принадлежит $\operatorname{Im} \beta^{\mathbf{Z}_{p^k}}$, когда он принадлежит образу мономорфизма χ и $\chi^{-1}(r)$ принадлежит образу гомоморфизма δ.

1.3. Для любого пучка ζ, $[\zeta] \in \mathfrak{M}_{2n}^k$, свободное действие группы $\mathbf{Z}_{p^k}$ на пучке сфер определяет класс бордизмов $\alpha(\zeta)$, принадлежащий $\widetilde{U}_{2n-1}(\mathbf{B}\mathbf{Z}_{p^k})$. Тогда $\alpha : \mathfrak{M}_*^k \to \widetilde{U}_*(\mathbf{B}\mathbf{Z}_{p^k})$ — соответствующий гомоморфизм градуированных U_*-модулей степени -1. Легко проверить точность последовательности

$$U_*^{\mathbf{Z}_{p^k}} \to \mathfrak{M}_*^k \xrightarrow{\alpha} \widetilde{U}_*(\mathbf{B}\mathbf{Z}_{p^k}).$$

Значит, чтобы описать $\operatorname{Im} \delta$, достаточно изучить $\operatorname{Ker} \alpha$.

Ограничение действия представления Δ на единичную сферу S^{2n-1} пространства представления будем также обозначать через Δ. В дальнейшем $\mathbf{B}\mathbf{Z}_{p^k}$ будем представлять как предел вложенных фактормногообразий S^{2n-1}/Δ_1^n, где Δ_j^n — n-мерное представление, равное $n \cdot \Delta_j^1$. Вложение S^{n-1}/Δ_1^n в $\mathbf{B}\mathbf{Z}_p$ обозначим через i_n. Заметим, что по определению $\alpha(\Delta_1^n) = [S^{2n-1}/\Delta_1^n, i_n]$.

Пусть l — тривиальный l-мерный пучок с действием группы $\mathbf{Z}_{p^k}$, в слое, задаваемым представлением Δ_1^l. Свободное действие группы на пучке сфер векторного $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучка $\zeta \oplus l$, $[\zeta] \in \mathfrak{M}_{2n}^k$, задает класс бордизмов $\widetilde{\alpha}(\zeta \oplus l)$ $2(n+l)-1$-мерного остова $\mathbf{B}\mathbf{Z}_{p^k}$.

Для многообразия S^{2N-1}/Δ_1^N имеет место изоморфизм двойственности

$$D_N : U_i(S^{2N-1}/\Delta_1^N) \to U^{2N-i-1}(S^{2N-1}/\Delta_1^N).$$

Из теоремы 35.2 книги [1] легко получить, что существует гомоморфизм $\mathbf{D}\alpha: \mathfrak{M}_*^k \to U^0(\mathbf{BZ}_{p^k})$ такой, что $\overset{*}{i}_{n+l}\mathbf{D}\alpha(\zeta) = \mathbf{D}_{n+l}\widetilde{\alpha}(\zeta \oplus l)$.

Лемма. *Класс бордизмов* $[\zeta] \in \mathfrak{M}_{2n}^k$ *принадлежит* $\operatorname{Ker}\alpha$ *тогда и только тогда, когда* $\overset{*}{i}_{n+1}(u \cdot \mathbf{D}\alpha(\zeta)) = 0$, *где* u — *эйлеров класс канонического пучка над* $\mathbf{BZ}_{p^k}$.

Доказательство. В дальнейшем мы не будем различать в обозначениях векторные пучки над $\mathbf{BZ}_{p^k}$ и их ограничения на конечномерные остовы $\mathbf{BZ}_{p^k}$, то же самое мы будем делать для эйлеровых классов этих пучков.

Напомним, что кольцо кобордизмов $U^*(\mathbf{BZ}_{p^k})$ изоморфно $U^*[[u]]/([u]_{p^k}=0)$, $[u]_{p^k}$ — p^k-степень в формальной группе «геометрических» кобордизмов, а $U^*(S^{2N-1}/\Delta_1^N) = U^*[[u]]/([u]_{p^k}=0,\ u^N=0)$. Вложение $i_N^1: S^{2N-1}/\Delta_1^N \to S^{2N+1}/\Delta_1^{N+1}$ определяет класс бордизмов $[S^{2N-1}/\Delta_1^N,\ i_N^1] \in U_{2N-1}(S^{2N+1}/\Delta_1^{N+1})$, причем $D_{N+1}[S^{2N-1}/\Delta_1^N, i_N^1] = u$. Из этого факта, а также из хорошо известного тождества $f_*(f^*(a) \cap b) = a \cap f_*(b)$ следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U_{2j-1}(S^{2N-1}/\Delta_1^N) & \xrightarrow{i^1_{N*}} & U_{2j-1}(S^{2N+1}/\Delta_1^{N+1}) \\ \downarrow D_N & & \downarrow D_{N+1} \\ U^{2(N-j)}(S^{2N-1}/\Delta_1^N) & \longrightarrow & U^{2(N-j)+2}(S^{2N+1}/\Delta_1^{N+1}), \end{array}$$

где нижняя строка соответствует вложению, при котором u переходит в u, и умножению на u. Доказываемое утверждение вытекает из того, что $i_{N+1_*}: U_{2j-1}(S^{2N+1}/\Delta_1^{N+1}) \to U_{2j-1}(\mathbf{BZ}_{p^k})$ — изоморфизм при $j \leqslant N$.

Замечание. Можно предложить эквивалентную формулировку леммы, а именно, следующую: $[\zeta] \in \operatorname{Ker}\alpha$ *тогда и только тогда, когда* $u \cdot \mathbf{D}\alpha(\zeta)$ *делится на* u^{n+1} *в кольце* $U^*(\mathbf{BZ}_{p^k})$.

1.4. Поставим в соответствие каждому представлению Δ группы G векторный пучок $v(\Delta)$ над $\mathbf{B}G$. Если C^n — пространство представления Δ, то на произведении $C^n \times \mathbf{E}G$ группа G действует диагонально. Тогда $v(\Delta): (C^n \times \mathbf{E}G)/G \to \mathbf{B}G$. Для краткости будем писать $e(\Delta)$, обозначая эйлеров класс пучка $v(\Delta)$. Идеал кольца $U^*(BG)$, образованный классами, аннулируемыми умножением на эйлеров класс некоторого представления, обозначим через $I^*(G)$.

