

ПОТЕНЦИАЛЫ С НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОТРАЖЕНИЯ НА ФОНЕ КОНЕЧНОЗОННЫХ

И. М. Кричевер

В самое последнее время с различных точек зрения был изучен класс конечнозонных потенциалов $u(x)$ оператора Штурма — Лиувилля $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ (см. [1], [2], [3]).

В настоящей заметке дается алгебро-геометрическая конструкция потенциалов, частным случаем которых являются как конечнозонные, так и хорошо известные быстро убывающие потенциалы с нулевым коэффициентом отражения. В общем случае эти потенциалы соответствуют безотражательным потенциалам на фоне конечнозонных. Построение теории рассеяния для асимптотически конечнозонных потенциалов будет дано в следующей работе.

Следует отметить, что для безотражательных потенциалов идея настоящей конструкции совпадает с идеей интерполяции [4], на которую автору было указано А. Б. Шабатом и которая стимулировала дальнейшие исследования.

1. Пусть E — рациональная функция с простыми полюсами на гладкой алгебраической кривой X . Комплексная функция $u(x)$, $x \in (a, b)$, обладает правильными аналитическими свойствами, если существуют $\pi: Y \rightarrow X$ — двулистная накрывающая X и функция $\Psi(x, P)$, $P \in Y$, такая что: 1°) вне полюсов $\tilde{E} = \pi^*E$ она мероморфна, причем ее полюса не зависят от x ; 2°) в окрестности полюсов \tilde{E} $\Psi(x, P) e^{iV\tilde{E}(x-x_0)}$ — регулярная функция со значением в этих полюсах 1;

$$3^\circ) \quad -\Psi''(x, P) + u(x)\Psi(x, P) = \tilde{E}(P)\Psi(x, P). \quad (1)$$

Прежде чем сформулировать первую теорему, введем для каждого эффективного дивизора $D = \sum k_s P_s \geq 0$, т. е. $k_s \geq 0$, на Y понятие допустимого дивизора. Пусть T — инволюция Y , переставляющая листы, $D^+ = T^*D$, а $-2D_\infty$ — дивизор полюсов \tilde{E} . Обозначим через $\mathfrak{L}_-(\mathfrak{D})$ подпространство нечетных относительно T^* функций из линейного пространства дивизора $\mathfrak{D} = D + D^+ + D_\infty$ $\mathfrak{L}(\mathfrak{D})$. Напомним, что линейным пространством дивизора называется пространство таких рациональных функций, что сумма этого дивизора с дивизорами нулей и полюсов их есть эффективный дивизор. Дивизор $d \geq 0$ допустим для D , если $\deg d = \dim \mathfrak{L}_-(\mathfrak{D}) - 1$, а $\dim(\mathfrak{L}_-(\mathfrak{D}) \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{D} - d)) = 1$.

Теорема 1. *Функция $\Psi(x, P)$, удовлетворяющая условиям 1°) и 2°), тогда и только тогда удовлетворяет уравнению (1) с некоторым потенциалом $u(x)$, когда найдется допустимый для дивизора ее полюсов D дивизор $d = \sum l_s \kappa_s$ такой, что*

$$\frac{d^i}{dz^i} (\Psi(\Psi^+)^{-1})|_{\kappa_s} = 1, \quad i = 0, \dots, l_s - 1. \quad (2)$$

Здесь $\Psi^+ = T^*\Psi$.

В предположениях теоремы при всех x вронскиан $F = \Psi'\Psi^+ - \Psi\Psi'^+ \in \mathfrak{L}_-(\mathfrak{D})$. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что F не зависит от x . При этом в нулях F выполнены равенства (2). (Условимся выбирать среди них допустимый для D дивизор d на верхнем листе.) Наоборот, по определению d из (2) следует постоянство F .

О п р е д е л е н и е. Дивизоры D, d будут называться *данными рассеяния* для $u(x)$.

Теорема 2. *Для произвольного набора данных рассеяния тогда и только тогда разрешима обратная задача, когда E — функция с одним простым полюсом на рациональной кривой.*

Доказательство теоремы 2 следует из сравнения размерности пространства, образованного функциями $\Psi(x, P)$, удовлетворяющими условиям 1°), 2°), с дивизором полюсов D , при фиксированном x , и числа уравнений (2), т. е. $\deg d$.

На гиперэллиптической кривой рода g для дивизора D степени N существует допустимый дивизор d тогда и только тогда, когда $N \geq g$. При этом $\deg d = N - g$. Конечнозонным потенциалам отвечает условие $\deg D = g$. Тогда $\deg d = 0$ и $u(x)$ однозначно определяется дивизором D . Случаю безотражательных потенциалов соответствует гиперэллиптическая кривая рода 0.

