СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТОМ 38, № 6, 1974

УДК 513.83

И. М. КРИЧЕВЕР

ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ И ФОРМУЛА АТЬИ — ХИРЦЕБРУХА

В работе рассматриваются многообразия с действиями компактных групп Ли. По каждому рациональному роду Хирцебруха $h\colon \Omega_* \to Q$ строится «эквивариантный род» h^G — гомоморфизм из кольца бордизмов G-многообразий в кольцо $K(BG)\otimes Q$. С помощью языка формальных групп для некоторых родов доказано, что для компактной связной группы Ли G образ гомоморфизма h^G принадлежит подкольцу $Q \subset K(BG)\otimes Q$. Следствием этого являются чрезвычайно простые соотношения между значениями этих родов на классах бордизмов S^1-многообразия и подмногообразий его неподвижных точек. В частности получено новое доказательство формулы Атьи — Хирцебруха.

В работе [1] доказано, что сигнатура произвольного S^1-многообразия X равна сумме сигнатур подмногообразий неподвижных точек F_s:

$$\operatorname{Sign}([X]) = \sum_s \operatorname{Sign}([F_s]).$$

Унитарным вариантом этой формулы является соотношение между значениями классического T_y-рода унитарного S^1-многообразия, т. е. квазикомплексного многообразия, действие группы S^1 на котором сохраняет комплексную структуру в стабильном касательном пучке, и его неподвижных подмногообразий:

$$T_y([X]) = \sum_s (-y)^{\varepsilon_s^-} T_y([F_s]).$$

Здесь ε_s^- — число слагаемых в разложении представления S^1 в слое нормального пучка к подмногообразию F_s на неприводимые представления $\eta^{j_{si}}$ (действие $z \in S^1$ в представлении η^k есть умножение на z^k), у которых $j_{si} < 0$. Обозначим через ε_s^+ число остальных слагаемых.

Доказательство обеих формул в работе [1] основывается на теореме Атьи — Зингера об индексе. В настоящей работе они получаются как следствие принципиально иного подхода, суть которого сводится к изучению аналитических свойств выражений Коннера — Флойда.

Напомним эти выражения для действий с изолированными неподвижными точками [см. [2], [3], [4]; для произвольного действия они были впервые получены в работе [5], формулы которой уточняются в [6]].

Пусть действие группы S^1 на многообразии X имеет лишь изолированные неподвижные точки p_s, представления группы в слоях касательного пучка над которым есть $\sum_{i=1}^{n} \eta^{j_{si}}$.

Если $[u]_j$ — j-ая степень u в формальной группе «геометрических кобордизмов» $f(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v))$, $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}$, т. е. $[u]_j = g^{-1}(jg(u))$, то уравнения Коннера — Флойда утверждают, что лорановский ряд

$$\Phi(u) = \sum_{s} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{[u]_{j_{si}}}$$

с коэффициентами из кольца $U^* \otimes Q$ содержит лишь правильную часть, причем его свободным членом является класс бордизмов многообразия X.

Каждому рациональному роду Хирцебруха $h: U^* \to Q$ соответствует численная реализация $\Phi(u)$ — ряд с рациональными коэффициентами от переменной $1 - \eta$:

$$\Phi_h(\eta) = \sum_{s} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{g_h^{-1}(\ln \eta^{j_{si}})},$$

где $g_h^{-1}(t)$ — ряд, функционально обратный логарифму

$$g_h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h([CP^n])}{n+1} t^{n+1}$$

формальной группы $f_h(u, v)$, отвечающей гомоморфизму h. Отметим, что $\Phi_h(\eta)$ есть образ ряда $\Phi(u)$, которому соответствует класс кобордизмов кольца $U^*(CP^\infty) \otimes Q = U^*[[u]] \otimes Q$ при гомоморфизме $\tilde{h}: U^*(CP^\infty) \otimes Q \to K(CP^\infty) \otimes Q$, индуцированном родом h. Существование гомоморфизма функторов $\tilde{h}$ следует из работы ([7]).

Предположим, что ряд $g_h^{-1}(\ln \eta)$ является разложением в единице функции, аналитической в некоторой ее окрестности, тогда из уравнений Коннера — Флойда следует, что функция $\Phi_h(\eta)$ аналитична в некоторой окрестности единицы и что $\Phi_h(1) = h([X])$.

Наша цель состоит в доказательстве того факта, что если функция $g_h^{-1}(\ln \eta)$ аналитична в круге $|\eta| < 2$ и не имеет там нулей, кроме как в 1, то и $\Phi_h(\eta)$, которая могла бы иметь полюсы в корнях из 1, также аналитична в круге $|\eta| < 2$. Отсюда следует, что для рода h, у которого $g_h^{-1}(\ln \eta)$ есть рациональная функция с одним нулем в единице кратности 1, т. е. $g_h^{-1}(\ln \eta) = \frac{\eta - 1}{a\eta + b}$, $a + b = 1$, функция $\Phi_h(\eta)$ аналитична всюду и, значит, она константа. Ее значение в 1, равное $h([X])$, поэтому совпадает с

$$\lim_{\eta \to \infty} \Phi_h(\eta) = \sum_{s} a^{\varepsilon_s^+} (-b)^{\varepsilon_s^-}.$$

Таким образом и будет получено новое доказательство формулы Атьи — Хирцебруха, а для двухпараметрического рода $T_{x,y}$ (значение $T_{x,y}$ на классе бордизмов $[CP^n]$ равно $\sum_{i=0}^{n} x^{n-i}(-y)^i$; отметим, что $T_{1,y}$ совпадает с T_y-родом) соотношение:

$$T_{x,y}([X]) = \sum_s x_s^{\varepsilon_s^+} (-y)^{\varepsilon_s^-} T_{x,y}([F_s]).$$

Пользуясь случаем, выражаю глубокую признательность С. П. Новикову, В. М. Бухштаберу и С. Б. Шлосману за внимание к работе и ценные советы.

