УДК 517.957+512.7

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

И. М. Кричевер

ВВЕДЕНИЕ

За последние 10—15 лет одним из наиболее мощных инструментов в исследовании нелинейных явлений стал, так называемый, метод обратной задачи, применимый к ряду фундаментальных уравнений математической физики. Развитие этого метода (см. [17, 43, 53] и цитированные там обзоры) привело к тому, что концепция солитонов стала одной из основополагающих в современной математической и теоретической физике.

Начиная с работы С. П. Новикова [40], в рамках метода обратной задачи бурно развивались и продолжают развиваться методы построения решений нелинейных уравнений, широко использующие аппарат классической алгебраической геометрии римановых поверхностей. (Различные этапы развития алгебро-геометрического или «конечнозонного» интегрирования представлены в обзорах [13, 15, 25, 35]). Методы алгебраической геометрии позволяют естественно ввести понятие периодических и квазипериодических аналогов солитонных и многосолитонных решений и получить для них явные выражения в терминах тэта-функций Римана.

Целью настоящей работы является изложение основных идей «конечнозонного интегрирования» в целом и подробный анализ приложений развитой техники к некоторым задачам, в основе которых лежит теория эллиптических функций.

Центральным звеном алгебро-геометрических конструкций решений нелинейных уравнений является построение функций Бейкера—Ахиезера [13, 25, 26, 35] — функций, обладающих специфическими аналитическими свойствами на римановых поверхностях. Оказывается, что введенное в работах [27, 37, 35, 36] понятие векторного аналога функции Бейкера—Ахиезера нетривиализуется даже на обычной комплексной плоскости (римановой поверхности рода ноль). Более того, оно позволяет [28] для уравнений, допускающих представление «нулевой кривизны» общего положения, строить все решения, не ограничиваясь каким-либо фиксированным функциональным классом (быстроубывающих, периодических или других функций). Для этих уравнений доказывается аналог представления Даламбера всех решений в виде нелинейной суперпозиции волн, бегущих по характеристикам. Роль суперпозиции выполняет вспомогательная линейная задача Римана.

Представление «нулевой кривизны» пучков, рационально зависящих от спектрального параметра, предложенное В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [19], является, пожалуй, наиболее общей схемой построения нелинейных интегрируемых уравнений, которая включает все известные случаи, за исключением нескольких изолированных примеров. В первой главе работы вместе с изложением конструкции упомянутого выше аналога представления Даламбера решений таких уравнений общего положения приводится общий анзатц, выделяющий конечнозонные решения.

Наряду с общей алгебро-геометрической конструкцией «конечнозонных» решений нелинейных уравнений, понятие конечнозонного интегрирования включает и важнейшие элементы спектральной теории Флоке операторов с периодическими коэффициентами. В тех случаях, когда вспомогательная спектральная задача для нелинейного уравнения является самосопряженной, «конечнозонные» потенциалы выделяются условием конечности числа лакун в спектре оператора (что и дало название этим решениям). Римановы поверхности возникают при таком подходе как поверхности, на которых становятся однозначными блоховские функции — собственные функции линейного оператора и оператора монодромии (оператора сдвига на период). Важным наблюдением современной теории является совпадение понятий блоховской функции и функций типа Бейкера—Ахиезера.

Во второй главе излагается алгебро-геометрическая спектральная теория разностного оператора Шрёдингера и уравнения Штурма—Лиувилля с периодическими потенциалами. Эта теория, возникшая из нужд теории нелинейных уравнений, за последние два года нашла широкое применение в задачах физики твердого тела, связанных с теорией квазиодномерных проводников [3—7, 10, 11, 30]. Эта теория обычно строится на основе модели Пайерлса [41].

Модель Пайерлса описывает самосогласованное поведение атомов решетки, характеризуемых положением на прямой x_n, внутренней степенью свободы v_n, и электронов.

В модели пренебрегают прямым межэлектронным взаимодействием. Спектр электронов определяется как спектр E_i^+ периодического оператора Шрёдингера

$$L\psi_n = c_n\psi_{n+1} + v_n\psi_n + c_{n-1}\psi_{n-1} = E\psi_n$$

с периодическими граничными условиями

$$\psi_{n+N}(E_i^+)=\psi_n(E_i^+), \quad \text{где} \quad c_n=e^{x_n-x_{n+1}}, \quad c_{n+N}=c_n.$$

Если в системе имеется m электронов, то при нулевой температуре электроны займут m нижних уровней спектра (без учета спинового вырождения). Модель учитывает упругую деформацию решетки.

Функционал Пайерлса, представляющий общую энергию системы, приходящуюся на один узел, имеет вид

$$\mathscr{H}=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{m} E_i^+ + \sum_{n=0}^{N-1} \Phi(c_n, v_n)\right),$$

где $\Phi(c, v)$ — потенциал упругой деформации. Задача состоит в минимизации этого нелинейного и нелокального функционала по переменным v_n, c_n.

В третьей главе излагаются результаты работ [7, 11, 29, 30], в которых для некоторых модельных потенциалов (например, $\Phi=\varkappa\left(c^2+\frac{v^2}{2}\right)-P\ln c$) доказывается, что минимум реализуется на конфигурациях, в которых $c_n=f_1(n)$, $v_n=f_2(n)$, где $f_{1,2}$ — эллиптические функции, предъявляемые явно. Найдена энергия основного состояния. Рассмотрены возмущения интегрируемых случаев.

Глава 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

§ 1. Представление нулевой кривизны

Начиная с работы Лакса [6], показавшего, что в основе механизма интегрирования уравнения КдФ

$$4u_t=6uu_x+u_{xxx}, \tag{1.1}$$

открытого в работе [67], лежит возможность представления этого уравнения в виде

$$\dot{L}=[A, L]=AL-LA, \tag{1.2}$$

где

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x, t); \quad A=\frac{\partial}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{3}{4}u_x, \tag{1.3}$$

все схемы построений интегрируемых уравнений и их решений опираются на тот или иной аналог коммутационного представления (1.2).

Первое и наиболее естественное обобщение уравнения (1.2) заключается в том, что в качестве L и A можно выбрать в нем произвольные дифференциальные операторы

$$L=\sum_{i=0}^{n} u_i(x, t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}; \quad A=\sum_{i=0}^{m} v_i(x, t)\frac{\partial^i}{\partial x^i} \tag{1.4}$$

с матричными или скалярными коэффициентами.

Пусть, далее, для определенности L и A операторы со скалярными коэффициентами (матричный случай отличается от скалярного незначительными техническими усложнениями). Тогда заменой переменной и сопряжением $\tilde{L}=fLf^{-1}$, $\tilde{A}=fAf^{-1}$, где f — подходящая функция, можно считать, что $v_m=u_n=1$, $v_{m-1}=u_{n-1}=0$. Уравнения (1.2) в этом случае представляют собой систему $n+m-2$ уравнений на неизвестные $u_i(x, t)$, $i=0, \ldots n-2$; $v_j(x, t)$, $j=0, \ldots, m-2$. Оказывается, что из первых $(m-1)$ уравнений, полученных приравниванием нулю коэффициентов при $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$, $k=m+n-3, \ldots, n-1$, в правой части (1.2), последовательно находятся $v_j(x, t)$, которые являются дифференциальными полиномами от $u_i(x, t)$ и некоторых произвольных констант h_j (см., например, [26]). Подставляя полученные выражения в оставшиеся $n-1$ уравнение, получим систему эволюционных уравнений уже лишь на коэффициенты оператора L, которые и называются уравнениями типа Лакса. Существует множество схем (см., например, [8, 18, 49, 53]), которые тем или иным способом реализуют редукцию общего уравнения (1.2) к уравнениям на коэффициенты оператора L.

Система (1.2) представляет собой пучок уравнений Лакса, параметризованных константами h_j. Например, если

$$L=\partial^2+u, \quad A=\partial^3+v_1\partial+v_2, \quad \partial=\frac{\partial}{\partial x}, \tag{1.5}$$

то

$$v_1=\frac{3}{2}u+h_1, \quad v_2=\frac{3}{4}u_x+h_2, \tag{1.6}$$

и уравнение (1.2) эквивалентно пучку уравнений

$$4u_t=u_{xxx}+6uu_x+4h_1u_x \tag{1.7}$$

(при $h_1=0$ получим стандартное уравнение КдФ).

С каждым оператором L связана целая иерархия уравнений типа Лакса, которые представляют собой редукции к уравнениям на коэффициенты оператора L уравнений (1.2) с операторами A разных порядков. Одним из важнейших фактов в теории интегрируемых уравнений является коммутативность всех уравнений, входящих в общую иерархию.

Для уравнения КдФ соответствующие уравнения называются «высшими уравнениями КдФ». Они имеют вид

$$u_\tau = \sum_{k=1}^{n} c_k Q_k(u, \ldots, u^{2k+1})$$

и являются условием коммутативности оператора Штурма — Лиувилля с операторами $\frac{\partial}{\partial t} - A$ (т. е. уравнения (1.2)), где A имеет порядок $2n+1$,

Для высших аналогов уравнения КдФ в работе [40] было впервые введено и активно использовалось другое представление — представление типа Лакса на матричных функциях, зависящих от дополнительного спектрального параметра.

Для общего уравнения (1.2) такое λ-представление получается следующим образом.

