Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 3, 1978, 20—31.

УДК 517.43

КОММУТАТИВНЫЕ КОЛЬЦА ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. М. Кричевер

В современной теории точных решений уравнений Захарова—Шабата, среди которых содержится ряд фундаментальных уравнений математической физики, большую роль играют коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов.

Коэффициенты операторов такого кольца образуют инвариантное конечномерное пространство, на котором ограничения исходных уравнений могут быть проинтегрированы с помощью методов алгебраической геометрии (см. обзор [10]).

В работах [11] — [13] была получена классификация коммутативных колец дифференциальных операторов от одной переменной, содержащих пару операторов взаимно простых порядков. В последнее время стали известны замечательные работы [2] — [4], забытые в течение длительного времени, в которых уже была (локально по x) получена упомянутая классификация. Однако восстановление коэффициентов коммутирующих операторов было недостаточно эффективным. Например, узловой результат современной теории о том, что уравнения коммутативности являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами с набором полиномиальных интегралов и коэффициенты операторов колец общего положения являются почти периодическими функциями, был неизвестен. Связь коммутативных алгебр со спектральной теорией операторов и с теорией Флоке линейных уравнений с периодическими коэффициентами также целиком является достижением современной теории.

Абстрактно-алгебраическое изложение конструкции автора, предложенное Дринфельдом [5], позволило ему получить интересные результаты, к сожалению, неэффективные,— в проблеме классификации коммутативных колец дифференциальных операторов не взаимно простого порядка, геометрический смысл которых был указан Мамфордом [14].

В обзоре [10] (§ 2, стр. 191—193) была указана идея эффективного аналитического построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков. Сама идея остается верной, но ее реализация в обзоре [10] (стр. 192) содержит существенные ошибки. В настоящей работе они исправляются, и тем самым завершается решение задачи классификации коммутативных колец дифференциальных операторов от одной переменной, отвечающих неособым римановым поверхностям («кольца общего положения»).

В § 1 мы подробнее остановимся на сопоставлении двух подходов к описанию коммутативных алгебр — автора и работ [5], [14].

Методы настоящей работы имеют и другие приложения. Напомним, что для построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных требуется не решение задачи классификации коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов порядков, кратных l, а построение матричного ($l \times l$) аналога многопараметрических функций Бейкера — Ахиезера (см. [10], § 1).

Соответствующие построения были предприняты С. П. Новиковым и автором. Они дают широкий класс решений уравнений Захарова — Шабата, зависящих от функциональных параметров, в частности, уравнения Кадомцева — Петвиашвили

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}-L,\ \frac{\partial}{\partial t}-A\right]=0,$$

где

$$L=\frac{d^2}{dx^2}+u(x,y,t),\qquad A=\frac{d^3}{dx^3}+\frac{3}{2}u\ \frac{d}{dx}+w(x,y,t).$$

Эта работа С. П. Новикова и автора будет опубликована вскоре в журнале «Функциональный анализ и его приложения».

§ 1. Алгебраические «спектральные данные» для коммутативных колец дифференциальных операторов

Рассмотрим систему уравнений Новикова, т. е. систему уравнений на коэффициенты операторов

$$L_1=\sum_{i=0}^{n}u_i(x)\frac{d^i}{dx^i},\qquad L_2=\sum_{i=0}^{m}v_i(x)\frac{d^i}{dx^i},$$

эквивалентную условию коммутации операторов $[L_1, L_2]=0$.

Условимся, для определенности, что коэффициенты операторов являются скалярными функциями. Кроме того, пусть $v_m=u_n=1$, $u_{n-1}=0$. Последние ограничения не являются существенными, поскольку их выполнение можно всегда обеспечить с помощью замены переменной x и подходящего сопряжения $\tilde{L}_1=u(x)L_1u^{-1}(x)$, $\tilde{L}_2=u(x)L_2u^{-1}(x)$.

В основе применимости методов алгебраической геометрии для решения уравнений Новикова лежит следующее утверждение.

Теорема 1.1 (Бурхнал и Чаунди [4]). *Существует полином от двух переменных $Q(w, E)$ такой, что $Q(L_2, L_1)=0$.*

Доказательство. Оператор L_2 на пространстве $\mathcal{L}(E)$ решений уравнения $L_1y=Ey$ задает линейный оператор $L_2(E)$. Его матричные элементы $L_2^{ij}(E)$ в каноническом базисе $c_j(x, E; x_0)$, $\frac{d^i}{dx^i}c_j(x,E;x_0)\big|_{x=x_0}=\delta_{ij}$, $0\leqslant i, j\leqslant n-1$, являются полиномами по E. Пусть $Q(w, E)=\det(w\cdot 1-L_2^{ij}(E))$ — характеристический полином $L_2(E)$. Ядро оператора $Q(L_2, L_1)$ содержит $\mathcal{L}(E)$ при всех E, поэтому оно бесконечномерно. Следовательно, сам оператор нулевой.

Чтобы выяснить вопросы, связанные с компактификацией афинной кривой, заданной уравнением $Q(w, E)$, и поведением совместных собственных функций операторов L_1 и L_2 на бесконечности, введем для каждого оператора росток формальной блоховской функции.

Лемма 1.2. *Существует единственное решение уравнения*

$$L_1\psi(x,k)=k^n\psi(x,k)\tag{1.1}$$

в пространстве формальных рядов вида

$$\psi(x,k)=e^{k(x-x_0)}\left(\sum_{s=N}^{\infty}\xi_s(x)k^{-s}\right)$$

(N — целое) с условиями «нормировки» $\xi_s=0$, $s<0$, $\xi_0(x)=1$, $\xi_s(x_0)=0$, $s>1$. Обозначим его через $\psi(x, k; x_0)$. Любое другое решение такого вида равно $\psi(x,k)=A(k)\psi(x,k;x_0)$, $A(k)=\sum_{s=N}^{\infty}A_sk^{-s}$.

