И. М. Кричевер, “Гессианы” интегралов уравнения Кортевега–де Фриза и возмущения конечнозонных решений, *Докл. АН СССР*, 1983, том 270, номер 6, 1312–1317

В приложениях важны вопросы о выборе величины τ при постановке задачи и о зависимости $C(N, X^*, \tau)$ от τ для оптимального решения. Ответ на эти вопросы дает

Теорема 3. *$C_{\text{опт}}(N, X^*, \tau)$ является убывающей функцией τ, причем при $\tau < \tau^*$ стоимость $C(N, X^*, \tau)$ строго убывает, а при $\tau > \tau^*$ остается постоянной.*

Таким образом, при неограниченном возможном времени выполнения плана существует $\tau = \tau^*$, при котором стоимость изготовления минимальна.

Замечание. Утверждения лемм 1 и 3 и теорем 2 и 3 справедливы и для зависящих от t возрастающих функций $f = f(t)$. Решение в этом случае также дается формулами (15) – (17).

Автор выражает благодарность В.Я. Арсенину за внимание к работе и замечания.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР,
Москва

Поступило
3 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зябрев Н.Б.* Препринт ИПМ № 158, 1982. 2. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965.

УДК 513.835 МАТЕМАТИКА

И.М. КРИЧЕВЕР

"ГЕССИАНЫ" ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА И ВОЗМУЩЕНИЯ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ

(Представлено академиком С.П. Новиковым 19 X 1982)

Настоящая работа посвящена двум, как будет видно в дальнейшем, тесно связанным между собой задачам. Первой из них является построение решений возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4} u_{xx} - \frac{3}{4} u^2\right) = \epsilon K[u], \tag{1}$$

где ϵ – малый параметр, а $K[u]$ – произвольный дифференциальный полином.

Рассмотрим решения (1), представляющие собой возмущения "конечнозонных" решений уравнения КдФ. (Обзоры результатов, посвященных построению с помощью методов алгебраической геометрии "конечнозонных" решений уравнений типа Лакса и их двумерных обобщений, содержатся в [1–5].) Ограничимся для простоты случаем чисто периодических решений.

Ясно, что построение решений уравнения (1) в любом порядке теории возмущений тривиально, если имеется совокупность $w_j(x, t)$ решений линеаризованного уравнения КдФ

$$(2)\qquad w_t - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{3}{2}\,u_0\right)w = 0,$$

образующая при всех t базис в пространстве периодических по x функций, и если, кроме того, известен сопряженный базис $v_i\ (x,\ t)$ решений сопряженного уравнения ($\langle v_i, w_j\rangle\ =\ \delta_{ij}$):

$$(3)\qquad v_t - \left(\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{3}{2}\,u_0\right)\frac{\partial}{\partial x}v\ =\ 0.$$

Пусть $u_0\,(x,\ t)$ — n-зонное решение уравнения КдФ. "Линеаризуя" в его окрестности $(n + 1)$-зонные решения, можно получить большой запас явных решений уравнения (2). Доказательство полноты этого семейства и построение сопряженного к нему базиса решений уравнения (3) вытекают из результатов анализа самосопряженного оператора второй вариации интегралов уравнения КдФ. Последней задаче, представляющей самостоятельный интерес, посвящен первый пункт настоящей работы.

I. Первоначально [6] "n-зонные" решения уравнения КдФ определялись как экстремали функционала

$$(4)\qquad \delta H = 0,\qquad H = I_{n+2} - \sum_{k=1}^{n+1} c_k I_k,$$

где $I_k\,[u]$ — бесконечный набор интегралов уравнения КдФ в инволюции. Рассмотрим оператор $D^2 H$ второй вариации H.

Кратко напомним (см. [1, 2]) необходимые в дальнейшем сведения из спектральной теории конечнозонных операторов Штурма–Лиувилля $L\ = -\dfrac{d^2}{dx^2} + u_0\,(x)$.