Теорема. *Гомоморфизм* $\mathbf{D}\alpha$ *отображает* $\widehat{\mathfrak{M}}_{2n}^k$ *эпиморфно на идеал* $I^0(\mathbf{Z}_{p^k})$.

Доказательство. Пусть M — база векторного $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучка ζ, являющегося представителем некоторого класса бордизмов $[\zeta] \in \widehat{\mathfrak{M}}_{2n}^k$. По определению модуля $\widehat{\mathfrak{M}}_*^k$ действие группы $\mathbf{Z}_{p^k}$ на многообразии M не имеет неподвижных точек. Тогда существует непрерывное $\mathbf{Z}_{p^k}$-эквивариантное отображение M в сферу S^{2n-1} с действием $\Delta_{p^{k-1}}^n$. Действительно, факторгруппа $\mathbf{Z}_{p^k}/\mathbf{Z}_{p^{k-1}} = \mathbf{Z}_p$ действует свободно на факторкомплексе $M/\mathbf{Z}_{p^{k-1}}$ и на сфере S^{2n-1}. Так как размерность M меньше $2n-1$, то существует непрерывное

$\mathbf{Z}_{p^k}$-эквивариантное отображение $M/\mathbf{Z}_{p^{k-1}}$ в S^{2n-1}. Композиция его с проекцией $M \to M/\mathbf{Z}_{p^{k-1}}$ дает искомое отображение $f: M \to S^{2n-1}$.

Пусть $S(\zeta \oplus l)$ — пучок сфер векторного $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучка $\zeta \oplus l$. Так как действие $\mathbf{Z}_{p^k}$ на $S(\zeta \oplus l)$ свободно, то существует $\mathbf{Z}_{p^k}$-эквивариантное отображение $g: S(\zeta \oplus l) \to S^{2(n+l)-1}$ в сферу с действием Δ_1^{n+l}. Проекцию векторного $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучка $\zeta \oplus l$, а также соответствующую проекцию его пучка сфер обозначим через p. Если h — отображение, полученное сглаживанием непрерывного отображения

$$(f \circ p * g)/\mathbf{Z}_{p^k}: S(\zeta \oplus l)/\mathbf{Z}_{p^k} \to (S^{2n-1} \times S^{2(n+l)-1})/\Delta^n_{p^{k-1}} \times \Delta_1^{n+l},$$

то по построению $\widetilde{p}_*[S(\zeta \oplus l)/\mathbf{Z}_{p^k}, h] = \widetilde{\alpha}(\zeta \oplus l)$. Заметим, что $(S^{2n-1} \times \times S^{2(n+l)-1})/\Delta^n_{p^{k-1}} \times \Delta_1^{n+l}$ является пучком сфер векторного пучка $v(\Delta^n_{p^{k-1}})$, а $\widetilde{p}: v(\Delta^n_{p^{k-1}}) \to \mathbf{BZ}_{p^k}$. Из последнего равенства и из точной последовательности бордизмов пары: пространство расслоения $\mathbf{E}\rho_n$ $(\rho_n = v(\Delta^n_{p^{k-1}}))$, пучок сфер $\mathbf{S}\rho_n$ следует, что $j_* s_{0*} \widetilde{\alpha}(\zeta \oplus l) = 0$, где $j_*: U_*(\mathbf{E}\rho_n) \to U_*(\mathbf{E}\rho_n, \mathbf{S}\rho_n)$, а $s_0: S^{2(n+l)-1}/\Delta_1^{n+l} \to \mathbf{E}\rho_n$ — нулевое сечение. Гомоморфизм $D = \widetilde{p}^* D_{n+l} \widetilde{p}_*$ является изоморфизмом, $D: U_*(\mathbf{E}\rho_n) \to U^*(\mathbf{E}\rho_n)$. Изоморфизм двойственности относительных бордизмов пары $\mathbf{E}\rho_n$, $\mathbf{S}\rho_n$ и кобордизмов $\mathbf{E}\rho_n$ обозначим через D',

$$D': U_*(\mathbf{E}\rho_n, \mathbf{S}\rho_n) \to U^*(\mathbf{E}\rho_n).$$

Легко проверить, что гомоморфизм $U^*(\mathbf{E}\rho_n) \to U^*(\mathbf{E}\rho_n)$, задаваемый умножением на $e(\Delta^n_{p^{k-1}}) = e(\rho_n)$, дополняет следующую диаграмму до коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} U_*(\mathbf{E}\rho_n) & \xrightarrow{j_*} & U_*(\mathbf{E}\rho_n, \mathbf{S}\rho_u) \\ \downarrow D & & \downarrow D' \\ U^*(\mathbf{E}\rho_n) & \longrightarrow & U^*(\mathbf{E}\rho_n). \end{array}$$

Отсюда следует, что $\mathbf{D}_{n+l}\widetilde{\alpha}(\zeta \oplus l) \cdot e(\Delta^n_{p^{k-1}}) = 0$ или что $\mathbf{D}\alpha(\zeta) \cdot e(\Delta^n_{p^{k-1}}) = 0$. Значит, $\mathbf{D}\alpha(\zeta) \in I^0(\mathbf{Z}_{p^k})$.