Доказательство этого предложения и ряда его важных следствий, которые мы опускаем, содержится в работе [13].

Оператор L_2 оставляет инвариантным пространство решений уравнения (1.1), поэтому в силу сформулированной леммы $L_2\psi(x, k; x_0) = A(k)\psi(x, k; x_0)$, где $A(k) = k^m + \sum_{s=-m+1}^{\infty} A_s k^{-s}$.

Функции $\psi(x, k_j; x_0)$, $k_j^n = E$, образуют базис в пространстве $\widetilde{\mathscr{L}}(E)$, собственный для оператора $L_2(E)$. Пространство $\widetilde{\mathscr{L}}(E)$ порождено $\psi(x, k_j; x_0)$ над полем лорановских рядов по переменной k^{-1}. В этом пространстве матричные элементы в соответствующем каноническом базисе те же, что и в пространстве $\mathscr{L}(E)$. Следовательно, $Q(w, E) = \prod_{j=0}^{n-1}(w - A(k_j))$.

Если значения ряда $A(k)$ различны для различных корней степени n из E, то кривая $\mathfrak{R}$ неприводима, пополняется в бесконечности одной точкой P_0, в окрестности которой локальным параметром является $E^{-1/n}(P)$. Кроме того, это означает, что при больших, а значит, и при почти всех E собственные значения оператора $L_2(E)$ различны. Поскольку этот случай подробно излагался в предшествующих работах [10], [13], то сразу перейдем к общему.

У ряда $A(k)$ совпадают значения в некоторых корнях степени n из E тогда и только тогда, когда найдется ряд $\widetilde{A}(k)$ такой, что $A(k) = \widetilde{A}(k^l)$. Поскольку старший член $A(k)$ равен k^m, то l является общим делителем n и m.

В этом случае

$$Q(w, E) = \prod_{j=0}^{n-1}(w - A(k_j)) = \prod_{j=0}^{n'-1}(w - \widetilde{A}(\widetilde{k}_j))^l = \widetilde{Q}^l(w, E),$$

где $k_j^n = E$, $\widetilde{k}_j^{n'} = E$, $n'l = n$.

Сохраним обозначение $\mathfrak{R}$ для кривой, заданной уже неприводимым уравнением

$$\widetilde{Q}(w, E) = \prod_{j=0}^{n'-1}(w - \widetilde{A}(\widetilde{k}_j)) = 0.$$

В бесконечности $\mathfrak{R}$ пополняется единственной точкой P_0, в окрестности которой локальным параметром является $E^{-\frac{1}{n'}}(P)$.

Каждой точке P кривой $\mathfrak{R}$, т. е. паре $P = (w, E)$, $\widetilde{Q}(w, E) = 0$, отвечает l-мерное подпространство собственных векторов $L_2(E)$ с собственным значением $w = w(P)$. Выберем в этом подпространстве базис с условиями нормировки

$$\frac{d^i}{dx^i}\psi_j(x, P; x_0)\big|_{x=x_0} = \delta_{ij}, \qquad 0 \leqslant i,\ j \leqslant l-1.$$

Все остальные координаты этих векторов в каноническом базисе $\mathscr{L}(E)$ являются мероморфными функциями $\chi_j^i(P; x_0)$ на кривой $\mathfrak{R}$. Их полюсы совпадают с P_0 и нулями определителя диагонального минора матрицы $w\cdot 1 - L_2(E)$, образованного элементами с индексами $l \leqslant i, j \leqslant n-1$.

Вектор-функции $\chi_j(P; x_0)$ с координатами $\chi_j^i(P; x_0)$ задают в тривиальном l-мерном расслоении над $\mathfrak{R}$ алгебраическое подрасслоение $\eta(x_0)$ размерности l. Оно является, по существу, отправной точкой абстрактно-алгебраического подхода [5]. Как найти зависимость $\eta(x_0)$? При $l = 1$

она определялась дифференциальными уравнениями, и ее свойства играли важную роль в работах [6], [7], [16], [10], [11]. При $l > 1$, как указано в [14], ситуация усложняется. «Возможные» перемещения η, оказывается, накрываются неинтегрируемым l-распределением на пространстве модулей l-мерных пучков над $\mathfrak{R}$ с фиксированным флагом в точке P_0. Вариация точки x_0 определяет касательный к этому распределению путь. На этом исследования работ [5], [14] завершаются.

Метод автора [10] состоит не в описании x_0 вариаций пучка, а в нахождении самих собственных функций $\psi_j(x, P; x_0)$, $x_0 = \text{const}$, обобщающих функции Бейкера — Ахиезера (см. [1], [2], [12], [10], [6]).

Так как базисные функции $c_i(x, E; x_0)$ являются целыми функциями E, то

$$\psi_j(x, P; x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi_j^i(P; x_0)\, c_i(x, E; x_0)$$

мероморфны вне P_0 с дивизором полюсов D, не зависящим от x. (Вообще говоря, D зависит от x_0.)

Рассмотрим матрицу Вронского $\Psi(x, P; x_0)$ для функций $\psi_j(x, P; x_0)$. Матричная функция $\left(\frac{d}{dx}\Psi\right)\Psi^{-1}$ не зависит от выбора базиса ψ_j, поэтому для того чтобы найти ее поведение в окрестности P_0, можно воспользоваться формальными рядами $\psi(x, \tilde{k}_j; x_0)$, $\tilde{k}_j^l = k$, $k^{-1} = k^{-1}(P)$ — локальный параметр в окрестности P_0.