§ 1. «Характеристические» гомоморфизмы для G-пучков

Каждому характеристическому классу комплексных векторных пучков в унитарных кобордизмах $\chi \in U^i(BU)$ соответствует «характеристический» гомоморфизм

$$\chi^e : U_n(BU(k)) \longrightarrow U^{-n+i} = U^{-n+i}(pt),$$

который пучку ξ над многообразием X сопоставляет образ класса кобордизмов $\chi(\xi)$ при композиции

$$U^i(X) \xrightarrow{D} U_{n-i}(X) \to U_{n-i} \cong U^{-n+i},$$

где D — гомоморфизм двойственности.

В этом параграфе строится и изучается аналогичный гомоморфизм для комплексных G-пучков (здесь и далее G — компактная группа Ли).

1. Рассмотрим категорию комплексных G-пучков над унитарными G-многообразиями. Два таких пучка ξ_1 и ξ_2 над G-многообразиями X_1 и X_2 бордантны, если существует G-пучок ζ над W такой, что $\partial W = X_1 \cup -X_2$ и ограничение ζ на X_i, $i = 0, 1$, созпадает с ξ_i. Полученные таким образом группы бордизмов будут обозначаться через $U^G_{n,k}$, где $k = \dim_C \xi$, а $n = \dim_R X$. В том случае, когда $G = \{e\}$ тривиальна, $U^e_{n,k}$ созпадает с $U_n(BU(k))$. Обычным образом $U^G_{*,*}$ превращается в кольцо и в U_*-модуль. Подмодуль $U^G_{*,0}$ отождествляется с модулем бордизмов унитарных G-многообразий U^G_*.

Обозначим через X_G пространство $(X \times EG)/G$, а через ξ_G — образ G-пучка ξ при гомоморфизме

$$\mathrm{Vect}_G(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X_G).$$

Если $p_! : U^*(X_G) \to U^*(BG)$ — гомоморфизм Гизина, индуцированный проекцией $p : X_G \to BG$, то формула

$$\chi^G([\xi]) = p_!(\chi(\xi_G))$$

определяет «эквивариантный характеристический» гомоморфизм

$$\chi^G : U^G_{n,k} \to U^{-n+i}(BG).$$

Его связь с χ дается следующей леммой.

ЛЕММА 1.1. *Пусть $U^G_{n,k} \to U^e_{n,k}$ — гомоморфизм «забывания» действия G, тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} U^G_{n,k} & \xrightarrow{\chi^G} & U^{-n+i}(BG) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^e_{n,k} & \xrightarrow{\chi^e} & U^{-n+i} \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство леммы непосредственно вытекает из определения гомоморфизма Гизина и того, что ограничение на слой X расслоения $X_G \to BG$ пучка ξ_G совпадает с ξ.

В дальнейшем «характеристический» гомоморфизм 1^G, отвечающий $1 \in U^0(BU)$, нам будет удобно обозначать через

$$\chi^G_0 : U^G_* \to U^*(BG).$$

2. Пусть H — нормальный делитель группы G. Множество неподвижных точек действия H на унитарном G-многообразии X является несвязным объединением квазикомплексных подмногообразий F_s (не обязательно связных). Нормальные пучки ν_s к подмногообразиям F_s естественно являются комплексными G-пучками.

Как известно, существует эквивариантное вложение многообразия X в пространство унитарного представления группы G $\tilde{\Delta}$. (Дабы избежать многократных оговорок, условимся, что в этом и следующем параграфах рассматриваются только унитарные многообразия, пучки, представления и так далее.) Обозначим ограничение нормального G-пучка к X в пространстве представления $\tilde{\Delta}$ на подмногообразие F_s через $(-\tilde{\nu}_s)$. Очевидно, что сумма $\nu_s \oplus (-\nu_s)$ является тривиальным G-пучком. Пусть Δ — максимальное прямое слагаемое $\tilde{\Delta}$, ограничение которого на подгруппу H не содержит тривиальных представлений H. Аналогично выделим прямое слагаемое $(-\nu_s)$ G-пучка $(-\tilde{\nu}_s)$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть ξ_s — ограничение комплексного G-пучка ξ над G-многообразием X на подмногообразие F_s, тогда во введенных выше обозначениях*

$$e(\Delta_G)\,\chi^G([\xi]) = \sum_s p_{s!}\,(e((-\nu_s)_G) \cdot \chi(\xi_{sG})),$$

где $p_s : U^*(F_{sG}) \to U^*(BG)$ — гомоморфизм Гизина, а для произвольного пучка ζ $e(\zeta)$ — его эйлеров класс.

Доказательство. Композиция вложения X в пространство представления $\tilde{\Delta}$ и проекции на прямое слагаемое Δ определяет эквивариантное отображение $h : X \to \Delta$.

Для каждого пучка ζ будем обозначать через $E\zeta$ его пространство представления, а через $S\zeta$ — его пучок сфер. При этом $(\Delta \times EG)/G$ совпадает по определению с $E\Delta_G$. Здесь и далее Δ обозначает не только само представление, но и его пространство.

Пусть $h\times\mathrm{id}: X\times EG\to\Delta\times EG$, тогда соответствующее фактор-отображение

$$\tilde{h}: X_G\to(\Delta\times EG)/G$$

индуцирует гомоморфизм Гизина

$$\tilde{h}_! : U^*(X_G)\to U^*(E\Delta_G,\ S\Delta_G).$$

ЛЕММА 1.2. *Пусть $i^*: U^*(E\Delta_G, S\Delta_G)\to U^*(BG)$ — гомоморфизм из точной последовательности пары, тогда для любого $x\in U^*(X_G)$ выполняется равенство*:

$$e(\Delta_G)\,p_!(x) = i^*\tilde{h}_!(x).$$

Доказательство. Из определения гомоморфизма Гизина непосредственно следует, что

$$h_!(x) = t(\Delta_G)\,p_!(x),$$

где $t(\Delta_G)$ — класс Тома пучка Δ_G. Применим к обеим частям этого равенства гомоморфизм i^*. Утверждение леммы вытекает из того, что $i^*t(\Delta_G)=e(\Delta_G)$.