Покажем, что $I^*(\mathbf{Z}_{p^k})$ совпадает с идеалом, порожденным рядом $\theta_p([u]_{p^{k-1}}) = [u]_{p^k}/[u]_{p^{k-1}}$, где $\theta_p(u)$ — ряд, равный $[u]_p/u$. Из структуры множества неприводимых представлений группы $\mathbf{Z}_{p^k}$ следует, что $e(\Delta_j^1)$ для любого j делит $e(\Delta^n_{p^{k-1}})$. Значит, эйлеров класс любого n-мерного представления делит $e(\Delta^n_{p^{k-1}}) = [u]^n_{p^{k-1}}$. Пусть $P(u) \in U^*[[u]]$ является представителем некоторого класса кобордизмов из $I^*(\mathbf{Z}_{p^k})$, тогда

$$P(u) \cdot [u]^n_{p^{k-1}} = [u]_{p^k} Q(u).$$

Разделим обе части на $[u]_{p^{k-1}}$:

$$P(u)[u]^{n-1}_{p^{k-1}} = \theta_p([u]_{p^{k-1}}) Q(u).$$

Если $n > 1$, то $pQ(u) = 0 \pmod{[u]_{p^{k-1}}}$. Так как ряд $[u]_{p^{k-1}}$ не делится на p, то $Q(u)$ делится на $[u]_{p^{k-1}}$. Следовательно, можно разделить обе части равенства на $[u]_{p^{k-1}}$. Продолжая деление, получим $P(u) = \theta_p([u]_{p^{k-1}})\, Q_1(u)$.

Рассмотрим $\mathbf{Z}_{p^k}$-пространство X_p, состоящее из p точек, на котором образующая группы $\mathbf{Z}_{p^k}$ действует циклической перестановкой. Векторный $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучок над X_p $X_p \times \Delta_1^n$ определяет класс бордизмов, принадлежащий $\widehat{\mathfrak{M}}_{2n}^k$. По уже доказанному $\mathbf{D}\alpha(X_p \times \Delta_1^n) = \theta_p([u]_{p^{k-1}})\widetilde{Q}(u)$.

Вложение подгруппы $\mathbf{Z}_{p^{k-1}}$ в $\mathbf{Z}_{p^k}$ индуцирует отображение $i : \mathbf{BZ}_{p^{k-1}} \to \mathbf{BZ}_{p^k}$.

Доказательство следующей леммы получается непосредственной проверкой с использованием конструкции гомоморфизма переноса t из [1].

Лемма. *Пусть на сфере S^{2N-1} действие группы $\mathbf{Z}_{p^{k-1}}$ получено ограничением действия Δ_1^N группы $\mathbf{Z}_{p^k}$, тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
U_{2m-1}(S^{2N-1}/\Delta_1^N) & \xrightarrow{t} & U_{2m-1}(S^{2N-1}/\mathbf{Z}_{p^{k-1}}) \\
\downarrow D_N & & \downarrow D'_N \\
U^{2(N-m)}(S^{2N-1}/\Delta_1^N) & \xrightarrow{i^*} & U^{2(N-m)}(S^{2N-1}/\mathbf{Z}_{p^{k-1}})
\end{array}$$

коммутативна. D'_N — изоморфизм двойственности для многообразия $S^{2N-1}/\mathbf{Z}_{p^{k-1}}$.

Так как на X_p действие подгруппы $\mathbf{Z}_{p^{k-1}}$ тривиально, то $i^*\mathbf{D}\alpha(X_p \times \Delta_1^n) = D'_N t(X_p \times \Delta_1^N) = p$. Но $i^*\theta_p([u]_{p^{k-1}}) = p$. Отсюда следует, что $\widetilde{Q}(u) = 1$ и $\mathbf{D}\alpha(X_p \times \Delta_1^n) = \theta_p([u]_{p^{k-1}})$.

Теорема доказана.

1.5. Этот пункт лежит несколько в стороне от основной цели настоящей работы, однако объединен с остальным общим методом доказательства, который позволяет получить более геометричную интерпретацию теорем «целочисленности» в кобордизмах, полученных в [8].

Пусть i — вложение G-многообразия M в некоторое пространство представления $\widetilde{\Delta}$, оно индуцирует вложение пространства $(M \times \mathbf{EG})/G$ в пространство расслоения векторного пучка $v(\widetilde{\Delta})$ с комплексным нормальным пучком. Конструкция Тома задает класс кобордизмов пространства Тома пучка $v(\widetilde{\Delta})$, который будет обозначаться через $\lambda(M) \in U^*(\mathbf{M}v(\widetilde{\Delta}))$. Пусть Φ: $U^*(\mathbf{M}v(\widetilde{\Delta})) \to U^*(\mathbf{BG})$ — изоморфизм Тома, тогда корректно определен гомоморфизм μ: $U_{2n}^G \to U^{-2n}(\mathbf{BG})$, значение которого на G-многообразии M равно $\Phi\lambda(M)$.

Если действие группы G на многообразии M не имело неподвижных точек, то можно считать, что вложение i является эквивариантным отображением в сферу пространства представления. Так же, как и в предыдущем пункте, замечаем, что $\lambda(M)$ при гомоморфизме $U^*(\mathbf{M}v(\widetilde{\Delta})) \to U^*(\mathbf{E}v(\widetilde{\Delta}))$ переходит в нуль. Так как этот гомоморфизм совпадает с композицией изоморфизма Φ и умножения на $e(\widetilde{\Delta})$, то доказана

Теорема. *Гомоморфизм μ отображает подмодуль $\hat{U}_*{}^G$ в идеал $I^*(G)$.*

1.6. Как было показано в пункте 1.4, факторкольцо $U^*(\mathbf{BZ}_{p^k})/I^*(\mathbf{Z}_{p^k})$ изоморфно кольцу $U^*[[u]]/(\theta_p([u]_{p^{k-1}})=0)$. Пусть $\overline{\mathbf{D}\alpha}$ обозначает композицию гомоморфизма $\mathbf{D}\alpha$ и проекции $U^*(\mathbf{BZ}_{p^k})\to U^*[[u]]/(\theta_p([u]_{p^{k-1}})=0)$. Из теоремы 1.5 следует, что гомоморфизм $\overline{\mathbf{D}\alpha}$ представим в виде

$$\mathfrak{M}_*^k\to\mathfrak{M}_*^k/\hat{\mathfrak{M}}_*^k\to U^0(\mathbf{BZ}_{p^k})/I^0\ (Z_{p^k}).$$

Вспоминая замечание к лемме 1.3, получаем

Следствие. *Класс смежности фактормодуля $\mathfrak{M}_{2n}^k/\hat{\mathfrak{M}}_{2n}^k$ тогда и только тогда принадлежит $\operatorname{Im}\delta$, когда для представителя этого класса $[\zeta]\in\mathfrak{M}_{2n}^k$ $\mathbf{D}\alpha(\zeta)$ делится на u^n в кольце $U^*[[u]]/(\theta_p([u]_{p^{k-1}})=0)$.*

