1978 г. март — апрель *т. XXXIII, вып. 2 (200)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМ. И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 28 сентября 1977 г.

1. В. И. Арнольд «Неравенства Петровского — Олейник и индекс особой точки векторного поля».

Из недавно полученной Д. Эйзенбумом, Г. Левиным и В. Химшиашвили формулы для индекса особой точки векторного поля вытекает следующее обобщение неравенств Петровского — Олейник.

Рассмотрим в действительном пространстве размерности p векторное поле, у которого каждая компонента — однородный многочлен степени k. Тогда индекс особой точки 0 векторного поля не превосходит числа целых точек строго внутри куба $(0,\ k+1)^p$, лежащих на гиперплоскости, перпендиклярной главной диагонали в центре куба.

Эта оценка содержит неравенства Петровского и Олейник как в случае четного, так и в случае нечетного числа измерений. Из точности неравенства Петровского для кривых следует точность этой оценки в трехмерном пространстве. На плоскости оценка также точна; точна ли она в пространствах четырех и более измерений, неизвестно.

В докладе было рассказано об оценках индекса особой точки векторного поля (в частности, градиентного) и о связях этой задачи с неравенствами Петровского — Олейник, с одной стороны, и со смешанными структурами Ходжа особенностей, введенными П. Делинем и Дж. Стинбринком,— с другой.

Заседание 5 октября 1977 г.

1. А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский «Некоторые математические задачи теории колебаний тонких упругих оболочек».

1°. Свободные колебания тонкой упругой оболочки приводят к задаче на собственные значения следующего вида:

$$h^2 N_{ij}u_j + L_{ij}u_j = \lambda u_i \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

$$l_1|_\Gamma = l_2|_\Gamma = n_1|_\Gamma = n_2|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь L_{ij} — дифференциальные операторы не выше второго порядка, N_{ij} — не выше четвертого. Указанные операторы содержат дифференцирования по двум независимым переменным. Их явный вид можно найти, например, в [1] и [2]. Граничные условия (2) определяются характером закрепления оболочки. h — малый параметр — относительная толщина оболочки. Задача (1), (2) является самосопряженной и приводит к дискретному спектру: $0 \leqslant \lambda_1(h) \leqslant \lambda_2(h) \leqslant \ldots$, уходящему в $+\infty$ при каждом $h \neq 0$. Как доказано в [3] (см. также [2], [4]) для функции распределения $n_h(\lambda)$ собственных значений задачи (1), (2) справедлива при $h \to 0$ следующая формула:

$$n_h(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2 h}\left[\iint_G \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\sqrt{\lambda - \Omega(\theta,\alpha,\beta)}\,d\theta\right) dS + O(h^\nu)\right], \tag{3}$$

где $\Omega(\theta, \alpha, \beta)$ — определитель главного символа оператора $L = (L_{ij})$, в (1); $(\xi_1, \xi_2) = |\xi| (\cos\theta, \sin\theta)$. Вопрос о точности O-члена в (3) обсуждается в [2] (стр. 37, 137). Было бы желательно усилить оценку остаточного члена в (3), а в случае разделяющихся переменных найти следующий регулярный член $C(\lambda)\, h^{-1/2}$. Недавно в [5] формулы типа (3) были получены (без оценки остаточного члена) для широкого класса эллиптических задач с тем же характером вырождения.

2°. Показано, что при $h \to 0$ задача (1), (2) вырождается в безмоментную, которая получается, если в (1) и (2) положить $h = 0$ и отбросить последние два граничных условия в (2) (по этому поводу см. [2] и [6]). В последней работе этот факт доказан в общем случае. Вырожденная (безмоментная) задача имеет зоны непрерывного спектра. Они состоят из тех и только тех значений λ, при которых нарушаются условия эллиптичности вырожденной задачи. В этих зонах плотность спектра исходной (моментной) задачи особенно велика. Было бы желательно найти более точные, чем в [2], оценки уклонения вынужденных колебаний, рассчитанных по моментной и безмоментной теориям с учетом внутреннего трения.

3°. Собственные значения $\lambda(h)$ называются сверхнизкими, если $\lambda(h) \to 0$ при $h \to 0$. Исследованию соответствующей важной проблемы посвящены статьи [6] и [7]. Дальнейший анализ сверхнизких частот и соответствующих форм требует значительных усилий.