Если $u_0\,(x)$ есть решение уравнения (4), то спектр оператора L, рассматриваемого на всей оси, содержит не более n лакун, $[E_{2i},\ E_{2i+1}]$, $i\ =\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Концы зон E_i являются простыми точками спектра периодической и антипериодической задач для оператора L.

На римановой поверхности Γ функции $\sqrt{R\,(E)}$, $R\ =\ \prod\limits_{i=1}^{2n+1}\ (E\ -\ E_i)$ стандартным образом определяются: нормированный базис голоморфных дифференциалов Ω_k, матрица B_{ik} их b-периодов и соответствующая тэта-функция Римана $\theta\,(v_1, v_2, \ldots$
$\ldots,\ v_n)$.

Дифференциал квазиимпульса

$$dp = \frac{E^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k E^k}{\sqrt{R\,(E)}}\quad dE = \frac{Q\,(E)}{\sqrt{R\,(E)}}\,dE$$

играет важнейшую роль в спектральной теории оператора L. Коэффициенты r_k полинома Q определяются из условий нормировки:

$$\int_{E_{2i}}^{E_{2i+1}} dp = 0,\qquad i\ = 1, 2, \ldots, n.$$

Периодичность u_0 накладывает на E_i следующие условия:

$$U_k = \frac{1}{\pi} \int_{E_1}^{E_{2k}} dp = \frac{m_k}{T}, \tag{5}$$

где m_k целые. (Здесь и далее в аналогичных случаях интеграл берется на верхнем листе по контуру, проходящему над разрезами; при этом $0 < \ldots < m_k < m_{k+1} < \ldots$).

Двукратные точки e_s спектра периодической и антипериодической задач для L находятся из уравнений

$$\frac{1}{\pi} \int_{E_1}^{e_s} dp = \frac{s}{T}, \quad s \neq m_k, \quad s > 0 \text{ целые.}$$

Рассмотрим произвольное возмущение $u = u_0 + \delta u$ потенциала. Спектр оператора $L' = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ на всей прямой имеет n лакун с концами E_i', отвечающими возмущению старых концов зон E_i, а также, возможно, лакуны с концами $e_s^- \leqslant e_s^+$, соответствующие распаду двукратного уровня оператора e_s.

Т е о р е м а 1. *Вторая вариация функционала H равна*

$$\delta^2 H = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{2} Q(E_i)(\delta E_i)^2 + \sum_{s \neq m_k} \frac{1}{4} Q(e_s)(\delta e_s)^2, \tag{6}$$

где $\delta E_i = E_i' - E_i, \quad \delta e_s = e_s^+ - e_s^-$.

Полином $Q(E)$ положителен в бесконечной разрешенной зоне и меняет знак в запрещенных зонах.

С л е д с т в и е 1. *Если n нечетно, то H не имеет минимумов среди n-зонных потенциалов.*

По-видимому, это утверждение верно при любом положительном n. Однако его вывод из теоремы 1 следует непосредственно лишь для нечетных n, так как δE_i не независимы, а удовлетворяют n связям, вытекающим из (5).

Интереснее ответ в другой задаче, также приводящей к уравнению (4). Ее постановка восходит к идее Крускала и была использована в [7]. Уравнение (4) описывает экстремали I_{n+2} при фиксированных значениях $I_1, I_2, \ldots, I_{n+1}$. Числа c_k являются множителями Лагранжа.

С л е д с т в и е 2. *Решение u_0 уравнения* (4) *является условным локальным минимумом I_{n+2} тогда и только тогда, когда числа m_k, определенные в* (5), *удовлетворяют условиям*

$$m_{n-2l} - m_{n-2l-1} = 1, \quad l = 0, 1, \ldots, [n/2].$$

Как видно из этого утверждения, гипотеза Лакса [7] о том, что необходимым условием локальной минимальности является простота $2n + 1$ нижних уровней периодической и антипериодической задач для L, верна лишь при $n \leqslant 1$.