1.7. Пусть M — n-мерное многообразие с действием группы $\mathbf{Z}_{p^k}$. Свободное действие группы $\mathbf{Z}_{p^k}$ Δ_1^N на сфере S^{2N-1} задает свободное действие на произведении $M\times S^{2N-1}$. Если φ_N — проекция, $\varphi_N:(M\times S^{2N-1})/\mathbf{Z}_{p^k}\to\to S^{2N-1}/\Delta_1^N$, то $\varphi_N(M)=[(M\times S^{2N-1})/\mathbf{Z}_{p^k},\varphi_N]$. Легко проверить, что существует класс кобордизмов $\mathbf{D}\varphi(M)\in U^{-2n}(\mathbf{BZ}_{p^k})$ такой, что $\overset{*}{i}_N\mathbf{D}\varphi(M)=\mathbf{D}_N\varphi_N(M)$.

В этом пункте мы будем предполагать, что M является особым многообразием (это равносильно тривиальности действия подгруппы $\mathbf{Z}_p$).

Теорема. *Пусть $[\zeta]=[M\times(\mathbf{CP}_{j_1}^{n_1})\times\cdots\times(\mathbf{CP}_{j_r}^{n_r})]$ — класс бордизмов, принадлежащий $\mathfrak{M}_*^k$ (из определения $\mathfrak{M}_*^k$ следует, что $(j_s,p)=1$), тогда $\mathbf{D}\alpha(\zeta)$ удовлетворяет равенству*

$$\prod_s e(\Delta_{j_s}^{n_s+1})\mathbf{D}\alpha(\zeta)=e(\Delta_1^n)\mathbf{D}\varphi(M)\cdot\prod_s e(\Delta_1^{n_s+1})\pi_!^s e(\eta_s^-\otimes\xi^{j_s}),$$

где η_s — пучок над $\mathbf{CP}^{n_s}$ такой, что его сумма с каноническим пучком над $\mathbf{CP}^{n_s}$ ξ_s тривиальна, ξ — канонический пучок над $\mathbf{BZ}_{p^k}$, а $\pi_!^s$ — гомоморфизм Гизина [10], *соответствующий отображению $\pi^s:\mathbf{CP}^{n_s}\times\mathbf{BZ}_p{}^k\to\mathbf{BZ}_p{}^k$.*

Доказательство. Для всякого пространства X нульмерный пучок над ним обозначим через 1_X. Векторный $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучок ζ_1 по определению равен сумме векторных $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучков $\tilde{\xi}_s=1_M\times 1_{\mathbf{CP}^{n_1}}\times\cdots\times(\xi_s\otimes\Delta_{j_s}^1)\times\cdots\times 1_{\mathbf{CP}^{n_r}}$. Аналогично по векторному пучку η_s построим векторный $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучок $\tilde{\eta}_s$. Пространство расслоения пучка сфер векторного $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучка $\zeta\bigoplus_s\tilde{\eta}_s\oplus l$, обозначим его $F_l(\zeta)$, совпадает с $\mathbf{Z}_{p^k}$-многообразием $M\times\mathbf{CP}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{CP}^{n_r}\times S^{2(N+l)-1}$, у которого на сфере $S^{2(N+l)-1}$ действие $\Delta_1^l\bigoplus_s\Delta_{j_s}^{n_s+1}$ $\left(N=\sum_s(n_s+1)\right)$.

Аналогично лемме из [10] доказывается

Лемма 1. *Пусть $i:S(\zeta\oplus l)/\mathbf{Z}_{p^k}\to F_l(\zeta)/\mathbf{Z}_{p^k}$ — вложение, $\mathbf{D}_l^F$ — изоморфизм двойственности для многообразия $F_l(\zeta)/\mathbf{Z}_{p^k}$, а $\tilde{\eta}_s'$ — $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучок над $\mathbf{Z}_{p^k}$-много-*

образием $F_l(\zeta)$, *полученный из пучка* $\tilde{\eta}_s$ *при отображении* $F_l(\zeta)\to M\times\times\mathbf{CP}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{CP}^{n_r}$. *Тогда* $\mathbf{D}_l^F[S(\zeta\oplus l)/\mathbf{Z}_{p^k}, i]=e(\bigoplus_s\tilde{\eta}'_s/\mathbf{Z}_{p^k})$.

Рассмотрим $\mathbf{Z}_{p^k}$-эквивариантное отображение, тождественное на первых $r+1$ сомножителях, $F_l(\zeta)$ в $\mathbf{Z}_{p^k}$-многообразие $M\times\mathbf{CP}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{CP}^{n_r}\times S^{2(N+l)-1}$, у которого действие на $S^{2(N+l)-1}$ есть Δ_1^{N+l}. Соответствующее отображение факторпространств обозначим через f_2. Почти дословно повторяя доказательство теоремы 1 из [5], получим следующую лемму.

Лемма 2. *Если* $\pi_{N+l}\colon(M\times\cdots\times S^{2(N+l)-1})/\mathbf{Z}_{p^k}\to S^{2(N+l)-1}/\Delta_1^{N+l}$, то имеет место равенство

$$\left[\prod_s\pi_{N+l}^*e(\Delta_{j_s}^{n_s+1})\right]\cdot f_{2!}(1)=\prod_s\pi_{N+l}^*e(\Delta_1^{n_s+1}).$$

Векторный $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучок над $M\times\cdots\times\mathbf{CP}^{n_r}\times S^{2(N+l)-1}$, полученный из пучка $\tilde{\eta}_s$ при проекции $M\times\cdots\times S^{2(N+l)-1}\to M\times\cdots\times\mathbf{CP}^{n_r}$, обозначим через $\tilde{\eta}''_s$. Из определения отображения f_2 следует, что $\tilde{\eta}'_s/\mathbf{Z}_{p^k}=f_2^*(\tilde{\eta}''_s/\mathbf{Z}_{p^k})$. Далее, $\tilde{\mathbf{D}}_{N+l}$ — изоморфизм двойственности для многообразия $(M\times\cdots\times S^{2(N+l)-1})/\mathbf{Z}_{p^k}$. Применим к равенству, доказанному в лемме 1 этого пункта, гомоморфизм $f_{2!}$:

$$\tilde{\mathbf{D}}_{N+l}[S(\zeta\oplus l)/\mathbf{Z}_{p^k}, f_2\circ i]=f_{2!}(f_2^*e(\oplus\tilde{\eta}''_s/\mathbf{Z}_{p^k}))=f_{2!}(1)\,e(\oplus\tilde{\eta}''_s/\mathbf{Z}_{p^k}).$$