Приведем простое следствие леммы 1.2. Обозначим идеал кольца $U^*(BG)$, классы кобордизмов которого аннулируются умножением на эйлеровы классы пучков, ассоциированных с представлениями G, через $I^*(G)$.

Следствие. *Если на многообразии X действие группы не имеет неподвижных точек, то образ гомоморфизма $p_!: U^*(X_G)\to U^*(BG)$ принадлежит идеалу $I^*(G)$.*

Доказательство. Если H совпадает с G, то по построению отображения $\tilde{h}$ из отсутствия неподвижных точек на X следует, что образ X_G принадлежит $S\Delta_G$. Значит, $i^*\tilde{h}_!$ является тривиальным гомоморфизмом. По лемме 1.2 образ $p_!$ аннулируется умножением на $e(\Delta_G)$.

Возвращаясь к доказательству теоремы, отметим, что для произвольного действия G на X $\tilde{h}$ отображает пару (X_G, N_G) в пару $(E\Delta_G, S\Delta_G)$. Здесь N — дополнение к трубчатым окрестностям подмногообразий неподвижных точек действия H. Ограничение $\tilde{h}$ на замкнутую трубчатую окрестность F_s определяет отображение пар $\tilde{h}_s: (E\nu_{sG}, S\nu_{sG})\to(E\Delta_G, S\Delta_G)$, которое индуцирует гомоморфизм Гизина:

$$\tilde{h}_{s!}: U^*(E\nu_{sG}) = U^*(F_{sG})\to U^*(BG).$$

ЛЕММА 1.3. *Если $f_s: E\nu_{sG}\to X_G$ — вложение, то*

$$\tilde{h}_{s!}\circ f_s^*: U^*(X_G)\to U^*(BG)$$

и

$$\sum_s \tilde{h}_{s!}\circ f_s^* = i^*\circ\tilde{h}_!.$$

Доказательство. Гомоморфизмы Гизина, индуцированные отображениями коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} E\,\Delta_G \arrow[r, "i"] & (E\,\Delta_G,\ S\,\Delta_G) \\ X_G \arrow[u, "\widetilde{h}"] \arrow[r] & (X_G,\ N_G) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

образуют также коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U^*(E\,\Delta_G,\ S\,\Delta_G) \arrow[r, "i^*"] & U^*(BG) \\ U^*(X_G) \arrow[u, "\widetilde{h}_!"] \arrow[r] & U^*(X_G \setminus N_G) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Доказываемое утверждение будет получено после естественного отождествления $X_G \setminus N_G$ с несвязным объединением $E\nu_{sG}$.

ЛЕММА. 1.4. *Для* $x \in U^*(F_{sG})$ *имеет место равенство*

$$\widetilde{h}_{s!}(x) = p_{s!}(x\, e((-\nu_s)_G)).$$

Доказательство. Отображение $\widetilde{h}_s$ можно разложить в композицию

$$\begin{tikzcd} & (E(p_s^*\Delta_G),\ S(p^*\Delta_G)) \arrow[dr, "p_s"] & \\ (E\nu_{sG},\ S\nu_{sG}) \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\widetilde{h}_s"] & & (E\,\Delta_G,\ S\,\Delta_G) \end{tikzcd}$$

где g — фактор-отображение эквивариантного отображения

$$E\nu_s \times EG \to F_s \times \Delta \times EG,$$

полученного из проекции $E\nu_s \to F_s$, эквивариантного вложения $E\nu_s$ в Δ и тождественного отображения EG в себя. Значит, $\widetilde{h}_{s!}(x) = p_{s!}g_!(x)$. Отображение g на базе пучков тождественно, поэтому $g^*(x) = x$ и $g_!(x) = g_!(g^*(x)) = xg_!(1)$. Осталось показать что $g_!(1) = e((-\nu_s)_G)$.

По построению $\widetilde{h}$ g есть вложение с нормальным пучком $(-\nu_s)_G$. Однако для любых пучков ζ_1 и ζ_2 над общей базой сечение пучка $\pi^*\zeta_2$ «диагональ» ($\pi: E(\zeta_1 \oplus \zeta_2) \to Y$ — проекция на базу) трансверсально к нулевому сечению и пересекается с ним по образу вложения $i: (E\zeta_1, S\zeta_1) \to E(\zeta_1 \oplus \zeta_2),\ S(\zeta_1 \oplus \zeta_2)$. Из определения эйлерова класса и гомоморфизма $i_!$ вытекает, что $i_! = e(\zeta_2)$ и тем самым доказательство леммы закончено.

Утверждение теоремы непосредственно следует из доказанной цепочки лемм и из того, что $f_s^*(\chi(\xi_G)) = \chi(\xi_{sG})$.

Замечание. В том случае, когда подгруппа H совпадает со всей группой G, теорема 1.1 дает связь значения гомоморфизма χ^G на классе бордизмов G-пучка ξ и инвариантов в кобордизмах неподвижных подмногообразий.

3. Наряду с выражением для $\chi_0^{S^1}$, данным теоремой 1.1, в дальнейшем нам потребуется некоторая его модификация, которая и будет получена в этом пункте.

Пусть F_s — связная компонента множества неподвижных точек действия группы S^1 на S^1-многообразии X. Нормальный пучок ν_s, как и любой комплексный S^1-пучок над тривиальным S^1-многообразием, представим в виде $\sum_{j\neq 0} \nu_{sj} \otimes \eta^j$, где η^j, как и во введении, — j-ая тензорная степень стандартного представления $S^1\eta$ [см. ([8])].

Набор комплексных пучков ν_{sj}, из которых лишь конечное число отличных от нуля, определяет класс бордизмов, принадлежащий группе

$$R_n = \Sigma U_l \left(\prod_{j\neq 0} BU(n_j)\right).$$

Суммирование ведется по всем наборам неотрицательных целых чисел n_j и l таким, что $2\Sigma n_j + l = n$.

Сумма по всем компонентам связности этих классов задает образ класса бордизмов S^1-многообразия X, $[X, S^1] \in U_n^{S^1}$, при гомоморфизме $\beta: U_*^{S^1} \to R_*$.

