Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности, *Докл. АН СССР*, 1976, том 229, номер 1, 15–18

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 1

УДК 513.835 МАТЕМАТИКА

Б. А. ДУБРОВИН, И. М. КРИЧЕВЕР,
член-корреспондент АН СССР С. П. НОВИКОВ

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ И РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

1°. Рассмотрим двумерное уравнение Шредингера $\hat{H}\psi=E\psi$ или $\hat{H}\psi=i\,\partial\psi/\partial t$, где $\hat{H}=(i\,\partial/\partial x-A_1)^2+(i\,\partial/\partial y-A_2)^2+u(x,\ y)$, причем потенциал $u(x,\ y)$ и вектор-потенциал $(A_1,\ A_2)$ периодичны по $(x,\ y)$ с периодами T_1, T_2. В нестационарном случае u, A_1, A_2 зависят также от времени. Магнитное поле $H(x,\ y)=\partial A_1/\partial y-\partial A_2/\partial x$ направлено по оси z и имеет нулевой поток $\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_2}H(x,\ y)\,dx\,dy=0$. Наша цель — найти возможно более широкий класс «интегрируемых» случаев прямой и обратной задач, где собственная функция ψ и коэффициенты оператора $\hat{H}$ одновременно могут быть найдены точно. В одномерной задаче, где $\hat{H}=-d^2/dx^2+u(x)$, интегрируемый класс «конечнозонных» потенциалов был открыт и изучен в связи с теорией уравнения Кортевега — де Фриза (К.— дФ.) (см. обзор ([2])). В одномерной нестационарной задаче $\hat{H}\psi-i\,\partial\psi/\partial t=0$ интегрируемый класс потенциалов $u(x,\ t)$ найден в ([3]). Данная работа стимулирована, с одной стороны, методом работы ([3]) и, с другой стороны,— аналогами высших уравнений К.— дФ., открытыми Манаковым ([4]) и сохраняющими уравнение $\hat{H}\psi=E_0\psi$ с магнитным полем при одном уровне E_0.

2°. В двумерной стационарной задаче $\hat{H}\psi=E\psi$ естественно выделяются блоховские собственные функции $\psi(x,\ y,\ p_1,\ p_2)$, где $\psi(x+T_1,\ y)=e^{ip_1T_1}\psi(x,\ y)$ и $\psi(x,\ y+T_2)=e^{ip_2T_2}\psi(x,\ y)$. Пусть также $\psi(0,\ 0,\ p_1,\ p_2)=1$. Числа p_1, p_2 называются квазиимпульсами. При заданных вещественных p_1, p_2 определен дискретный спектр энергий $\mathscr{E}_n(p_1,\ p_2)$. Очевидно, $\psi=\psi(x,\ y,\ p_1,\ p_2,\ n)$.

Определение 1. Мы скажем, что гамильтониан $\hat{H}$ обладает хорошими аналитическими свойствами, если: а) все ветви $\mathscr{E}_n(p_1,\ p_2)$ продолжаются на все комплексные значения квазиимпульсов; в) блоховская функция $\psi(x,\ y,\ p_1,\ p_2,\ n)$ существует при всех комплексных $(p_1,\ p_2)$ как мероморфная функция от $(p_1,\ p_2)$ на всех листах n; в) полный график всех многозначных комплексных функций $\mathscr{E}_n(p_1,\ p_2)$ образует комплексное многообразие $\hat{M}^2$, на котором действует группа сдвигов $G=Z\times Z$, $p_1\to p_1+2\pi n/T_1$, $p_2\to p_2+2\pi m/T_2$. Фактор-многообразие $M^2=\hat{M}^2/Z\times Z$ мы назовем многообразием квазиимпульсов. Для точек $P\in M^2$ определена блоховская функция $\psi=\psi(x,\ y,\ P)$. Определена также функция $\mathscr{E}$: $M^2\to C$ (закон дисперсии), где $\hat{H}\psi=\mathscr{E}(P)\psi$, C — комплексная плоскость энергии.

Определение 2. Гамильтониан $\hat{H}$ с хорошими аналитическими свойствами мы назовем алгебраическим, если существует компактное комплексное многообразие W и его мероморфное отображение $\mathscr{E}$: $W\to P^1=(C\cup\infty)$ в расширенную плоскость энергии, на котором открытая (всюду плотная) область изоморфна многообразию квазиимпульсов M^2 с законом дисперсии $\mathscr{E}$: $M^2\to C$. Дополнение $W\setminus M^2=X_\infty$ мы назовем бесконечно удаленной частью. Мы требуем, чтобы X_∞ была объединением конечного числа римановых поверхностей (алгебраических кривых). Слои отображения $\mathscr{E}$: $M^2\to C$ после перехода к пополнению $W^{\mathscr{E}}\to$

$\to (C\cup\infty)$ имеют вид $\mathscr{E}^{-1}(E_0)\subset W$; они являются компактными римановыми поверхностями $X=\mathscr{E}^{-1}(E_0)$. Для всех $E_0\neq\infty$ пересечение $X\cap X_\infty$ состоит из конечного числа точек. Блоховская функция $\psi(x, y, P)$ имеет существенную особенность в бесконечно удаленных точках $P\in X_\infty$.