Так как $\psi^{(l)}(x, \tilde{k}_j; x_0)$ однозначно представимо в виде

$$\psi^{(l)}(x, \tilde{k}_j; x_0) = \sum_{s=0}^{l-1} \left(\frac{d^s}{dx^s}\psi(x, \tilde{k}_j; x_0)\right)\lambda_s(x, k),$$

где $\lambda_s(x, k)$ — ряды по переменной k^{-1}, $\lambda_0 = k + \tilde{u}_0(x) + O(k^{-1})$, $\lambda_s = \tilde{u}_s(x) + O(k^{-1})$, $1 \leqslant s \leqslant l-2$, $\lambda_{l-1} = O(k^{-1})$ то

$$\left(\frac{d}{dx}\Psi\right)\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \ldots & 0 & 1 \\ k + \tilde{u}_0, & \tilde{u}_1 & \cdot & \ldots & \tilde{u}_{l-2} & 0 \end{pmatrix} + O(k^{-1}). \tag{1.2}$$

Функции $\tilde{u}_s(x)$ являются дифференциальными полиномами от коэффициентов исходного оператора L_1.

Вернемся вновь к исследованию дивизора D полюсов $\psi_j(x, P; x_0)$. Для почти всех решений уравнений Новикова, т. е. для почти всех коммутативных колец дифференциальных операторов кривая $\mathfrak{R}$ является неособой. Пусть $P_1, \ldots, P_{n'}$ — прообразы точки E при проекции $E: \mathfrak{R} \to C$, $E(P_i) = E$. Для почти всех E они различны. Построим матрицу Вронского $F(x, E; x_0)$ по функциям $\psi_j(x, P_i; x_0)$. Функция $g(x, E; x_0) = (\det F)^2$ не зависит от порядка нумерации точек P_i и, следовательно, корректно определена как функция переменной E.

По условию предпоследний коэффициент оператора L_1 $u_{n-1} = 0$. Значит, вронскиан для любого базиса в $\mathcal{L}(E)$ не зависит от x, поэтому $g(E; x_0) = g(x, E; x_0)$ также не зависит от x. Значения всех производных $\psi_j(x, P; x_0)$ в $x = x_0$ являются рациональными функциями на $\mathfrak{R}$. Следовательно, $g(E; x_0)$ — рациональная функция переменной E. Ее нули совпадают с точками E, для которых собственные значения $L_2(E)$ сливаются. При этом порядок нуля равен $l\nu$, где ν — кратность точки ветвления кривой $\mathfrak{R}$. (Кратность точки ветвления — это число листов $\mathfrak{R}$, сливающихся в точке, минус 1; для кривых общего положения $\nu = 1$.)

Будем предполагать, что все полюсы $\psi_j(x, P; x_0)$ простые, т. е. D — набор несовпадающих точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$. Обозначим через $\varphi_{i,j}(x)$ вычет функции $\psi_j(x, P; x_0)$ в точке γ_i. Тогда полюсы $g(E; x_0)$ совпадают с образами полюсов γ_i и с бесконечно удаленной точкой. При этом кратность полюса $g(E; x_0)$ в образе γ_i равна $2\varkappa_i$ — удвоенному числу линейно независимых функций $\varphi_{i,j}(x)$. Равенство числа нулей и полюсов $g(E; x_0)$ дает соотношение

$$l\sum\nu = 2\sum_{i=1}^{N}\varkappa_i + N_\infty.$$

Используя (1.2), найдем кратность N_∞ полюса $g(E; x_0)$ в бесконечности. Она равна $l(n' - 1)$, где n' — число листов $\mathfrak{R}$ над C.

Обычное выражение рода кривой через кратности точек ветвления $\mathfrak{R}$ дает равенство $\sum\limits_{i=1}^{N}\varkappa_i = lg$, где g — род кривой $\mathfrak{R}$.

Далее мы будем рассматривать случай «общего положения», отвечающий так называемым «стабильным расслоениям», при котором все $\varkappa_i = 1$, т. е. степень дивизора D равна lg, а среди функций $\varphi_{i,j}(x)$ при каждом i лишь одна линейно независимая. Значит, для каждой точки γ_i найдутся $l - 1$ констант $\alpha_{i,j}$ таких, что $\varphi_{i,j}(x) = \alpha_{i,j}\varphi_{i,l-1}(x)$, $0 \leqslant j \leqslant l - 2$ (для дополнения к замкнутому множеству можно считать, что $\varphi_{i,l-1}(x) \neq 0$). Общность положения здесь означает, что указанная компонента имеет максимальную размерность l^2g. Для произвольных наборов $\varkappa_i$ решение обратной задачи может быть получено абсолютно аналогично нашему дальнейшему построению. Покажем, что размерность соответствующей компоненты будет меньше. Соответствующие параметры — это коэффициенты разложения $l - \varkappa_i$ функций по $\varkappa_i$, базисных среди $\varphi_{i,j}$. Размерность равна

$$\sum_{i=1}^{N}(l - \varkappa_i)\varkappa_i + N = l^2g - \sum_{i=1}^{N}\varkappa_i^2 + N < l^2g,$$

если хотя бы одно из чисел $\varkappa_i \neq 1$.

Набор точек γ_i с приписанными векторными кратностями $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i,j})$ является характеристикой так называемых «матричных дивизоров», задаваемых пучками общего положения с фиксированным «оснащением», т. е. набором базисных сечений [17].