Выберем в качестве образующих U_*-модуля $U_*(CP^\infty) = U_*(BU(1))$ классы бордизмов $(CP^n) \in U_{2n}(CP^\infty)$, соответствующие вложению CP^n в CP^∞ или, что то же самое, каноническому пучку над CP^n $\eta_{(n)}$. Стандартная мультипликативная структура в R_* позволяет в этом случае в качестве образующих U_*-модуля в R_* взять мономы

$$(CP_{j_1}^{l_1}) \times \ldots \times (CP_{j_r}^{l_r}).$$

Обозначим для удобства через η не только каноническое представление S^1, но и соответствующий ему канонический пучок над CP^∞, т. е. $\eta_{S^1} = \eta$. Тогда для S^1-пучка над CP^n $\eta_{(n)} \otimes \eta$ пучок над $CP^n \times CP^\infty$ $(\eta_{(n)} \otimes \otimes \eta)_{S^1}$ равен $\eta_{(n)} \otimes \eta$. Эйлеров класс пучка $(-\eta_{(n)}) \otimes \eta$, где $(-\eta_{(n)})$ — n-мерный дополнительный пучок к $\eta_{(n)}$, определяется из равенства

$$e((-\eta_{(n)}) \otimes \eta) f(u, v) = u^{n+1},$$

где $f(u, v) = e(\eta \otimes \eta) = u + v + \Sigma \alpha_{ij} u^i v^j$ — формальная группа «геометрических» кобордизмов. Значит, если

$$A_n(u, v) = e((\eta_{(n)}) \otimes \eta) \in U^*(CP^n \times CP^\infty) = U^*[[u, v]]/v^{n+1} = 0,$$

то

$$A_n(u, v) = \frac{u^n}{\frac{1}{u} f(u, v)}.$$

Пусть $B^n(u)$ — образ $A_n(u, v)$ при гомоморфизме Гизина $U^*(CP^n \times \times CP^\infty) \to U^*(CP_\infty)$, индуцированном проекцией. Отметим, что этот гомоморфизм соответствует для $A_n(u, v)$ замене v^k на $[CP^{n-k}]$.

Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает следующая

ТЕОРЕМА 1.2. *Существует гомоморфизм U_*-модулей $\Psi: R_* \to U^*[[u]] \otimes \otimes Q[u^{-1}]$ такой, что композиция $\Psi \circ \beta$ совпадает с композицией гомоморфизма $\chi_0^{S^1}$ и вложения $U^*(CP^\infty) \to U^*[[u]] \otimes Q[u^{-1}]$. Значения Ψ на образу-*

ющих U_*-модуля даются формулой:

$$\Psi\left(\prod_{m=1}^{r}(CP_{j_m}^{l_m})\right)=\prod_{m=1}^{r}\left(\frac{1}{[u]_{j_m}}\right)^{l_m+1}B_{l_m}([u]_{j_m}),$$

$$[u]_j=e(\eta^j).$$

4. Рассмотрим произвольный гомоморфизм групп Ли $\alpha: G_1\to G$. Он индуцирует отображение универсальных классифицирующих пространств $\alpha_*: BG_1\to BG$, а значит, и гомоморфизм $\alpha^*: U^*(BG)\to U^*(BG_1)$.

С другой стороны, каждый G-пучок ξ с помощью α естественно превращается в G_1-пучок, т. е. существует гомоморфизм

$$\alpha^\#: U_{*,*}^G\to U_{*,*}^{G_1}.$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_{G_1} & \to & X_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG_1 & \to & BG \end{array}$$

где X — произвольное G-многообразие, легко выводится

ТЕОРЕМА 1.3. *Для любого характеристического класса χ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} U_{**}^G & \xrightarrow{\chi^G} & U^*(BG) \\ {\scriptstyle\alpha^\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha^*} \\ U_{**}^{G_1} & \xrightarrow{\chi^{G_1}} & U^*(BG_1) \end{array}$$

коммутативна.

§ 2. Эквивариантные роды Хирцебруха. Формулировка и доказательство основной теоремы

1. Рациональный род Хирцебруха, т. е. гомоморфизм $h: U_*\to Q$, с точки зрения характеристических классов задается рядом $\frac{t}{h(t)}$; $h(t)=t+\sum_{i>1}\lambda_i t^i$, $\lambda_i\in Q$. «Действие» такого ряда на классе бордизмов $[CP^n]$ дается формулой:

$$h([CP^n])=\left[\left[\frac{t}{h(t)}\right]^{n+1}\right]_n,$$

где $[r(u)]_n$ означает n-ый коэффициент ряда $r(u)$. В работе ([2]) С. П. Новиковым было доказано, что $h(t)$ совпадает с рядом $g_h^{-1}(t)$, функционально обратным логарифму

$$g_h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h([CP^n])}{n+1}t^{n+1}$$

формальной группы $f_h(u, v)$, являющейся образом формальной группы «геометрических» кобордизмов при гомоморфизме h.

Каждому рациональному роду Хирцебруха h по теореме Дольда ([7]) соответствует гомоморфизм функторов $\widetilde{h}: U^*(Y) \to K^{\#}(Y) \otimes Q$ (где $K^{\#}$ — Z_2-градуированный K-функтор) такой, что $\widetilde{h}: U^* \to Q$ совпадает с композицией $U^* \xrightarrow{\simeq} U_* \xrightarrow{h} Q$.

Аналогично теореме 6.4 и следствию 6.5 работы ([9]) доказывается следующая

ЛЕММА 2.1. *Значение гомоморфизма* h *на образующей* $u \in U^2(CP^\infty)$ *равно* $\mathrm{ch}^{-1}(g_h^{-1}(t))$, *где* ch — *характер Черна, т. е.*

$$\widetilde{h}(u) = g_h^{-1}(\ln \eta) \in K(CP^\infty) \otimes Q = Q[[1-\eta]].$$

Определение. Эквивариантным родом Хирцебруха, соответствующим рациональному роду $h: U_* \to Q$, называется гомоморфизм $h^G = \widetilde{h} \circ \chi_0^G : U_{ev}^G \to K(BG) \otimes Q$.