Рассмотрим матричную задачу первого порядка

$$\left[\frac{d}{dx} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ \lambda + u_0, & u_1 \ldots & u_{n-2} & 0 \end{pmatrix}\right] Y = \left(\frac{d}{dx} + \tilde{L}(x, \lambda)\right) Y = 0, \quad (1.8)$$

эквивалентную уравнению

$$Ly = \lambda y. \quad (1.9)$$

Действуя оператором A на координаты вектора $Y_l = \frac{\partial^l}{\partial x^l} y$ и используя уравнение (1.9) для выражения $\partial^n y$ через младшие производные и параметр λ, получим, что на пространстве решений (1.9) оператор $\frac{\partial}{\partial t} - A$ эквивалентен оператору

$$\left(\frac{d}{dt} + \tilde{A}(\lambda, x, t)\right) Y = 0, \quad (1.10)$$

где матрица $\tilde{A}$ полиномиально зависит от параметра λ. Матричные элементы $\tilde{A}$ являются дифференциальными полиномами от $u_l(x, t)$ (полиномами от u_l и их производных).

Из (1.2) вытекает, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{L}, \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{A}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{A} - \frac{\partial}{\partial t}\tilde{L} + [\tilde{L}, \tilde{A}] = 0. \quad (1.11)$$

Для уравнения КgФ матрицы (1.11) $\tilde{L}$ и $\tilde{A}$ имеют вид

$$\tilde{L} = -\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \lambda - u & 0 \end{array}\right), \quad (1.12)$$

$$\tilde{A} = -\left(\begin{array}{cc} -\frac{u_x}{4}, & \lambda + \frac{u}{2} \\ \hline \lambda^2 - \frac{u}{2}\lambda - \frac{u^2}{2} - \frac{u_{xx}}{4}, & \frac{u_x}{4} \end{array}\right). \quad (1.13)$$

Таким образом, уравнения типа Лакса являются частным случаем более общих уравнений — уравнений, допускающих представление «нулевой кривизны», которое было введено в [19], как уже говорилось во введении, в качестве общей схемы продуцирования одномерных интегрируемых уравнений.

Пусть $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ — произвольные рациональные матричные функции, зависящие рационально от параметра λ:

$$\begin{aligned} U(x, t, \lambda) &= u_0(x, t) + \sum_{k=1} \sum_{s=1}^{h_k} u_{ks}(x, t)(\lambda - \lambda_k)^{-s}, \\ V(x, t, \lambda) &= v_0(x, t) + \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{d_r} v_{rs}(x, t)(\lambda - \mu_r)^{-s}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Условие совместности линейных задач

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + U(x, t, \lambda)\right) \Psi(x, t, \lambda) = 0, \tag{1.15}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V(x, t, \lambda)\right) \Psi(x, t, \lambda) = 0 \tag{1.16}$$

представляет собой уравнение «нулевой кривизны»

$$U_t - V_x + [V, U] = 0, \tag{1.17}$$

которое должно выполняться при всех λ. Оно эквивалентно системе $\left(\sum_k h_k\right) + \left(\sum_r d_r\right) + 1$ матричных уравнений на неизвестные функции $u_{ks}(x, t)$, $v_{rs}(x, t)$, $u_0(x, t)$, $v_0(x, t)$. Эти уравнения возникают при приравнивании нулю всех сингулярных членов левой части (1.17) в точках $\lambda = \lambda_k$ и $\lambda = \mu_r$, а также свободного члена, равного $u_{0t} - v_{0x} + [v_0, u_0]$.

Число уравнений на одно матричное уравнение меньше числа неизвестных матричных функций. Эта недоопределенность связана с «калибровочной симметрией» уравнений (1.17). Если $g(x, t)$ — произвольная невырожденная матричная функция, то преобразование

$$\begin{aligned} U &\to \partial_x g \cdot g^{-1} + gUg^{-1}, \\ V &\to \partial_t g g^{-1} + gVg^{-1}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

называемое «калибровочным», переводит решения (1.17) в решения того же уравнения.

Выбор условий на матрицы $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$, совместных с уравнениями (1.17) и разрушающих калибровочную симметрию, называется фиксацией калибровки. Простейшей калибровкой являются условия $u_0(x, t) = v_0(x, t) = 0$.

Как и в рассмотренном выше случае уравнений коммутации дифференциальных операторов, уравнения (1.17) являются, по существу, производящими для целого семейства интегрируемых уравнений. Уравнения (1.17) могут быть редуцированы к пучку уравнений, параметризованных произвольными константами, на коэффициенты лишь $U(x, t, \lambda)$. При этом, меняя число и кратности полюсов V, будем получать иерархии коммутирующих потоков, связанных с $U(x, t, \lambda)$.

Важным при выделении из (1.17) некоторых специальных уравнений является вопрос о редукции этих уравнений, т. е. описание инвариантных подмногообразий у (1.17). Ограничения уравнений движения на эти подмногообразия, записанные в подходящих координатах, приводят часто к уравнениям, сильно отличающимся от общего вида. При этом различие проявляется не только во внешней форме уравнений, но и в поведении их решений.

Следует отметить, что калибровочные преобразования, переводящие одно инвариантное подмногообразие в другое, переводят друг в друга соответствующие интегрируемые системы, каждая из которых отвечает разным физическим задачам.

Оставляя в стороне дальнейший анализ вопросов редукции и калибровочной эквивалентности систем, который можно найти, например, в работах [19, 18, 63], рассмотрим далее уравнения (1.17) в целом, зафиксировав в них для определенности калибровку, в которой $u_0=v_0=0$.

Отметим еще, что вопросы редукции и описания инвариантных подмногообразий уравнений (1.17) сводятся к описанию различных орбит иприсоединенного представления алгебры токов, в рамках которой естественно вводится гамильтонова теория этих уравнений (см. [57]).

Пусть $\Psi(x, t, \lambda)$ — решение уравнений (1.15, 1.16), которые совместны, если U и V есть решения уравнений (1.17). Матричная функция $\Psi(x, t, \lambda)$ определена однозначно, если зафиксированы начальные условия, например, $\Psi(0, 0, \lambda)=1$. При этом $\Psi(x, t, \lambda)$ аналитическая функция λ всюду, кроме полюсов λ_k, μ_r функций U и V, в которых она имеет существенные особенности.

Чтобы выяснить вид особенностей Ψ в этих точках, поставим следующую задачу Римана:

Найти аналитическую при всех $\lambda \neq \varkappa$ функцию $\Phi_\varkappa$, которая в окрестности точки $\lambda=\varkappa$ представима в виде

$$\Phi_\varkappa(x, t, \lambda)=R_\varkappa(x, t, \lambda)\Psi(x, t, \lambda), \tag{1.19}$$

где

$$R_\varkappa(x, t, \lambda)=\sum_{s=0}^{\infty} R_{\varkappa s}(x, t)(\lambda-\varkappa)^s \tag{1.20}$$

регулярная в окрестности $\lambda=\varkappa$ матричная функция.

Условие представимости $\Phi_\varkappa$ в виде (1.19) означает, что на малой окружности Γ: $|\lambda-\varepsilon|=\varepsilon$ надо поставить стандартную задачу Римана об отыскании аналитических вне и внутри контура функций $\Phi_\varkappa$ и $R_\varkappa$, связанных на Γ соотношением (1.19). Тогда $\Phi_\varkappa$ внутри контура, по определению, равна $R_\varkappa \Psi$.

Из общих теорем о разрешимости задачи Римана [41] следует, что $\Phi_\varkappa$ существует и однозначно определяется условием нормировки

$$\Phi_\varkappa(x, t, \infty) = 1. \tag{1.21}$$

Решение задачи Римана с любым контуром стандартным образом сводится к решению системы линейных сингулярных уравнений с ядрами Коши [39].

Если $\varkappa \neq \lambda_k$, $\varkappa \neq \mu_r$, то $\Phi_\varkappa$ аналитична всюду и значит $\Phi_\varkappa = 1$. Пусть $\varkappa$ совпадает с одной из точек λ_k или μ_r. Рассмотрим логарифмические производные $\partial_x \Phi_\varkappa \Phi_\varkappa^{-1}$ и $\partial_t \Phi_\varkappa \Phi_\varkappa^{-1}$. Они являются регулярными функциями λ при $\lambda \neq \varkappa$. Из (1.19) и из уравнений (1.15, 1.16), которым подчиняется Ψ, следует, что эти логарифмические производные имеют полюса при $\lambda = \varkappa$ кратности, равной кратностям полюсов U и V в этой точке, соответственно. Учитывая равенство (1.21), приходим окончательно к следующему утверждению.

Лемма 1.1. Функция $\Phi_\varkappa$ удовлетворяет уравнениям

$$\partial_x \Phi_\varkappa(x, t, \lambda) = \\ = U_\varkappa(x, t, \lambda)\Phi_\varkappa(x, t, \lambda) = \left(\sum_{s=1}^{h} \tilde{u}_{\varkappa s}(x, t)(\lambda - \varkappa)^{-s}\right)\Phi_\varkappa, \tag{1.22}$$

$$\partial_t \Phi_\varkappa(x, t, \lambda) = \\ = V_\varkappa(x, t, \lambda)\Phi_\varkappa(x, t, \lambda) = \left(\sum_{s=1}^{d} \tilde{v}_{\varkappa s}(x, t)(\lambda - \varkappa)^{-s}\right)\Phi_\varkappa, \tag{1.23}$$

где h и d кратности полюсов U и V в точке $\lambda = \varkappa$.

