И. М. Кричевер, Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального поля и уравнения sine-Gordon, *Докл. АН СССР*, 1980, том 253, номер 2, 288–292

УДК 513.835

И.М. КРИЧЕВЕР

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГЛАВНОГО КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ И УРАВНЕНИЯ SINE-GORDON

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 21 I 1980)

Методы обратной задачи теории рассеяния позволяют проинтегрировать уравнения главного кирального поля и уравнение sine-Gordon в классе функций с фиксированным поведением на бесконечности. Различные алгебро-геометрические конструкции дают широкие классы квазипериодических решений этих уравнений.

Основной целью настоящей работы является построение в с е х решений этих нелинейных уравнений в частных производных с помощью решений вспомогательных линейных задач: решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения, решения задачи Римана. При этом оказывается, что любое решение уравнений главного кирального поля и уравнения sine-Gordon является своеобразной "нелинейной суперпозицией" решений, бегущих по различным характеристикам. Эта "суперпозиция" обобщает формулу Даламбера для линейного волнового уравнения.

1. Как было показано в ([1]), уравнения главного кирального поля эквивалентны условию совместности системы уравнений

$$\left(\partial_\xi - \frac{U(\xi,\eta)}{\lambda-1}\right)\Psi = 0, \qquad \left(\partial_\eta - \frac{V(\xi,\eta)}{\lambda+1}\right)\Psi = 0, \tag{1}$$

где U и V – матричные функции размерности l, $\Psi = \Psi(\xi, \eta, \lambda)$. Совместность уравнений (1) означает, что

$$\frac{U_\eta}{\lambda-1} - \frac{V_\xi}{\lambda+1} + \frac{[U,V]}{\lambda^2-1} = 0. \tag{2}$$

Последнее равенство эквивалентно*

$$U_\eta + \frac{1}{2}[U,V] = 0, \quad V_\xi + \frac{1}{2}[U,V] = 0. \tag{3}$$

Пусть U и V – произвольное решение уравнений (3); тогда существует единственное решение уравнений (1) такое, что $\Psi(0,0,\lambda) \equiv 1$. Это решение при всех ξ и η является аналитической функцией λ всюду, кроме точек $\lambda = \pm 1$, где она имеет существенные особенности. Чтобы выяснить вид этих особенностей, поставим следующую задачу Римана.

Найти аналитическую при всех $\lambda \neq 1$ функцию $\Phi_1(\xi,\eta,\lambda)$, которая в окрестности точки $\lambda = 1$ представима в виде

$$\Phi_1(\xi,\eta,\lambda) = R_1(\xi,\eta,\lambda)\,\Psi(\xi,\eta,\lambda), \tag{4}$$

где

$$R_1(\xi,\eta,\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} R_{1,s}(\xi,\eta)(\lambda-1)^s,$$

$R_1(\xi,\eta,\lambda)$ – регулярная в окрестности $\lambda = 1$ матричная функция.

Условие представимости Φ_1 в виде (4) означает, что на малой окружности

* Интересно отметить, что впервые уравнения совместности рациональных пучков операторов были рассмотрены Гарнье в 1912 г. ([2]). Идеи работы ([2]) перекликаются с результатами п. 3 настоящей работы.

Γ: $|\lambda - 1| = \epsilon$ надо поставить стандартную задачу Римана об отыскании аналитических вне и внутри контура функций R_1^+ и R_1, связанных на Γ соотношением

$$R_1^+(\xi, \eta, t) = R_1(\xi, \eta, t)\, \Psi(\xi, \eta, t), \quad t \in \Gamma.$$

Тогда $\Phi_1(\xi, \eta, \lambda)$ равна R^+ вне контура и $R_1 \Psi$ внутри его.

Из общих теорем о разрешимости задачи Римана следует, что Φ_1 (ξ, η, λ) существует и единственна при условии нормировки $\Phi_1(\xi, \eta, \infty) = 1$.