Л е м м а 1.3. *Матричный дивизор $D_M = (\gamma_i, \alpha_{i,j})$ и функции $\tilde{u}_0(x)$, $\tilde{u}_1(x), \ldots, \tilde{u}_{l-2}(x)$ однозначно определяют собственные функции операторов $\psi_j(x, P; x_0)$ для почти всех наборов $\alpha_{i,j}$ (принадлежащих дополнению к замкнутому множеству).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы Римана — Роха вытекает, что для любого набора полиномов $q_0(k), \ldots, q_{l-1}(k)$ существует единственная вектор-функция $\chi_0(P), \ldots, \chi_{l-1}(P)$ такая, что все координаты ее имеют простые полюсы в точках γ_i, причем их вычеты $\chi_{i,j}$ связаны соотношением $\chi_{i,j} = \alpha_{i,j}, \chi_{i,l-1}$, а в окрестности P_0 имеют место сравнения $\chi_j(P) \equiv q_j(k) (\operatorname{mod} O(k^{-1}))$. Действительно, размерность пространства вектор-функций, ассоциированных с дивизором D и имеющих заданную сингулярность в окрестности P_0, равна $l(l - 1)g$, что равно числу уравнений на вычеты, которые для открытого множества наборов $\alpha_{i,j}$ можно считать независимыми.

Таким образом, каждая вектор-строка матрицы $\frac{d^s}{dx^s}\Psi\big|_{x=x_0}$ однозначно определяется своими сингулярными частями в окрестности P_0, где $\Psi(x, P; x_0)$ — матрица Вронского функции $\psi_i(x, P; x_0)$. Используя равенство (1.2), искомые сингулярные части $\frac{d^s}{dx^s}\Psi\big|_{x=x_0}$ находим последовательно, что и завершает доказательство леммы.

Обратным образом из полученных сингулярных частей матриц $\frac{d^s}{dx^s}\Psi\big|_{x=x_0}$ находятся производные, а следовательно, и функции $v_0(x), \ldots, v_{l-2}(x)$ такие, что будет иметь место следующее утверждение.

Лемма 1.4. *В окрестности P_0 вектор-функция $\psi(x, P; x_0) = (\psi_0(x, P; x_0), \ldots, \psi_{l-1}(x, P; x_0))$ представима в виде*

$$\psi(x, P; x_0) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right) \Psi_0(x, k; x_0), \quad k = k(P),$$

где $\Psi_0(x, k; x_0)$ — решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\Psi_0(x, k; x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ k + v_0, & \cdot & \cdot & & & & v_{l-2} & 0 \end{pmatrix} \Psi_0(x, k; x_0) \qquad (1.3)$$

с нормировкой $\Psi_0(x_0, k; x_0) = 1$ — единичная матрица.

Значения векторов $\xi_s(x)$ в точке x_0 равны $\xi_0(x_0) = (1, 0, \ldots, 0)$, $\xi_s(x_0) = 0$, $s > 1$.

Кривая $\mathfrak{R}$ называется *спектром* коммутативного кольца A, содержащего операторы L_1, L_2. Функции $\psi_j(x, P; x_0)$ являются собственными для всех операторов из A. Совокупность $\mathfrak{R}$, P_0, матричного дивизора $D_M = (\gamma_i, \alpha_{i,j})$ и функций $v_0(x), \ldots, v_{l-2}(x)$ назовем «*алгебраическими спектральными данными*», однозначно определяющими кольцо A. Задача восстановления A по ним решается в следующем параграфе.

§ 2. Восстановление коммутативных колец дифференциальных операторов по «алгебраическим спектральным данным»

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}$ вектор-функций $\varphi(x, P; x_0)$, имеющих полюсы в произвольном наборе точек γ_i, $1 \leqslant i \leqslant lg$, неособой комплексной кривой $\mathfrak{R}$ рода g и представимых в окрестности выделенной точки P_0 в виде

$$\varphi(x, P; x_0) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right) \Psi_0(x, k; x_0),$$

где $k^{-1} = k^{-1}(P)$ — локальный параметр. Здесь $\Psi_0(x, k; x_0)$ — матрица, определенная в предшествующем параграфе по функциям $v_0(x), \ldots, v_{l-2}(x)$.

Лемма 2.1. *Размерность пространства $\mathcal{L}$ равна $l(l-1)g + l$.*

Доказательство. Пусть Γ — граница малой окрестности P_0. Обозначим через $\mathfrak{R}^+$ и $\mathfrak{R}^-$ внешние и внутренние области, на которые разбивает Γ кривую $\mathfrak{R}$. Вектор-функции $\varphi^+(x, P; x_0) = \varphi(x, P; x_0)$, если $P \in \mathfrak{R}^+$, и $\varphi^-(x, P; x_0) = \varphi(x, P; x_0)\,\Psi_0^{-1}(x, k(P); x_0)$, если $P \in \mathfrak{R}^-$, являются мероморфными функциями в $\mathfrak{R}^+$ и $\mathfrak{R}^-$ соответственно. Следовательно, φ^+ и φ^- являются решением классической краевой задачи Римана

$$\varphi^+(x,\ t;\ x_0) = \varphi^-(x,\ t;\ x_0)\ \Psi_0(x,\ k(t);\ x_0),\ t \in \Gamma, \tag{2.1}$$

$$(\varphi_j) + D \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Условие (2.2) означает, что полюсы всех координат $\varphi_j(x,\ P;\ x_0)$ лежат в точках γ_i.

Верно и обратное утверждение о том, что каждое решение краевой задачи (2.1) — (2.2) дает функцию $\varphi(x,\ P;\ x_0) \in \mathscr{L}$.

Изложим алгоритм решения поставленной краевой задачи, следуя работе [9] (см. также [18]).

