

И. М. Кричевер

О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЗАХАРОВА-ШАБАТА
В ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ N ЧАСТИЦ НА ПРЯМОЙ

Основной целью настоящей работы является построение всех убывающих при $x \rightarrow \infty$ рациональных решений уравнения Кадомцева - Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4} (6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}) \right) = 0.$$

Это уравнение, описывающее квазиодномерные волны в слабо диспергирующей среде, было впервые получено в работе [1]. Оно относится к типу так называемых уравнений Захарова-Шабата, т.е. уравнений на коэффициенты операторов

$$L_1 = \sum_{i=0}^n u_i(x, y, t) \frac{\partial^i}{\partial x^i}, \quad L_2 = \sum_{i=0}^m v_i(x, y, t) \frac{\partial^i}{\partial x^i},$$

эквивалентных операторному уравнению

$$[L_1 - \frac{\partial}{\partial y}, L_2 - \frac{\partial}{\partial t}] = 0 \quad ([2]).$$

В частности, если

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, y, t), \quad \text{а} \quad L_2 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2} u \frac{\partial}{\partial x} + w(x, y, t),$$

то соответствующие уравнения Захарова-Шабата имеют вид

$$\frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Исключая из этой системы $w(x, y, t)$, мы приходим к уравнению КП ([3]).

Известна процедура построения точных квазипериодических решений этого уравнения методами алгебраической геометрии [4], [5]. В работе [6] было показано, что уравнения на коэффициенты набора линейных дифференциальных операторов от n -переменных, эквивалентные условию их коммутации, сводятся к задачам алгебраической геометрии, если число операторов в этом наборе равно $n+1$.

Последнее утверждение относится к локальным решениям указанных уравнений. В настоящей работе показано, что класс точно интегрируемых решений уравнений Захарова-Шабата может быть выделен нелокальными требованиями на рассматриваемые функции - требованием рациональности получающихся решений. Следует отметить, что такой нелокальной была постановка задачи С.П.Новиковым [7], который доказал полную интегрируемость уравнения $Kg\Phi$ в классе квазипериодических функций с конечным числом запрещенных зон, у соответствующих им операторов Штурма-Лиувилля.

Используя метод обратной задачи теории рассеяния, широкий класс неособых рациональных решений уравнения КП был найден в работе [8].

Предлагаемый способ интегрирования уравнения КП в поле рациональных функций позволяет идентифицировать движения полюсов получающихся функций с движением системы N частиц на прямой с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j^2 + 2 \sum_{i < j} (x_i - x_j)^{-2}$ и с потоками, заданными "высшими гамильтонианами", найденными при интегрировании исходной системы в работе [9]. Таким образом теория мозеровской гамильтоновой системы вкладывается в теорию алгебро-геометрических решений уравнений Захарова-Шабата, как теория специальных решений. Впервые связь между движением полюсов рациональных решений уравнения $Kg\Phi$ и движением дискретной системы была обнаружена в работе [10], стимулировавшей дальнейшие исследования в этой области.

§ I. Рациональные решения уравнения

Кадомцева-Петвиашвили

Пусть $u(x, y, t)$ решение уравнения КП, рационально зависящее от переменной x и убывающее при $x \rightarrow \infty$. Оказывается апостериори, что при этом $u(x, y, t)$ будет рациональной функцией всех своих аргументов.

Разлагая $u(x, y, t)$ в лорановский ряд в окрестности ее полюса $x_j(y, t)$, подставляя его в уравнение КП и сравнивая два главных сингулярных члена у всех слагаемых левой части легко получить, что

$$u(x, y, t) = -2 \sum_{j=1}^N (x - x_j(y, t))^{-2}.$$

ТЕОРЕМА I.1. Функция $u(x, y, t)$ является рациональным по переменной x решением уравнения КП, убывающим при тогда и только тогда, когда $u(x, y, t) = -2 \sum_{j=1}^N (x - x_j(y, t))^{-2}$ и найдется функция $\psi(x, y, t, k)$ вида

$$\Psi(x, y, t, \kappa) = \left(1 + \sum_{j=1}^N \frac{a_j(y, t, \kappa)}{x - x_j(y, t)}\right) e^{\kappa x + \kappa^2 y + \kappa^3 t} \quad (I.1)$$

такая, что $L_1 \Psi = \frac{\partial}{\partial y} \Psi$, $L_2 \Psi = \frac{\partial}{\partial t} \Psi$,

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, y, t), \quad L_2 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2} u \frac{\partial}{\partial x} + w(x, y, t),$$

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^N \left[3(x - x_j(y, t))^{-3} + \frac{3}{2} (x - x_j(y, t))^{-2} \frac{\partial}{\partial y} x_j(y, t) \right].$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы сформулируем лемму, позволяющую идентифицировать динамику по y полюсов $x_j(y, t)$ с движением мозеровской системы частиц.