Отсюда

$$\prod_s\pi_{N+l}^*e(\Delta_{j_s}^{n_s+1})\,\tilde{D}_{N+l}[S(\zeta\oplus l)/\mathbf{Z}_{p^k}, f_2\circ i]=\prod_s\pi_{N+l}^*e(\Delta_1^{n_s+1})\,e(\tilde{\eta}''_s/\mathbf{Z}_{p^k}).$$

По построению имеем $[S(\zeta\oplus l)/\mathbf{Z}_{p^k}, \pi_{N+l}\circ f_2\circ i]=\tilde{\alpha}(\zeta\oplus l)$, если отождествить $S^{2(N+l)-1}/\Delta_1^{N+l}$ с остовом $S^{2(N+l+n)-1}/\Delta_1^{n+l+N}$. Тогда

$$\mathbf{D}_{N+l+n}\tilde{\alpha}(\zeta\oplus l)=e(\Delta_1^n)D_{N+l}[S(\zeta\oplus l)/Z_{p^k}, \pi_{N+l}\circ f_2\circ i].$$

Применим гомоморфизм $\pi_{N+l!}$ к предыдущему равенству:

$$\prod_s e(\Delta_{j_s}^{n_s+1})\mathbf{D}_{N+l+n}\tilde{\alpha}(\zeta\oplus l)=e(\Delta_1^n)\,\pi_{N+l!}e(\oplus\tilde{\eta}''_s/\mathbf{Z}_{p^k})\prod_s e(\Delta_1^{n_s+1}).$$

Представим проекцию π_{N+l} в виде композиции $\pi''_{N+l}\circ\pi'_{N+l}$,

$$\pi'_{N+l}\colon(M\times\ldots\times S^{2(N+l)-1})/\mathbf{Z}_{p^k}\to\mathbf{CP}^{n_1}\times\ldots\times\mathbf{CP}^{n_r}\times S^{2(N+l)-1}/\Delta_1^{N+l},$$

$$\pi''_{N+l}\colon\mathbf{CP}^{n_1}\times\ldots\times\mathbf{CP}^{n_r}\times S^{2(N+l)-1}/\Delta_1^{N+l}\to S^{2(N+l)}/\Delta_1^{N+l}.$$

Если $\tilde{\eta}'''_s$ — векторный пучок над $\mathbf{CP}^{n_1}\times\ldots\times\mathbf{CP}^{n_r}\times\mathbf{BZ}_{p^k}$, равный $1_{\mathbf{CP}^{n_1}}\times\times\ldots\times(\eta_s\otimes\xi^{j_s})\times\ldots\times 1_{\mathbf{CP}^{n_r}}$, то $\tilde{\eta}''_s/\mathbf{Z}_{p^k}=\pi'^*_{N+l}(\tilde{\eta}''_s)$. Тогда

$$\pi'_{N+l!}(e(\oplus\tilde{\eta}''_s/\mathbf{Z}_{p^k}))=e(\oplus\tilde{\eta}'''_s)\,\pi'_{N+l!}(1).$$

Из определения гомоморфизма $\mathbf{D}\varphi$ вытекает, что $\pi'_{N+l}(1)=\pi''^{*}_{N+l}\mathbf{D}\varphi(M)$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $\pi''_{N+l}e(\bigoplus\tilde{\eta}'''_s)=$
$=\prod_s \pi^s_l e(\eta_s\otimes\xi^{j_s})$.

1.8. Так как умножение на эйлеровы классы представлений в кольце $U^*[[u]]/(\theta_p([u]_p^{k-1}=0)$ является мономорфизмом, то уравнение, которому удовлетворяет $\mathbf{D}\alpha(\zeta)$, разрешимо относительно $\overline{\mathbf{D}\alpha}(\zeta)$.

Следствие. *Пусть $A_n(v,u)$ — ряд, определяемый из равенства $A_n(v,u)f(v,u)=1\otimes u^{n+1}$ в кольце $U^*[[v,u]]/v^{n+1}=0$, где $f(v,u)$ — формальная группа «геометрических» кобордизмов. Ряд $B_n(u)$ получен из $A_n(v,u)$ заменой v^k на $[\mathbf{CP}^{n-k}]$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Для векторного $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучка* $\zeta=$
$=(\mathbf{CP}^{n_1}_{j_1})\times\ldots\times(\mathbf{CP}^{n_r}_{j_r})$, $(j_s,p)=1$,

$$\overline{\mathbf{D}\alpha}(\zeta)=\prod_s\frac{e(\Delta_1^{n_s+1})}{e(\Delta_{j_s}^{n_s+1})}B_{n_s}(e(\Delta^1_{j_s})).$$

Замечание. Из определения ряда $B_n(u)$ несложной проверкой получается равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n(u)t^n\right)f(u,ut)=u\left(\sum_{n=0}^{\infty}[\mathbf{CP}^n]u^nt^n\right).$$

1.9. Так как по определению модуля $R_*^{\mathbf{Z}_{p^k}}$ ограничение действия группы $\mathbf{Z}_{p^k}$ на пучок сфер векторного $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучка ζ, $[\zeta]\in R_{2n}^{\mathbf{Z}_{p^k}}$, не имеет неподвижных точек, то существует непрерывное $\mathbf{Z}_{p^k}$-эквивариантное отображение $\mathbf{S}\zeta$ в сферу S^{2n-1} с действием $\overset{n}{\Delta}_{p^k-1}$ (см. пункт 1.4). По линейности продолжим его до непрерывного $\mathbf{Z}_{p^k}$-эквивариантного отображения $\mathbf{E}\zeta$ в C^n-пространство представления $\overset{n}{\Delta}_{p^k-1}$ $g_1:\mathbf{E}\zeta\to C^n$. Если ψ_N — отображение, сглаживающее непрерывное факторотображение

$$(g_1\times\mathrm{id})/\mathbf{Z}_{p^k}:(\mathbf{E}\zeta\times S^{2N-1})/\mathbf{Z}_{p^k}\to(C^n\times S^{2N-1})/\mathbf{Z}_{p^k}$$