Рассмотрим функцию $f(P)$ с полюсами в точках γ_i и с нулем порядка $lg - g$ в точке P_0. Такая функция существует и единственна с точностью до пропорциональности. Обозначим через Ω^+ и Ω^- функции

$$\Omega^+(x,\ P;\ x_0) = f^{-1}(P)\ \varphi^+(x,\ P;\ x_0),$$
$$\Omega^-(x,\ P;\ x_0) = k^{-1}(P)\ \varphi^-(x,\ P;\ x_0).$$

Эти функции являются решением краевой задачи

$$\Omega^+(x,t;x_0) = \Omega^-(x,t;x_0)\ \Psi_0(x,k(t);x_0)\ k(t)\, f^{-1}(t), \qquad t \in \Gamma, \tag{2.3}$$

$$(\Omega_j) \geqslant \Delta. \tag{2.4}$$

Последнее условие означает, что полюсы координат Ω_j лежат в точках $q_1, \ldots, q_g$, являющихся отличными от P_0 нулями $f(P)$, и Ω_j обращаются в нуль в P_0. Дивизор $\Delta = q_1 + \ldots + q_g - P_0$.

Обозначим через $A(p,\ q)\,dp$ мероморфный аналог ядра Коши на $\mathfrak{R}$, обладающий следующими свойствами. Это абелев дифференциал по переменной p и функция по переменной q с полюсами в точках $q_1, \ldots q_g$ и нулем в P_0.

При $p \to q$ выполняется соотношение

$$A(p,q)\,dp = \frac{dp}{p-q} + \text{регулярные члены}. \tag{2.5}$$

Для построения $A(p,\ q)\,dp$ введем базис $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ канонических циклов на $\mathfrak{R}$ с матрицей пересечений $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$, $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$. Пусть $dw_{qq_0}(p)$ — абелев дифференциал третьего рода с нулевыми a-периодами, $\int\limits_{a_i} d\omega_{qq_0}(p) = 0$, с двумя простыми полюсами в точках $p = q$ и $p = q_0$ с вычетами в них $+1$ и -1 соответственно. Этот дифференциал является многозначной аналитической функцией q. Зафиксируем какую-нибудь ее ветвь на $\mathfrak{R}$, разрезанной вдоль циклов a_i. Если dw_i — базис голоморфных дифференциалов на $\mathfrak{R}$, нормированных условием $\int\limits_{a_i} d\omega_k = \delta_{ik}$, то искомый дифференциал $A(p,\ q)dp$ дается формулой (см. [8])

$$\frac{\begin{vmatrix} d\omega_{qq_0}(p) & d\omega_1(p) & \ldots & d\omega_g(p) \\ d\omega_{qq_0}(q_1) & d\omega_1(q_1) & \ldots & d\omega_g(q_1) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ d\omega_{qq_0}(q_g) & d\omega_1(q_g) & \ldots & d\omega_g(q_g) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d\omega_1(q_1) & \ldots & d\omega_g(q_1) \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ d\omega_1(q_g) & \ldots & d\omega_g(q_g) \end{vmatrix}}. \tag{2.6}$$

Из соотношения (2.5) вытекают формулы Сохоцкого — Племеля для предельных значений интегралов типа Коши:

$$\Phi(q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(t)\, A(t, q)\, dt,$$

$$\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(\tau)\, A(\tau, t)\, d\tau, \tag{2.7}$$

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t). \tag{2.8}$$

Пусть $\Omega(x, P; x_0)$ является решением краевой задачи (2.3) — (2.4), тогда

$$\Omega(x, P; x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(x, t; x_0)\, A(t, P)\, dt, \tag{2.9}$$

где $\varphi(x, t; x_0) = \Omega^{+}(x, t; x_0) - \Omega^{-}(x, t; x_0)$. Из формул (2.7) и (2.8) и краевого условия (2.3) вытекает, что $\varphi(x, t; x_0)$ является решением системы сингулярных уравнений

$$\varphi(x, t; x_0)\left[\frac{G+1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(x, \tau; x_0)\, A(\tau, t)\, d\tau\right]\frac{G-1}{2} = 0, \tag{2.10}$$

$$G = \Psi_0(x, t; x_0)\, f^{-1}(t)\, k(t).$$

Наоборот, каждому решению системы (2.10) по формуле (2.8) соответствует решение краевой задачи (2.3) — (2.4). Покажем, что оно единственно. Если $\Omega_1(x, P; x_0)$ — другое решение с тем же скачком $\Omega_1^{+}(x, t; x_0) - \Omega_1^{-}(x, t; x_0) = \varphi(x, t; x_0)$, то вектор $\Omega(x, P; x_0) - \Omega_1(x, P; x_0)$ уже непрерывен на контуре Γ, а следовательно, является мероморфной функцией на $\mathfrak{R}$, каждая компонента которой имеет g полюсов и обращается в нуль в точке P_0. Из теоремы Римана — Роха следует, что каждая компонента ее обязана быть нулевой, т. е. $\Omega(x, P; x_0) = \Omega_1(x, P; x_0)$.

Таким образом, число линейно независимых решений краевой задачи (2.3) — (2.4) равно числу линейно независимых решений системы уравнений (2.10). В силу неспециальности исходных дивизоров оно равно индексу системы уравнений

$$\varkappa = [\arg \det G]_{\Gamma},$$

т. е. приращению аргумента $\det G$ при обходе кривой $\mathfrak{R}$.

Так как $\det \Psi_0 = 1$, то $\varkappa = l\,[\arg, k(t) - \arg f(t)]_{\Gamma}$. Каждый член суммы равен разности числа нулей и полюсов k и f^{-1}, т. е. $\varkappa = l(l-1)g + l$.