Пусть $\psi_\pm(x, E)$ – блоховские функции. При $E \neq E_i$ они образуют базис в пространстве решений уравнения $L\psi = E\psi$. Известно, что эта двузначная функция E является однозначной на Г (аналитические свойства позволяют однозначно выразить ее через тэта-функции Римана (см. [1, 2])).

Воспользовавшись "секулярным уравнением" для возмущения двукратного уровня e_s оператора L, получаем следующее утверждение.

Л е м м а 1. *Самосопряженный оператор* $D^2 \mathcal{E}_s$ *такой, что* $(\delta e_s)^2 = \langle D^2 \mathcal{E}_s \delta u, \delta u \rangle$, *допускает интегральное представление с ядром*

$$(7) \qquad D^2 \mathcal{E}_s (x, y) = \frac{\psi_+^2 (x, e_s)\, \psi_-^2 (y, e_s) + \psi_-^2 (x, e_s)\, \psi_+^2 (y, e_s)}{2 \langle \psi_+ (x, e_s)\, \psi_- (x, e_s) \rangle} .$$

Здесь и далее $\langle \cdot \rangle$ означает среднее по периоду.

Т е о р е м а 2. *Оператор* $D^2 H$ *допускает интегральное представление с ядром*

$$(8) \qquad D^2 H(x, y) = \sum_{l=1}^{2n+1} \frac{Q(E_l)\, \psi^2 (x, E_l)\, \psi^2 (y, E_l)}{2 \langle \psi^2 (x, E_l) \rangle} + \sum_{s \neq m_k} \frac{Q(e_s)}{4} D^2 \mathcal{E}_s (x, y).$$

Среди функций $\psi^2 (x, E_l)$ имеется всего $n + 1$ независимая. Их линейные комбинации совпадают с $\delta I_k / \delta u$, $k = 1, 2, \ldots, n + 1$. Из инволютивности интегралов следует, что $0 = \langle \psi^2 (x, E_l) \frac{\partial}{\partial x} \psi^2 (x, E_j) \rangle$. Кроме того, $D^2 H \frac{\partial}{\partial x} \psi^2 (x, E_i) = 0$.

II. В многочисленных работах (см., например, [8, 9]) по теории возмущений для КдФ в быстроубывающем случае широко использовалось наблюдение (проверяемое непосредственной подстановкой), что если $\psi(x, t)$ удовлетворяет уравнениям $L \psi = E \psi$, $\psi_t = A \psi$, то ψ^2 удовлетворяет уравнению (3). Здесь L и A есть (L, A)-пара, отвечающая уравнению КдФ. Результаты предшествующего пункта, в котором квадраты блоховских функций возникают совсем в другом контексте, не только проясняют это наблюдение, но и, что самое важное, позволяют одновременно получать сопряженные базисы решений уравнений (2) и (3).

Явное выражение через тэта-функции Римана для конечнозонных решений уравнения КдФ получено Матвеевым и Итсом [10]:

$$u_0 (x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta (Ux + Vt + Z) + \text{const},$$

где координаты векторов U и V

$$U_k = \frac{m_k}{T}, \qquad V_k = \frac{1}{2 \pi i} \oint_{b_k} \omega_3,$$

ω_3 — нормированный абелев дифференциал второго рода с единственным полюсом в бесконечности третьего порядка.

Это решение зависит, как от параметров, от координат вектора Z и набора концов зон E_i, определяющих гиперэллиптическую кривую. Среди последних в качестве независимых переменных можно выбрать E_{2l-1}. Остальные концы будут определяться из уравнений (5). Вектор Z с точностью до сдвига на постоянный вектор Римана совпадает с образом отображения Абеля набора точек γ_s поверхности Γ, $Z = \sum_{s=1}^{n} A(\gamma_s) + k$. Здесь координаты вектора $A(\gamma)$ равны $A_i(\gamma) = \int_{E_1}^{\gamma} \Omega_i$. Точки γ_s, вернее, их проекции на E-плоскость, имеют естественный спектральный смысл. Они являются точками спектра для оператора L на полуоси.