(действие на сфере S^{2N-1} есть Δ_1^N), то оно определяет класс относительных бордизмов

$$\psi_N(\zeta)=[(\mathbf{E}\zeta\times S^{2N-1})/\mathbf{Z}_{p^k},\quad(\mathbf{S}\zeta\times S^{2N-1}/\mathbf{Z}_{p^k});\ \psi_N]\in U_{2(N+n)-1}(\mathbf{E}\rho_n,\ \mathbf{S}\rho_n).$$

Существует класс кобордизмов $\mathbf{D}\psi(\zeta)\in U^0(\mathbf{B}\mathbf{Z}_{p^k})$ такой, что $i_N^*\mathbf{D}\psi(\zeta)=$
$=s_0^*D'(\psi_N(\zeta))$. Тем самым построен гомоморфизм $\mathbf{D}\psi:R_*^{\mathbf{Z}_{p^k}}\to U^0(\mathbf{B}\mathbf{Z}_{p^k})$.

Лемма. *Рассмотрим произвольное $\mathbf{Z}_{p^k}$-многообразие M. Для него выполнено равенство*

$$e(\overset{n}{\Delta}_{p^k-1})\,\mathbf{D}\varphi(M)=\mathbf{D}\psi(\beta^{\mathbf{Z}_{p^k}}(M)).$$

Доказательство. Дополнение до трубчатых окрестностей неподвижных подмногообразий действия $\mathbf{Z}_{p^k}$ на многообразии M отображается непрерывно $\mathbf{Z}_{p^k}$-эквивариантно в сферу S^{2N-1} с действием $\overset{n}{\Delta}_{p^k-1}$. Продолжая по линейности это отображение на трубчатые окрестности, получим непрерывное $\mathbf{Z}_{p^k}$-эквивариантное отображение $g_2: M \to C^n$. Отображение, сглаживающее $(g_2 \times \mathrm{id})/\mathbf{Z}_{p^k}: (M \times S^{2N-1})/\mathbf{Z}_{p^k} \to (C^n \times S^{2N-1})/\mathbf{Z}_{p^k}$, определяет класс бордизмов, который, очевидно, совпадает с $s_{0*}\varphi_N(M) \in U_{2(N+n)-1}(\mathbf{E}\rho_n)$. Утверждение леммы следует из определения гомоморфизма $\mathbf{D}\psi$ и диаграммы пункта 1. 4.

1.10. Для гомоморфизма $\mathbf{D}\psi$ имеют место аналоги теорем 1 из [5] и 1.7 настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть Δ — n-мерное представление группы $\mathbf{Z}_{p^k}$, не имеющее тривиальных слагаемых. Тогда $e(\Delta)\cdot\mathbf{D}\psi(\Delta) = e(\overset{n}{\Delta}_{p^k-1})$.*

Доказательство. Рассмотрим вложение $i: \mathbf{E}\rho_n \subset E(\rho_n \oplus v(\Delta))$. Очевидно, класс кобордизмов, двойственный к $i_*\psi_N(\Delta)$, равен $i_N^*(\mathbf{D}\psi(\Delta)\cdot e(\Delta))$. Воспользуемся тем, что два $\mathbf{Z}_{p^k}$-эквивариантных отображения h_1 и h_2 пространства представления Δ в пространство представления $\Delta + \overset{n}{\Delta}_{p^k-1}$ $\mathbf{Z}_{p^k}$-гомотопны. Это означает, что класс бордизмов $i_*\psi_N(\Delta)$ совпадает с классом бордизмов, задаваемым вложением $E(v(\Delta)) \to E(\rho_n \oplus v(\Delta))$. Но при этом нормальный пучок к образу вложения есть ρ_n, и, значит, двойственный класс кобордизмов равен $e(\overset{n}{\Delta}_{p^k-1})$. Тем самым доказываемое равенство получено.

Незначительно изменяя доказательство теоремы 1.7, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Значение гомоморфизма $\mathbf{D}\psi$ на векторном $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучке $\zeta = (\mathbf{CP}_{j_1}^{n_1}) \times \ldots \times (\mathbf{CP}_{j_r}^{n_r})$ удовлетворяет равенству*

$$\prod_s e(\Delta_{j_s}^{n_s+1})\,\mathbf{D}\psi(\zeta) = \prod_s e(\Delta_{p^k-1}^{n_s+1})\,\pi_!^s e(\eta_s \otimes \xi^{j_s}).$$

Замечание. Разрешив это равенство в кольце $U^*[[u]]/(\theta_p([u]_{p^k-1}) = 0)$, можно для класса $\overline{\mathbf{D}\psi}(\zeta)$ написать

$$\overline{\mathbf{D}\psi}(\zeta) = \prod_s \frac{e(\Delta_{p^k-1}^{n_s+1})}{e(\Delta_{j_s}^{n_s+1})} B_{n_s}(e(\Delta_{j_s}^1)).$$

1.11. В этом пункте будут суммированы все результаты, полученные выше. Предположим, что уже получено описание $\operatorname{Im}\beta^{Z_{p^l}}$ для $l < k$.

Векторный $\mathbf{Z}_{p^k}$-пучок ζ, класс бордизмов которого $[\zeta] \in R_{2n}^{Z_{p^k}}$, однозначно представим в виде $\sum_l \left(\sum_m a_{m,l}\zeta_{m,l}\right)\zeta_l$, где $\zeta_{m,l}$ и ζ_l — мономы вида $(\mathbf{CP}_{j_1}^{n_1}) \times$

$\times \ldots \times (\mathbf{CP}^{n}_{j_r})$, у которых $(j_s, p) = p$ и $(j_s, p) = 1$ соответственно, $a_{m,l} \in U_*$. Подгруппа $\mathbf{Z}_p$ на пространстве расслоения пучка $\zeta_{n,l}$ действует тривиально, поэтому его можно рассматривать как $\mathbf{Z}_{p^{k-1}}$-пучок ($\mathbf{Z}_{p^{k-1}} = \mathbf{Z}_{p^k}/\mathbf{Z}_p$).