ЛЕММА I.2. Нестационарное уравнение Шредингера

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^N \frac{2}{(x - x_j(y))^2}\right) \Psi = 0 \quad (I.2)$$

тогда и только тогда имеет решение $\Psi(x, y, t)$ вида I.1 (где t надо считать фиксированным параметром), когда для матриц T и Λ

$$\Lambda_{jk} = p_j \delta_{jk} + \frac{2(1 - \delta_{jk})}{x_j - x_k}, \quad p_j = \frac{\partial}{\partial y} x_j,$$

$$T_{jk} = \frac{2(1 - \delta_{jk})}{(x_j - x_k)^2} - 2\delta_{jk} \left(\sum_{s \neq j} \frac{1}{(x_j - x_s)^2} \right),$$

выполняется матричное уравнение $\left[\frac{\partial}{\partial y} - T, \Lambda\right] = 0$. (I.3)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя выражения для Ψ в левую часть равенства I.2, получим, что оно преобразуется к виду

$$\left(\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{(x - x_j)^2} - \frac{\beta_j}{x - x_j}\right) e^{\kappa x + \kappa^2 y + \kappa^3 t} = 0.$$

где вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ равны

$$\alpha = \Lambda a + 2\kappa [a + e_0], \quad \beta = \left(\frac{\partial}{\partial y} - T\right) a,$$

$a = (a_1, \dots, a_N)$, $e_0 = (2, \dots, 2)$, I- единичная матрица.

Равенства $\alpha=0$, $\beta=0$ совместны при всех K тогда и только тогда, когда выполнено I.3. Тем самым лемма доказана.

Представление I.3 уравнений движения гамильтоновой системы частиц с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j^2 + 2 \sum_{i < j} (x_i - x_j)^{-2}$ было найдено в работе [9]. Поэтому из теоремы I.1 и доказанной леммы вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Динамика по y полюсов $x_j(y, t)$ рациональных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили совпадает с динамикой мозеровской системы N частиц на прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.1. Достаточность условий теоремы очевидна. Действительно, если $\psi(x, y, t, k)$ существует, то оператор $[L_1 - \frac{\partial}{\partial y}, L_2 - \frac{\partial}{\partial t}]$, содержащий дифференцирования только по x , аннулирует $\psi(x, y, t, k)$ при всех k . Следовательно, его ядро бесконечномерно, а он нулевой. Последнее, как уже говорилось выше, означает, что $u(x, y, t)$ является решением уравнения КП.

Пусть $u(x, y, t)$ рациональное решение уравнения КП, убывающее при $x \rightarrow \infty$. Тогда $u(x, y, t) = -2 \sum_{j=1}^N (x - x_j(y, t))^{-2}$. По функциям $x_j(y, t)$ определяются как и в лемме I.1 матричные функции $\Lambda(y, t)$ и $T(y, t)$.

Рассмотрим функцию $\psi(x, y, t, k)$ вида I.1, где $a_j(y, t, k)$ определяются из уравнения $\Lambda a + 2k \Gamma a + e_0 = 0$. Прямой подсчет показывает, что тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - L_1\right)\psi = \left(\sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{x - x_j}\right) e^{kx + k^2y + k^3t}, \quad (I.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_2\right)\psi = \left(\sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{x - x_j}\right) e^{kx + k^2y + k^3t}, \quad (I.5)$$

где

$$\beta = \left(\frac{\partial}{\partial y} - T\right)a, \quad \gamma = \left(\frac{\partial}{\partial t} - T_2 + \frac{3}{2} \Lambda \frac{\partial}{\partial y}\right)a,$$

$$T_{2jk} = 3\delta_{jk} \left(\sum_{s \neq j} \frac{1}{(x_j - x_s)^3}\right) - \frac{3(1 - \delta_{jk})}{(x_j - x_k)^3}$$