Рассмотрим логарифмические производные Φ_1. Из (4) и уравнений (1) следует, что $(\partial_\xi \Phi_1)\Phi_1^{-1}$ является регулярной функцией λ при $\lambda \neq 1$, а в точке $\lambda = 1$ имеет простой полюс. Так как $1 = \Phi_1(\xi, \eta, \infty)$, то

$$(5) \qquad \partial_\xi \Phi_1 = \frac{U_1(\xi, \eta)}{\lambda - 1}\, \Phi_1(\xi, \eta, \lambda).$$

Из того, что $(\partial_\eta \Psi)\Psi^{-1}$ не имеет особенности при $\lambda = 1$, аналогичным рассуждением доказывается, что $\partial_\eta \Phi_1 = 0$. Таким образом, доказана следующая

Л е м м а 1. *Функции Φ_1 и U_1 не зависят от η:* $\Phi_1 = \Phi_1(\xi, \lambda)$, $U_1 = U_1(\xi)$. *Функция $\Phi_2(\xi, \eta, \lambda)$, определенная как и Φ_1 с заменой точки $\lambda = 1$ на $\lambda = -1$, удовлетворяет уравнениям*

$$\partial_\eta \Phi_2 = \frac{V_1}{\lambda + 1}\, \Phi_2, \qquad \partial_\xi \Phi_2 = 0$$

и, значит, Φ_2 и V_1 не зависят от ξ, $\Phi_2 = \Phi_2(\eta, \lambda)$, $V_1 = V_1(\eta)$.

Предложенная конструкция сопоставляет каждому решению уравнений (3) пару "спектральных данных" – функций $U_1(\xi)$ и $V_1(\eta)$.

П о с т р о е н и е о б р а т н о г о о т о б р а ж е н и я. Для произвольных функций $U_1(\xi)$ и $V_1(\eta)$ определим $\Phi_1(\xi, \lambda)$ и $\Phi_2(\eta, \lambda)$ как решения уравнения (5) и уравнения

$$(6) \qquad \partial_\eta \Phi_2 = \frac{V_1(\eta)}{\lambda + 1}\, \Phi_2(\eta, \lambda)$$

соответственно с начальными условиями $\Phi_1(0, \lambda) = \Phi_2(0, \lambda) \equiv 1$.

Обозначим через $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$ функцию, аналитическую по λ вне точек $\lambda = \pm 1$ и представимую в их окрестностях в виде

$$(7) \qquad \Psi(\xi, \eta, \lambda) = R^+(\xi, \eta, \lambda)\, \Phi_1(\xi, \lambda);$$

$$(8) \qquad \Psi(\xi, \eta, \lambda) = R^-(\xi, \eta, \lambda)\, \Phi_2(\eta, \lambda);$$

$R^\pm$ аналитичны в окрестностях $\lambda = \pm 1$ соответственно.

Построение Ψ эквивалентно задаче Римана с двумя контурами: окружностями $|\lambda \pm 1| = \epsilon$. Решение задачи Римана стандартным образом сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши ([3]).

Л е м м а 2. *Существует единственное решение Ψ поставленной задачи, нормированное условием $\Psi(\xi, \eta, \infty) = 1$.*

Т е о р е м а 1. *Функция $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$ удовлетворяет уравнениям* (1), *где* $U = R^+ U_1 (R^+)^{-1}$, $V = R^- V_1 (R^-)^{-1}$. *Все решения уравнений* (3) *главного кирального поля даются предложенной конструкцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы сводится к рассмотрению логарифмических производных Ψ, как и при выводе уравнений на Φ_i.

Так как $\Phi_1(0, \lambda) = 1$ и $\Phi_2(0, \lambda) = 1$, то $\Psi(\xi, 0, \lambda) = \Phi_1(\xi, \lambda)$, $\Psi(0, \eta, \lambda) = \Phi_2(\eta, \lambda)$.

С л е д с т в и е. *"Спектральные данные" U_1, V_1 совпадают со значениями U и V на характеристиках:* $U_1 = U(\xi, 0)$, $V_1 = V(0, \eta)$.