Следствие. Если $\lambda_k \neq \mu_r$ для всех k, r, то функции

$$\Phi_{\lambda_k}(x, t, \lambda) = \Phi_{\lambda_k}(x, \lambda); \quad U_{\lambda_k}(x, t, \lambda) = U_{\lambda_k}(x, \lambda) \tag{1.24}$$

не зависят от t. Аналогично

$$\Phi_{\mu_r}(x, t, \lambda) = \Phi_{\mu_r}(t, \lambda); \quad V_{\mu_r}(x, t, \lambda) = V_{\mu_r}(t, \lambda). \tag{1.25}$$

Из этого утверждения видно, что в случае несовпадающих полюсов задача Римана (1.19) играет роль разделения переменных.

В общем случае совпадающих полюсов λ_k и μ_r изложенная конструкция сопоставляет каждому решению уравнений (1.17) U, V набор функций $U_\varkappa$, $V_\varkappa$, определенных из (1.22, 1.23)

$$U, V \to \{U_\varkappa, V_\varkappa, \varkappa = \lambda_k, \mu_r\}. \tag{1.26}$$

При этом $U_\varkappa$, $V_\varkappa$ удовлетворяют тем же уравнениям (1.17), но имеют полюсы в отличие от U и V только в одной точке.

Нашей дальнейшей задачей будет построение обратного к

(1.26) преобразования и доказательство эквивалентности уравнений (1.17) с произвольными рациональными функциями набору уравнений (1.17) с полюсами в единственных точках.

Итак, пусть имеются решения $U_{\varkappa_r}$ и $V_{\varkappa_r}$ уравнений (1.17) с полюсами в точках $\lambda=\varkappa_r$, соответственно. Обозначим через $\Phi_{\varkappa_r}(x, t, \lambda)$ решения уравнений (1.22), (1.23), нормированные условием $\Phi_{\varkappa_r}(0, 0, \lambda)\equiv 1$.

Обозначим через $\Psi(x, t, \lambda)$ функцию, аналитическую по λ всюду, кроме точек $\varkappa_r$, и представимую в окрестности этих точек в виде

$$\Psi(x, t, \lambda)=R_{\varkappa_r}(x, t, \lambda)\,\Phi_{\varkappa_r}(x, t, \lambda). \tag{1.27}$$

Построение Ψ эквивалентно решению задачи Римана на наборе окружностей $|\lambda-\varkappa_r|=\varepsilon$ с центрами в точках $\varkappa_r$.

Лемма 1.2. Существует единственное решение Ψ поставленной задачи, нормированное условием $\Psi(x, t, \infty)=1$.

Теорема 1.1. Функция $\Psi(x, t, \lambda)$ удовлетворяет уравнениям (1.15, 1.16), где U и V имеют вид (1.14) и

$$\begin{gathered}\sum_{s=1}^{h_k} u_{ks}(x, t)(\lambda-\lambda_k)^{-s}\equiv R_{\lambda_k}U_{\lambda_k}R^{-1}_{\lambda_k} (\mathrm{mod}\, O(1)),\\ \sum_{s=1}^{d_r} v_{rs}(x, t)(\lambda-\mu_r)^{-s}\equiv R_{\mu_k}V_{\mu_k}R^{-1}_{\mu_k} (\mathrm{mod}\, O(1)),\end{gathered} \tag{1.28}$$

где λ_k,μ_r — это точки $\varkappa_r$, в которых $U_{\varkappa_k}$ и $V_{\varkappa_r}$ имеют полюса, соответственно. Кратности h_k и d_r равны кратностям полюсов $U_{\varkappa_r}$ и $V_{\varkappa_r}$, соответственно. Все решения уравнений (1.17) даются предложенной конструкцией.

Доказательство теоремы сводится к рассмотрению логарифмических производных Ψ, как и при выводе уравнений на $\Phi_\varkappa$.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда заданы произвольные функции $u_{ks}(x)$, $1\leqslant k\leqslant n$, $1\leqslant s\leqslant h_k$; $v_{rs}(t)$, $1\leqslant r\leqslant m$, $1\leqslant s\leqslant d_r$. Тогда функции

$$\begin{gathered}U_{\lambda_k}(x, \lambda)=\sum_{s=1}^{h_k} u_{ks}(x)(\lambda-\lambda_k)^{-s},\\ V_{\mu_r}(t, \lambda)=\sum_{s=1}^{d_r} \tilde{v}_{rs}(t)(\lambda-\mu_r)^{-s},\end{gathered} \tag{1.29}$$

где $\lambda_k\neq\mu_r$ — произвольные наборы точек, однозначно определяют (1.22, 1.23) функции $\Phi_{\lambda_k}(x, \lambda)$ и $\Phi_{\mu_r}(t, \lambda)$.

По лемме 1.2 и теореме 1.1 перечисленные данные определяют решения уравнений (1.17), в которых полюса U и V не совпадают. Кроме того, теорема 1.1 утверждает, что эта конструкция дает все решения таких уравнений.

Простейшим случаем уравнений (1.17) с несовпадающими полюсами у U и V являются уравнения главного кирального поля

$$U_\eta=\frac{1}{2}[V, U], \quad V_\xi=\frac{1}{2}[U, V], \tag{1.30}$$

которые эквивалентны условию совместности уравнений

$$\left(\partial_\xi+\frac{U}{\lambda-1}\right)\Psi=0; \quad \left(\partial_\eta-\frac{V}{\lambda+1}\right)\Psi=0, \tag{1.31}$$

где $\xi=x'-t'$, $\eta=x'+t'$ — конусные переменные.

Здесь $U(\xi, \eta)$ и $V(\xi, \eta)$ являются токами кирального поля $G(\xi, \eta)$: $U=G_\xi G^{-1}$, $V=G_\eta G^{-1}$. Уравнение (1.30) дает

$$2G_{\xi\eta}=G_\xi G^{-1}G_\eta+G_\eta G^{-1}G_\xi. \tag{1.32}$$

Последние уравнения являются лагранжевыми с лагранжианом

$$L=\mathrm{Sp}\,(G_\xi G^{-1}G_\eta G^{-1}). \tag{1.33}$$

Теорема 1.2. Изложенная конструкция дает все решения уравнений главного кирального поля. При этом начальные условия $u(\xi)$ и $v(\eta)$ в (1.29), которые определяют решения $U(\xi, \eta)$ и $V(\xi, \eta)$, совпадают со значениями U и V на характеристиках — $u(\xi)=U(\xi, 0)$ и $v(\eta)=V(0, \eta)$.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$u_{\xi\eta}=4\sin u. \tag{1.34}$$

Оно эквивалентно условию совместности задач

$$\partial_\xi\Psi=\left(\begin{array}{c|c} \frac{iu_\xi}{2} & 1 \\ \hline \lambda^{-1} & -\frac{iu_\xi}{2} \end{array}\right)\Psi, \tag{1.35}$$

$$\partial_\eta\Psi=\left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda e^{-iu} \\ \hline e^{iu} & 0 \end{array}\right)\Psi. \tag{1.36}$$

Как и для уравнений кирального поля линейные задачи (1.35, 1.36) имеют в коэффициентах по одному несовпадающему простому полюсу. Однако система (1.35, 1.36) записана в иной калибровке и отвечает выделению в общем двухполюсном уравнении инвариантного многообразия. Это приводит к незначительному изменению общей конструкции, которое для полноты мы приведем ниже.

Пусть $u(\xi, \eta)$ — произвольное решение уравнения (1.34). Тогда существует единственное решение уравнений (1.35, 1.36) такое, что $\Psi(0, 0, \lambda)=1$. Функция $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$ при всех ξ и η аналитична по λ всюду, кроме точек $\lambda=0$, $\lambda=\infty$. Как и ранее, для того, чтобы найти вид существенных особенностей Ψ в этих точках, поставим следующие задачи Римана.

Найти аналитическую вне $\lambda=\infty$ функцию $\Phi_\infty(\xi, \eta, \lambda)$, которая в окрестности $\lambda=\infty$ представима в виде

$$\Phi_\infty(\xi, \eta, \lambda)=R_\infty(\xi, \eta, \lambda)\Psi(\xi, \eta, \lambda), \tag{1.37}$$

где R_∞ — аналитична в этой окрестности.

Функция Φ_∞ существует и единственна, если наложить на нее условия нормировки: $\Phi_\infty(\xi, \eta, 0)$ — нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, т. е. Φ_∞ при $\lambda=0$ имеет вид:

$$\Phi_\infty(\xi, \eta, 0)=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \alpha & 1 \end{array}\right). \tag{1.38}$$

Это три линейных условия на Φ_∞. Еще одно условие наложим, потребовав, чтобы $R_\infty(\xi, \eta, \infty)$ была верхнетреугольной матрицей. Так как $\det\Psi=1$, то $R_\infty(\xi, \eta, \infty)$ будет иметь вид:

$$R_\infty(\xi, \eta, \infty)=\left(\begin{array}{c|c} g & g_1 \\ \hline 0 & g^{-1} \end{array}\right). \tag{1.39}$$

Рассмотрим логарифмические производные Φ_∞. Из (1.37) следует, что в окрестности $\lambda=\infty$

$$(\partial_\xi\Phi_\infty)\Phi_\infty^{-1}=\partial_\xi R_\infty R_\infty^{-1}+R_\infty\left(\begin{array}{c|c} \frac{iu_\xi}{2} & 1 \\ \hline \lambda^{-1} & -\frac{iu_\xi}{2} \end{array}\right)R_\infty^{-1}. \tag{1.40}$$

Отсюда $\partial_\xi\Phi_\infty\cdot\Phi_\infty^{-1}$ регулярна в окрестности $\lambda=\infty$, а ее значение в этой точке есть верхнетреугольная матрица. Так как $\partial_\xi\Phi_\infty\Phi_\infty^{-1}$ регулярна всюду, то она является константой. Кроме того, из (1.38) вытекает, что

$$\partial_\xi\Phi_\infty\cdot\Phi_\infty^{-1}|_{\lambda=0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_\xi & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.41}$$

Значит $\partial_\xi\Phi_\infty=0$.