Поскольку из леммы 1.1 следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} U_*^G & \to & U^*(BG) & \to & K(BG) \otimes Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U_* & \to & U^* & \longrightarrow & Q \end{array}$$

в которой $\varepsilon: K^{\#}(Y) \otimes Q \to Q$ — гомоморфизм «аугментации», то имеет место

ЛЕММА 2.2. *Значение рода* h *на классе бордизмов* G-*многообразия* X *равно* $\varepsilon(h^G([X, G]))$.

2. Приступим теперь к доказательству основного результата.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для связной компактной группы Ли* G *образ гомоморфизма* $T_{x,y}^G : U_{ev}^G \to K(BG) \otimes Q$ *принадлежит подкольцу* $Q \subset K(BG) \otimes Q$. *Кроме того, для* S^1-*многообразия* X

$$T_{x,y}([X]) = \sum_s x^{\varepsilon_s^+} (-y)^{\varepsilon_s^-} T_{x,y}([F_s]).$$

Фигурирующие в формулировке теоремы род Хирцебруха $T_{x,y}$ и неотрицательные целые числа ε_s^+ и ε_s^- — те же, что и во введении.

Доказательство. Прежде всего покажем, что первое утверждение теоремы ($\operatorname{Im} T_{x,y}^G \subset Q$) является простым следствием теоремы 1.3 и леммы 2.3.

ЛЕММА 2.3. *Образ гомоморфизма* $T_{x,y}^{S^1}$ *принадлежит подкольцу* $Q \subset K(CP^\infty) \otimes Q$.

Действительно, для компактной связной группы Ли G гомоморфизм $\alpha^*: K(BG) \otimes Q \to K(BH) \otimes Q$, индуцированный вложением максимального тора H в G, является мономорфизмом. Поэтому если существует G-многообразие X, для которого $T_{x,y}^G([X, G]) \notin Q$, то и $\alpha^*(T_{x,y}^G([X, G])) \notin Q \subset K(BH) \otimes Q$. Очевидно, что найдется вложение группы S^1 в тор H, $\alpha_1: S^1 \to H$, такое, что $\alpha_1^*(\alpha^*(T_{x,y}^G([X, G])))$ также не принадлежит Q. Однако это противоречит утверждению леммы 2.3, поскольку по теореме 1.3

$$\alpha_1^* (\alpha^* (T_{x,y}^G ([X, G]))) = T_{x,y}^{S^1} ([X, S^1]).$$

Доказательство леммы 2.3. Рассмотрим S^1-многообразие X. Пусть

$$\beta ([X, S^1]) = \sum_i [M_i] \prod_m (CP_{j_{mi}}^{l_{mi}}),$$

тогда в силу теоремы 1.2

$$T_{x,y}^{S^1} ([X, S^1]) = \sum_i T_{x,y} ([M_i]) \prod_m (\widetilde{T}_{x,y} ([u]_{j_{mi}}))^{-(l_{mi}+1)} \widetilde{T}_{x,y} (B_{l_{mi}} ([u]_{j_{mi}})). \quad (1)$$

Найдем $\widetilde{T}_{x,y} ([u]_j)$ и $\widetilde{T}_{x,y} (B_N (u))$. Так как

$$T_{x,y} ([CP^n]) = \frac{x^{n+1} - (-y)^{n+1}}{x+y},$$

то

$$g_{T_{x,y}} (t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} - (-y)^{n+1}}{(x+y)(n+1)} t^{n+1} = \frac{1}{x+y} \ln \left(\frac{1+yt}{1-xt} \right).$$

Следовательно,

$$g_{T_{x,y}}^{-1} (t) = \frac{e^{(x+y)t} - 1}{xe^{(x+y)t} + y}$$

и, значит,

$$\widetilde{T}_{x,y} ([u]_j) = g_{x,y}^{-1} (j \ln \eta) = \frac{\eta^{j(x+y)} - 1}{x\eta^{j(x+y)} + y}.$$

По определению $B_N (u)$, чтобы найти $\widetilde{T}_{x,y} (B_N (u))$, надо применить гомоморфизм $T_{x,y}$ к коэффициентам ряда $A_N (u, v)$, а затем у получившегося ряда $A_{NT_{x,y}} (u, v)$ заменить v^k на $T_{x,y} ([CP^{N-k}])$, а u — на $g_{T_{x,y}}^{-1} (\ln \eta)$. Поскольку

$$f_{T_{x,y}} (u, v) = g_{T_{x,y}}^{-1} (g_{T_{x,y}} (u) + g_{T_{x,y}} (v)) = \frac{u + v + (y-x) uv}{1 + yxuv},$$

то

$$A_{NT_{x,y}} (u, v) \equiv \frac{u^N (1 + yxuv)}{1 + \dfrac{v}{u} + (y-x) v} \pmod{v^{N+1}}.$$

Следовательно,

$$A_{NT_{x,y}} (u, v) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k v^k u^{N-k} (1 + (y-x) u)^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k v^{k+} u^{N-k+1} xy (1 + (y-x) uv)^k.$$

Таким образом, получаем:

$$\widetilde{T}_{x,y}(B_N(u)) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{N-k+1}-(-y)^{N-k+1}}{x+y} \left(\frac{\eta^{x+y}-1}{x\eta^{x+y}+y}\right)^{N-k} \left(\frac{x+y\eta^{x+y}}{x\eta^{x+y}+y}\right)^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k xy \frac{x^{N-k}-(-y)^{N-k}}{x+y} \left(\frac{\eta^{x+y}-1}{x\eta^{x+y}+y}\right)^{N-k+1} \left(\frac{x+y\eta^{x+y}}{x\eta^{x+y}+y}\right)^k .$$

Обозначим через $\tau_{x,y}^{(N)}(\eta)$ функцию от переменной η, задаваемую формулой правой части этого равенства. С помощью найденных формул равенство (1) приобретает вид:

$$T_{x,y}^{S^1}([X, S^1]) = \sum_i T_{x,y}([M_i]) \prod_m \left(\frac{x\eta^{j_{mi}(x+y)}+y}{\eta^{j_{mi}(x+y)}-y}\right)^{l_{mi}+} \tau_{x,y}^{(l_{mi})}(\eta^{j_{mi}}). \qquad (2)$$

Остановимся несколько подробнее на смысле последнего равенства.

