ЭКВИВАРИАНТНЫЕ РОДЫ ХИРЦЕБРУХА. ФОРМУЛА АТЬИ—ХИРЦЕБРУХА

И. М. Кричевер

0. В настоящей заметке для каждого рода Хирцебруха h строится его эквивариантный аналог — гомоморфизм $h^G : U_*^G \to K(BG) \otimes Q$ такой, что при «аугментации» $h^G([X, G])$ переходит в $h([X])$. Здесь G — компактная группа Ли, U_*^G — U_*-модуль бордизмов G-многообразий. (Условимся, что всюду, кроме последнего пункта, многообразия и действия групп на них считаются унитарными.) Доказательство основных результатов получено при дальнейшем исследовании аналитических свойств выражений Коннера — Флойда, начало которому положили «уравнения Коннера — Флойда». Возникающее при этом «аналитическое» условие выделяет двухпараметрический род $T_{x,y}$, оказавшийся симметрическим аналогом классического T_y-рода. Для него в качестве следствия получены формулы, совпадающие для T_y-рода с формулой Атьи — Хирцебруха. Эта формула доказана в работе [2] принципиально иным способом — с помощью теоремы об индексе.

1. Каждому роду Хирцебруха соответствует гомоморфизм функторов $\widetilde{h}$: $U^*(Y) \otimes \otimes Q \to K(Y) \otimes Q$ такой, что h совпадает с композицией $U_* \to U^* \otimes Q \xrightarrow{\widetilde{h}} Q$.

Лемма 1. *Значение гомоморфизма $\widetilde{h}$ на образующей $u \in U^2(CP^\infty)$ равно* $\mathrm{ch}^{-1}(g_h^{-1}(t))$, *где $g_h^{-1}(t)$ — ряд, функционально обратный ряду* $g_h(t) = \sum \frac{h([CP^n])}{n+1} t^{n+1}$, *т. е.* $\widetilde{h}(u) = g_h^{-1}(\ln \eta) \in K(CP^\infty) \otimes Q = Q[[1-\eta]]$.

Поставим в соответствие каждому G-многообразию X класс кобордизмов $p_!(1)$, где $p_!: U^*((X \times EG)/G) \to U^*(BG)$ — гомоморфизм Гизина. Это задает гомоморфизм $\chi_0^G : U_*^G \to U^*(BG)$.

Определение. *Эквивариантным родом*, соответствующим роду Хирцебруха h, будет называться гомоморфизм $h^G = \widetilde{h} \circ \chi_0^G$.

Отметим естественность этого определения относительно гомоморфизмов групп.

Лемма 2. *Если α: $G_1 \to G$ — гомоморфизм групп, то $h^{G_1} \circ \alpha^\# = \alpha^* \circ h^G$, где $\alpha^\#$: $U_*^G \to U_*^{G_1}$ — гомоморфизм переноса, а α^*: $K(BG) \otimes Q \to K(BG_1) \otimes Q$.*

2. Рассмотрим эквивариантное вложение G-многообразия X в пространство представления $\widetilde{\Delta}$. Ограничение нормального пучка к X при этом вложении на G-подмногообразие F_s, неподвижное относительно действия нормального делителя $H \subset G$, является дополнительным пучком $(\widetilde{-\nu_s})$ к нормальному пучку ν_s к F_s в X. Пусть Δ и $(-\nu_s)$ — такие максимальные прямые слагаемые $\widetilde{\Delta}$ и $(\widetilde{-\nu_s})$ соответственно, что действие H на них не содержит тривиальных слагаемых. Обозначим для произвольного G-пучка ζ над многообразием Y через ζ_G пучок над $Y_{\overline{G}} = (Y \times EG)/G$, полученный при естественном гомоморфизме $\mathrm{Vect}_G(Y) \to \mathrm{Vect}(Y_G)$.

Теорема 1. *Пусть ξ_s — ограничение G-пучка ξ над X на F_s; тогда*

$$e(\Delta_G) \cdot p_!(\chi(\xi_G)) = \sum p_{s!}[e((-\nu_s)_G) \cdot \chi(\xi_{sG})],$$

где p_s: $F_{sG} \to BG$, $\chi \in U^*(BU)$ — произвольный характеристический класс, а $e(*)$ — эйлеров класс пучка.

3. Если и G и H совпадают с группой S^1, $\chi = 1$, то из теоремы 1 следуют обычные выражения Коннера — Флойда, которые для краткости мы приведем сейчас лишь для действий с изолированными неподвижными точками.