Дифференцируя формулу для $u_0 (x, t)$ по параметрам, мы получим решения линеаризованного уравнения (2).

Л е м м а 2. *Имеют место соотношения ортогональности*

$$(10) \qquad \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_s}, \ \psi^2 (x, t, E_l) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_s}, \ \psi_\pm^2 (x, t, e_s) \right\rangle = 0,$$

$$(11) \qquad \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial E_{2l-1}} \psi^2 (x, t, \gamma_s) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial E_{2l-1}}, \ \psi_\pm^2 (x, t, e_s) \right\rangle = 0$$

и, кроме того, соотношения

$$(12)\quad \begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_s},\ \psi^2(x,t,\gamma_k)\right\rangle = \delta_{sk}\langle \psi^2(x,t,\gamma_k)\rangle, \\ &\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial E_{2i-1}}\psi^2(x,t,E_{2j-1})\right\rangle = \delta_{ij}\langle \psi^2(x,t,E_{2j-1})\rangle. \end{aligned}$$

Соотношения (10)–(12) вытекают из результатов предшествующего пункта и того, что вариационная производная $\delta\gamma_s/\delta u$ равна $\psi^2(x,\ t,\ \gamma_s)/\langle\psi^2(x,\ t,\ \gamma_s)\rangle$.

"Линеаризуя" формулу (9) для $(n+1)$-зонного решения, отвечающего раскрытию малой зоны в окрестности точки e_s, и используя лемму 1, получим следующее утверждение.

Лемма 3. *Функции*

$$(13)\quad w_s^{\pm}(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{\theta(Ux+Vt+Z\pm 2A(e_s))\exp\left\{\pm 2\pi i\left(\frac{sx}{T}+V_s t\right)\right\}}{\theta(Ux+Vt+Z)}$$

являются решениями уравнений (2). *При этом*

$$(14)\quad \begin{aligned} &\langle w_s^{\pm}(x,t),\ \psi_{\pm}^2(x,t,e_k)\rangle = 0, \qquad k\neq s, \\ &\langle w_s^{\pm}(x,t),\ \psi^2(x,t,E_l)\rangle = \langle w_s^{\pm}(x,t),\psi^2(x,t,\gamma_k)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Здесь $V_s = \dfrac{1}{\pi i}\int\limits_{E_1}^{e_s}\omega_3$.

Ограничимся далее лишь первым порядком теории возмущений и будем искать решение уравнения (1) в виде

$$(15)\quad u(x,t) = u_0(x,t\mid\epsilon t) + \epsilon\sum_s \alpha_s^+(t)w_s^+(x,t) + \alpha_s^-(t)w_s^-(x,t),$$

где, как обычно в методе "двух времен", параметры конечнозонного решения u_0 зависят от "медленного времени" τ, $\tau=\epsilon t$, $\gamma_i=\gamma_i(\tau)$; $E_{2i-1}=E_{2i-1}(\tau)$ [11].

Теорема 3. *В первом порядке по* ϵ *общее решение уравнения* (1) *в окрестности* $u_0(x,\ t)$ *имеет вид* (15), *где* $\alpha_s^{\pm}(t)$ – *координаты двумерного вектора* α_s, *равного*

$$(16)\quad \alpha_s(t) = \alpha_s(0) + M_s^{-1}\int\limits_0^t\langle K[u_0]\ \vec{\psi}^2(x,t',e_s)\rangle\,dt'.$$

Здесь $\vec{\psi}^2$ – *двумерный вектор с координатами* $\psi_{\pm}^2(x,\ t,\ e_s)$, *а матричные элементы не зависящей от t матрицы* M_s

$$(17)\quad M_s^{ij} = \langle w_s^i(x,t),\psi_j^2(x,t,e_s)\rangle,\qquad i,j=\pm.$$