4°. В случае разделяющихся переменных распределение спектра возникающих одномерных задач проанализировано достаточно полно (см., например, [2], [8]). В этом случае удается найти интересную зависимость числа нулей прогиба от номера собственной формы [9] и исследовать явление внутреннего резонанса в окрестности безмоментного собственного значения [10]. Разложение в обобщенный интеграл Фурье (в эффективной форме) в случае одномерной задачи найдено независимо в [11] и [12]. Аналогичное разложение в случае уравнения Максвелла получено независимо в [13]. Желательно найти эффективное разложение (с описанием структуры собственных функций вырожденной задачи) в двумерном случае.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, М., «Наука», 1976.

[2] А. Г. Асланян, В. Б. Лидский, Распределение собственных частот тонких упругих оболочек, М., «Наука», 1974.

[3] А. Г. Асланян, В. Н. Туловский, Асимптотическое распределение собственных частот упругих оболочек, ДАН **208**:4 (1973), 801—804.

[4] А. Г. Асланян, З. Н. Кузина, В. Б. Лидский, В. Н. Туловский, Распределение собственных частот тонкой упругой оболочки произвольного очертания, ПММ, **37**:4 (1973), 604—617.

[5] А. Б. Алексеев, М. Ш. Бирман, Асимптотика спектра эллиптических граничных задач с разрешимыми связями, ДАН **230**:3 (1976), 505—507.

[6] А. Г. Асланян, Связь моментной задачи с безмоментной в теории колебаний тонких упругих оболочек, МТТ, № 5 (1977), 118—124.

[7] А. Л. Гольденвейзер, Изгибание поверхностей и сверхнизкие частоты колебаний тонких оболочек, МТТ, № 5 (1977), 106—117.

[8] А. Г. Асланян, В. Б. Лидский, Формула для числа частот осесимметричных колебаний оболочек вращения, Дифф. уравн. **8**:8 (1977), 1355—1365.

[9] Д. Г. Васильев, О нулях прогиба в теории оболочек вращения, ДАН **237**:4 (1977).

[10] А. Е. Даин, Н. В. Харькова, С. А. Луковенко, К проблеме внутренних резонансов в теории колебаний тонких оболочек, Препринт № 97, Институт проблем механики АН СССР, М., 1977, 1—52.

[11] Г. Г. Тарпошян, Разложение по собственным функциям безмоментной задачи в случае осесимметричных колебаний тонкой оболочки, Функц. анализ **11**:1 (1977), 83—84.

[12] П. Е. Товстик, М. И. Улитин, О разложении вектор-функций в зоне непрерывного спектра безмоментных уравнений осесимметричных колебаний оболочек вращения, Вестн. ЛГУ, № 1 (1977), 114—119.

[13] А. Л. Крылов, Е. Н. Фёдоров, О собственных колебаниях ограниченного объема замагниченной холодной плазмы, ДАН 231:1 (1976), 68—70.

Заседание 12 октября 1977 г.

1. И. М. Кричевер «Рациональные решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили».

В докладе излагается процедура интегрирования уравнения Кадомцева — Петвиашвили

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\right)=0$$

в классе рациональных по переменной x функций $u(x, y, t)$, убывающих при $x\to\infty$

Это уравнение относится к классу так называемых уравнений Захарова—Шабата, т. е. уравнений на коэффициенты операторов $L_1=\sum_{i=0}^{n} u_i(x, y, t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}$, $L_2=\sum_{i=0}^{m} v_i(x, y, t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}$, эквивалентных операторному уравнению $\left[L_1-\frac{\partial}{\partial y},\ L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right]=0$. В частности, если $L_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x, y, t)$, а $L_2=\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+\omega(x, y, t)$, то эти уравнения имеют вид $\frac{3}{2}(u_y+u_{xx})=2\omega_x$, $\omega_y-u_t=\omega_{xx}-\frac{3}{2}uu_x-u_{xxx}$. Исключая из этой системы ω, получаем для u уравнение Кадомцева—Петвиашвили (КП

Теорема 1. *Функция $u(x, y, t)$ является рациональным по x решением уравнения КП, убывающим при $x\to\infty$, тогда и только тогда, когда $u=-2\sum_{j=1}^{N}(x-x_j(y, t))^{-2}$ и найдется функция*

$$\psi(x, y, t, k)=\left(1+\sum_{j=1}^{N}a_j(k, y, t)(x-x_j(y, t))^{-1}\right)e^{kx+k^2y+k^3t} \tag{1}$$