Так как Φ_∞ не зависит от ξ, то

$$\Phi_\infty(\eta, \lambda)=R_\infty(0, \eta, \lambda)\Psi(0, \eta, \lambda). \tag{1.42}$$

Функция $\Psi(0, \eta, \lambda)$ имеет лишь одну существенную особую точку $\lambda=\infty$ и удовлетворяет условию (1.38). Из единственности Φ_∞ следует, что

$$\Phi_\infty(\eta, \lambda)=\Psi(0, \eta, \lambda). \tag{1.43}$$

Из (1.36) вытекает, что $\Phi_\infty(\eta, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_\eta\Phi_\infty=\begin{pmatrix} 0, & \lambda e^{-iu_1} \\ e^{iu_1}, & 0 \end{pmatrix}\Phi_\infty, \tag{1.44}$$

где $u_1(\eta)=u(0, \eta)$.

Аналогично рассмотрим функцию $\Phi_0(\xi, \eta, \lambda)$, регулярную во всей расширенной комплексной плоскости, кроме точки $\lambda=0$, в окрестности которой она представима в виде

$$\Phi_0(\xi, \eta, \lambda) = R_0(\xi, \eta, \lambda)\Psi(\xi, \eta, \lambda), \tag{1.45}$$

где R_0 — регулярна в этой окрестности.

Условия нормировки, однозначно определяющие Φ_0, выберем следующими. Матрица $\Phi_0(\xi, \eta, \infty)$ — верхнетреугольна, а $R_0(\xi, \eta, 0)$ имеет вид (1.38).

В окрестности $\lambda=0$ имеем, согласно (1.45),

$$\partial_\eta \Phi_0 \Phi_0^{-1} = \partial_\eta R_0 R_0^{-1} + R_0 \begin{pmatrix} 0 & \lambda e^{-iu} \\ e^{iu} & 0 \end{pmatrix} R_0^{-1}. \tag{1.46}$$

Отсюда следует, что $\partial_\eta \Phi_0 \Phi_0^{-1}$ регулярна всюду, а значит константа. Из условий нормировки и (1.46) следует, что $\partial_\eta \Phi_0 \Phi_0^{-1}|_{\lambda=0}$ может иметь ненулевым лишь левый нижний элемент. Он равен нулю, поскольку $\Phi_0(\xi, \eta, \infty)$ — верхнетреугольна. Отсюда $\partial_\eta \Phi_0 = 0$ или $\Phi_0(\xi, \eta, \lambda) = \Phi_0(\xi, \lambda)$. Дословно повторяя рассуждения с Φ_∞, получим, что $\Phi_0(\xi, \lambda) = \Psi(\xi, 0, \lambda)$ и

$$\partial_\xi \Phi_0 = \begin{pmatrix} w & 1 \\ \lambda^{-1} & -w \end{pmatrix} \Phi_0, \tag{1.47}$$

где $w(\xi) = \frac{i}{2} u_\xi(\xi, 0)$.

Таким образом доказана

Лемма 1.3. Решения Φ_∞ и Φ_0 поставленных задач Римана зависят лишь от η и ξ, соответственно, $\Phi_\infty = \Phi_\infty(\eta, \lambda)$, $\Phi_0 = \Phi_0(\xi, \lambda)$ и удовлетворяют уравнениям (1.44, 1.47).

Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть заданы две произвольные функции $u_1(\eta)$ и $w(\xi)$. Определим $\Phi_\infty(\eta, \lambda)$ и $\Phi_0(\xi, \lambda)$ как решения уравнений (1.44) и (1.47), соответственно, с начальными условиями $\Phi_\infty(0, \lambda) = \Phi_0(0, \lambda) = 1$.

Пусть $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$ — регулярная вне точек $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$ функция λ, в окрестности которых она имеет вид:

$$\Psi(\xi, \eta, \lambda) = \tilde{R}_0(\xi, \eta, \lambda)\Phi_0(\xi, \lambda),$$
$$\Psi(\xi, \eta, \lambda) = \tilde{R}_\infty(\xi, \eta, \lambda)\Phi_\infty(\eta, \lambda), \tag{1.48}$$

где $\tilde{R}_0$ и $\tilde{R}_\infty$ регулярные в соответствующих окрестностях матричные функции.

Функция Ψ существует и единственна, если дополнительно потребовать, чтобы $\tilde{R}_\infty|_{\lambda=\infty}$ и $\tilde{R}_0|_{\lambda=0}$ имели вид:

$$\tilde{R}_\infty(\xi, \eta, \infty) = \begin{pmatrix} g & g_1 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_0(\xi, \eta, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.49}$$

Теорема 1.3. Функция $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$ удовлетворяет уравнениям (1.35, 1.36), где $u(\xi, \eta) = u_1(\eta) - 2i \ln g(\xi, \eta)$. При этом

$u(\xi, \eta)$ является решением уравнения (1.34). Все решения этого уравнения даются предложенной конструкцией.

Доказательство теоремы вытекает из уже неоднократно использовавшихся соображений, связанных с анализом логарифмических производных Ψ.

Следует отметить, что построение локальных решений уравнения sine-gordon, зависящих от двух произвольных функций, было предложено в работе [61]. Решения представляются в виде рядов, сходимость которых доказывается с помощью теории бесконечномерных алгебр Ли. При этом первоначально отсутствовала, какая бы то ни было связь фигурирующих при таком построении функциональных параметров с начальными данными задач типа Гурса. Недавно [62] этот пробел был частично восполнен.

§ 2. «Конечнозонные решения» уравнений, допускающих представление «нулевой кривизны»

Целью настоящего параграфа является выделение алгебро-геометрических или «конечнозонных» решений общих уравнений, допускающих представление нулевой кривизны. Как и в предшествующем параграфе, мы рассмотрим уравнения (1.17), не уточняя калибровки и не проводя редукции общей системы к тем или иным инвариантным подмногообразиям.

Сужение системы (1.17) до уравнений, описывающих конечнозонные решения, проводится с помощью дополнительного условия, эквивалентного вложению уравнений (1.17) в расширенную систему.

Определение. «Конечнозонными решениями» уравнений (1.17) будут называться такие решения $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ этих уравнений, для которых найдется мероморфная по λ матричная функция $W(x, t, \lambda)$ такая, что выполнены уравнения:

$$[\partial_x - U, W] = 0, \quad [\partial_t - V, W] = 0. \tag{1.50}$$

Рассмотрим, как и ранее, решение $\Psi(x, t, \lambda)$ уравнений (1.15, 1.16), нормированное условием $\Psi(0, 0, \lambda) = 1$.

Из (1.50) следует, что $W(x, t, \lambda)\ \Psi(x, t, \lambda)$ также удовлетворяет уравнениям (1.15, 1.16). Так как решение последней системы однозначно определяется начальным условием, то

$$W(x, t, \lambda)\Psi(x, t, \lambda) = \Psi(x, t, \lambda) W(0, 0, \lambda). \tag{1.51}$$

Отсюда коэффициенты полинома

$$Q(\lambda, \mu) = \det (W(x, t, \lambda) - \mu \cdot 1) \tag{1.52}$$

не зависят от x и t. Они являются интегралами уравнений (1.50).

В дальнейшем будет предполагаться, что при почти всех λ

матрица $W(0, 0, \lambda)$ имеет различные собственные значения, т. е. уравнение

$$Q(\lambda, \mu)=0 \tag{1.53}$$

определяет в C^2 аффинную часть алгебраической кривой Γ, l — листно разветвленный над λ-плоскостью, где l — размерность матриц U, V, W. Соответствующие решения называются конечнозонными решениями ранга 1.

Замечание. Описание конечнозонных решений рангов выше 1 (при этом полином $Q(\lambda, \mu)=\tilde{Q}^r(\lambda, \mu)$, где r — ранг решения) для уравнения Кадомцева—Петвиашвили и связанную с этим теорию, опирающуюся на возможности применения аппарата и языка теории многомерных голоморфных расслоений над алгебраическими кривыми, можно найти в работах [35, 36, 37].

Если корни уравнения (1.53) при почти всех λ простые, то каждому такому корню, т. е. точке $\gamma=(\lambda, \mu)$ кривой Γ, отвечает единственный собственный вектор $h(\gamma)$

$$W(0, 0, \lambda)\, h(\gamma)=\mu h(\gamma), \tag{1.54}$$

нормированный так, что его первая координата $h_1(\gamma)\equiv 1$. При этом остальные координаты $h_i(\gamma)$ являются мероморфными функциями на Γ.