Применяя к правым частям равенства I.4 и I.5 операторы $\frac{\partial}{\partial t} - L_2$ и $\frac{\partial}{\partial y} - L_1$, соответственно получим, что ком-

мутативность этих операторов эквивалентна тому, что $\beta = 0$ и $\gamma = 0$. Таким образом теорема доказана. Помимо уже приводившегося выше равенства I.3, определяющего динамику по y полюсов $x_j(y, t)$ получаем уравнения на динамику $x_j(y, t)$ по t в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - T_2 + \frac{3}{2} \Lambda T, \Lambda \right] = 0. \quad (I.6)$$

Совокупность уравнений I.3 и I.6, определяющая функции $x_j(y, t)$, эквивалентна уравнению КП в классе рациональных функций.

Решение уравнения Кадамцева-Петвиашвили, имеющее N полюсов зависит от $2N$ начальных данных: $x_j(0, 0)$ и $(\frac{\partial}{\partial y} x_j)(0, 0)$.

В работе [9] были введены "высшие гамильтонианы системы"

$$H_p = \frac{1}{p} \text{tr} \Lambda^p, \quad H_2 = H. \quad \text{Для гамильтоновых потоков,}$$

соответствующих высшим гамильтонианам, существуют матричные коммутационные представления. В частности, уравнение I.6 эквивалентно гамильтоновой системе уравнений для гамильтониана H_3 .

СЛЕДСТВИЕ. Динамика по t полюсов рациональных решений уравнения КП идентична движению гамильтоновой системы с гамильтонианом H_3 .

Теорема I.1 сводит задачу построения рациональных решений уравнения КП к построению совместных собственных функций линейных операторов. Эти функции, имеющие вид I.1, можно привести к другой форме. Так как вектор a определяется из равенства $\Lambda a + 2\kappa I a + e_0 = 0$, то $a_j(y, t, \kappa)$ рационально зависят от переменной κ . Полюса $a_j(y, t, \kappa)$ совпадают с нулями характеристического полинома $q_1(\kappa) = \det(2\kappa I + \Lambda)$. В силу I.3 и I.6 этот характеристический полином не зависит от y и t . Следовательно,

$$\psi(x, y, t, \kappa) = \left(1 + \frac{q(x, y, t, \kappa)}{q_1(\kappa)} \right) e^{\kappa x + \kappa^2 y + \kappa^3 t}.$$

Степень полинома $q(x, y, t, \kappa)$ строго меньше $N = \deg q_1(\kappa)$.

В следующем параграфе будет доказано, что для почти всех решений уравнения КП найдутся N чисел $\kappa_s, \kappa_i \neq \kappa_j$, таких, что $\frac{\partial}{\partial \kappa} \psi(x, y, t, \kappa) \Big|_{\kappa = \kappa_s} = 0$. Набор $2N$ параметров (κ_s и коэффициенты полинома $q_1(\kappa)$) однозначно определяют функцию $\psi(x, y, t, \kappa)$ и следовательно $u(x, y, t)$.

Используя этот результат, мы получим, что имеет место следующую-

щая теорема.

ТЕОРЕМА 1.3. Для почти всех решений уравнения КП, рационально зависящих от x и убывающих при $x \rightarrow \infty$ имеет место формула

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Theta, \quad (1.7)$$

где матричные элементы Θ_{js} равны

$$\Theta_{js} = (x + 2x_s y + 3x_s^2 t) x_s^j + j x_s^{j-1} - x_s^j \left(\frac{\partial}{\partial k} \ln q(k) \right) \Big|_{k=x_s}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Решения уравнения КП, рационально зависящие от являются рациональными функциями всех своих аргументов.

§ 2. Рациональные решения уравнений

Захарова-Шабата

Построение рациональных решений уравнений Захарова-Шабата проводится в два этапа. Сначала строится некоторый класс функций $\psi(x, y, t, k)$, а затем по ним восстанавливаются операторы, для которых $\psi(x, y, t, k)$ "собственные".