Пусть $\Phi_{x,y}(\eta)$ — функция от комплексной переменной η, задаваемая формулой его правой части. Легко видеть, что в проколотой окрестности единицы она аналитична и, значит, разлагается там в ряд Лорана от переменной $1-\eta$. Равенство (2) утверждает, что этот ряд совпадает с рядом $T_{x,y}^{S^1}([X, S^1]) \in Q[[1-\eta]]$. Отсюда следует аналитичность $\Phi_{x,y}(\eta)$ не только в проколотой окрестности, но и в самой 1.

Нашей непосредственной целью будет доказательство отсутствия возможных полюсов в некоторых корнях из 1 и, как следствие, аналитичность $\Phi_{x,y}(\eta)$ по всей плоскости.

ЛЕММА 2.4. *Пусть* $\widetilde{x} = \frac{x}{x+y}$, $\widetilde{y} = \frac{y}{x+y}$, *тогда*

$$(x+y)^N \Phi_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\eta^{x+y}) = \Phi_{x,y}(\eta), \qquad N = \dim_C X.$$

Доказательство леммы легко может быть получено из того, что

$$\chi_0^{S^1}([X, S^1]) \in U^{-2N}(CP^\infty), \qquad \widetilde{T}_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(u) = \frac{\eta-1}{\widetilde{x}\eta+\widetilde{y}} =$$

$$= (x+y)\frac{\eta-1}{x\eta+y} \quad \text{и} \quad (x+y)^n T_{\widetilde{x},\widetilde{y}}([CP^n]) = T_{x,y}([CP^n]).$$

В силу этой леммы достаточно рассмотреть случай, когда $x+y=1$, что и будет предполагаться до завершения доказательства леммы 2.3.

Пусть H (нормальный делитель группы, фигурирующий в пункте 2 § 1) — это циклическая подгруппа S^1 порядка n. В обозначениях теоремы 1.1

$$e(\Delta_{S^1})\chi_0^{S^1}([X, S^1]) = \sum_s p_{S^1}(e(-\nu_s)_{S^1}).$$

Так как по определению представления группы S^1 Δ его ограничение на подгруппу Z_n не содержит тривиальных слагаемых, то $\Delta = \sum_m \eta^{j_m}$, где все

j_m не делятся на n. Значит,

$$\left[\prod_m \left(\frac{\eta^{j_m}-1}{x\eta^{j_m}+y}\right)\right] T^{S^1}_{x,y}([X, S^1]) = \sum_s \widetilde{T}_{x,y}[p_{s!}(e(-\nu_s)_{S^1})]. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь произвольный S^1-пучок ζ над S^1-многообразием F таким, что действие подгруппы Z_n на нем тривиально. Он представим в виде суммы S^1-пучков ζ_r, $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Образующая подгруппы Z_n в слое пучка ζ_r действует умножением на $\exp\left(\frac{2\pi i}{n} r\right)$. Значит, если S^1-пучок $\widetilde{\zeta}_r$ есть $\zeta_r \otimes \eta^{-r}$, то на нем Z_n действует тривиально. Так как $\zeta_r = \widetilde{\zeta}_r \otimes \eta^r$, то

$$e(\zeta_{S^1}) = \prod_{r=0}^{n-1} e(\widetilde{\zeta}_{rS^1} \otimes p^*(\eta^r)),$$

где $p: F_{S^1} \to CP^\infty$.

Пусть $\mu_{r,k}$ — образующие Ву пучков $\widetilde{\zeta}_{rS^1}$, тогда

$$\widetilde{T}_{x,y}(p_!(e(\zeta_{S^1}))) = \widetilde{T}_{x,y}\left[p_!\left(\prod_{r,k} f(\mu_{r,k}, p^*([u]_r))\right)\right].$$

Коэффициентом при $p^*([u]_r)^i$ в ряде

$$\prod_k f_{T_{x,y}}(\mu_{r,k}, p^*([u]_r)) = \prod_k \frac{\mu_{r,k} + p^*([u]_r) + (y-x)\,\mu_{r,k}p^*([u]_r)}{1 + yx\mu_{r,k}p^*([u]_r)}$$

является симметрический полином от переменных $\mu_{r,k}$. Обозначим соответствующий ему полином от классов Чженя пучка $\widetilde{\zeta}_{rS^1}$ через $P_{i,k}$. Размерность его младшего члена не меньше $i - \dim \zeta_r$.

Таким образом,

$$\widetilde{T}_{x,y}(p_!(e(\zeta_{S^1}))) = \sum_\omega \widetilde{T}_{x,y}\left(\prod_{r=0}^{n-1} ([u]_r)^{i_r}\right) \widetilde{T}_{x,y}\left(p_!\left(\prod_{r=0}^{n-1} P_{i_r,r}\right)\right), \quad \omega = (i_1, \ldots, i_{n-1}). \tag{4}$$

Проекция группы S^1 на факторгруппу $\alpha: S^1 \to S^1/Z_n = S^1$ индуцирует отображение классифицирующих пространств

$$\alpha_*: CP^\infty \to CP^\infty,$$

при котором $\alpha^*(u) = [u]_n$. Так как S^1-пучок $\widetilde{\zeta}_r$ является прообразом при гомоморфизме $\alpha^\#$ некоторого S^1-пучка $\widetilde{\zeta}'_r$ (напомним, что подгруппа Z_n на пространстве расслоения пучка $\widetilde{\zeta}_r$ действует тривиально), то из теоремы 1.3 следует, что $p_!\left(\prod_{r=0}^{n-1} P_{i_r,r}\right) \in \operatorname{Im} \alpha^*$.

Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U^*(CP^\infty) & \xrightarrow{\widetilde{T}_{x,y}} & K(CP^\infty) \otimes Q \\ \alpha^* \downarrow & & \downarrow \alpha^* \\ U^*(CP^\infty) & \longrightarrow & K(CP^\infty) \otimes Q \end{array}$$

коммутативна и $\alpha^*(\eta)=\eta^n$, то

$$\widetilde{T}_{x,y}\left(p_!\left(\prod_{r=0}^{n-1} P_{i_r,r}\right)\right)\in \operatorname{Im}\alpha^* = Q[[1-\eta^n]].$$

Отсюда, а также из равенств (3) и (4) следует:

$$T^{S^1}_{x,y}([X,\ S^1])=\prod_m\left(\frac{x\eta^{j_m}+y}{\eta^{j_m}-1}\right)\left(\sum_k P_k\cdot(1-\eta^n)^k\right), \tag{5}$$

где P_k — полином от переменных $\dfrac{\eta^r-1}{x\eta^r+y}$.

Пусть η_1 — ближайшая к 1 точке, в которой возможен полюс у функции $\Phi_{x,y}(\eta)$, т. е. ближайшая к 1 точка вида $\exp\left(\frac{2\pi i}{n}r\right)$, $r<n$ и $(r,\ n)=1$, для которой найдется j_{mi}, делящееся на n. Функция $\Phi_{x,y}(\eta)$ аналитична в круге $|\eta-1|<|\eta_1-1|$, поэтому ряд $T^{S^1}_{x,y}([X,\ S^1])$ сходится к ней равномерно на любом компактном подмножестве этого круга. Из равенства (5) легко следует, что существует предел $\Phi_{x,y}(\eta)$ при $\eta\to\eta_1$. Значит, $\Phi_{x,y}(\eta)$ аналитична в круге $|\eta-1|<|\eta_2-1|$ и в нем ряд $T^{S^1}_{x,y}([X,\ S^1])$ сходится к ней равномерно на любом компактном подмножестве. Здесь η_2 — следующая по удаленности от 1 за η_1 точка, в которой возможен полюс $\overline{\Phi}_{x,y}(\eta)$. Продолжая этот процесс, получим аналитичность $\Phi_{x,y}(\eta)$ во всей замкнутой комплексной плоскости. Следовательно, она — константа. Этим завершается доказательство леммы 2.3.

Перейдем ко второму утверждению теоремы. По лемме 2.2, $T_{x,y}([X])=\Phi_{x,y}(1)$. Так как, по только что доказанному, $\Phi_{x,y}(\eta)$ — константа, то $\Phi_{x,y}(1)=\lim\limits_{\eta\to\infty}\Phi_{x,y}(\eta)$,

$$\lim_{\eta\to\infty}\Phi_{x,y}(\eta)=\sum_i T_{x,y}([M_i])\prod_m \lim_{\eta\to\infty}\left(\frac{x\eta^{j_{mi}(x+y)}+y}{\eta^{j_{mi}(x+y)}-1}\right)^{l_{mi}+1}\tau^{(l_{mi})}_{x,y}(\eta^{j_{mi}})).$$

Замечание. Далее все пределы находятся в предположении $x+y>0$. В противном случае все формулы останутся в силе, если заменить $\eta\to\infty$ на $\eta\to 0$.

Пусть $j_{mi}>0$, тогда

$$\lim_{\eta\to\infty}\left(\frac{x\eta^{j_{mi}(x+y)}+y}{\eta^{j_{mi}(x+y)}-1}\right)^{l_{mi}+1}\tau^{(l_{mi})}_{x,y}(\eta^{j_{mi}})=x^{l_{mi}+1}\lim_{\eta\to\infty}\tau^{(l_{mi})}_{x,y}(\eta^{j_{mi}}).$$

Вспоминая определение $\tau^N_{x,y}(\eta)$, получим:

$$\lim_{\eta\to\infty}\tau^{(N)}_{x,y}(\eta^{j_{mi}})=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{x^{N-k+1}-(-y)^{N-k+1}}{x+y}\frac{1}{x^{N-k}}\left(\frac{y}{x}\right)^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k xy\frac{x^{N-k}-(-y)^{N-k}}{x+y}\frac{1}{x^{N-k+1}}\left(\frac{y}{x}\right)^k=$$

$$= \frac{1}{x^N(x+y)}\left[\sum_{k=0}^{N}(-y)^k\left(x^{N-k+1}-(-y)^{N-k+1}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{N-1}(-y)^{k+1}\left(x^{N-k}-(-y)^{N-k}\right)\right]=\frac{1}{x^N(x+y)}\left(x^{N+1}-(-y)^{N+1}\right).$$

Аналогично найдем, что при $j_{mi}<0$

$$\lim_{\eta\to\infty}\left(\frac{x\eta^{j_{mi}(x+y)}+y}{\eta^{j_{mi}(x+y)}-1}\right)^{l_{mi}+1}\tau_{x,y}^{(l_{mi})}\left(\eta^{j_{mi}}\right)=(-y)\,\frac{x^{l_{mi}+1}-(-y)^{l_{mi}+1}}{x+y}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\eta\to\infty}\Phi_{x,y}(\eta)=\sum_i T_{x,y}([M_i])\,x^{\varepsilon_i^+}(-y)^{\varepsilon_i^-}\prod_m T_{x,y}([CP^{l_{mi}}]),$$

где ε_i^+ — количество положительных целых чисел среди j_{mi}, соответственно ε_i^- — количество отрицательных.

Пусть $\sum_{i_k}[M_{i_k}]\prod_m(CP_{j_{mi_k}}^{l_{mi_k}})$ — часть суммы $\beta([X, S^1])=\sum_i[M_i]\prod_m(CP_{j_{mi}}^{l_{mi}})$, равная классу бордизмов R_* S^1-пучка ν_s над неподвижным подмногообразием F_s. Тогда для всех i_k $\varepsilon_{i_k}^+=\varepsilon_s^+$ и $\varepsilon_{i_k}^-=\varepsilon_s^-$. Поскольку $[F_s]=\sum_{i_k}[M_{i_k}]\times\prod_m[CP^{l_{mi_k}}]$, доказательство теоремы 2.1 закончено.