Пусть $\Psi^i(x, t, \lambda)$ — i-ый вектор-столбец матрицы $\Psi(x, t, \lambda)$. Рассмотрим решение $\psi(x, t, \gamma)$ уравнений (1.15, 1.16), заданное формулой

$$\psi(x, t, \gamma)=\sum_{l=1}^{l} h_l(\gamma)\, \Psi^l(x, t, \lambda). \tag{1.55}$$

Обозначим через P_α, $\alpha=1, \ldots, l(n+m)$, прообразы на Γ точек μ_r и λ_h — полюсов V и U. Тогда, так как $\Psi(x, t, \lambda)$ аналитична вне точек λ_h, μ_r, то $\psi(x, t, \gamma)$ мероморфна на Γ вне точек P_α. Дивизор ее полюсов D совпадает с дивизором полюсов $h(\gamma)$.

(Здесь и далее дивизор есть просто набор точек с кратностями).

Чтобы найти вид особенностей $\psi(x, t, \gamma)$ в точках P_α, воспользуемся тем, что, как следует из (1.51)

$$W(x, t, \lambda)\psi(x, t, \gamma)=\mu\psi(x, t, \gamma). \tag{1.56}$$

Значит,

$$\psi(x, t, \gamma)=f(x, t, \gamma)\, h(x, t, \gamma), \tag{1.57}$$

где $f(x, t, \gamma)$ — скалярная функция, а $h(x, t, \gamma)$ — собственный вектор матрицы W, нормированный условием $h_1(x, t, \gamma)=1$. Как и в случае $h(\gamma)$, все остальные координаты $h_i(x, t, \gamma)$ являются мероморфными функциями на Γ.

Рассмотрим матрицу $\tilde{\Psi}(x, t, \lambda)$, столбцами которой являются векторы $\psi(x, t, \gamma_j)$, где $\gamma_j=(\lambda, \mu_j)$ — прообразы точки λ на кривой Г. Эта матрица определена однозначно с точностью до перестановки столбцов. Из (1.57) имеем

$$\tilde{\Psi}(x, t, \lambda)=\tilde{H}(x, t, \lambda)\tilde{F}(x, t, \lambda), \tag{1.58}$$

где матрица $\tilde{H}$ построена из векторов $h(x, t, \gamma_j)$ так же, как и $\tilde{\Psi}$, матрица $\tilde{F}$ является диагональной, ее элементы равны $f(x, t, \gamma_j)\delta_{ij}$.

Так как $\psi(x, t, \gamma)$ удовлетворяет уравнениям (1.15, 1.16), то

$$U(x, t, \lambda)=\tilde{\Psi}_x\tilde{\Psi}^{-1}=\tilde{H}_x\tilde{H}^{-1}+\tilde{H}\tilde{F}_x\tilde{F}^{-1}\tilde{H}^{-1}, \tag{1.59}$$

$$V(x, t, \lambda)=\tilde{\Psi}_t\tilde{\Psi}^{-1}=\tilde{H}_t\tilde{H}^{-1}+\tilde{H}\tilde{F}_t\tilde{F}^{-1}\tilde{H}^{-1}. \tag{1.60}$$

Следовательно, в окрестности точек P_α функция $f(x, t, \gamma)$ имеет вид:

$$f(x, t, \gamma)=\exp(q_\alpha(x, t, k_\alpha))f_\alpha(x, t, \gamma), \tag{1.61}$$

где $q(x, t, k)$ — полином по k, $f_\alpha(x, t, \gamma)$ — мероморфная функция в окрестности P_α, а $k_\alpha^{-1}(\gamma)$ — локальный параметр в окрестности точек, $k_\alpha^{-1}(P_\alpha)=0$.

Суммируя, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.4. Вектор-функция $\psi(x, t, \gamma)$.

1°. Мероморфна на Г вне точек P_α. Ее дивизор полюсов не зависит от x, t. Если W — невырождена, то в общем положении можно считать, что кривая Г неособа. При этом степень дивизора полюсов ψ равна $g+l-1$, где g — род кривой Г.

2°. В окрестности точек $P_\alpha\psi(x, t, \gamma)$ имеет вид:

$$\psi(x, t, \gamma)=\left(\sum_{s=N}^{\infty}\xi_{s\alpha}(x, t)k_\alpha^{-1}\right)\exp(q_\alpha(x, t, k_\alpha), \tag{1.62}$$

где первый сомножитель — есть разложение в окрестности P_α по локальному параметру $k_\alpha^{-1}=k_\alpha^{-1}(\gamma)$ некоторого мероморфного вектора, а $q_\alpha(x, t, k)$ полином по k. Если U (или V) не имеют полюса в точке λ, являющейся проекцией P_α на λ-плоскость, то q_α не зависит от x (или t).

Единственное утверждение теоремы, которое не было доказано выше, о числе полюсов ψ следует из того, что $(\det\tilde{H})^2$ является корректно определенной мероморфной функцией λ. Полюса этой функции совпадают с проекциями полюсов $h(\gamma)$, т. е. с проекциями полюсов ψ, а нули с образами точек ветвления Г, т. е. с точками, в которых сливаются собственные значения $W(0, 0, \lambda)$. Имеем $2N=\nu$, где N — число полюсов ψ, а ν — число точек ветвления Г (и то, и другое с учетом кратностей). Используя формулу [46]

$$2g-2=\nu-2l, \tag{1.63}$$

связывающую род l-листной накрывающей плоскость с числом точек ветвления, получим

$$N = g + l - 1. \tag{1.64}$$

Аксиоматизация аналитических свойств $\psi(x, t, \gamma)$, установленных в теореме 1.4, составляет основу понятия функции Бейкера—Ахиезера, пожалуй, центрального понятия в алгеброгеометрическом варианте метода обратной задачи.

Общее определение таких функций было дано в [26].

Зафиксируем в окрестности точек $P_1, \ldots, P_M$ неособой кривой Γ локальные параметры $k_\alpha^{-1}(\gamma)$, $k_\alpha^{-1}(P_\alpha) = 0$. По аналогии с пространством $\mathcal{L}(D)$ мероморфных функций на Γ, ассоциированным с дивизором D: $f(\gamma) \in \mathcal{L}(D)$, если $D + D_f \geqslant 0$, где D_f — главный дивизор f, введем пространство $\Lambda(\mathbf{q}, D)$, где $\mathbf{q}$ — набор полиномов $q_\alpha(k)$.

Функция $\Phi(\mathbf{q}, \gamma)$ принадлежит $\Lambda(\mathbf{q}, \gamma)$, если:

1) вне точек P_α она мероморфна, а для дивизора ее полюсов D_Φ (кратность, с которой точка γ_s входит в D, равна со знаком минус кратности полюса функции в ней) выполнено $D_\Phi + D \geqslant 0$;

2) в окрестности P_α функция $\Phi(\mathbf{q}, \gamma) \exp(-q_\alpha(k_\alpha(\gamma)))$ аналитична, $k_\alpha^{-1}(P_\alpha) = 0$.

Теорема 1.5. Для неспециального дивизора $D \geqslant 0$ степени $N \geqslant g$ $\dim \Lambda(\mathbf{q}, D) = N - g + 1$.

Напомним, что неспециальными дивизорами, образующими открытое множество среди всех дивизоров, называются те дивизоры, для которых $\dim \mathcal{L}(D) = N - g + 1$.

Впервые доказательство этого утверждения в некоторых частных случаях было дано Бейкером и Ахиезером [1, 52]. Поэтому функции подобного типа называются функциями Бейкера—Ахиезера. Использованный в работе [1] (см. также [14, 23]) способ доказательства сформулированного утверждения основывался на том, что $d\Phi/\Phi$ является абелевым дифференциалом на Γ. В значительной степени доказательство повторяло ход доказательства теоремы Абеля и решение проблемы обращения Якоби [21].

Наиболее простым и в то же время наиболее эффективным способом доказательства теоремы является явная конструкция $\Phi(\mathbf{q}, D)$.

Зафиксируем на неособой алгебраической кривой Γ рода g базис циклов

$$a_1, \ldots, a_g; \quad b_1, \ldots, b_g$$

с матрицей пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. Введем базис голоморфных дифференциалов Ω_k на Γ, нормированных условиями $\oint_{a_i} \Omega_k = \delta_{ik}$. Обозначим через B матрицу b-периодов,

$B_{lk}=\oint\limits_{b_l}\Omega_k$. Известно, что она симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть.

Целочисленные комбинации векторов в C^g с координатами δ_{lk} и B_{lk} образуют решетку, определяющую комплексный тор $J(\Gamma)$, называемый многообразием Якоби кривой.

Пусть P_0 — отмеченная точка на Γ, тогда определено отображение $A\colon \Gamma\to J(\Gamma)$. Координаты вектора $A(\gamma)$ равны $\int\limits_{P_0}^{\gamma}\Omega_k$.

По матрице b-периодов, как и по любой матрице с положительно определенной мнимой частью, можно построить целую функцию g комплексных переменных

$$\theta(u_1, \ldots, u_g)=\sum_{k\in Z^g}\exp(\pi i(Bk, k)+2\pi i(k, u)),$$

где $(k, u)=k_1u_1+\ldots+k_gu_g$.