такая, что для приведенных выше операторов выполняются равенства $\left(L_1-\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi=\left(L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=0$, *где*

$$\omega(x, y, t)=\sum_{j=1}^{N}\left[3(x-x_j(y, t))^{-3}+\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y}x_j(y, t)(x-x_j(y, t))^{-2}\right].$$

Условие существования у нестационарного уравнения Шрёдингера решений вида (1) эквивалентно утверждению

Следствие 1. *Динамика полюсов $x_j(y, t)$ рациональных решений уравнения КП по переменной y совпадает с динамикой мозеровской системы частиц с гамильтонианом*

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}p_j^2+2\sum_{i<j}(x_i-x_j)^{-2}.$$

В работе [1] была показана полная интегрируемость этой гамильтоновой системы, т. е. был найден набор N интегралов H_k в инволюции $H_2=H$.

Следствие 2. *Динамика полюсов по переменной t совпадает с гамильтоновым потоком, соответствующим интегралу H_3.*

Таким образом, уравнения на полюса $x_j(y, t)$ рациональных решений уравнения КП эквивалентны уравнениям двух коммутирующих гамильтоновых потоков. Решения с N полюсами, где N — любое, задаются точками фазового пространства $x_j(0, 0)$ и $\frac{\partial}{\partial y} x_j(0, 0)$. Мы укажем другой набор $2N$ параметров, через которые $u(x, y, t)$ выражаются явно.

Впервые связь движения полюсов рациональных решений уравнения КдФ и движения гамильтоновой системы частиц была обнаружена в работе [2].

Функция $\psi(x, y, t, k)$, существование которой утверждает теорема 1, может быть преобразована к виду

$$\psi(x, y, t, k) = \left(1 + \frac{q(x, y, t, k)}{q_1(k)}\right) e^{kx+k^2y+k^3t},$$

где $q_1(k)$ и $q(x, y, t, k)$ — полиномы по k степеней N и не выше $N-1$ соответственно.

Лемма. *Для почти всех решений $u(x, y, t)$ найдутся N различных точек $\varkappa_s$ таких, что* $\frac{\partial}{\partial k}\psi(x,y,t, k)|_{k=\varkappa_s} = 0$.

Полином $q_1(k)$ и набор точек однозначно определяют функцию $\psi(x, y, t, k)$ и позволяют однозначно восстановить $u(x, y, t)$.

Теорема 2. *Почти все рациональные решения $u(x, y, t)$ уравнения КП, убывающие при $x \to \infty$, даются формулой* $u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\theta$, *где матричные элементы равны*

$$\theta_{si} = (x + 2\varkappa_s y + 3\varkappa_s^2 t)\varkappa_s^i + i\varkappa_s^{i-1} - \varkappa_s^i\left(\frac{\partial}{\partial k}\ln q_1(k)\,\Big|_{k=\varkappa_s}\right).$$

Здесь «почти все» означает, что найдено $2N$-мерное многообразие решений, из которого выкинуты точки, соответствующие совпадающим: $\varkappa_i = \varkappa_j$, $i \neq j$.

Аналогично, если заменить в показателе экспоненты у ψ k^2 и k^3 на произвольные полиномы $Q(k)$ и $R(k)$, то получаются рациональные решения общих уравнений Захарова — Шабата.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Moser, Three integrable hamiltonian systems connected with isospectrum deformations, Adv. Math. 16 (1976), 354.

[2] H. Airault, H. McKean, J. Moser, Rational and elliptic solutions of the Korteweg de Vries equation and a related many body problem, preprint of Kurant ins. 1976.

Заседание 19 октября 1977 г.

1. А. Н. Варченко «Асимптотики осциллирующих интегралов».

В докладе был дан обзор результатов о связи асимптотического поведения интегралов вида

$$\int e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx$$

при $\tau \to \infty$ с различными алгебраическими характеристиками критических точек функции $f(x)$.

Заседание 26 октября 1977 г.

1. Р. Л. Добрушин «Динамика бесконечных систем механических частиц».

Предметом статистической механики является исследование систем из очень большого числа взаимодействующих частиц. При математическом описании этой ситуации удобно переходить к рассмотрению бесконечных систем частиц. В равновесной статистической механике оправдал себя подход, при котором состояние системы описывается вероятностной мерой в пространстве локально-конечных (т. е. имеющих конечное пересечение с любым ограниченным множеством) конфигураций одинаковых неразличимых частиц.