Теорема. *Класс бордизмов* $\sum_l \left(\sum_m a_{m,l}\zeta_{m,l}\right)\zeta_l \in R_{2n}^{Z_{p^k}}$ $(\dim \zeta_l = 2n_l)$ *тогда и только тогда принадлежит образу гомоморфизма* $\beta^{Z_{p^k}}$, *когда*

1) *Для любого* l *сумма* $\sum_m a_{m,l}\zeta_{m,l}$, *рассматриваемая как класс бордизмов, принадлежащий* $R_{2(n-n_e)}^{Z_{p^{k-1}}}$, *лежит в* $\operatorname{Im}\beta^{Z_{p^{k-1}}}$,

2) $\sum_l \dfrac{e(\Delta_1^{n-n_l}) \sum_m a_{m,l}\overline{\mathbf{D}\psi}(\zeta_{m,l})}{e(\Delta_{p^{k-1}}^{n-n_l})}\overline{\mathbf{D}\alpha}(\zeta_l)$ *в кольце* $U^*[[u]]/(\theta_p([u]_{p^{k-1}}) = 0)$ *делится на* u^n.

(Значения гомоморфизмов $\overline{\mathbf{D}\psi}(\zeta_{m,l})$ и $\overline{\mathbf{D}\alpha}(\zeta_l)$ дают замечание к теореме 2 предыдущего пункта и следствие 1.8.)

§ 2. Допустимые наборы неподвижных подмногообразий действия циклической группы конечного порядка

На возможность редукции задачи о допустимых наборах неподвижных подмногообразий действия группы $\mathbf{Z}_m$ к аналогичным задачам для ее p-примарных компонент автору указал С. М. Гусейн-Заде.

2.1. Предположим, что для любой циклической группы $\mathbf{Z}_{m_1}$ порядка, меньшего m, уже получено описание $\operatorname{Im}\beta^{Z_{m_1}}$. Из результатов § 1 следует, что, не ограничивая общности, можно считать для $m = p_1^{k_1} \times \ldots \times p_r^{k_r}$ $r > 1$. Аналогично модулю $\hat{\mathfrak{M}}_*^k$ модуль $\hat{\mathfrak{M}}_*^{Z_m}$ определим как модуль векторных $\mathbf{Z}_m$-пучков, на пучке сфер которых действие группы свободно, а на пространстве расслоения нет неподвижных точек.

Лемма. *Гомоморфизм* $\alpha\colon \hat{\mathfrak{M}}_{2n}^{Z_m} \to \widetilde{U}_{2n-1}(B\mathbf{Z}_m)$ *является эпиморфизмом.*

Замечание. Всюду, где не оговорено противное, определения и обозначение автоматически переносятся из § 1.

Доказательство. Группа $\mathbf{Z}_m$ изоморфна прямой сумме $\mathbf{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_{p_r^{k_r}}$. Обозначим через X_{p_i}, $i = 1, 2$, $\mathbf{Z}_m$-пространство, состоящее из p_i точек, на котором образующая группы $\mathbf{Z}_{p_i^{k_i}}$ действует циклической перестановкой, а остальные образующие действуют тривиально. Так же, как при доказательстве эпиморфности в теореме 1.4, получим, что

$$\mathbf{D}\alpha(X_{p_i} \times \Delta_1^n) = \theta_{p_i}\left([u]_{\frac{m}{p_i}}\right).$$

Так как свободный член ряда $\theta_{p_i}(u)$ равен p_i, а $(p_1, p_2) = 1$, то идеал кольца $U^*(\mathbf{BZ}_m)$, порожденный рядами $\theta_{p_i}\left([u]_{\frac{m}{p_i}}\right)$ совпадает со всем кольцом. Значит, гомоморфизм $\mathbf{D}\alpha$ является эпиморфизмом. Отсюда вытекает эпиморфность гомоморфизма α.

2.2. Для любого $1 \leqslant s \leqslant r$ представим класс бордизмов $r \in R_*^{\mathbf{Z}_m}$ в виде $\sum a^s_{m,n}\zeta^s_{m,n}\zeta^s_n$, где $\zeta^s_{m,n}$, ζ^s_n — мономы $(\mathbf{CP}^{n_1}_{j_1}) \times \ldots \times (\mathbf{CP}^{n_l}_{j_l})$, у которых $(j_i, p_s) = p_s$ и $(j_i, p_s) = 1$ соответственно. Подгруппа $\mathbf{Z}_{p_s}$ на пространстве расслоения пучка $\zeta^s_{m,n}$ действует тривиально, поэтому его можно рассматривать как $\mathbf{Z}_{\frac{m}{p_s}}$-пучок. Из леммы предыдущего пункта легко получается

Теорема. *Класс бордизмов $r \in R_*^{\mathbf{Z}_m}$ тогда и только тогда принадлежит $\operatorname{Im}\beta^{\mathbf{Z}_m}$, когда для любых s и n сумма $\sum\limits_m a^s_{m,n}\zeta^s_{m,n}$, рассматриваемая как класс бордизмов из $R_*^{\mathbf{Z}_{\frac{m}{p_s}}}$, принадлежит $\operatorname{Im}\beta^{\mathbf{Z}_{\frac{m}{r_s}}}$.*

§ 3. Многообразия, реализующие допустимые наборы неподвижных подмногообразий

3.1. Ядром гомоморфизма β^G является подмодуль $\hat{U}_*{}^G$ классов бордизмов многообразий, действие группы на которых не имеет неподвижных точек. Поэтому задача о восстановлении класса бордизмов многообразия по неподвижным инвариантам имеет решение только по модулю $\operatorname{Ker}\pi$, где π: $U^G_* \to U_*$ — гомоморфизм, «забывающий» действие G на многообразии.