Она обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

$$\begin{gathered}\theta(u_1, \ldots, u_j+1, u_{j+1}, \ldots u_g)=\theta(u_1, \ldots, u_j, \ldots u_g),\\ \theta(u_1+B_{1k}, \ldots, u_g+B_{gk})=\\ =\exp(-\pi i(B_{kk}+2u_k))\,\theta(u_1, \ldots, u_g).\end{gathered}\tag{1.65}$$

Кроме того, для любого неспециального эффективного дивизора $\tilde D=\gamma_1+\ldots+\gamma_g$ степени g существует вектор $Z(\tilde D)$ такой, что функция $\theta(A(\gamma)+Z(\tilde D))$, определенная на Γ, разрезанной вдоль циклов a_i, b_j, имеет ровно g нулей, совпадающих с точками γ_i (см. [21]),

$$Z_k(\tilde D)=-\sum_{s=1}^{g}A_k(\gamma_s)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}B_{kk}+\sum_{j\neq k}\oint\limits_{a_j}\left(\int\limits_{P_0}^{t}\Omega_k\right)\Omega_j,\quad t\in a_j.$$

Для любого набора полиномов $q_\alpha(k)$ существует единственный абелев дифференциал второго рода (см. [44]) ω (индекс, при котором ω_q мы для простоты записи опустим), имеющий особенность в отмеченной точке P_α на Γ вида $dq_\alpha(k_\alpha)$ в локальном параметре k_α^{-1} и нормированный условиями $\oint\limits_{a_l}\omega=0$.

Лемма 1.4. Пусть $\tilde D$ — произвольный эффективный, неспециальный дивизор степени g, тогда функция

$$\psi(\mathbf{q}, \gamma)=\exp\left(\int\limits_{P_0}^{\gamma}\omega\right)\frac{\theta(A(\gamma)+Z(\tilde D)+\mathrm{U})}{\theta(A(\gamma)+Z(\tilde D))},\tag{1.66}$$

где $\mathrm{U}=(U_1,\ldots,U_g)$, а $U_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{b_k}\omega$ является образующей одномерного пространства $\Lambda(\mathbf{q}, D)$.

Доказательство леммы следует из простой проверки свойств функции $\psi(\mathbf{q}, \gamma)$. Непосредственно из свойств (1.65) вытекает, что правая часть равенства (1.66) корректно определяет функцию на Γ, т. е. ее значения при обходе вдоль циклов a_i, b_j не меняются. В окрестности P_α функция ψ имеет, как следует из определения ω, нужную существенную особенность (впервые формула подобного рода для блоховской функции конечнозонного оператора Шрёдингера была получена Итсом [23]).

Одномерность $\Lambda(\mathbf{q}, \tilde{D})$ следует из того, что если $\psi_1 \in \Lambda(\mathbf{q}, \tilde{D})$, то ψ_1/ψ есть мероморфная функция на Γ с g полюсами. По теореме Римана—Роха и в силу неспециальности дивизора получим, что $\psi_1/\psi = \text{const}$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что функции $\psi_i(\mathbf{q}, \gamma)$ вида (1.66), отвечающие дивизорам $\tilde{D}_i = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{g-1} + \gamma_{g+i}$ (где $D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$), образуют базис пространства $\Lambda(\mathbf{q}, D)$.

В силу теоремы 1.4, каждому конечнозонному решению уравнений (1.17) ранга 1 сопоставлялась кривая Γ, которую в *общем положении можно считать неособой, набор полиномов* $q_\alpha(x, t, k)$ и неспециальный дивизор степени $g+l-1$, где g — род кривой Γ. Воспользуемся предшествующей теоремой для построения обратного отображения.

Итак, пусть задан перечисленный выше набор данных. По теореме 1.5 $\dim \Lambda(\mathbf{q}, D) = l$. Выберем в этом пространстве произвольный базис $\psi_i(x, t, \gamma)$ (полиномы q_α зависят от x и t, как от параметров; от этих же параметров будет очевидно зависеть ψ).

Теорема 1.6. Пусть $\psi(x, t, \gamma)$ вектор-функция, координатами которой являются построенные выше функции $\psi_i(x, t, \gamma)$. Существуют единственные рациональные по λ матричные функции $U(x, t, \lambda)$, $V(x, t, \lambda)$, $W(x, t, \lambda)$ такие, что

$$\partial_x \psi = U\psi, \quad \partial_t \psi = V\psi, \quad W\psi = \mu\psi, \quad \gamma = (\lambda, \mu) \in \Gamma. \tag{1.67}$$

Для доказательства теоремы рассмотрим, как и выше, матрицу $\tilde{\Psi}(x, t, \lambda)$, столбцами которой являются векторы $\psi(x, t, \gamma_j)$, где $\gamma_j = (\lambda, \mu_j)$ — прообразы точки λ на Γ. Эта матрица, как функция λ, определена с точностью до перестановки столбцов. Легко видеть, что матрицы

$$(\partial_x \tilde{\Psi})\tilde{\Psi}^{-1}, \quad (\partial_t \tilde{\Psi})\tilde{\Psi}^{-1}, \quad \tilde{\Psi}\hat{\mu}\tilde{\Psi}^{-1} \tag{1.68}$$

определены уже корректно и в силу аналитических свойств ψ являются рациональными функциями λ. Они обозначаются через U, V, W, соответственно. Здесь $\hat{\mu}$ — диагональная матрица, равная $\mu_{ij} = \mu_j \delta_{ij}$.

Используя ход доказательства равенства (1.64) в обратную сторону, получим, что $\det \tilde{\Psi} \neq 0$, если λ — не есть точка ветвления накрытия $\Gamma \to C^1$. Следствием этого является то, что U имеет полюса лишь в проекциях точек P_α (причем лишь в том случае, когда зависимость соответствующего полинома q_α от x нетривиальна). Аналогичное утверждение имеет место и для V. Степень полюсов U и V в точке P_α равна максимальной степени q_α, коэффициент при которой нетривиально зависит от x и t, соответственно. Матрица W как функция λ имеет полюса в образах полюсов μ.

Следствие. Матрицы U, V, W, построенные по формулам (1.68), удовлетворяют уравнениям (1.17) и (1.50).

В построении вектора $\psi(x, t, \gamma)$ по набору данных, приведенных перед теоремой (1.6), имеется произвол, связанный с возможностью выбора различных базисов в пространстве $\Lambda(\mathfrak{q}, D)$.

Этому произволу, при котором $\psi(x, t, \gamma)$ переходит в $g(x, t) \cdot \psi(x, t, \gamma)$, где g — невырожденная матрица, соответствует калибровочная симметрия (1.18) уравнений (1.17) и (1.50), матрица W переходит при таком преобразовании в

$$W \to gWg^{-1}. \tag{1.69}$$

Рассмотрим теперь две вектор-функции Бейкера—Ахиезера $\psi(x, t, \gamma)$, $\tilde\psi(x, t, \gamma)$, отвечающие двум эквивалентным дивизорам D и $\tilde D$. Эквивалентность этих дивизоров означает, что существует мероморфная функция $f(\gamma)$ такая, что ее полюса совпадают с D, а нули с $\tilde D$. Из определения функций Бейкера—Ахиезера вытекает, что $f \cdot \tilde\psi \in \Lambda(\mathfrak{q}, D)$. Значит

$$\psi(x, t, \gamma) = g(x, t) f(\gamma) \tilde\psi(x, t, \gamma), \tag{1.70}$$

функции ψ и $\tilde\psi$ определяют калибровочно-эквивалентные решения калибровочно-эквивалентных уравнений.

Будем рассматривать как уравнения (1.17, 1.50), так и их решения с точностью до преобразований (1.18, 1.69). Из (1.69) следует, что калибровочные преобразования оставляют инвариантными кривые Γ (т. е. уравнения (1.52, 1.53)).

Теорема 1.7. *Множество конечнозонных решений (определенных с точностью до калибровочной эквивалентности), отвечающих неособой кривой Γ, изоморфно тору — якобиану кривой $J(\Gamma)$.*

Утверждение теоремы вытекает из известного [44] изоморфизма между классами эквивалентности дифизоров и якобианом $J(\Gamma)$. Так как коэффициенты полинома $Q(\lambda, \mu)$ являются интегралами уравнений (1.17, 1.50), то сформулированная теорема означает, что множество уровней этих интегралов является в общем положении тором.

Для специальных значений интегралов, при которых кривая Γ имеет особенности, соответствующее многообразие уровня изоморно обобщенному якобиану такой кривой. Не вдаваясь в подробности этого утверждения (определение обобщенных якобианов можно найти в [42]), отметим, что многосолитонным и рациональным решениям уравнений (1.17) отвечают рациональные кривые Г. Причем разным типам особенностей отвечают и разные типы решений. Например, в случае особенностей типа пересечений получаются многосолитонные решения (см., например, для уравнения КдФ § 10 [17]), а в случае особенностей типа «клюва» получаются рациональные решения [31].

До сих пор речь шла об общих уравнениях (1.17). Ограничения, которые накладываются на U и V при выделении инвариантных подмногообразий этих уравнений, приводят к соответствующим ограничениям на параметры конструкции конечнозонных решений этих уравнений.

Рассмотрим эти ограничения на примере уравнения sine-gordon. Впервые конечнозонные решения этого уравнения, которое имеет, помимо представления (1.17) с матрицами (1.35, 1.36), и обычное представление (1.2) с матричными (4×4) операторами, были построены в работе [24]. Впоследствии применение общей конструкции конечнозонных решений, предложенной автором [32], было проведено применительно к уравнению sine-gordon в работе [22] (см. также [45, 46]).

Не ограничивая общности, можно считать, что $W(\xi, \eta, \lambda)$ не имеет полюсов в точках $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$, так как этого всегда можно добиться, домножая W на постоянную рациональную функцию λ.

