И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Голоморфные расслоения и нелинейные уравнения. Конечнозонные решения ранга 2, *Докл. АН СССР*, 1979, том 247, номер 1, 33–37

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н.Н. Яненко,* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, "Наука", 1967. [2] *А.А. Самарский,* Введение в теорию разностных схем, М., "Наука", 1971. [3] Численное исследование современных задач газовой динамики, М., 1974. [4] *W.R. Briley, H.McDonald,* J. Comp. Phys., v. 24, № 4, 372 (1977). [5] *Н.Н. Яненко, В.М. Ковеня,* ДАН, т. 232, № 6, 1273 (1977).

УДК 513.835 МАТЕМАТИКА

И.М. КРИЧЕВЕР, член-корреспондент АН СССР С.П. НОВИКОВ

ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА 2

I. Хорошо известна теория конечнозонных решений пространственно одномерного уравнения Кортевега – де Фриза (К.д.Ф) (см. обзор ([1])) и его аналогов типа уравнений sine-Gordon, цепочки Тода и др. Эти решения естественным образом связаны с теорией одномерных (слой C^1) голоморфных расслоений. Поэтому будем далее называть эти решения конечнозонными ранга 1. Семейство конечнозонных решений ранга 1 для пространственно двумерного К.д.Ф (уравнения Кадомцева – Петвиашвили (К.П.)) было найдено в ([2]).

В недавних работах авторов ([3,4]) выявлены новые перспективы метода обратной задачи, связанные с применением голоморфных векторных расслоений (слой C^l) над римановыми поверхностями (алгебраическими кривыми). Эти работы посвящены следующим задачам:

а) Поставленной в 20-х годах проблеме эффективной классификации и вычисления коэффициентов коммутирующих обыкновенных линейных дифференциальных операторов, порядки которых делятся на l ([5]). Связь этой задачи с l-мерными расслоениями весьма просто и естественно вытекает из результатов ([2,6]). На неэффективном абстрактно-алгебраическом уровне некоторый язык классификации обсуждался в ([7,8]), аналитические конструкции даны в ([3]). В настоящей работе впервые получены явные формулы для коэффициентов коммутирующих операторов порядков 4 и 6, которые не сводятся к случаю ранга 1 (см. теорему 3).

б) Проблеме построения новых широких классов (зависящих от $l-1$ произвольных функций одной переменной) точных решений двумерного уравнения К.д.Ф. (К.П.) и в дальнейшем для других пространственно-двумерных уравнений математической физики, допускающих коммутационное представление. "Скрытая", но, по-видимому, фундаментальная связь этой задачи с голоморфными расслоениями была обнаружена авторами в ([4]).

II. Напомним результаты работ ([3,4]). Алгебро-геометрическим объектом является голоморфное расслоение η ранга l, т.е. расслоение со слоем C^l, базой которого является алгебраическая кривая Γ рода g, причем детерминант $\det\eta$ имеет степень lg. "Оснащением" называется набор голоморфных сечений $(\xi_1,\ldots,\xi_l)$, которые в случае общего положения зависимы в наборе различных точек $\gamma_1,\ldots,\gamma_{lg}\in\Gamma$. Пусть эта линейная зависимость имеет вид

$$(1)\qquad \xi_l(\gamma_j)=\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_{ij}\xi_i(\gamma_j),\qquad j=1,\ldots,lg.$$

Набор (γ_j,α_{ij}) будем называть параметрами Тюрина, определяющими голоморфное векторное расслоение, стабильное в смысле Мамфорда ([9]).