Перечислим свойства алгебраических гамильтонианов.

1. Для алгебраического гамильтониана $\hat{H}$ на слое $X=\mathscr{E}^{-1}(E_0)$, $E_0\neq\infty$, найдется ровно две бесконечно удаленные точки $P_1\cup P_2=X\cap X_\infty$; если w_1, w_2 — локальные параметры около точек P_1, P_2 на X, то для блоховской функции имеется асимптотика

$$\psi\sim e^{k_1(x+iy)}[c_1(x, y)+c_1(x, y)^{\mu(x, y)}/k_1+O(1/k_1^2)],$$

$$\psi\sim e^{k_2(x-iy)}[c_2(x, y)+c_2(x, y)^{\nu(x, y)}/k_2+O(1/k_2^2)],$$

где $k_1=1/w_1$, $k_2=1/w_2$, $k_1\to\infty$, $k_2\to\infty$.

2. Дивизор полюсов D функции ψ на $X=\mathscr{E}^{-1}(E_0)$ имеет степень $n(D)=g$, где g — род кривой X, если X — общий слой отображения $\mathscr{E}$, $D=D_1+\ldots+D_g$. Дивизор D не зависит от x, y.

Вообще говоря, мы вводим более общий класс комплексных квазипериодических слабо алгебраических гамильтонианов $\hat{H}$. Требуется, чтобы существовала «блоховская» собственная функция $\psi(x, y, P)$ такая, что: а) дифференциал $d\psi/\psi=(\psi_x dx+\psi_y dy)/\psi$ является квазипериодическим с той же группой периодов, что и $\hat{H}$; б) ψ мероморфна на некотором комплексном многообразии M^2, как и в определении 1, $\hat{H}\psi=\mathscr{E}(P)\psi$, $\mathscr{E}$: $M^2\to C$; в) один уровень энергии $\mathscr{E}=E_0$ в многообразии M^2 пополняется до комплексной алгебраической кривой X; г) верны свойства 1 и 2 (см. выше).

3°. Перейдем теперь к решению обратной задачи. Имеет место

Лемма 1. *Если на произвольной римановой поверхности X рода g задана пара точек P_1, P_2 и дивизор $D=D_1+\ldots+D_g$, то найдется функция $\psi(x, y, P)$ с дивизором полюсов D и асимптотиками, указанными в свойстве 1. Эта функция определена однозначно с точностью до общего множителя $c_1(x, y)\to c_1(x, y)f(x, y)$, $c_2\to c_2 f$.*

Построение этой функции проводится по схеме ([1]), уже неоднократно использованной в работах авторов, Матвеева и Итса (см. обзор ([2]) и работу ([3])).

Лемма 2. *Функция $\psi(x, y, P)$, построенная в лемме 1, удовлетворяет уравнению $\hat{H}\psi=0$, где*

$$\hat{H}=-\partial^2/\partial z\,\partial\bar{z}+A_{\bar{z}}\partial/\partial\bar{z}+v(x, y)=$$

$$=(i\,\partial/\partial x-A_1)^2+(i\,\partial/\partial y-A_2)^2+u(x, y),$$

$$c_1=1,\quad c_2=c(x, y),$$

$$A_1+iA_2=A_{\bar{z}}=\partial\ln c(x, y)/\partial z,\quad A_z=A_1-iA_2=0,$$

$$v(x, y)=-2\partial\mu/\partial\bar{z}.$$

Функции A_1, A_2, $u(x, y)$ и дифференциал $d\ln\psi=(\psi_x dx+\psi_y dy)/\psi$ являются почти периодическими с общей группой периодов, зависящей лишь от кривой X и пары точек P_1, $P_2\in X$.