Следствие 1. *Пусть представление S^1 в слое касательного пучка над неподвижной точкой p_s S^1-многообразия X имеет вид $\sum_{i=1}^{n} \eta^{j_{si}}$; тогда*

$$h^{S^1}([X, S^1]) = \sum_s \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{g_h^{-1}(\ln \eta^{j_{si}})}. \tag{1}$$

Так как $h^{S^1}([X, S^1]) \in Q[[1-\eta]]$, то получаем: если $g^{-1}(\ln\eta)$ — аналитическая функция η в окрестности 1, то функция $\Phi_h(\eta)$, задаваемая правой частью равенства (1), также аналитична в некоторой окрестности 1 (т. е. не имеет полюса в 1). Кроме того, $\Phi_h(1) = h([X])$. Суть этой заметки сводится в некоторой мере к доказательству того, что если $g^{-1}(\ln\eta)$ аналитична во всей замкнутой плоскости и имеет единственный нуль в 1, то $\Phi_h(\eta)$, которая могла бы иметь полюсы в корнях из 1, аналитична всюду и, следовательно, константа. Это позволяет находить $h([X]) = \Phi_h(1)$, вычисляя $\lim\limits_{\eta\to\infty}\Phi_h(\eta)$.

Только что сформулированное условие выделяет T_y-род такой, что $T_{x,y}([CP^n]) = \sum x^i(-y)^{n-i}$. Очевидно, что $T_{1,y}$ есть $T(y)$-род.

4. Рассмотрим произвольное S^1-многообразие X. Представим нормальные S^1-пучки ν_s к F_s в виде $\sum\nu_{sj}\otimes\eta^j$. Совокупность наборов пучков ν_{sj}, как обычно, задает гомоморфизм β: $U_n^{S^1}\to R_n = \sum_j U_l\left(\prod BU(n_j)\right)$, где $2\sum n_j + l = n$. Выберем в U_*-модуле R_* стандартный мультипликативный базис $\prod\limits_m (CP_{j_m}^{l_m})$. Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть* $\beta([X, S^1]) = \sum\limits_i [M_i]\prod\limits_m (CP_{j_{mi}}^{l_{mi}})$; *тогда*

$$T_{x,y}^{S^1}([X, S^1]) = \sum_i T_{x,y}([M_i])\prod_m\left(\frac{x\eta^{j_{mi}(x+y)}+y}{\eta^{j_{mi}(x+y)}-1}\right)^{l_{mi}+1}\tau_{x,y}^{l_{mi}}(\eta^{j_{mi}}), \tag{2}$$

где

$$\tau_{x,y}^N(\eta) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{x^{N-k+1}-(-y)^{N-k+1}}{x+y}\left(\frac{\eta^{x+y}-1}{x\eta^{x+y}+y}\right)^{N-k}\left(\frac{x+y\eta^{x+y}}{x\eta^{x+y}+y}\right)^k +$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k xy\,\frac{x^{N-k}-(-y)^{N-k}}{x+y}\left(\frac{\eta^{x+y}-1}{x\eta^{x+y}+y}\right)^{N-k+1}\left(\frac{x+y\eta^{x+y}}{x\eta^{x+y}+y}\right)^k.$$

С помощью выражений для $T_{x,y}^{S^1}([X, S^1])$ через инварианты неподвижных точек действия конечных циклических подгрупп S^1, которые дает теорема 1, доказывается, что функция $\Phi_{x,y}(\eta)$, задаваемая правой частью равенства (2), не имеет полюсов в корнях из 1 и, значит, аналитична всюду. Учитывая лемму 2, получаем теорему.

Теорема 2. *Для связной компактной группы Ли* G $\operatorname{Im} T_{x,y}^G$ *принадлежит подкольцу* $Q\subset K(BG)\otimes Q$.

Следствие 3. *Для* S^1*-многообразия* X *имеет место формула*

$$T_{x,y}([X]) = \sum x^{\varepsilon_s^+}(-y)^{\varepsilon_s^-}T_{x,y}([F_s]).$$

Здесь $\varepsilon_s^+(\varepsilon_s^-)$ — *число отличных от нуля пучков* ν_{sj} *в разложении* ν_s, *у которых* $j>0$ $(j<0)$.

5. При замене условия унитарности многообразий и действий групп на них на ориентируемость практически без изменений сохраняются теоремы и определения предшествующих пунктов. В частности, при подходящем выборе ориентации F_s получаем для сигнатур формулу (*Атья — Хирцебрух*) $\operatorname{Sign}([X]) = \sum\operatorname{Sign}([F_s])$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Бухштабер, А. С. Мищенко, С. П. Новиков, Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии, УМН 26:2 (1971), 131—154.

[2] M. Atiyah, F. Hirzebruch, Spin-manifolds and group actions, Essay Topol and Relat Topics, Berlin et al., 1970, 18—28.

Поступило в Правление общества 23 января 1974 г.