Эти же параметры возникают в "одежде" классического анализа. Следуя ([4]), введем многопараметрический вектор Бейкера – Ахиезера $\psi = \{\psi_s(x_1, \ldots, x_q; P; x_{10}, \ldots, x_{q0})\}$; $1 \leqslant s \leqslant l$, где $P \in \Gamma$, x_i и x_{i0} – числовые параметры. Эта вектор-функция задается требованиями:

1) все координаты ψ_s мероморфны на Γ вне P_0;

2) полюса всех ψ_s не зависят от $(x_1, \ldots, x_q)$, лежат в точках $\gamma_1(x_0), \ldots, \gamma_{lg}(x_0)$ и имеют порядки 1;

3) вычеты ψ_{sj} компонент $\psi_s(x, P, x_0)$ вектор-функции Бейкера – Ахиезера в полюсах γ_j все пропорциональны вычету φ_{lj} с коэффициентами $\alpha_{sj}(x_0)$, не зависящими от $x = (x_1, \ldots, x_q)$

$$\varphi_{sj}(x, x_0) = \alpha_{sj}(x_0)\varphi_{lg}(x, x_0); \tag{2}$$

4) при $P \to P_0$ вектор-функция $\psi = \{\psi_s\}$ представима в виде

$$\psi = (\xi_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s k^{-s})\Psi_0(x, k; x_0), \tag{3}$$

где $\xi_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\xi_s = \xi_s(x, x_0)$ – векторы-строки, $z = k^{-1}(P)$ – локальный параметр в окрестности P_0. $(l \times l)$-матрица Ψ_0 задается исходя из следующих требований: матрицы

$$A_i(x, k) = \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_i} \Psi_0^{-1}, \qquad i = 1, \ldots, q, \tag{4}$$

полиномиальны по k; они удовлетворяют уравнениям совместности

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = [A_j, A_i]; \tag{5}$$

кроме того, $\Psi_0(x_0, k; x_0) = 1$.

Указанные аналитические свойства однозначно определяют вектор-функцию $\psi(x, P, x_0)$, которая тем самым однозначно задается величинами $A_i, \Gamma, P_0, \gamma_j, \alpha_{ij}$.

Для одной переменной $q = 1$ такая вектор-функция построена в ([3]), где установлено, что при определенном выборе $A_1(x, k)$ компоненты вектор-функции $\psi(x, P, x_0)$ являются собственными функциями обыкновенных линейных дифференциальных операторов. При этом они отвечают одним и тем же собственным значениям, которые тем самым оказываются l-кратно вырожденными; порядки операторов кратны l.

Авторами (([4]), § 3) было показано, что можно построить вектор-функцию Бейкера – Ахиезера ψ, зависящую от $q = l(g + 1) - 1$ параметров $x_1, \ldots, x_q$. Вероятно, что это число q максимально возможное. Размерность пространства модулей оснащенных расслоений равна $l^2 g$, где q – род Γ. При $l > 1$ имеем всегда $q < l^2 g$. Отсюда следует, что можно построить q-параметрические коммутативные группы преобразований пространства модулей, орбиты которых уже не являются торами при $l > 1$. Следовательно, задача не сводится к θ-функциям. Таким образом, при $l > 1$ вычисление ψ требует решения системы сингулярных интегральных уравнений на окружности, следуя ([3]).

В работе ([4]) авторы показали, что A_1, A_2, A_3 в важном случае $q = 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = t$ могут быть выбраны так, что вектор-строка ψ аннулируется скалярными операторами, вид которых не зависит от l:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\psi = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y} - L\right)\psi = 0; \tag{6}$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u, \qquad A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2} u \frac{\partial}{\partial x} + w.$$

Следовательно, верно уравнение совместности

$$(7)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}-A,\ \frac{\partial}{\partial y}-L\right]=0.$$

Тем самым коэффициенты $u(x,y,t)$ и $w(x,y,t)$ удовлетворяют уравнению К.П.

$$0=\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+6u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right);$$

$$\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Определение. Построенные решения u, w назовем конечнозонными решениями рода g и ранга l.

III. Ввиду невозможности упростить вычисление ψ для неособых кривых рода $g \geqslant 1$ разовьем методы вычисления решений, не требующие предварительного вычисления вектора Бейкера – Ахиезера.