З а м е ч а н и е. Матричная функция $\Psi(\xi,\eta,\lambda)$, определенная условиями типа (7), (8), будет называться матричным двухточечным аналогом функций Бейкера – Ахиезера ранга l, где l – размерность матриц. Впервые понятие одноточечного, т.е. имеющего одну существенно особую точку, матричного аналога функции Бейкера – Ахиезера ранга l было введено в работах ([4–6]) для решения уравнений коммутативности и для построения решений уравнения Кадомцева – Петвиашвили. Понятие двухточечной функции Бейкера – Ахиезера ранга l рассматривалось С.П. Новиковым и автором в случае произвольной алгебраической кривой в связи с отысканием интегрируемых случаев двумерного линейного оператора Шредингера. В отличие от одноточечной ситуации, понятие двухточечной функции не тривиализируется даже на кривой рода ноль и, более того, как показывает процедура "раздевания" – получения по Ψ ее асимптотик Φ_1 и Φ_2, что является наиболее существенным наблюдением данной работы, дает все решения уравнений главного кирального поля и уравнения sine-Gordon.

В случае ранга $l = 1$ решение задач (7), (8) тривиально и $\Psi(\xi,\eta,\lambda) = \Phi_1(\xi,\lambda)\Phi_2(\eta,\lambda)$. Оно соответствует суперпозиции волн, бегущих по различным характеристикам, для обычного волнового уравнения. В этом смысле при $l > 1$ задача Римана (7), (8) осуществляет "нелинейную суперпозицию": $U = U\{U_1, V_1\}$, $V = V\{U_1, V_1\}$.

II. У р а в н е н и е s i n e - G o r d o n. Предложенная схема позволяет проинтегрировать любое уравнение "нулевой кривизны"

(9) $\quad u_\eta - v_\xi + [u, v] = 0,$

если рациональные функции параметра λ $u(\xi,\eta,\lambda)$ и $v(\xi,\eta,\lambda)$ не имеют общих полюсов. В качестве второго примера рассмотрим периодические по n решения двумеризованной цепочки Тода, введенные в ([7]) и имеющие вид

(10) $\quad \varphi_{n\xi\eta} = e^{\varphi_n - \varphi_{n+1}} - e^{\varphi_{n-1} - \varphi_n},$

$\varphi_{n+N} = \varphi_n(\xi,\eta)$. Эти уравнения эквивалентны условию совместности уравнений

(11) $\quad \partial_\xi \psi_n = v_n\psi_n + \psi_{n-1}, \qquad \psi_0 = \lambda^{-1}\psi_n;$

(12) $\quad \partial_\eta \psi_n = a_n\psi_{n+1}, \qquad \psi_{N+1} = \lambda\psi_1, \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$

где $v_n = \varphi_{n\xi}$, $a_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n+1}}$, $\varphi_{N+1} = \varphi_1$.

Для решения этих уравнений рассмотрим в качестве затравочных функций $\Phi_1(\xi,\lambda), \Phi_2(\eta,\lambda)$ фундаментальные матрицы уравнений

(13) $\quad \partial_\xi y_n = w_n y + y_{n-1}, \quad \partial_\eta y_n = a_n^1 y_{n+1}, \quad y_{n+N} = \lambda y_n,$

соответственно, где $w_n = w_n(\xi)$, $\varphi_n^1(\eta)$ – произвольные функции, $a_n^1 = \exp(\varphi_n^1 - \varphi_{n+1}^1)$, $\varphi_{N+1}^1 = \varphi_1^1$.

Определим матричный аналог функции Бейкера – Ахиезера $\Psi(\xi,\eta,\lambda)$ ранга N как функцию, аналитическую вне $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, имеющую в их окрестностях вид (7), (8), где Φ_1 и Φ_2 определены выше. Матричные функции $R^\pm$ регулярны в окрестностях $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ соответственно. Матричная функция Ψ однозначно определяется нормировкой: $R^+(\xi,\eta,0)$ – верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали, $R^-(\xi,\eta,\infty)$ – нижнетреугольная матрица.