Для любой антиинволюции T: $X\to X$ в группе $H_1(X)$ имеется базис циклов a_i, $b_i\in H_1(X)$ такой, что $a_i\cdot b_i=\delta_{ij}$, $T_*a_i=a_i$, $T_*b_j=-b_j$. Выберем базис дифференциалов 1-го рода $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ такой, что $\oint_{a_i}\omega_j=2\pi i\delta_{ij}$. Матрица $B_{kj}=\oint\omega_j$ вещественна, и $T^*(\omega_k)=-\bar{\omega}_k$. Выберем два дифференциала Ω_α 2-го рода, имеющие вид $\Omega_\alpha\sim(dw_\alpha/w_\alpha^2+\text{регулярный})$ около точек P_α и $\oint_{a_k}\Omega_\alpha=0$. Пусть $U_{j\alpha}=\oint_{b_j}\Omega_\alpha$. Если $T(P_1)=P_2$, то верно одно из соотношений $U_{j1}=\pm U_{j2}$, если $T_{w_1}^*=\pm\bar{w}_2$. Пусть $D(x, y)=\sum_{j=1}^{g}D_j(x, y)$ — дивизор нулей функции $\psi(x, y, P)$. По схеме ([1]) во всех случаях получаем

$$(zU_{k1}+\bar{z}U_{k2})=\sum_{j=1}^{g}\int_{D_j}^{D_j(x,y)}\omega_k,\quad z=x+iy,$$

(с точностью до решетки в C^n). Пусть антиинволюция T имеет не менее g вещественных (неподвижных) овалов, не зависимых в $H_1(X)$. Эти овалы дадут полубазис циклов $a_1,\dots,a_g$. Возьмем дивизор полюсов вида $D=$ $=\sum_{j=1}^{g} D_j$, где точка D_j лежит на овале a_j. Пусть $T(P_1)=P_2$ и $T^*(w_1)=\bar{w}_2$.

Лемма 3. *Если точки P_1, P_2 лежат вне овалов $(a_1,\dots,a_g)$, а полюсы D_j — на различных овалах a_j, то функции iA_1, iA_2, и получатся гладкими и вещественными.*

Это дает достаточное (но не необходимое) условие ограниченности коэффициентов iA_1, iA_2, $u(x, y)$.

Пусть $\theta(\eta_1,\dots,\eta_n)$ — θ-функция Римана, построенная по матрице $B_{kj}=\oint_{b_j}\omega_k$. Из лемм вытекает

Теорема 1. *Пусть асимптотика функции $\psi(x, y, P)$ около произвольных точек P_1 и P_2 на X имеет вид $\psi\sim e^{k_1 z}(1+\mu(x, y)/k_1+\dots)$ и $\psi\sim$ $\sim c(x, y)^{k_2\bar{z}}(1+\nu(x, y)/k_2+\dots)$, где $w_1=1/k_1$, $w_2=1/k_2$ — локальные параметры на X около точек P_1 и P_2.*

Тогда коэффициенты оператора $\hat{H}$ имеют вид

$$u(x,y)=-2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\ln\theta(\vec{U}_1 z+\vec{U}_2\bar{z}+\vec{W}(D)),$$

$$A_{\bar{z}}=A_1+iA_2=\frac{\partial}{\partial z}\ln\left[\frac{\theta(\vec{U}_1 z+\vec{U}_2\bar{z}+\vec{V}_1+\vec{W}(D))}{\theta(\vec{U}_1 z+\vec{U}_2\bar{z}+\vec{V}_2+\vec{W}(D))}\right],$$

$A_z=A_1-iA_2=0$, $D=D_1+\dots+D_g$ — дивизор полюсов,

$$W_j(D)=\sum_k\int_Q^{D_k}\omega_j+{}^1/_2-{}^1/_2B_{jj}+\sum_{s\neq j}\oint_{a_j}\left(\int_Q^t\omega_s\right)\omega_j(t),\ t\in a_j,\quad V_{\alpha j}=\int_Q^{P_\alpha}\omega_j;$$

Q — фиксированная точка. Функция $\psi(x, y, P)$ удовлетворяет уравнению $\hat{H}\psi=E_0\psi$ и задается формулой

$$\psi(x,y,P)=\exp\left\{z\int_Q^P\Omega_1+\bar{z}\int_Q^P\Omega_2\right\}\frac{\theta(\vec{U}_1 z+\vec{U}_2\bar{z}+\vec{W}(D)+\vec{f}(P))\,\theta(\vec{W}(D))}{\theta(\vec{f}(P)+\vec{W}(D))\,\theta(\vec{U}_1 z+\vec{U}_2\bar{z}+\vec{W}(D))},$$

где $\vec{f}(P)=(f_j(P))$, $f_j(P)=\int_Q^P\omega_j$.