Пусть задан следующий набор данных: полиномы

$$Q(k) = c_n k^n + \dots + c_0, \quad R(k) = r_m k^m + \dots + r_0,$$

точки $x_s, x_i \neq x_j$, прямоугольные матрицы $A^s = (a_{ij}^s)$, $1 \leq i \leq l_s, 1 \leq j \leq h_s$, рангов l_s . Тогда для любого полинома

$$q_1(k) = k^N + b_1 k^{N-1} + \dots + b_N, \quad N = \sum_s l_s$$

существует единственная функция

$$\psi(x, y, t, k) = \left(1 + \frac{q(x, y, t, k)}{q_1(k)} \right) e^{kx + Q(k)y + R(k)t}$$

такая, что ее коэффициенты разложения в точках x_s

$$\psi(x, y, t, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{j,s}(x, y, t) (k - x_s)^j$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{l_s} a_{ij}^s \zeta_{j,s}(x, y, t) = 0. \quad (2.1)$$

При этом предполагается, что $\deg q_j(x, y, t, k) \leq N-1$.
 Обозначим через $\varphi_{\alpha j, s}(x, y, t)$ полиномы

$$\varphi_{\alpha j, s} = \left[\frac{e^{-kx - Q(k)y - R(k)t}}{j!} \frac{\delta^j}{\delta k^j} \frac{k^\alpha e^{kx + Q(k)y + R(k)t}}{q_j(k)} \right]_{k=x_s}$$

для $\alpha \geq 1$,

$$\varphi_{0j, s} = \left[\frac{e^{-kx - Q(k)y - R(k)t}}{j!} \frac{\delta^j}{\delta k^j} e^{kx + Q(k)y + R(k)t} \right]_{k=x_s}$$

Уравнения 2.1 преобразуются в виду

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} \chi_\alpha \left(\sum_{j=1}^{h_s} a_{ij}^s \varphi_{\alpha j, s} \right) = - \sum_{j=1}^{h_s} \varphi_{0j, s} a_{ij}^s \quad (2.2)$$

Таким образом коэффициенты полинома $q_j(x, y, t, k) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \chi_\alpha(x, y, t) k^\alpha$, определяющиеся из уравнений (2.2), являются рациональными функциями своих аргументов. Их полюса совпадают с нулями определителя матрицы Θ , задаваемой левыми частями уравнений 2.2 (строки матрицы нумерованы индексами α , а столбцы парами (i, s) , $1 \leq i \leq l_s$).

Заметим, что из этого следует возможность представления $\psi(x, y, t, k)$ в виде

$$\psi(x, y, t, k) = \left(1 + \sum_{j=1}^M \frac{a_j(y, t, k)}{x - x_j(y, t)} \right) e^{kx + Q(k)y + R(k)t},$$

где $\prod_{j=1}^M (x - x_j(y, t)) = \text{const} \times \det \Theta$.

ТЕОРЕМА 2.1. Существуют единственные операторы

$$L_1 = \sum_{i=0}^n u_i(x, y, t) \frac{\delta^i}{\delta x^i}, \quad L_2 = \sum_{i=0}^m v_i(x, y, t) \frac{\delta^i}{\delta x^i}.$$

такие, что $(L_1 - \frac{\partial}{\partial y})\psi = (L_2 - \frac{\partial}{\partial t})\psi = 0$. Их коэффициенты являются дифференциальными полиномами от функций $\chi_\alpha(x, y, t)$ и, следовательно, рационально зависят от своих аргументов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение $\psi(x, y, t, \kappa)$ в окрестности бесконечности:

$$\psi(x, y, t, \kappa) = e^{kx + Q(\kappa)y + R(\kappa)t} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, y, t) \kappa^{-s}\right). \quad (2.3)$$

Функции $\xi_s(x, y, t)$ являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами от $\chi_\alpha(x, y, t)$; $\xi_1(x, y, t) = \chi_{N-1}(x, y, t), \dots$

Коэффициенты L_i находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^n u_i \sum_{l=0}^i C_i^l \frac{\partial^{i-l}}{\partial x^{i-l}} \xi_{s+l} = \sum_{i=0}^N C_i \xi_{s+i}, \quad (2.4)$$

$$(s = -n+1, \dots, 0; \xi_j = 0, j < 0).$$

Эта система эквивалентна сравнению

$$\left((L_1 - \frac{\partial}{\partial y})\psi(x, y, t, \kappa)\right) e^{-kx - Q(\kappa)y - R(\kappa)t} \equiv 0 \pmod{O(\kappa^{-1})}. \quad (2.5)$$

