1982 г. март—апрель *т. 37, вып. 2 (224)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 21 октября 1981 г.

1. Г. Фикера (Италия, Рим) «Краевые задачи для плюригармонических функций».

Пусть Ω — ограниченная область в декартовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ вещественных переменных $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ $(n > 1)$. Предполагается, что Ω является $2n$-мерной клеткой в $\mathbb{R}^{2n}$. Пусть ее граница $\Sigma = \partial\Omega$ задается уравнением $\rho(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = 0$. Считаем, что $\rho > 0$ в Ω, $\rho < 0$ в $\mathbb{R}^{2n} \setminus \overline{\Omega}$. Будем предполагать, что $\rho \in C^m$ $(m \geqslant 1)$ и $|\operatorname{grad} \rho| > 0$ на Σ. Положим $z_h = x_h + iy_h$. Пусть u — плюригармоническая функция в Ω, т. е. u является вещественной частью комплекснозначной функции $w(z_1, \ldots, z_n)$, голоморфной в Ω.

Рассматриваются следующие задачи:

1) Задана $U \in C^0(\Sigma)$; ищется $u \in C^0(\overline{\Omega})$, плюригармоническая в Ω и удовлетворяющая условию $u|_\Sigma = U$ (задача Дирихле для плюригармонических функций).

1′) U задана на $(2n-1)$-мерной клетке $\Delta \subset \Sigma$; ищется u, плюригармоническая в некоторой области Ω^+ $(\Omega^+ \subset \Omega,\ \partial\Omega^+ \supset \Delta)$ и удовлетворяющая условию $u|_\Delta = U$ (локальная плюригармоническая задача).

2) На Σ задана Φ; ищется u, плюригармоническая в Ω и удовлетворяющая условию $\partial u/\partial\nu = \Phi$ на Σ, ν — внутренняя нормаль к Σ (задача Неймана для плюригармонических функций).

При изучении этих задач используются два разных подхода.

Локальный подход состоит в нахождении условий дифференциального характера, которым должна удовлетворять U в окрестности (на Σ) любой точки Σ, для того чтобы U являлась следом на Σ некоторой плюригармонической в Ω функции.

Глобальный подход состоит в определении такого множества Ψ заданных на Σ функций, что U является следом на Σ плюригармонической в Ω функции тогда и только тогда, когда $\int\limits_\Sigma U\psi\, d\sigma = 0$, $\forall \psi \in \Psi$.

Будем говорить, что в точке $z \in \Sigma$ выполняется *(L)-условие*, если существует n таких комплексных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что в точке z справедливы соотношения

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_h}\lambda_h = 0, \qquad \sum_{k,\,h=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_h \partial \bar z_k}\lambda_h\bar\lambda_k < 0.$$

Пусть Δ является $(2n-1)$-мерной клеткой в $\mathbb{R}^{2n}$. Предположим, что $\overline{\Delta} \in C^l$ $(l \geqslant 1)$. Пусть D — линейный дифференциальный оператор порядка l с коэффициентами, непрерывными в замыкании $\overline{\Omega_0}$ некоторой области Ω_0, такой, что $\Delta \subset \overline{\Omega_0}$. Оператор D назовем *касательным* к Δ, если для любой $u \in C^l(\overline{\Omega}_0)$, равной нулю на Δ, выполняется равенство $Du = 0$ на Δ. Оператор D назовем *плюригармоническим*, если для любого шара I, содер-

Теория может быть сформулирована в виде n уравнений Гамильтона — Якоби путем замены импульсов p_{ia}, входящих в условия связи, на выражения $\partial S/\partial x^i_a - e_a A_i(x_a)$. Для угла рассеяния в системе двух частиц могут быть написаны явные формулы при известном взаимодействии. Подробности см. в [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Клепиков, А. Н. Шатний. О формулировке релятивистской механики систем взаимодействующих частиц.— Теор. и матем. физика, 1981, **46**, с. 50—63.

Заседание 18 ноября 1981 г.

1. И. М. Кричевер «Спектральная теория разностных операторов, алгебраическая геометрия и модель Пайерлса».

Развитая в последние годы теория «конечнозонного» или алгебро-геометрического интегрирования естественно объединяет идеи теории нелинейных уравнений, спектральной теории линейных операторов с периодическими коэффициентами и методы алгебраической геометрии (см. обзоры [1] — [4]). Особенно тесной эта связь была в начальный период, когда для построения периодических (и квазипериодических) решений уравнения Кортевега — де Фриза был использован алгебро-геометрический подход к спектральной теории периодического оператора Шрёдингера. Впоследствии успехи алгебро-геометрического языка (особенно для двумерных уравнений) привели к тому, что спектральная теория отошла в тень. Приблизительно полтора года тому назад была обнаружена возможность приложения алгебро-геометрического подхода к спектральной теории в некоторых задачах статистической физики (см., например, [5]).

В докладе излагались результаты, полученные Бразовским, Дзялошинским и докладчиком при интегрировании модели Пайерлса (полный текст работы будет вскоре опубликован в ЖЭТФ). На основе модели Пайерлса строится теория, описывающая характерные особенности органических проводников (наличие периодических сверхструктур, волн зарядовой плотности, пайерлсовская неустойчивость металлической фазы).