Магнитное поле направлено по третьей оси и имеет вид

$$H(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\ln\frac{\theta(\vec{U}_1 z+\vec{U}_2\bar{z}+\vec{W}(D)+\vec{V}_1)}{\theta(\vec{U}_1 z+\vec{U}_2\bar{z}+\vec{W}(D)+\vec{V}_2)}.$$

4°. Коэффициенты линейных операторов $\hat{H}=\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}-\dfrac{\partial\ln c}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}-u$, найденные в этой работе по кривой X, паре точек P_1, P_2 и дивизору D, удовлетворяют некоторым нелинейным уравнениям. Любая алгебраическая функция f на X с полюсами лишь в точках P_1, P_2 порядков m_1 и m_2 по схеме ([3]) порождает оператор $\hat{H}_f$ такой, что $\hat{H}_f\psi=f\psi$, где

$$\hat{H}_f=\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m_1}+\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^{m_2}+\sum_{i=1}^{m_1}a_i(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m_1-i}+\sum_{j=1}^{m_2}b_j(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^{m_2-j}.$$

Имеют место соотношения

$$[\hat{H}_f, \hat{H}]=D_{(f)}\hat{H}, \quad [\hat{H}_f, \hat{H}_g]=D_{(f,g)}\hat{H},$$

где D_f, $D_{(f,g)}$ — дифференциальные операторы, f и g — функции на X с полюсами только в точках P_1, P_2. Эти соотношения эквивалентны уравнениям на коэффициенты $c(x, y)$, $u(x, y)$.

Рассмотрим пример, возникший в процессе обсуждения авторов с А. Р. Итсом взаимоотношения результатов данной работы и уравнения Sin — Gordon. Пусть две функции f, g на X имеют полюса второго порядка лишь в точках P_1, P_2 соответственно, $k^2 \sim f$, $k'^2 \sim g$. Тогда

$$\hat{H}_f = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad \hat{H}_g = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - 2\frac{\partial \ln c}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Из соотношений $[\hat{H}_f, \hat{H}]=D_{(f)}\hat{H}$, $[\hat{H}_g, \hat{H}]=D_{(g)}\hat{H}$, $[\hat{H}_f, \hat{H}_g]=D_{(f,g)}\hat{H}$ получаем набор нелинейных уравнений

$$v_{zz}-v(c_{zz}/c)=0, \quad 2u_{zz}=(c_{zz}/c)_{\bar{z}z},$$

$$v_{\bar{z}\bar{z}}-v(c_{\bar{z}\bar{z}}/c)=0, \quad 2u_{\bar{z}\bar{z}}=(c_{\bar{z}\bar{z}}/c)_{z\bar{z}}, \quad v=u/c.$$

Нетривиальные решения этих уравнений получаются из условий совместности $\alpha_{z\bar{z}}=\varphi(\alpha)$, где $\alpha=\ln c$, $\varphi(\alpha)=ae^{2\alpha}+be^{-2\alpha}$, $u=\varkappa c^2=\varkappa e^{2\alpha}$, $\varkappa=\mathrm{const}=2a$, $b=\mathrm{const}$.

Для уравнения Лиувилля $\Delta\alpha=e^{-2\alpha}$ имеем $u\equiv 0$. Соотношение $u=\varkappa c^2$ не очевидно из формул теоремы 1. После замены $z\to x'+t=\xi$, $\bar{z}\to x'-t=\eta$ получим

$$\hat{H}\to\hat{H}=\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\xi}-\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}-u.$$

Уравнение $\hat{H}\psi=0$ примет вид

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=i\frac{\partial\psi_1}{\partial x'}+c_1\psi_2, \quad \psi=\psi_1,$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial t}=-i\frac{\partial\psi_2}{\partial x'}+c_2\psi_1, \quad \psi_2=\frac{i}{c_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}, \quad u=-c_1c_2, \quad \alpha=-\ln c_1.$$

В случае $u=\varkappa c^2$ будем иметь $c_1=-c$, $c_2=\varkappa c$ (обратная задача для этого уравнения, если c_1 и c_2 убывают при $|x|\to\infty$, впервые рассматривалась в ([5])).

Отметим, наконец, что, рассматривая асимптотики для ψ вида ($\psi\sim e^{kx+ik^2t}$, $\psi\sim ce^{k'y+ik^2t}$), мы получим аналогичным путем решения уравнения $\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\Delta-a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}-u\right)\psi=0$.

Методы этой работы обобщаются на размерности $n>2$, причем всегда спектральные данные, однозначно определяющие оператор $\hat{H}$, должны задаваться на одной римановой поверхности X.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Академии наук СССР
Черноголовка Московской обл.

Поступило
19 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Ахиезер*, ДАН, т. 141, № 2, 263 (1961). [2] *Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков*, УМН, т. 31, № 1, 92 (1976). [3] *И. М. Кричевер*, ДАН, т. 227, № 2 (1976). [4] *С. В. Манаков*, УМН, т. 31, № 6, 237 (1976). [5] *Л. П. Нижник*, Обратная нестационарная задача рассеяния, Киев, «Наукова думка», 1973.