Сравнение 2.5 означает, что функция

$$\tilde{\psi}(x, y, t, \kappa) = (L_1 - \frac{\partial}{\partial y})\psi(x, y, t, \kappa)$$

имеет вид

$$\tilde{\psi}(x, y, t, \kappa) = \frac{\tilde{q}(x, y, t, \kappa)}{q_1(\kappa)} e^{kx + Q(\kappa)y + R(\kappa)t},$$

где степень полинома $\tilde{q}(x, y, t, \kappa)$ не выше $N-1$

Так как линейные условия 2.1 инвариантны относительно действия линейных операторов, то они выполнены и для коэффициентов разложения функции $\tilde{\psi}(x, y, t, \kappa)$. Им эквивалентна система однородных уравнений на $\chi_\alpha(x, y, t)$, $\tilde{q} = (x, y, t, \kappa) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \tilde{\chi}_\alpha(x, y, t) \kappa^\alpha$, левая часть которых совпадает с левой частью неоднородных уравнений (2.2). Ранг этой системы N , поэтому ее решения обязаны быть нулевыми. Следовательно,

$\tilde{\psi}(x, y, t, \kappa) = 0$ или $(L_1 - \frac{\partial}{\partial y})\psi = 0$. Аналогично строится оператор L_2 .

СЛЕДСТВИЕ. Построенные операторы удовлетворяют уравнению

$$[L_1 - \frac{\partial}{\partial y}, L_2 - \frac{\partial}{\partial t}] = 0 .$$

Для получения рациональных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили необходимо в изложенной схеме построения рациональных решений общих уравнений Захарова-Шабата положить $Q(\kappa) = \kappa^2$, $R(\kappa) = \kappa^3$.

Из уравнений 2.4 следует, что $u(x, y, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \chi_{N-1}(x, y, t)$. Поэтому полюса $u(x, y, t)$ совпадают с полюсами $\chi_{N-1}(x, y, t)$ или, что то же самое, с нулями полинома $\det \Theta$. Вычеты в этих полюсах в силу того, что $u(x, y, t)$ есть полная производная рациональной функции, равны нулю. Значит

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^M \frac{-2}{(x - x_j(y, t))^2} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Theta . \quad (2.6)$$

При фиксированных y и t число полюсов M функции $u(x, y, t)$ равно степени полинома $\det \Theta$. Степень полинома $\varphi_{\alpha_j, s}$, равна j , поэтому, например, для матриц общего положения A^s , удовлетворяющих условиям $a_{ij}^s = 0$ при $j > m(i, s)$, это число равно $M = \sum m(i, s)$. Отсюда $2N$ параметрическое семейство рациональных решений уравнения КП, имеющих N полюсов, задается функциями $\psi(x, y, t, \kappa)$, для которых условия 2.1 имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \psi(x, y, t, \kappa) \Big|_{\kappa = \kappa_s} = 0 . \quad (2.7)$$

Матрица Θ при этом будет иметь вид 1.8 и в сочетании с равенством 2.6 мы получим доказательство теоремы 1.3.

Решения уравнения КП и общего положения соответствуют сляню точек \mathcal{X}_s . При этом условия 2.7 превращаются в общие условия 2.1.

§ 3. Рациональные решения уравнений типа Лакса.

Уравнения $Kg\Phi$ и уравнение Буссинеска

Кратко изложим общую схему построения рациональных решений уравнений типа Лакса. Эти уравнения описывают решения уравнений

Захарова-Шабата, не зависящие от переменной y , и, следовательно, эквивалентны операторному уравнению:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - L_1, L_2 \right] = 0. \quad (3.1)$$

К их числу относятся и уравнения КдФ и Буссинеска

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим функцию $\psi(x, t, k)$ вида

$$\psi(x, t, k) = \left(1 + \frac{q(x, t, k)}{q_1(k)} \right) e^{kx + R(k)t},$$

$$\deg q(x, t, k) < \deg q_1(k) = N.$$

Положим, что коэффициенты разложения $\psi(x, t, k)$ в нуле

$$\psi(x, t, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j(x, t) k^j$$

удовлетворяют условиям

$$\zeta_{j_i}(x, t) = 0, \quad (3.4)$$

где $j_i = i$ -ое число, не делящееся на n , $1 \leq i \leq N$.