Методы решения системы сингулярных уравнений излагаются в [15].

Следствие. *Существует единственная вектор-функция* $\psi(x, P; x_0) \in \mathcal{L}$, *вычеты координат которой* $\varphi_{i,j}(x)$, $0 \leqslant j \leqslant l-1$, *в точках* γ_i *связаны соотношением* $\varphi_{i,j} = \alpha_{i,j}\, \varphi_{i,l-1}$, $0 \leqslant j \leqslant l-2$, *и*

$$\psi(x, P; x_0)\, \Psi_0^{-1}(x, k(P); x_0)\,|_{P=P_0} = (1, 0, \ldots, 0).$$

Здесь $\alpha_{i,j}$ *— набор комплексных чисел общего положения.*

Обозначим через $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}, P_0)$ кольцо мероморфных функций на $\mathfrak{R}$, имеющих единственный полюс в P_0.

Лемма 2.2. *Для любой функции* $E(P) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{R}, P_0)$ *существует единственный оператор* L *степени* ln, *где* n *— порядок полюса* $E(P)$ *в* P_0, *такой, что* $L\psi_i(x, P; x_0) = E(P)\, \psi_i(x, P; x_0)$.

Доказательство. Пусть $\Psi(x, P; x_0)$ — матрица Вронского для функций $\psi_i(x, P; x_0)$. В окрестности P_0 она представима, как следует из определения $\psi_i(x, P; x_0)$, в виде

$$\Psi(x, P; x_0) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x)\, k^{-s}\right) \Psi_0(x, k; x_0).$$

Существует единственный оператор $\bar{L}$ с матричными коэффициентами

$$\bar{L} = \sum_{\alpha=0}^{n} w_\alpha(x) \frac{d^{\alpha l}}{dx^{\alpha l}}$$

такой, что

$$(\bar{L}\Psi)\Psi^{-1} = E(P)\cdot 1 \qquad (\operatorname{mod} O(k^{-1})). \tag{2.11}$$

Если определить матричные функции $\chi_{m,j}(x)$ из равенства

$$\frac{d^j}{dx^j}\Psi_0(x, k) = \left[\sum_{m=0}^{N(j)} \chi_{m,j}(x)\, k^m\right] \Psi_0(x, k), \qquad N(j) = [jl^{-1}],$$

то коэффициенты оператора $\bar{L}$ находятся из системы уравнений $s = -n, \ldots, 0$

$$\sum_{\alpha=0}^{n} w_\alpha \sum_{j=0}^{\alpha l} \sum_{m=0}^{N(j)} C_{\alpha l}^{j} \left(\frac{d^{\alpha l-j}}{dx^{\alpha l-j}}\, \xi_{s+m}\right) \chi_{m,j} = \sum_{\alpha=0}^{n} \varepsilon_\alpha \xi_{s+\alpha},$$

$$E(P) = \sum_{\alpha=0}^{n} \varepsilon_\alpha k^\alpha \,(\operatorname{mod} O(k^{-1})).$$

Рассмотрим оператор со скалярными коэффициентами

$$L = \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{j=1}^{l} w_\alpha^{1j}(x) \frac{d^{\alpha l+j-1}}{dx^{\alpha l+j-1}}.$$

По построению L функции $L\psi_i - E\psi_i$ удовлетворяют всем требованиям, которые определяли ψ_i, кроме одного. Разложение в окрестности P_0 регулярного вектора $[(L - E(P))\,\psi(x, P; x_0)]\,\psi_0^{-1}(x, k(P; x_0)$ начинается с членов порядка $O(k^{-1})$. Из единственности $\psi(x, P; x_0)$ следует, что сравнение (2.11) является точным равенством, т. е. $L\psi_i(x, P; x_0) = E(P)\,\psi_i(x, P)$.

По доказанной лемме каждый набор функций $v_0(x), \ldots, v_{l-2}(x)$ и матричный дивизор $D_M = (\gamma_i, \alpha_{i,j})$ с помощью соответствующих им функций $\psi_j(x, P; x_0)$ задает гомоморфизм λ из кольца $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}, P_0)$ в кольцо линейных дифференциальных операторов.

Суммируя результаты, получим следующую теорему.

Теорема 2.3. *Для любого коммутативного кольца A дифференциальных операторов найдется кривая $\mathfrak{R}$ с отмеченной точкой P_0 такая, что $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}, P_0)$ изоморфно A. Для почти всех колец A кривая $\mathfrak{R}$ неособа. При этом существуют матричный дивизор $(\gamma_i, \alpha_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant lg$, $0 \leqslant j \leqslant l-2$, где g — род кривой $\mathfrak{R}$, и набор функций $v_0(x), \ldots, v_{l-2}(x)$ такие, что образ определенного по ним гомоморфизма λ совпадает с A с точностью до замены переменной $x = f(x')$ и сопряжения некоторой функцией $A = u(x)\operatorname{Im}\lambda\, u^{-1}(x)$. Число l является наибольшим общим делителем порядков операторов из A.*

§ 3. Индуцирование деформации векторных пучков над алгебраическими кривыми

Выше уже говорилось о том, что наш подход к классификации коммутативных колец дифференциальных операторов, в отличие от метода работ [5], [14], не использует вычисления деформаций по x_0 векторного пучка $\eta(x_0)$, заданного координатами совместных собственных функций операторов L_1 и L_2 в каноническом базисе $c_i(x, E; x_0)$ пространства решений уравнений $L_1 y = Ey$ (см. § 1). Тем не менее сама динамическая система с «управляющими параметрами» $u_0(x), \ldots, u_{l-2}(x)$ представляет интерес.