Так как левые части уравнений

$$W_\xi=[W, U], \quad W_\eta=[W, V], \tag{1.71}$$

совпадающих с (1.50), не имеют полюсов при $\lambda=0$, $\lambda=\infty$, то, как следует из вида U и V (1.35, 1.36),

$$\left[W(\xi, \eta, 0), \left(\frac{0}{1}\middle|\frac{0}{0}\right)\right]=0; \quad \left[W(\xi, \eta, \infty), \left(\frac{0}{0}\middle|\frac{1}{0}\right)\right]=0.$$

Следовательно, $W(\xi, \eta, \lambda)$ имеет в окрестности этих точек вид:

$$W(\xi, \eta, \lambda)=\left(\frac{w_1}{w_2}\middle|\frac{0}{w_1}\right)+O(\lambda), \tag{1.72}$$

$$W(\xi, \eta,\lambda)=\left(\frac{w_1'}{0}\middle|\frac{w_2'}{w_1'}\right)+O(\lambda^{-1}). \tag{1.73}$$

Отсюда кривая Г, заданная характеристическим уравнением (1.53),

$$\mu^2-r_1(\lambda)\mu+r_2(\lambda)=0, \tag{1.74}$$

$=\operatorname{Sp} W$, $r_2=\det W$, имеет в точках $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$ ветвления. Из (1.72, 1.73) следует также, что

$$h_2(\xi, \eta, \infty)=0; \quad h_2(\xi, \eta, \lambda)=0(\lambda^{-1/2}), \quad \lambda\to 0, \tag{1.75}$$

где, как и ранее, $h_l(\xi, \eta, \lambda)$ — координаты собственного вектора $W(\xi, \eta, \lambda)$, нормированные условием $h_1 = 1$.

С учетом этих замечаний теорема 1.4 сопоставляет каждому конечнозонному решению уравнения sine-gordon: гиперэллиптическую кривую Γ (1.74) с двумя отмеченными точками P_0 и P_∞ ветвления, расположенными над $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, а также дивизор D_0 степени g.

Соответствующие функции Бейкера — Ахиезера имеют вне точек P_0 и P_∞ g полюсов в точках дивизора D_0. В окрестности P_0 они имеют вид:

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi, \eta, k) &= e^{k\xi}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_{s1}(\xi, \eta) k^{-s}\right),\\ \psi_2(\xi, \eta, k) &= e^{k\xi} k \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_{s2}(\xi, \eta) k^{-s}\right),\end{aligned} \tag{1.76}$$

где $k = \lambda^{-1/2}$.

В окрестности P_∞ имеем

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi, \eta, k) &= c_1 e^{k\eta}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_{s1}(\xi, \eta) k^{-s}\right),\\ \psi_2(\xi, \eta, k) &= c_2 e^{k\eta} k^{-1}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_{s2}(\xi, \eta) k^{-s}\right),\end{aligned} \tag{1.77}$$

где $k = \lambda^{1/2}$, $c_l = c_l(\xi, \eta)$.

Дивизор D степени $g+1$, который фигурировал в теореме 1.4, есть просто $D_0 + P_0$.

По теореме 1.5 кривая Γ и дивизор D_0 однозначно определяют ψ_1 и ψ_2. Вычисляя логарифмические производные соответствующей матрицы $\tilde{\Psi}$, можно убедиться, что матрицы U и V будут иметь нужный вид (1.35, 1.36). В последнем можно убедиться и с помощью следующих рассуждений.

Из определений ψ_1 и ψ_2 следует, что функции $\partial_\eta \psi_1$ и $\lambda\psi_2$ обладают одинаковыми аналитическими свойствами. Значит они пропорциональны. Для вычисления константы пропорциональности нужно сравнить коэффициенты при члене $\lambda^{1/2}$ в разложении этих функций в P_∞. Имеем

$$\partial_\eta \psi_1 = e^{-iu} \lambda \psi_2, \quad e^{-iu} = c_1 c_2^{-1}. \tag{1.78}$$

Аналогично,

$$\partial_\eta \psi_2 = e^{iu} \psi_2. \tag{1.79}$$

Таким же образом доказывается, что

$$\partial_\xi \psi_1 = \frac{iu_\xi}{2} \psi_1 + \psi_2, \tag{1.80}$$

$$\partial_\eta \psi_2 = \lambda^{-1}\psi_1 - \frac{i}{2} u_\xi \psi_2. \tag{1.81}$$

Равенства (1.78—1.81) являются координатной записью уравнений (1.35, 1.36).

Следствие. Функция u, определенная из (1.77, 1.78), является решением уравнения sine-gordon.

Найдем явный вид конечнозонных решений уравнения sine-gordon.

Пусть ω_0 и ω_∞ — нормированные абелевы дифференциалы на Γ второго рода с единственными особенностями вида $d\lambda^{-1/2}$ и $d\lambda^{1/2}$, соответственно. По теореме (1.5)

$$\psi_1(\xi, \eta, \gamma) = r_1(\xi, \eta) \exp\left(\xi \int_{\gamma_0}^{\gamma} \omega_0 + \eta \int_{\gamma_0}^{\gamma} \omega_\infty\right) \times$$

$$\times \frac{\theta(U_0\xi + U_\infty\eta + A(\gamma) + Z)}{\theta(A(\gamma) + Z)}, \tag{1.82}$$

где $2\pi_i U_0$ и $2\pi_i U_\infty$ — векторы b-периодов дифференциалов ω_0, ω_∞; $Z = Z(D_0)$.

Нормировочная функция $r_1(\xi, \eta)$ определяется из условия (1.76), согласно которому значение регулярного множителя при экспоненте в точке P_0 равно 1. Имеем

$$r_1(\xi, \eta) = \frac{\theta(A(P_0) + Z)}{\theta(A(P_0) + U_0\xi + U_\infty\eta + Z)}. \tag{1.83}$$

Разлагая (1.82) в окрестности P_∞, найдем, что

$$c_1(\xi, \eta) = \frac{\theta(A(P_\infty) + U_0\xi + U_\infty\eta + Z)\,\theta(A(P_0) + Z)}{\theta(A(P_0) + U_0\xi + U_\infty\eta + Z)\,\theta(A(P_\infty) + Z)}. \tag{1.84}$$

Явный вид $\psi_2(\xi, \eta, \gamma)$ можно было бы найти по общему рецепту, данному в ходе доказательства теоремы (1.5). Однако в данном случае это правило и соответствующие формулы можно упростить.

Обозначим через $f(\gamma)$ мероморфную функцию на Γ, имеющую полюса в точках дивизора D_0 и в точке P_0. Условие $f(P_\infty) = 0$ определяет эту функцию с точностью до пропорциональности. Нормируем ее так, чтобы коэффициент при $\lambda^{-1/2}$ в ее разложении в окрестности P_0 был равен 1. Тогда определена константа e^{l_0}, равная коэффициенту при $\lambda^{-1/2}$ в разложении f в окрестности бесконечности.

Функция $f^{-1}\psi_2(\xi, \eta, \gamma)$ обладает теми же аналитическими свойствами, что и ψ_1 с точностью до замены дивизора D_0 на дивизор $\tilde{D}$, совпадающий с нулями $f(\gamma)$, отличными от P_∞. Следовательно,

$$c_2(\xi, \eta) = e^{-I_0} \frac{\theta(A(P_\infty) + U_0\xi + U_\infty\eta + \tilde{Z})\,\theta(A(P_0) + \tilde{Z})}{\theta(A(P_0) + U_0\xi + U_\infty\eta + \tilde{Z})\,\theta(A(P_\infty) + \tilde{Z})},$$

где $\tilde{Z} = Z(\tilde{D})$.

Дивизоры $D_0 + P_0$ и $\tilde{D} + P_\infty$ эквивалентны. Поэтому по теореме Абеля [44]

$$Z + A(P_0) = \tilde{Z} + A(P_\infty).$$

Из этой же теоремы следует, что вектор $\Delta = A(P_\infty) - A(P_0)$ является полупериодом, так как $2P_0$ и $2P_\infty$ эквивалентны (функция λ имеет полюс второго порядка в P_∞ и нуль кратности 2 в P_0).

Окончательно мы приходим к формуле

$$e^{iu} = e^{-I_0} \frac{\theta^2(W + U_0\xi + U_\infty\eta)\,\theta(W - \Delta)\,\theta(W + \Delta)}{\theta(W - \Delta + U_0\xi + U_\infty\eta)\,\theta(W + \Delta + U_0\xi + U_\infty\eta)\,\theta^2(W)} \quad (1.85)$$

для конечнозонных решений уравнения sine-Gordon. В этой формуле $W = Z(D_0) + A(P_0)$. Однако этот вектор можно считать произвольным, так как при изменении D_0 вектора W заполнят весь якобиан.

В рамках этой главы мы не затрагивали важный вопрос о выделении вещественных конечнозонных решений, не имеющих особенностей. В тех случаях, когда операторы, условие коммутативности которых эквивалентно рассматриваемому уравнению, являются самосопряженными, выделение вещественных решений достаточно тривиально. В этом случае на кривой Γ естественно определяется антиинволюция и вещественные решения отвечают данным, инвариантным относительно этой антиинволюции.

Для несамосопряженных операторов задача существенно усложняется. Условия вещественности решений (1.85) уравнения sine-Gordon были описаны в работах [45, 46]. Эффективизация этих условий и завершение вопроса о вещественности конечнозонных решений (1.85) были получены в работе [16].