Для этой функции так же как и при доказательстве теоремы 2.1 получаем

ЛЕММА 3.1. Существует единственный оператор

$$L_1 = \sum_{i=0}^m v_i(x, t) \frac{\partial^i}{\partial x^i}, \quad m = \deg R,$$

такой, что $(L_1 - \frac{\partial}{\partial t})\psi = 0$.

Разлагая $\psi(x, t, k)$ в бесконечности можно построить единственный оператор L_2 такой, что

$$((L_2 - k^n)\psi(x, t, k)) e^{-kx - R(k)t} = O(k^{-1}).$$

Это равенство означает, что

$$\psi(x, t, k) = (L_2 - k^n) \psi(x, t, k)$$

имеет вид

$$\frac{\tilde{q}(x, t, k)}{q_1(k)} e^{kx + R(k)t}, \quad \deg \tilde{q} < N.$$

Условия 3.3 инвариантны относительно действия линейных операторов и умножения на k^n , поэтому они выполняются и для коэффициентов разложения функции $\tilde{\psi}(x, t, k)$. Как и в § 2 получаем, что из этого вытекает утверждение следующей леммы.

ЛЕММА 3.2. Существует единственный оператор

$$L_2 = \sum_{i=0}^n u_i(x, t) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \quad \text{такой, что } L_2 \psi(x, t, k) = k^n \psi(x, t, k).$$

СЛЕДСТВИЕ. Построенные операторы удовлетворяют равенству 3.1.

ПРИМЕР 1. Пусть $n=2$, $R(k) = k^3$, тогда каждый полином $q_1(k)$ степени N определяет пару операторов

$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t) \quad \text{и } L_1, \quad \deg L_1 = 3.$$

Функция $u(x, t)$ является решением уравнения $Kg\Phi$ (3.2).

Как и в § 2 для $u(x, t)$ получим формулу

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Theta = \sum_{j=1}^M \frac{-2}{(x - x_j(t))^2}, \quad (3.5)$$

$$\text{где } \Theta_{is} = \frac{\partial^{3N-2i-5}}{\partial x^{3N-2-5}} \frac{\partial^{2N+1}}{\partial k^{2N+1}} e^{kx + k^3 t} \frac{1}{q_1(k)} \Big|_{k=0}$$

Для получения последнего равенства необходимо подставить выражения для $\xi_j(x, t)$ через $\chi_\alpha(x, t)$ ($\sum \chi_\alpha(x, t) k^\alpha = q(x, t, k)$) и уравнения 3.4. Они примут вид

$$\Theta \chi = e_0,$$

где $\chi = (\chi_0, \dots, \chi_{N-1})$, а S -я координата вектора e_0 равна $\frac{1}{S!} \frac{\partial^S}{\partial k^S} e^{kx + k^3 t}$.

Число полюсов этих решений M равно $\frac{N(N+1)}{2}$.

ПРИМЕР 2. Пусть $n=3$, $R(k) = k^2 \pm 1$, тогда каждый полином $q_1(k)$ степени N задает решения $u(x, t)$

уравнения Буссианеска 3.3. Для них имеет место равенство 3.5, в котором

$$O_{is} = \frac{\delta^{4N-3i-s}}{\partial x^{4N-3i-s}} \frac{\delta^m}{\delta k^m} \frac{e^{kx+(k^2 \pm 1)t}}{\varphi_i(k)} \Big|_{k=0}, \quad m = \begin{cases} \frac{3N}{2} - 1, & N \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{3N}{2} - \frac{1}{2}, & N \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Число полюсов $u(x, t)$ равно $\frac{N(N+2)}{4}$, если N четно,
и $\frac{(N+1)^2}{4}$, если N нечетно.

§ 4. Рациональные решения уравнений Новикова

Выше уже говорилось о том, что алгебро-геометрическая конструкция квазипериодических решений уравнений Захарова-Шабата дает решения уравнений коммутативности расширенной алгебры операторов, содержащей помимо операторов $L_1 - \frac{\partial}{\partial y}$ и $L_2 - \frac{\partial}{\partial t}$ кольцо операторов вида $L_i = \sum_t \omega_i(x, y, t) \frac{\delta^i}{\partial x^i}$, изоморфное кольцу функции на неособой комплексной кривой, имеющих единственный полюс в выделенной точке. Мы покажем, что построенные рациональные решения уравнений Захарова-Шабата являются сепаратрисным семейством квазипериодических решений в следующем смысле: существует кольцо, коммутирующих между собой и с $L_1 - \frac{\partial}{\partial y}$, $L_2 - \frac{\partial}{\partial t}$ операторов, которые изоморфно кольцу функций на особой кривой, бирационально изоморфной комплексной прямой, с единственным полюсом в "бесконечности".