В работах [5], [14] найдено неинтегрируемое слоение (при $l > 1$) на пространстве модулей стабильных пучков ранга l с фиксированным флагом в точке. Следует отметить, что само построение пучка $\eta(x_0)$ фиксирует в нем не флаг, а оснащение, т. е. базис сечений. В пространстве «стабильных» пучков ранга l с фиксированным оснащением существует простая параметризация с помощью матричных дивизоров, т. е. в общем положении — это набор точек γ_i с приписанными «векторными кратностями» $\alpha_{i,\ j} \in \mathbf{C}$, $0 \leqslant j \leqslant l-2$ (см. [17]). В этой параметризации мы найдем слоение, накрывающее слоение на пространстве модулей пучков с флагами, построенное в [5], [14].

Пусть $\psi_s(x, P; x_0)$, $0 \leqslant s \leqslant l-1$, как и раньше, совместные функции операторов L_1 и L_2, отвечающих неособой кривой $\mathfrak{R}$. Эти функции мероморфны вне P_0 с постоянными полюсами в точках $\gamma_i(x_0)$, $1 \leqslant i \leqslant lg$.

Из (1.2) следует, что существует набор рациональных на $\mathfrak{R}$ функций $\chi_j(x, P)$ таких, что

$$\frac{d^l}{dx^l}\psi_s(x, P; x_0) = \sum_{j=0}^{l-1}\chi_j(x, P)\frac{d^j}{dx^j}\psi_s(x, P; x_0). \tag{3.1}$$

В окрестности P_0 эти функции имеют вид

$$\begin{gathered}\chi_0(x, P) = k(P) + u_0(x) + O(k^{-1}),\\ \chi_s(x, P) = u_s(x) + O(k^{-1}),\ 1 \leqslant s \leqslant l-2,\\ \chi_{l-1}(x, P), = O(k^{-1}).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Вне P_0 полюса $\chi_j(x, P)$ совпадают с нулями $\gamma_i(x)$ определителя матрицы Вронского $\Psi(x, P; x_0)$.

Заметим, что из леммы 1.4 и того, что при $l > 1$ $\det \Psi_0(x, k; x_0) = 1$, следует, что $\det \Psi(x, P; x_0)$ — рациональная функция с полюсами в точках $\gamma_i(x_0)$ и нулями в точках $\gamma_i(x)$. Таким образом, дивизоры $D(x_0) = \sum\limits_i \gamma_i(x_0)$ и $D(x) = \sum\limits_i \gamma_i(x)$ эквивалентны. Дивизор $D(x)$ определяет одномерный пучок-детерминант пучка $\eta(x)$. Значит, $\det \eta(x)$ не зависит от x.

Обозначим через $\alpha_{i,j}(x)$ отношения вычетов функций $\chi_j(x, P)$ в точках $\gamma_i(x)$, т. е.

$$\begin{gathered}c_{i,j} = \alpha_{i,j}\, c_{i,\,l-1}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant l-2,\\ \chi_j(x, k) = \frac{c_{i,\,j}(x)}{k-\gamma_i(x)} + d_{i,\,j}(x) + O(k-\gamma_i(x)),\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $k - \gamma_i(x)$ — локальный параметр в окрестности $\gamma_i(x)$.

Так как $\Psi(x, P; x_1) = \Psi(x, P; x_0)\Psi^{-1}(x_1, P; x_0)$, то искомая зависимость от x_0 пучка $\eta(x_0)$ дается зависимостью от x наборов $\gamma_i(x)$, $\alpha_{i,j}\ x)$, если положить $x = x_0$.

Из равенства (3.1) вытекает, что $\chi_{l-1}(x, P) = (\det \Psi)'/\det \Psi$, поэтому соответствующие вычеты $c_{i,l-1}(x)$ равны $c_{i,\,l-1}(x) = -\gamma_i'(x)$. Так как левая часть равенства (3.1) при $P = \gamma_i(x)$ не имеет особенностей, то $\alpha_{i,j}(x)$ являются решениями системы уравнений

$$\sum_{j=0}^{l-2} \alpha_{i,\,j}(x) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_s(x, P; x_0) + \frac{\partial^{l-1}}{\partial x^{l-1}} \psi_s(x, P; x_0) = 0, \tag{3.4}$$

$s = 0, \ldots, l-1$.

Знак $\partial/\partial x$ означает, что при дифференцировании $P = \gamma_i(x)$ считается постоянным.

Продифференцируем эти равенства по x:

$$\sum_{j=0}^{l-2} \alpha_{i,\,j}(x) \frac{\partial^{j+1}}{\partial x^{j+1}} \psi_s(x, P; x_0) + \frac{\partial^l}{\partial x^l} \psi_s(x, P, x_0) + \\ + \gamma_i'(x)\left(\sum_{j=0}^{l-2} \alpha_{i,\,j}(x) \frac{\partial^{j+1}}{\partial x^j\,\partial k} \psi_s(x, k(P); x_0)\right) + \frac{\partial^l}{\partial x^{l-1}\,\partial k} \psi_s(x, k(P); x_0)) + \\ + \sum_{j=0}^{l-2} \frac{d}{dx} \alpha_{i,\,j}(x) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_s(x, P; x_0) = 0; \quad \gamma_i' = \frac{\partial k(P)}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Равенства (3.1), (3.3) дают, что

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} \psi_s(x, P; x_0) = \sum_{j=0}^{l-1} d_{i,\,j}(x) \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_s(x, P; x_0) + \\ + \sum_{j=0}^{l-1} c_{i,\,j}(x) \frac{\partial^{j+1}}{\partial x^j\,\partial k} \psi_s(x, k(P); x_0).$$