Модель описывает самосогласованное поведение электронов и атомов ионного остова. Состояние атомов характеризуется их координатами на прямой x_n, $x_n < x_{n+1}$, и внутренними координатами v_n. Уровни энергии электронов определяются периодическим спектром $E_1 \leqslant E_2 \leqslant \ldots \leqslant E_N$ разностного оператора Шрёдингера

$$L\psi_n = c_n\psi_{n+1} + v_n\psi_n + c_{n-1}\psi_{n-1} = E\psi_n;$$

$$c_n = c_{n+N}, \quad v_n = v_{n+N}, \quad c_n = e^{x_n - x_{n+1}}.$$

Энергия системы при нулевой температуре равна

$$W\{c_n, v_n\} = \sum_{i=1}^{m} E_i + \varkappa \sum_{n=0}^{N-1} \left(c_n^2 + \frac{v_n^2}{2}\right) - P \sum_{n=0}^{N-1} \ln c_n,$$

где $m/N = \rho$ — плотность электронов наряду с $\varkappa$ и P — внешние фиксированные параметры.

С чисто математической точки зрения задача состоит в минимизации функционала $W\{c_n, v_n\}$ по всем наборам c_n и v_n.

Теорема 1. *Экстремалям функционала, т. е. наборам c_n, v_n, для которых $\frac{\partial W}{\partial c_n} = \frac{\partial W}{\partial v_n} = 0$, соответствуют операторы L, имеющие не более трех разрешенных зон спектра на всей прямой. (Общий оператор с периодом N имеет N разрешенных зон.)*

При доказательстве теоремы используются многочисленные алгебро-геометрические соотношения для спектральной плотности и ее вариаций.

Теорема 2. *В термодинамическом пределе, $N \to \infty$, минимуму W отвечает оператор L, имеющий две разрешенные зоны спектра. При этом все уровни энергии, лежащие в нижней зоне $e_1 \leqslant E \leqslant e_2$, заполнены, а в верхней $e_3 \leqslant E \leqslant e_4$ пусты, $e_2 < e_3$. (Последнее означает, что в основном состоянии система является диэлектриком.) Концы* *зон* $e_1, \ldots, e_4$ *определяются из уравнений*

$$(1)\quad \begin{cases} \varkappa=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{e_1}^{e_2}\frac{dE}{\sqrt{-R}};\ 0=\int_{e_1}^{e_2}\frac{E-\frac{s_1}{2}}{\sqrt{R}}\,dE;\ R=R(E)=\prod_{i=1}^{4}(E-E_i),\\ P=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{e_1}^{e_2}\frac{E^2-\frac{s_1}{2}E+\frac{s_2}{2}-\frac{s_1^2}{8}}{\sqrt{-R}}\,dE;\ s_1=\sum e_i,\quad s_2=\sum_{i>j}e_ie_j,\\ \rho=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{e_1}^{e_2}\frac{E+a}{\sqrt{-R}}\,dE;\ 0=\int_{e_2}^{e_3}\frac{E+a}{\sqrt{R}}\,dE. \end{cases}$$

Уравнения (1) существенно упрощаются при переходе к эллиптическим функциям Вейерштрасса. Через эти же функции явно выражаются соответствующие значения v_n и c_n. Из-за недостатка места, здесь эти окончательные выражения и формулы не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, **31**:1, с. 55—136.

[2] И. М. Кричевер. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, **32**:6, с. 183—208.

[3] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.— УМН, 1980, **35**:6, с. 47—68.

[4] Б. А. Дубровин. Тэта-функции и нелинейные уравнения.— УМН, 1981, **36**:2, с. 11—80.

[5] С. А. Бразовский, С. А. Гордюнин, Н. Н. Кирова. Точное решение модели Пайерлса с произвольным числом электронов на элементарную ячейку.— Письма в ЖЭТФ, 1980, **31**:8, с. 486—490.

Заседание 25 ноября 1981 г.

1. Н. Ф. Морозов (Ленинград) «Математические аспекты теории хрупкого разрушения».

Излагаются основы математического аппарата, применяемого в современной теории хрупкого разрушения.

Рассматривается анализ напряженного состояния в окрестности вершины трещины в линейной и нелинейной постановках. Обсуждается возможный вид инвариантов типа джи-интеграла в теории упругости.

Рассматриваются формы математической интерпретации реальных трещин и особенности, вносимые различными формами представления в описание процесса хрупкого разрушения.

Предлагается учитывать зернистость материала с помощью привлечения моментной теории упругости. Демонстрируются преимущества моментной теории упругости; в частности, рассматривается задача Карозерса на основе моментной теории.

В заключение формулируются математические нерешенные актуальные задачи хрупкого разрушения, в том числе

1. Вопрос о числе независимых инвариантов типа джи-интеграла.

2. О возможности применения методики Райса вычисления сингулярности в вершине трещины к углам, не равным 2π.

3. Определение асимптотики в окрестности вершины трещины в плоском геометрически нелинейном случае.

4. Построение общей теории устойчивости и определение форм равновесия плоских трещин по аналогии с теорией тонких стержней.

5. Определение точек бифуркации в задаче о растяжении нелинейной пластинки Кармана, ослабленной трещиной.