Лемма 1. *Параметры Тюрина* (γ_j, α_{ij}), *как функции от* $x_0=(x_{10},\dots,x_{q0})$, *подчиняются совместному набору дифференциальных уравнений по переменным* x_{10}, *правые части которых алгебраическим образом определяются через* γ_j, α_{ij}, *кривую* Γ, *точку* P_0 *и коэффициенты разложения по* $k^{-1}=z$ *матриц* $B_i(x,P)$ *в точке* P_0, *где* $B_i=\hat\Psi_{x_i}\hat\Psi^{-1}$, $\hat\Psi$ – *матрица Вронского для* ψ.

Алгоритм вычисления правых частей можно извлечь из ([3]), § 3 и ([4]), § 3. В последней работе эти правые части в случае $g=1$, $l=2$ были выписаны в излишне сложной форме и с некоторыми ошибками в знаках. Имеет место следующая

Лемма 2. *Пусть* $g=1$, $l=2$ *и матрицы* A_1, A_2, A_3 *выбраны в виде* ([4]), § 1, *пример* 1. *Тогда величины* $\gamma(x_0)$, $\alpha(x_0)$ *удовлетворяют следующей системе уравнений*:

$$\gamma_{ix}=(-1)^i(\alpha_2-\alpha_1)^{-1},\qquad \alpha_{ix}=\alpha_i^2+u+(-1)^i\Phi(\gamma_1,\gamma_2,P_0),$$

$$(8)\qquad \gamma_{iy}=1,\qquad \alpha_{iy}=-v(x,y,t),$$

$$\gamma_{it}=(-1)^{i+1}(\alpha_1\alpha_2+u/2)(\alpha_2-\alpha_1)^{-1},$$

где произведена замена $x_{10}=x_0\to x$, $x_{20}=y_0\to y$, $x_{30}=t_0\to t$, $\alpha_{11}\to\alpha_1$, $\alpha_{21}\to\alpha_2$. *Величина* $u(x,y,t)$ *удовлетворяет уравнению Кадомцева – Петвиашвили в силу* (7) *и* $2v_x=u_y$. *Функция* $\Phi(\gamma_1,\gamma_2,P_0)$ *имеет вид*

$$(9)\qquad \begin{gathered}\Phi(\gamma_1,\gamma_2,P_0)=\zeta(\gamma_2-\gamma_1)+\zeta(P_0-\gamma_2)-\zeta(P_0-\gamma_1),\\ \frac{d\zeta(z)}{dz}=-\wp(z),\ \zeta(-z)=-\zeta(z),\quad (\wp'(z))^2=4\wp^3+g_2\wp+g_3,\end{gathered}$$

$\wp(z)$ – $\wp$-*функция Вейерштрасса* ([10]).

Введем обозначения: $\gamma_1=y+c(x,t)$, $\gamma_2=y-c(x,t)+c_0$; $c_0=\mathrm{const}$, $\alpha_1-\alpha_2=z(x,t)$, $\alpha_1+\alpha_2=w(x,y,t)$, $\Phi=\Phi(y,c,c_0)$.

Из теорем сложения для эллиптических функций ([10]) следует, что величина $Q=\partial\Phi/\partial c+\Phi^2$ не зависит от y. Уравнения (8) приобретут вид

$$c_x=z^{-1},\ z_x=zw-2\Phi(y,c,c_0),\ c_y=z_y=0,\ c_t=\frac{1}{2z}(z^2-\varphi);$$

$$(10)\qquad u(x,y,t)=-\alpha_1^2-\alpha_2^2+\varphi(x,t)=-\frac{z^2+w^2}{2}+\varphi(x,t);$$

$$w_x=-\frac{z^2+w^2}{2}+2\varphi(x,t).$$

Подставляя в уравнение для w_x выражение $w = (\ln z)_x + 2\Phi z^{-1}$, получим

$$\varphi(x, t) = \frac{1 + 3c_{xx}^2}{4c_x^2} + Qc_x^2 - \frac{1}{2}\frac{c_{xxx}}{c_x},$$