§ 3. Ориентируемый случай

Рассмотрим сохраняющие ориентацию действия компактных групп Ли на многообразиях и векторных пучках. Все конструкции и результаты, полученные в предшествующих параграфах для унитарных действий, автоматически переносятся на рассматриваемую ситуацию, поэтому ниже мы ограничимся лишь формулировками, снабжая их по мере надобности минимальными пояснениями.

Каждому характеристическому классу в ориентированных кобордизмах векторных пучков $\chi\in\Omega^i(BSO)$ соответствует гомоморфизм Ω_*-модуля бордизмов ориентированных G-пучков над ориентированными G-многообразиями в кольцо кобордизмов универсального классифицирующего пространства BG:

$$\chi^G:\Omega_{n,k}^G\to\Omega^{-n+i}(BG).$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любого характеристического класса χ и G-пучка ξ имеет место равенство*:

$$e(\Delta_G)\,\chi^G([\xi])=\sum_s p_{s!}\left(e(-\nu_s)_G\right)\cdot\chi(\xi_{sG})).$$

Обозначения — те же, что и в теореме 1.1, с единственной заменой условия «унитарности» пучков (представлений) на их «ориентируемость».

Пусть χ_0^G, как и раньше, — «эквивариантный характеристический гомоморфизм», соответствующий характеристическому классу $1 \in \Omega^0(BSO)$.

Рассмотрим произвольное ориентируемое S^1-многообразие X. Как известно, структурная группа нормального S^1-пучка ν_s к связной компоненте F_s множества неподвижных точек действия S^1 на X может быть редуцирована к унитарной и ν_s может быть превращен в комплексный S^1-пучок [см. ([10]), § 38]. Выберем у ν_s такую комплексную структуру, чтобы представление S^1 в слое имело вид $\sum\limits_i \eta^{j_{si}}$, $j_{si} > 0$. Так же как и раньше, определим гомоморфизм Ω_*-модулей:

$$\beta' : \Omega_n^{S^1} \to R_n' = \sum \Omega_l \Big(\prod_{j>0} BU(n_j) \Big),$$

где суммирование ведется по всем наборам неотрицательных целых чисел n_j, l таким, что $2\sum\limits_{j>0} n_j + l = n$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Существует гомоморфизм Ω_*-модулей $\Psi : R_*' \to \Omega^*[[u]] \otimes \otimes Q[u^{-1}]$ такой, что $\Psi \circ \beta'$ совпадает с композицией гомоморфизма $\chi_0^{S^1}$ и гомоморфизма $\Omega^*[[u]] \to \Omega^*[[u]] \otimes Q[u^{-1}]$. Значения Ψ на образующих Ω_*-модуля даются формулой*:

$$\Psi \Big(\prod_m \big(CP_m^{l_m} \big) \Big) = \prod_m \left(\frac{1}{[u]_{j_m}} \right)^{l_m+1} B_{l_m}([u]_{j_m}).$$

ТЕОРЕМА 3.3. *Если $\alpha : G_1 \to G$ — гомоморфизм групп Ли, то диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{*,*}^G & \xrightarrow{\chi^G} & \Omega^*(BG) \\ \downarrow \alpha^{\#} & & \downarrow \alpha^* \\ \Omega_{*,*}^{G_1} & \xrightarrow{\chi^{G_1}} & \Omega^*(BG_1) \end{array}$$

коммутативна.

Аналогично § 2 по каждому рациональному роду Хирцебруха $h : \Omega_* \to Q$ строится эквивариантный род Хирцебруха $h^G : \Omega_*^G \to K(BG) \otimes Q$.

Значения классического T_y-рода при $y=1$ на квазикомплексных многообразиях совпадают с сигнатурой этих многообразий. Поэтому, точно так же как теорема 2.1, доказывается

ТЕОРЕМА 3.4. *Для связной компактной группы Ли G образ гомоморфизма $\mathrm{Sign}^G : \Omega_*^G \to K(BG) \otimes Q$ принадлежит подкольцу $Q \subset K(BG) \otimes Q$. Для любого ориентированного S^1-многообразия X имеет место формула*:

$$\mathrm{Sign}([X]) = \sum_s \mathrm{sign}([F_s]).$$

Добавление. В следующей работе будет дано доказательство, основанное на соображениях «аналитичности», связанных с эквивариантным рядом, отвечающим роду Хирцебруха A_k, $k=2, 3, \ldots$, который задается рядом $\dfrac{kt \cdot e^t}{e^{kt}-1}$, следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Если на многообразии* X, *первый класс Чженя которого* $c_1(X) \in H^2(X, Z)$ *делится на* k, *существует нетривиальное действие группы* S^1, *то* $A_k([X])=0$.

Поступило
11.XII.1973

Литература

1 **Atiyah M., Hirzebruch F.,** Spin-manifolds and group actions, Essay Topol. and Relat. Topics, Berlin, 1970, 18—28.

2 **Новиков С. П.,** Операторы Адамса и неподвижные точки, Изв. АН СССР. Сер. матем., 32 (1968), 1245—1263.

3 **Мищенко А. С.,** Многообразия с действием группы Z_p и неподвижные точки, Матем. заметки, 4, вып. 4 (1968), 381—386.

4 **Каспаров Г. Г.,** Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов, Изв. АН СССР. Сер. матем., 33 (1969), 735—747.

5 **Мищенко А. С.,** Бордизмы с действием группы Z_p и неподвижные точки, Матем. сб., 80 (122) (1969), 307—313.

6 **Гусейн-Заде С. М., Кричевер И. М.,** О формулах для неподвижных точек действия группы Z_p, Успехи матем. наук, 27 : 1 (1973), 245—246.

7 **Dold A.,** Relations between ordinary and extraordinary cohomology, Colloquium on Algebraic Topology, Aarhess, 1962.

8 **Segal G.,** Equivariant K-theory, Publs Math. Inst. Hautes Etudes scient., 34 (1968), 113—128.

9 **Коннер П., Флойд Э.,** О соотношении теории бордизмов и K-теории, Дополнение к книге «Гладкие периодические отображения», М., «Мир», 1969.

10 **Коннер П., Флойд Э.,** Гладкие периодические отображения, М., «Мир», 1969.