Зависимость параметров u_0 *от* τ *определяется из уравнений*

$$(18)\quad \frac{dE_{2i-1}}{d\tau} = \frac{\langle K[u_0],\ \psi^2(x,t,E_{2i-1})\rangle}{\langle\psi^2(x,t,E_{2i-1})\rangle},$$

$$(19)\quad \frac{d\gamma_s}{d\tau} = \frac{\langle K[u_0],\psi^2(x,t,\gamma_s)\rangle}{\langle\psi^2(x,t,\gamma_s)\rangle}.$$

Приведем еще формулу для $\psi(x,t,\gamma)$, $\gamma\in\Gamma$,

$$\psi(x,t,\gamma) = \exp\left(x\int\limits_\infty^\gamma dp + t\int\limits_\infty^\gamma\omega_3\right)\frac{\theta(A(\gamma)+Ux+Vt+Z)}{\theta(Ux+Vt+Z)},$$

которая отличается на нормировку от формул, приводимых в [1–5].

В работах [12–15] строились асимптотические решения уравнения КдФ, главным членом которых являются конечнозонные решения. Основное внимание уделялось зависимости от медленного времени параметров такого решения. Возникающие при этом уравнения Уизема аналогичны уравнениям (18), (19). Следует отметить, что соответствующие аналоги уравнений (16), (17) получены не были и детальный анализ отвечающих им возбуждений "высших гармоник" не проводился.

Одним из ключевых вопросов теории возмущений для эволюционных уравнений является вопрос о том, на каких временах справедливо полученное разложение, связанный с наличием "вековых членов" в коэффициентах разложения.

Теорема 4. *Коэффициенты разложения* (15), *которые даются формулами* (17), *не содержат вековых членов*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\alpha_s(t)}{t} = 0.$$

Отсюда следует, что разложение (15) справедливо на временах порядка ϵ^{-1}.

Государственный научно-исследовательский энергетический институт
им. Г.М. Кржижановского, Москва

Поступило
23 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П.* – УМН, 1976, т. 31, № 1, с. 55–136. 2. *Кричевер И.М.* – УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 183–208. 3. *Кричевер И.М., Новиков С.П.* – УМН, 1980, т. 35, № 6, с. 47–68. 4. *Дубровин Б.А.* – УМН, 1981, т. 36, № 2, с. 11–75. 5. Теория солитонов/Ред. С.П. Новиков. М.: Наука, 1980. 6. *Новиков С.П.* – Функц. анализ, 1974, т. 8, № 3, с. 54–66. 7. *Lax P.D.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1975, vol. 28, N 1, p. 141–188. 8. *Kaup D.J.* – SIAM J. Appl. Math., 1976, vol. 31, p. 121–129. 9. *Newell A.C.* – J. Math. Phys., 1977, vol. 18, p. 922–940. 10. *Итс А.Р., Матвеев В.Б.* – ТМФ, 1975, т. 23, № 1, с. 51–67. 11. Нелинейные волны/Ред. С. Лейбович, А. Сибасс. М.: Мир, 1977. 12. *Маслов В.П., Доброхотов С.Ю.* – В сб.: Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. 1980, т. 15. 13. *Flashka H., McLaughlin D., Forrest P.* – Physica 3D, 1981, vol. 2, p. 251–266.

УДК 517,518

МАТЕМАТИКА

Л.Д. КУДРЯВЦЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

(Представлено академиком С.М. Никольским 2 XI 1982)

Пусть $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $T > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$. Для всякой измеримой на интервале $(0, T)$ функции $u(t)$ положим

$$\|u\|_{p,\alpha,\beta} = \left(\int_0^T |t^\alpha (T-t)^\beta u(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

$$\|u\|_{p,\alpha,0} = \|u\|_{p,\alpha}, \quad \|u\|_{p,0} = \|u\|_p.$$

Если r – неотрицательное целое, то через $L^r_{p,\alpha,\beta} = L^r_{p,\alpha,\beta}(0, T)$ обозначим совокупность всех функций u: $(0, T) \to \mathbf{R}$, имеющих на интервале $(0, T)$ обобщенные производные [1] порядка r, для которых полунорма $\|u^{(r)}\|_{p,\alpha,\beta}$ конечна. Будем