Умножение на любой полином $P(k)$ задает линейный оператор в пространствах рядов вида $\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j(x, y, t)(k-x)^j$. Обозначим через \mathcal{O} кольцо полиномов, для которых соответствующие гомоморфизмы оставляют инвариантными подпространства, заданные уравнениями 2.1.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\psi(x, t, y, k)$ функция, определенная в § 2, когда для любого полинома $P(k) \in \mathcal{O}$ существует единственный оператор $L_P = \sum_{i=0}^{\deg P} u_i(x, y, t) \frac{\delta^i}{\partial x^i}$, такой, что

$$L_P \psi(x, y, t, k) = P(k) \psi(x, y, t, k).$$

Как следствие этого получаем, что эти операторы коммутируют между собой и с операторами $L_1 - \frac{\partial}{\partial y}$, $L_2 - \frac{\partial}{\partial t}$.

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству леммы 3.2.

Например, если условия 2.1 имеют вид $\frac{\partial}{\partial k} \psi(x, y, t, k) \Big|_{k=x_s} = 0$,

то \mathcal{O}_x является кольцом полиномов таких, что $\frac{\partial}{\partial k} P(k)$ делится на $\prod_s (k - x_s)$. Если положить $t = 0$ и $y = 0$, т.е. рассмотреть функцию

$$\psi(x, k) = \left(1 + \frac{q(x, k)}{q_1(k)}\right) e^{kx},$$

удовлетворяющую условиям $\frac{\partial}{\partial k} \psi(x, k)|_{k=x_s} = 0$, где

$\deg q < \deg q_1 = N$, то она по теореме 4.1 задает гомоморфизм Λ из кольца \mathcal{O}_x , $x = (x_1, \dots)$, в кольцо обыкновенных дифференциальных операторов.

Коэффициенты этих операторов удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, эквивалентным условию их коммутации. Эти уравнения называются уравнениями типа Новикова.

Их общие решения были найдены в работах [4], [5]. Применяя методы этих работ, легко получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.2. Для любого подкольца A кольца линейных дифференциальных операторов изоморфного \mathcal{O}_x найдется полином

$$q_1(k), \text{ такой, что определяемая по нему и условиям } \frac{\partial}{\partial k} \psi|_{k=x_s} = 0 \text{ функция } \psi(x, u) \text{ задает гомоморфизм } A \text{ в } \mathcal{O}_x$$

Соответствующие решения уравнений Новикова являются рациональными функциями.

Литература

1. Ка дом цев Б.Б., Пет в и а ш в и л и В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах. - ДАН СССР, 1970, 192, № 4, 753-756.
2. За х а р о в В.Е., Ша ба т А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I. - Функц.анализ и его прил., 1974, 8, вып.3, 43-53.
3. Д р у м а В.С. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега-де Фриза. - Письма ЖЭТФ, 1974, 19:12, 753-755.
4. К р и ч е в е р И.М. Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова-Шабата и их периодических решений. - ДАН СССР, 1976, 227, № 2, 291-294.
5. К р и ч е в е р И.М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии. - Функц.анализ и его прил., 1977,

II, вып. I, 15-31.

6. К р и ч е в е р И.М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. - УМН 1977, XXXII, вып.6, 183-208.
7. Н о в и к о в С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза. I. - Функц.анализ и его прил., 1974, 8, вып.3, 54-66.
8. B o r d a g L.A., I t s A.R., M a t v e e v V.B., M a n a - c o v S.V., Z a k h a r o v V.E. Two-dimensional solitons of the Kadomsev-Petviashvili equation and their interection. -
- Preprint KMTU, 1977.
9. M o s e r J. Three integrable hamiltonian systems connected with isospectrum deformations. - Adv.Math., 1976, 16, 354-370.
10. A i r a l t H., M c K e a n H., M o s e r J. Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation and a related many-body problem- Preprint of Kurant Inst., 1976.