(11) $$u(x, y, t) = -\frac{1}{4c_x^2} + \frac{1}{4}\frac{c_{xx}^2}{c_x^2} + 2\Phi c_{xx} + c_x^2(\Phi_c - \Phi^2) - \frac{1}{2}\frac{c_{xxx}}{c_x},$$

$$c_t = \frac{3}{8c_x}(1 - c_{xx}^2) - \frac{1}{2}Qc_x^3 + \frac{1}{2}c_{xxx}.$$

Из работы ([4]) следует, что уравнение по t для $c(x, t)$ "скрыто" изоморфно К.д.Ф., но явное построение этого изоморфизма не осуществлено.

Т е о р е м а 1. *Ограниченные и гладкие по x неособые решения уравнения* (11) *такие, что $c_x = z^{-1} \neq 0$ и $z \neq 0$, порождают периодические по y и ограниченные по x неособые решения $u(x, y, t)$ уравнения К.П. Если функция $c(x, t)$ зависит только от $x + at$, то решение $u(x, y, t)$ уравнения К.П. зависит от $(x + at, y)$. Для $g = 1$, $l = 2$ все решения К.П. нетривиально зависят от x, y.*

Рассмотрим вопрос о неособых периодических решениях вида $u(x + at, y)$ для $g = 1$, $l = 2$. Из предыдущего вытекает, что для этого нужно найти периодическое решение уравнения (11), где $c = c(x + at)$, причем $c_x \neq 0$, $z = c_x^{-1} \neq 0$ для всех x. Примем c за независимую переменную и сделаем подстановку $z = h^{-2}(c)$. Тогда уравнения (11) приобретут вид

(12) $$h'' = \frac{d^2 h}{dc^2} = -\frac{\partial W(h, c)}{\partial h}, \qquad W = -\tfrac{1}{2}Q(c, c_0)h^2 + ah^{-2} - \tfrac{1}{8}h^{-6},$$

$Q(c, c_0) = \Phi_c + \Phi^2$ — эллиптическая функция. Качественный анализ приводит к следующим выводам.

Т е о р е м а 2. а) *Неособое периодическое решение уравнения К.П. рода $g = 1$ ранга $l = 2$, имеющее вид $u(x + at, y)$ при $a \leqslant 0$, существует, если и только если уравнение $h'' = Qh$ имеет решение без нулей.*

б) *Для достаточно больших $a > 0$ всегда имеется неособое периодическое решение типа кноидальной волны уравнения К.П. рода $g = 1$, ранга $l = 2$. Оно периодично по x, y, t. Вычисление этих решений сводится к нахождению периодических не обращающихся в нуль положительных решений $h \neq 0$ уравнений* (12).

IV. Для одной переменной $q = 1$ в случае рода $g = 1$ и ранга $l = 2$ решение уравнений (8) по x приводит, используя ([3]), к явному вычислению нетривиальных обыкновенных коммутирующих операторов L_4, L_6 порядков 4 и 6.

Т е о р е м а 3. *Оператор L_4 ранга 2 имеет вид (см. формулы (11)):*

$$L_4 = L^2 - c_x[\wp(c + c_0) - \wp(c + c_1)]\frac{d}{dx} - \wp(c + c_0) - \wp(c + c_1),$$

где $L = d^2/dx^2 + u(x)$. Оператор L_6 связан с L_4 алгебраическим соотношением

$$L_6^2 = 4L_4^3 + g_2 L_4 + g_3, \qquad L_6 = 2L^3 + D,$$

где D — оператор третьего порядка.

Более сложен анализ для $g = 1$ и $l = 3$. Соответствующие результаты будут опубликованы.