Т е о р е м а 2. *Матричный аналог функции Бейкера – Ахиезера* $\Psi(\xi,\eta,\lambda)$ *является фундаментальной матрицей уравнений* (11), (12), *где* $\varphi_n(\xi,\eta) = \varphi_n^1(\eta) + \ln g_n$ *и* $g_n(\xi,\eta) = R_{nn}^-$ *– диагональные элементы* $R^-(\xi,\eta,\infty)$. *Все решения уравнений* (10) *даются предложенной схемой. При этом соответствующие затравочные функции* $\varphi_n^1(\eta)$, $w_n(\xi)$ *совпадают с данными Коши* $\varphi_n^1(\eta) = \varphi_n(0,\eta)$, $w_n(\xi) = \varphi_{n\xi}(\xi, 0)$.

При $N = 2$ уравнения (10) эквивалентны уравнению sine-Gordon $u_{\xi\eta} = 4\sin u$, $iu = \varphi_1 - \varphi_2$, играющему заметную роль в современной математической физике.

Впервые оно возникло в теории поверхностей постоянной отрицательной кривизны в трехмерном пространстве. Более ста лет назад для него было открыто бэклунд-преобразование, дающее все солитонные решения. В классе быстроубывающих функций оно было проинтегрировано в работах ([8],[9]).

В соответствии с утверждением теоремы 2 общее решение уравнения sine-Gordon задается двумя произвольными функциями $u(0,\eta)$, $u_\xi(\xi,0)$. Приведем отдельно для этого уравнения вид затравочных функций $\Phi_1(\xi,\lambda)$ и $\Phi_2(\eta,\lambda)$, входящих в определение матричного аналога функции Бейкера – Ахиезера $\Psi(\xi,\eta,\lambda)$.

Пусть Φ_1 и Φ_2 заданы уравнениями

$$\partial_\xi \Phi_1 = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ \lambda^{-1} & -\omega \end{pmatrix} \Phi_1, \qquad \partial_\eta \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda e^{-iu_1} \\ e^{iu_1} & 0 \end{pmatrix} \Phi_2,$$

где $\omega = \frac{i}{2} u_\xi(\xi,0)$, $u_1 = u(0,\eta)$. Матрицы $R^\pm(\xi,\eta,\lambda)$, входящие в выражения (7), (8), нормируем условиями:

$$R^+(\xi,\eta,0) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R^-(\xi,\eta,\lambda) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ g_1 & g^{-1} \end{pmatrix}.$$

Следствие. *Функция* $u(\xi,\eta)$ *является решением уравнения* sine-Gordon, $u = u(0,\eta) - 2i \ln g(\xi,\eta)$.

Замечание. Как сообщил автору С.П. Новиков, конструкция решений уравнения sine-Gordon, зависящих от двух произвольных функций, была получена Лезновым. Решения представляются в виде рядов, сходимость которых доказывается с помощью теории бесконечномерных алгебр Ли. Полнота получаемых решений не выяснена. Было бы полезно сопоставление результатов Лезнова с результатами данной работы.

III. В заключение укажем условия, выделяющие в рамках предложенной конструкции конечнозонные решения уравнений sine-Gordon и главного кирального поля ([11-13]) (понятие конечнозонных решений и изложение общего подхода к их построению для ряда нелинейных уравнений содержится в работах (см. обзоры ([14],[15]))).

Пусть $u(\xi,\eta,\lambda)$ и $v(\xi,\eta,\lambda)$ – рациональные функции параметра λ, являются решениями уравнений "нулевой кривизны" (9). Если полюса u и v не совпадают, то, как уже говорилось выше, u и v выражаются через функцию Бейкера – Ахиезера ранга l и для их построения, вообще говоря, необходимо решать задачу Римана.

Предположим, что для u и v существует рациональная по λ функция $w(\xi,\eta,\lambda)$ такая, что

(14) $\quad [\partial_\xi - u, w] = 0, \quad [\partial_\eta - v, w] = 0.$

Уравнения (14) означают, что в пространстве решений уравнений

(15) $\quad (\partial_\xi - u)\Psi = 0, \quad (\partial_\eta - v)\Psi = 0$

можно выбрать базис собственных векторов для w: $w\,\psi_i = \mu_i\,\psi_i$, где μ_i – корень характеристического уравнения

(16) $\quad P(\lambda,\mu) = \det\left(w(\xi,\eta,\lambda) - \mu\cdot 1\right) = 0.$

Из (14) следует, что $P(\lambda,\mu)$ не зависит от ξ и η.