Подставляя это выражение в (3.5) и используя то, что $c_{i,j} = -\gamma_i' \alpha_{i,\,j}$, $0 \leqslant j \leqslant l-2$, и $c_{i,\,l-1} = -\gamma_i'(x)$, имеем

$$\left[\sum_{j=0}^{l-2} \alpha_{i,\,j}(x) \frac{\partial^{j+1}}{\partial x^{j+1}} \psi_s + \frac{d}{dx} \alpha_{i,\,j} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_s + d_{i,\,j} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_s\right] + d_{i,\,l-1} \frac{\partial^{l-1}}{\partial x^{l-1}} \psi_s = 0.$$

Следовательно, из того, что решения последней системы пропорциональны исходным решениям $\alpha_{i,j}(x)$ системы уравнений (3.4), получаем

$$\begin{gathered} \alpha_{i,\,0}(d_{i,\,l-1} + \alpha_{i,\,l-2}) = d_{i,\,0} + \frac{d}{dx} \alpha_{i,\,0}, \\ \alpha_{i,\,j}(d_{i,\,l-1} + \alpha_{i,\,l-2}) = d_{i,\,j} + \frac{d}{dx} \alpha_{i,\,j} + \alpha_{i,\,j-1}, \\ 1 \leqslant j \leqslant l-2. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Эти уравнения позволяют построить $(l-1)$-мерное распределение на открытой части пространства наборов γ_i, $\alpha_{i,j}$, т. е. на открытой части произведения $S^{lg}\mathfrak{R} \times C^{l-1}$ симметрической степени кривой и линейного пространства C^{l-1}.

Каждый такой набор по теореме Римана — Роха однозначно определяет набор рациональных функций $\chi_j(P)$ с полюсами в точках γ_i, имеющих в окрестности P_0 вид

$$\chi_0(P) = k(P) + u_0 + O(k^{-1}), \quad \chi_s(P) = u_s + O(k^{-1}), \quad 1 \leqslant s \leqslant l-2, \\ \chi_{l-1}(P) = O(k^{-1})$$

и отношение вычетов которых $c_{i,j}$ в точках γ_i равно $\alpha_{i,j}$ ($\alpha_{i,j}$ — общего положения),

$$\alpha_{i,j}\, c_{i,l-1} = c_{i,j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant l-2.$$

Здесь $u_0, \ldots, u_{l-2}$ — произвольные числа, которые параметризуют слоение. При их фиксированных значениях определим вектор с координатами $\gamma_i' = -c_{i,l-1}$ и $\alpha_{i,j}'$, которые дают равенства (3.6).

Набор функций $u_0(x), \ldots, u_{l-2}(x)$ определяет касательный путь к построенному слоению. Наоборот, каждый такой путь с начальной точкой γ_i; $\alpha_{i,j}$ позволяет восстановить коммутативное кольцо дифференциальных операторов. Действительно, по этим данным строятся функции $\chi_j(x, P)$, а затем функции $\psi_s(x, P; x_0)$, являющиеся решениями уравнения (3.1) с условиями нормировки $\frac{d^i}{dx^i}\psi_s(x, P; x_0)\big|_{x=x_0} = \delta_{is}$.

Эти функции являются совместными собственными функциями искомых операторов. В рамках этого параграфа мы не будем останавливаться на построении по $\psi_s(x, P; x_0)$ самих операторов.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 15 февраля 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов, ДАН СССР **141**, № 2 (1961), 263—266.
2. Baker H. F., Note on the foregoing paper «Commutative ordinary differential operators», Proc. Royal. Soc. London **118** (1928), 584—593.
3. Burchnall J. L., Chaundy T. W., Commutative ordinary differential operators. I, Proc. London Math. Soc. **21** (1922), 420—440.
4. Burchnall J. L., Chaundy T. W., Commutative ordinary differential operators. II, Proc. Royal. Soc. London **118** (1928), 557—583.
5. Дринфельд В. Г., О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец, Функц. анализ **11**, вып. 1 (1977), 15—31.
6. Дубровин Б. А., Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза в классе конечнозонных потенциалов, Функц. анализ **9**, вып. 3 (1975), 41—51.
7. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН **XXXI**, вып. 1 (1976), 55—136.
8. Зверович Э. И., Краевые задачи теории аналитических функций, УМН **XXVI**, вып. 1 (1971), 113—181.
9. Koppelman W., Singular integral equations, baundary value problem and Rieman — Roch theorem, J. Math. and Mech. **10**, № 2 (1961), 247—277.
10. Кричевер И. М., Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений, УМН **XXXII**, вып. 6 (1977), 183—208.
11. Кричевер И. М., Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений, ДАН СССР **227**, № 2 (1976), 291—294.
12. Кричевер И. М., Алгебраические кривые и коммутирующие матричные дифференциальные операторы, Функц. анализ **10**, вып. 2 (1976), 75—77.
13. Кричевер И. М., Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии, Функц. анализ **11**, вып. 1 (1977), 15—31.
14. Mumford D., An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, KdV equation and related non-linear equations, preprint of Harv. Un., 1977.
15. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, М., 1962.
16. Новиков С. П., Периодическая задача Кортевега — де Фриза. I, Функц. анализ **8**, вып. 3 (1974), 54—66.
17. Тюрин А. Н., Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой, Изв. АН СССР, серия матем. **29** (1965), 658—680.
18. Родин Ю. Л., Краевая задача Римана для дифференциалов на римановых поверхностях, Ученые записки Пермск. ун-та **17**, вып. 2 (1960), 83—85.