Институт теоретической физики
им. Л.Д. Ландау
Академии наук СССР
Москва

Поступило
29 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б.А. Дубровин, В.Б. Матвеев, С.П. Новиков,* УМН, т. 31, № 1, 92 (1976). [2] *И.М. Кричевер,* ДАН, т. 227, № 2 (1976). [3] *И.М. Кричевер,* Функц. анализ и его прилож., т. 12, в. 3 (1978). [4] *И.М. Кричевер, С.П. Новиков,* там же, т. 12, в. 4 (1978). [5] *J.L. Burchnall, T.W. Chaundy,* Proc. London Math. Soc., v. 21, 420 (1922). [6] *И.М. Кричевер,* Функц. анализ и его прилож., т. 11, в. 1 (1977). [7] *В.Г. Дринфельд,* там же, т. 11, в. 1 (1977). [8] *D. Mamford,* An Algebro-geometric Constraction of Commuting Operators, Preprint of Harvard Univ., 1977. [9] *А.Н. Тюрин,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, № 4 (1965). [10] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи,* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, М., "Наука", 1967.

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

Б.С. ПАВЛОВ

БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ И УСЛОВИЕ МАКЕНХОУПТА

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 10 I 1979)

Геометрические свойства семейств экспонент $\{\exp(-i\overline{k_n}x)\}$ удобно описывать в терминах порождающей целой функции F, которая обращается в нуль в точках k_n: $F(k_n) = 0$ (см. ([1])). Так, наиболее известным условием базисности семейств экспонент на конечном промежутке в терминах порождающей функции является условие Б.Я. Левина – В.Д. Головина (см., например, ([2])), усиленное впоследствии В.Э. Кацнельсоном (личное сообщение):

П р е д л о ж е н и е (В.Э. Кацнельсон). *Если корни целой функции F лежат в некоторой полосе $|\mathrm{Im}\, k| < \alpha$ и отделимы, а сама функция имеет экспоненциальный тип a, ограничена в полуплоскости $\mathrm{Im}\, k > 0$ и удовлетворяет на вещественной оси условию $|F(k)| \asymp |k|^\alpha$, $-1/2 < \alpha < 1/2$ то семейство экспонент $\{\exp(-i\overline{k}_n x)\}$ образует базис Рисса в $L_2(0,a)$.*

Точность этого условия доказана С.А. Авдониным (см. ([3])).

Автору принадлежит "геометрическое" доказательство теоремы Левина–Головина, сводящее вопрос о базисности семейства $\{\exp(ik_n x)\}$ в $L_2(0,a)$ к более простому вопросу о базисности семейства рациональных дробей $\{(k - \overline{k}_n)^{-1}\}$ в своей линейной оболочке (см. ([4])). Попытки получить на том же пути доказательство теоремы В.Э. Кацнельсона привели к описываемому ниже критерию базисности семейства экспонент (теорема 1).

Сделаем ряд предварительных замечаний с целью конкретизации класса рассматриваемых семейств. Во-первых, условие "почти-нормированности" всякого базиса Рисса $\{\varphi_n\}$, $|\varphi_n| \asymp 1$, сразу ограничивает наши рассмотрения семейством экспонент, показатели которых лежат в полосе конечной ширины $|\mathrm{Im}\, k| < \alpha$.

Во-вторых, имея в виду ограниченность и обратимость в $L_2(0, a)$ оператора умножения на $\exp(\alpha x)$, мы можем еще сузить рассматриваемый набор семейств, считая, что их показатели удовлетворяют требованию $0 \leqslant \delta \leqslant \mathrm{Im}\, k_n \leqslant 2\alpha + \delta$. Теперь условие минимальности сразу влечет отделимость множества показателей $\inf|k_n - k_m| = d > 0$; действительно, $0 < \gamma^2 = \inf|\varphi_n - \sum\limits_{m \neq n} \alpha_n^m \varphi_m|^2 \leqslant \int_0^a |\exp(ik_n x) - \exp(ik_m x)|^2\, dx \leqslant \exp 2\delta a \int_0^a |1 - \exp i(k_n - k_m)x|^2\, dx$.

Наконец, устраним неоднозначность ([8]) в выборе порождающей функции, предполагая, что она имеет тип a и допускает факторизации

$$F = \Pi F_e^+ = \theta F_e^-, \tag{1}$$