Покажем, что $\pi\hat{U}_*^{\mathbf{Z}_m} = U_*$ для $m = p_1^{k_1} \times \ldots \times p_r^{k_r}$, $r > 1$. Действительно, существуют целые числа a и b такие, что $ap_1 + bp_2 = 1$. Вспоминая определение пространств X_{p_1} и X_{p_2}, получим, что $[M \times (aX_{p_1} + bX_{p_2})] \in \hat{U}_*^{\mathbf{Z}_m}$ и $\pi[M \times (aX_{p_1} + bX_{p_2})] = [M]$ для любого $[M] \in U_*$.

3.2. Рассмотрим произвольное n-мерное многообразие M с действием группы $\mathbf{Z}_{p^k}$, и пусть нормальные пучки к особым подмногообразиям действия задают класс бордизмов $[\zeta]$, принадлежащий $\mathfrak{M}^k_{2n}$. Из теоремы 35.2 книги [1] следует, что $\zeta \oplus 1 - [M]\Delta^1_1$ принадлежит $\operatorname{Ker}\alpha$. Значит, $\mathbf{D}\alpha(\zeta) - [M]u^n$ делится в кольце $U^*[[u]]/([u])_{p^k} = 0)$ на u^{n+1}.

Следствие. *Если на многообразии M группа $\mathbf{Z}_{p^k}$ действует без неподвижных точек, то класс бордизмов многообразия M делится на p.*

Доказательство. Из теоремы 1.4 следует, что $\mathbf{D}\alpha(\zeta)$ лежит в идеале, порожденном рядом $\theta_p([u]_{p^{k-1}})$. Так как свободный член этого ряда равен p, то следствие доказано.

Тем самым получено, что $\pi\hat{U}_*^{\mathbf{Z}_{p^k}}$ изоморфно pU_*.

Отождествим U_* с его образом при вложении в $U_* \otimes Q$, тогда имеет место

Теорема. *Определен гомоморфизм* γ_p^k *из модуля* $R_*^{\mathbf{Z}_{p^k}}$, *принимающий значения в* $U_* \otimes Q$, *такой, что для многообразия, реализующего допустимый набор* $\mathbf{Z}_{p^k}$*-пучков* r,

$$[M] = \gamma_p^k(r) \pmod{pU_*}.$$

Значение гомоморфизма γ_p^k *на произвольном наборе* $r = \sum a_{m,l}\zeta_{m,l}\zeta_l$ (обозначения пункта 1.11) *дается формулой*:

$$\gamma_p^k(r) = \left[\frac{p}{\vartheta_p([u]_{p^{k-1}})} \sum_l \frac{e(\Delta_1^{n-n_l}) \sum\limits_m a_{m,l}\widetilde{\mathbf{D}\psi}(\zeta_{m,l})}{e(\Delta_{p^{k-1}}^{n-n_l})} \widetilde{\mathbf{D}\alpha}(\zeta_l)\right]_n,$$

где значения гомоморфизмов $\widetilde{\mathbf{D}\psi}$ *и* $\widetilde{\mathbf{D}\alpha}$ *дают формулы, совпадающие с формулами для* $\overline{\mathbf{D}\psi}$ *и* $\overline{\mathbf{D}\alpha}$. (*Надо отметить, что деление в этих формулах для гомоморфизмов* $\widetilde{\mathbf{D}\psi}$ *и* $\widetilde{\mathbf{D}\alpha}$ *должно выполняться в кольце* $U_*[[u]] \otimes Q$.)

Замечание. Аналогичная теорема для группы $\mathbf{Z}_p$ получена в [11].

Доказательство. Пусть $P_1(u) \in U^*[[u]]$ — представитель $\overline{\mathbf{D}\alpha}(\zeta)$, тогда $[M]u^n = P_1(u) + \theta_p([u]_{p^{k-1}})Q_1(u) + u^{n+1}Q_2(u)$. Так как свободный член ряда $\frac{p}{\theta_p([u]_{p^{k-1}})}$ равен 1, то, умножая на него обе части предыдущего равенства, получим

$$[M]u^n = \frac{p}{\theta_p([u]_{p^{k-1}})} P_1(u) + pQ_1(u) + u^{n+1}Q_2'(u).$$

Из теоремы 1.11 и того факта, что разность значений гомоморфизмов $\overline{\mathbf{D}\psi}$ и $\widetilde{\mathbf{D}\psi}$, а также $\overline{\mathbf{D}\alpha}$ и $\widetilde{\mathbf{D}\alpha}$ лежит в идеале, порожденном $\theta_p([u]_{p^{k-1}})$, вытекает доказываемое утверждение.

(Поступила в редакцию 28/VI 1972 г.)

Литература

1. П. Коннер, Э. Флойд, Гладкие периодические отображения, Москва, изд-во «Мир», 1969.
2. Г. Г. Каспаров, Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов, Изв. АН СССР, серия матем., **33** (1969), 735—747.
3. А. С. Мищенко, Многообразия с действием группы $\mathbf{Z}_p$ и неподвижные точки, Матем. заметки, **4**, вып. 4 (1968), 381—386.
4. С. П. Новиков, Операторы Адамса и неподвижные точки, Изв. АН СССР, серия матем., **32** (1968), 1245—1263.

5. И. М. Кричевер, О бордизмах групп, свободно действующих на сферах, Успехи матем. наук, **XXVI**, вып. **6** **(162)**, (1971), 245—246.
6. А. С. Мищенко, Бордизмы с действием группы $\mathbf{Z}_p$ и неподвижные точки, Матем. сб., **80** **(122)** (1969), 307—313.
7. С. М. Гусейн-Заде, И. М. Кричевер, О формулах для неподвижных точек действия группы $\mathbf{Z}_p$, Успехи матем. наук, **XXVII**, вып. **1** **(169)** (1973).
8. T. T. Dieck, Bordism of G-manifolds and integrality theorems, Topology, **9**, № **4** (1970), 345—358.
9. G. Segal, Equivariant K-theory, Publs Math. Inst. Hautes Études scient., **34** (1968). 113—128.
10. D. Quillen, Elementary proof of some results of cobordism theory, Preprint, Inst. for Adv. Study, Princeton.
11. В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса, Матем. сб., **84** **(126)** (1971), 81—118.