З а м е ч а н и е. Легко получить «формулу следов» для $u(x)$, задаваемого дивизорами D и $d = \sum \kappa_s$ на гиперэллиптической кривой $\Gamma_g \left(y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (E - E_i) \right)$:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2g+1} E_i + 2 \sum_{s=1}^{N-g} \tilde{E}(\kappa_s) - 2 \sum_{k=1}^N \gamma_k(x).$$

Здесь $\gamma_k(x)$ — значения \tilde{E} в нулях $\Psi(x, P)$.

С л е д с т в и е. Пусть $-\infty = E_0 \leq \dots \leq E_{2g+1} < \infty$ вещественны, κ_s принадлежат интервалам (E_{2n}, E_{2n+1}) , точки D лежат по одной в каждом из полученных отрезков, тогда $u(x)$ — гладкая вещественная функция при $x \rightarrow \pm \infty$, экспоненциально стремящаяся к конечновознным потенциалам $u_{\pm}(x)$. Потенциал $u_+(x)$ задается эффективным дивизором, эквивалентным $D - d$, а $u_-(x)$ — дивизором, эквивалентным $D - d^+$.

Таким образом, дивизор d задает сдвиг на множестве конечновознных потенциалов. Для того чтобы он был нулевым ($u_+(x) = u_-(x)$), необходимо, чтобы $\deg d \geq g + 1$. (Наше внимание на наличие сдвига в случае солитонных возмущений одновознных потенциалов, изучение которых с иных позиций было предпринято в [5], было обращено В. Б. Матвеевым.)

2. В этом пункте даются явные формулы для k -солитонного потенциала на фоне n -вознного, а также аналог закона суперпозиции безотражательных потенциалов [1].

Пусть потенциал $u(x)$ задан дивизорами $D = P_1 + \dots + P_{n+k}$ и $d = \kappa_1 + \dots + \kappa_k$ на гиперэллиптической кривой Γ_n . Обозначим через $u_i(x)$ n -вознные потенциалы, задаваемые дивизорами $P_1 + \dots + P_{n-1} + P_{n+i}$, $0 \leq i \leq k$; $\Psi_i(x, P)$ — соответствующие им блоховские функции.

Т е о р е м а 3. Пусть $K(x) = \int_{x_0}^x u(x) dx$, $K_i(x) = \int_{x_0}^x u_i(x) dx$, тогда $K(x) = \sum_{i=0}^k a_i(x) K_i(x)$, где $a_i(x)$ — решения системы

$$\sum_i a_i(x) (\Psi_i(x, \kappa_s) - \Psi_i^+(x, \kappa_s)) = 0, \quad \sum_i a_i(x) = 1. \quad (3)$$

Функции $a_i(x)$ являются рациональными функциями $\Psi_i(x, \kappa_s) - \Psi_i^+(x, \kappa_s)$. Они в свою очередь рационально выражаются через односолитонные потенциалы на фоне n -вознных. Лишь громоздкость получающихся выражений заставляет нас ограничиться формулировкой теоремы.

Т е о р е м а 4. $K(x)$ есть рациональная функция от интегралов от n -вознных потенциалов и односолитонных на фоне n -вознных.

Для получения эффективных формул в случае k -солитонных возмущений одновознных потенциалов надо, кроме теоремы 3, использовать то, что блоховская функция, соответствующая одновознному потенциалу, задаваемому точкой z_0 , есть

$$\Psi(x, z) = \frac{\sigma(z - z_0 - i(x - x_0))}{\sigma(z - z_0)} e^{i\zeta(z)(x - x_0)}.$$

Здесь $\sigma(z) = \sigma(z | \omega, \omega')$ и $\zeta(z) = \zeta(z | \omega, \omega')$ — σ - и ζ -функции Вейерштрасса.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию
23 августа 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков С. П., Функциональный анализ 8, вып. 3 (1974), 54—66. 2. Дубровин Б. А., Функциональный анализ 9, вып. 1 (1975), 65—66. 3. Итс А. Р., Матвеев В. Б., Функциональный анализ 9, вып. 1 (1975), 69—70. 4. Шабата А. Б., Динамика сплошной среды, вып. 5 (1970), Новосибирск, 130—145. 5. Кузнецов Е. А., Михайлов А. В., препринт № 19, ин-т автоматки и электротри СО АН СССР, Новосибирск, 1974.