Утверждение. Собственные векторы матрицы w *образуют единую функцию* $\psi(\xi,\eta,P)$ *на римановой поверхности* $\mathfrak{R}$, *заданной уравнением* (16), *которая мероморфна вне прообразов полюсов* u *и* v, *полюса* ψ *не зависят от* ξ *и* η. *В существенно особых точках* ψ *имеет экспоненциальный вид, т.е.* $\psi(\xi,\eta,P)$ – *функция*

Бейкера – Ахиезера ранга 1 *на римановой поверхности* $\mathfrak{R}$. *В соответствии с общими рецептами* ([10]) *она выражается через* θ*-функции Римана.*

Таким образом, наличие w приводит к тому, что матричный аналог функции Бейкера – Ахиезера ранга l на λ-плоскости можно заменить на функцию Бейкера – Ахиезера ранга 1 на более сложной алгебраической кривой. Однако при этом задача Римана становится скалярной и явно решается в θ-функциях.

В последующей более подробной работе будут детально изложены перечисленные результаты и проанализировано взаимоотношение общей схемы с конструкциями быстроубывающих и автомодельных решений уравнений "нулевой кривизны" для рациональных пучков операторов.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
17 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В.Е. Захаров, А.В. Михайлов*, ЖЭТФ, т. 74, № 6, 1953 (1978). [2] *R. Garnier*, Rend. Circ. Matem. Palermo, v. 43, 155 (1919). [3] *Н.И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике, М., Физматгиз, 1962. [4] *И.М. Кричевер*, Функц. анализ и его прилож., т. 12, № 3 (1978). [5] *И.М. Кричевер, С.П. Новиков*, там же, т. 12, в. 4 (1978). [6] *И.М. Кричевер, С.П. Новиков*, ДАН, т. 247, № 1, 33 (1979). [7] *А.В. Михайлов*, Письма ЖЭТФ, т. 30, № 7, 443 (1979). [8] *M. Ablowitz, J. Kaup et al.*, Phys. Rev. Lett., v. 30, 1262 (1973). [9] *В.Е. Захаров, Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев*, ДАН, т. 219, № 6, 1334 (1979). [10] *И.И. Кричевер*, Функц. анализ и его прил., т. 11, в. 1, 15 (1977). [11] *В.А. Козел, В.П. Котляров*, Докл. АН УССР, сер. А, т. 10, 878 (1976). [12] *А.Р. Итс* (см. V.B. Matveev, Abilian Functions and Solitons, *Preprint* № 373, Teor. Fiz. Wroclaw, 1976). [13] *И.В. Чередник*, ДАН, т. 246, № 5, 575 (1979). [14] *Б.А. Дубровин, В.Б. Матвеев, С.П. Новиков*, УМН, т. 31, № 1, 92 (1976). [15] *И.М. Кричевер*, УМН, т. 32, № 6, 183 (1977).

УДК 517.968 МАТЕМАТИКА

Г.М. МАГОМЕДОВ

МЕТОД АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 2 VII 1979)

В этой заметке даны теоремы существования и единственности решений нелинейных сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений вида

$$(1)\qquad u + \lambda A \circ Fu = v, \quad Au \equiv \int_{-a}^{a} \frac{[f(x, s)]\, u(s)}{s - x}\, ds,$$

$$(2)\qquad u + \lambda A_1 \circ Fu' = w, \quad f(x, s) \equiv 1, \quad A_1 \doteq A,$$

в пространстве $\bar{W}_2^{(1)}$, $C^{(1)}$.

Сначала сформулируем одно общее предложение.

Теорема 1. *Пусть* B_j, $j = 1, 2, 3,$ – *произвольные банаховы пространства и в каждой точке пространства* $B_1 \times B_2$ *оператор* $\Phi\,(B_1 \times B_2 \to B_3)$ – *имеет производную Фреше* Φ'_u $(B_1 \to B_3)$ *и* $[\Phi'_u]^{-1}$ $(B_3 \to B_1)$.