§ 3. Представления «нулевой кривизны» и эллиптические кривые

В последнее время предпринимаются активные попытки обобщения уравнений (1.17) на случай пучков, в которых матрицы U и V являются мероморфными функциями параметра λ, определенного на алгебраической кривой Γ рода, большего нуля. (Случаю рациональных пучков отвечает $g = 0$). Заметим, что автоматическому переносу уравнений (1.17) на кривую рода $g > 0$ препятствует теорема Римана—Роха.

Действительно, пусть $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ — мероморфные функции на Г, $\lambda \in \Gamma$, имеющие дивизоры полюсов кратности N и M. Тогда по теореме Римана—Роха [46] число независимых переменных равно $l^2(N-g+1)$ для U и $l^2(M-g+1)$ для V (где l — размерность матриц). Коммутатор $[U, V]$ имеет полюса суммарной кратности $N+M$. Поэтому уравнения (1.17) эквивалентны $l^2(N+M-g+1)$ уравнениям на неизвестные функции. С учетом калибровочной симметрии (1.18) при $g \geqslant 1$ число уравнений всегда больше числа неизвестных.

Имеется два пути обойти указанное препятствие. Один из них предложен в работе [35], где у матриц U и V допускались, кроме полюсов, неподвижных относительно x и t, gl полюсов, определенным образом зависящих от x, t. Было показано, что при этом число уравнений (с учетом (1.18)) совпадает с числом независимых переменных, которыми являются сингулярные части U и V в неподвижных полюсах. Так как в этой схеме пока не найдено физически интересных уравнений, мы не будем останавливаться на ней подробно.

Второй путь основан на выборе специального вида матриц U и V и успешно реализован лишь в некоторых примерах на эллиптических кривых Г ($g=1$). Физически наиболее интересным примером таких уравнений является уравнение Ландау—Лифшица

$$\vec{S}_t = \vec{S} \times \vec{S}_{xx} + \vec{S} \times I\vec{S}, \tag{1.86}$$

где $\vec{S}$ — трехмерный вектор единичной длины, $|\vec{S}|=1$, а $I_{\alpha\beta} = I_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ — диагональная матрица. Как показано в работах [67], уравнение (1.86) является условием совместности линейных уравнений (1.15, 1.16), где 2×2 матрицы U и V есть

$$U = -i \sum_{\alpha=1}^{3} w_\alpha(\lambda) S_\alpha(x, t) \sigma_\alpha, \tag{1.87}$$

$$V = -i \sum_{\alpha,\beta,\gamma} b_\alpha(\lambda) \sigma_\alpha S_\beta S_{\gamma x} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} - 2i \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha(\lambda) S_\alpha \sigma_\alpha, \tag{1.88}$$

где

$$\begin{gathered} w_1 = b_1 = \frac{\rho}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}; \quad w_2 = b_2 = \rho \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}; \\ w_3 = b_3 = \rho \frac{\operatorname{cn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}; \quad a_1 = -w_2 w_3, \quad a_2 = -w_3 w_1, \end{gathered} \tag{1.89}$$

$$a_3 = -w_1 w_2; \quad \operatorname{sn}(\lambda, k), \quad \operatorname{cn}(\lambda, k), \quad \operatorname{dn}(\lambda, k)$$

— эллиптические функции Якоби [2], σ_α — матрицы Паули.

Параметры I_α даются соотношениями

$$k = \sqrt{\frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_1}}, \quad \rho = \frac{1}{2}\sqrt{I_3 - I_1}, \quad 0 < k < 1. \tag{1.90}$$

В работах [47, 64] построены многосолитонные решения этих уравнений и сделаны попытки построения конечнозонных решений, которые пока не дали эффективного ответа.

Пара (1.87, 1.88) имеет 4 полюса на кривой Г. Оказывается, уравнение (1.86) можно представить в виде условия коммутации «однополюсных пучков», если отказаться в U и V от требования мероморфности пучков на всей кривой Г.

Зафиксируем эллиптическую кривую Г и l-мерный вектор $z=(z_1, \ldots, z_l)$, $z_i \neq z_j$. Через $G(\Gamma, z)$ обозначим бесконечномерную алгебру матричнозначных функций $U(\lambda)$ таких, что

1°. Вне точки $\lambda=0$ они мероморфны.

2°. В окрестности $\lambda=0$ матричный элемент U имеет вид:

$$U_{ij}(\lambda)=\exp\left(\frac{z_i-z_j}{\lambda}\right)\left(\sum_{s=N}^{\infty}\xi_s\lambda^{-s}\right) \qquad (1.91)$$

(далее z_i-z_j будет обозначаться через z_{ij})
Условия 1°, 2° означают, что матричные элементы являются функциями типа Бейкера—Ахиезера.

Для любого дивизора степени N размерность линейного пространства матричных функций описанного вида, имеющих полюса в точках этого дивизора, равна Nl^2. В качестве независимых параметров можно взять, как и в случае рациональных пучков, сингулярные члены $U(\lambda)$.

Например, пусть $U(\lambda)$ имеет простые полюса в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, тогда

$$U_{ij}(\lambda)=\sum_{k=1}^{N}u_{ij}^k\Phi(z_{ij}, \lambda, \lambda_k), \qquad (1.92)$$

где

$$\Phi(z, \lambda, \lambda_k)=\frac{\sigma(z-\lambda+\lambda_k)}{\sigma(\lambda-\lambda_k)\sigma(z)}e^{\zeta(\lambda)z}=\left(\frac{1}{\lambda-\lambda_k}+\ldots\right)e^{\zeta(\lambda)z}, \qquad (1.93)$$

— простейшая функция типа Бейкера—Ахиезера (здесь σ, ζ — функции Вейерштрасса [2]).

Для диагональных элементов имеем

$$U_{ij}(\lambda)=u_i^0+\sum_{k=1}^{N}u_i^k\zeta(\lambda-\lambda_k), \quad \sum_{k=1}^{N}u_i^k=0. \qquad (1.94)$$

Утверждение. Пусть $U(\xi, \eta, \lambda)$ и $V(\xi, \eta, \lambda)$ — матричнозначные функции, принадлежащие при всех ξ и η к $G(\Gamma, z(\xi, \eta))$ и имеющие полюса в дивизорах степени N и M, соответственно, которые содержат точку $\lambda=0$, тогда уравнение

$$U_\xi-V_\eta+[U, V]=0 \qquad (1.95)$$

эквивалентно системе уравнений на независимые параметры, определяющие U и V, и на функции $z_i(\xi, \eta)$. Эта система эквивалентна равенству нулю сингулярных членов в (1.95). Число уравнений в ней равно, с учетом калибровочной симметрии (1.95), числу неизвестных функций.

Пример 1. Рассмотрим простейший случай: U имеет простой полюс в точке $\lambda=0$, а V — полюс второго порядка

$$U_{ij} = S_{ij}\Phi(z_{ij}, \lambda), \tag{1.96}$$

$$V_{ij} = S_{ij}\tilde{\Phi}(z_{ij}, \lambda) + \vartheta_{ij}\Phi(z_{ij}, \lambda), \tag{1.97}$$

где $\Phi(z, \lambda) = \Phi(z, \lambda; 0)$ то же, что и в (1.93), а

$$\tilde{\Phi}(z, \gamma) = \frac{\sigma(\lambda - z + a)\,\sigma(\lambda - a)}{\sigma^2(\lambda)\,\sigma(z-a)\,\sigma(a)}\, e^{\zeta(\lambda)z} = \left(\frac{1}{\lambda^2} + O(1)\right)e^{\zeta(\lambda)z},$$

если $\zeta(z-a) + \zeta(a) = 0$.

Пусть $z_i(\xi, \eta) = z_i$ — есть полупериоды кривой Γ (т. е. $l=3$), тогда уравнения (1.95) эквивалентны уравнению Ландау—Лифшица (1.86), где S_{ij} — кососимметрическая матрица, отвечающая вектору S_α; а I_α даются равенством

$$I_\alpha = R_{ij} = \wp(x_i - x_j). \tag{1.98}$$

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим задачу построения эллиптических решений уравнения Кадомцева—Петвиашвили и построения переменных типа «действие—угол» для системы частиц на прямой с парным потенциалом взаимодействия, гамильтониан которой имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - 2\sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j), \tag{1.99}$$

где $\wp(x)$ — $\wp$-функция Вейерштрасса. Эта задача была решена в работе [34], где впервые и возникло представление (1.95) с матрицами, элементы которых есть функции Бейкера—Ахиезера.

Не вдаваясь в подробности работы [34], сформулируем ее основные утверждения.

Для уравнения движения системы (1.99)

$$\ddot{x}_i = 4\sum_{i \neq j} \wp'(x_i - x_j) \tag{1.100}$$

было известно представление Лакса $\dot{L} = [M, L]$, не содержащее никакого спектрального параметра [54]. Как было показано [65], интегралы $I_k = \frac{1}{k}\operatorname{tr} L^k$ независимы и находятся в инволюции. Тем самым по теореме Лиувилля система (1.99) является вполне интегрируемой. Введение спектрального параметра в Лаксово представление для (1.100) позволяет продвинуться в построении переменных типа углов.

Определим матрицы

$$U_{ij} = \dot{x}_i \delta_{ij} + 2(1-\delta_{ij}) \Phi(x_{ij}, \lambda), \qquad (1.101)$$

$$V_{ij} = \delta_{ij}\Big(-\wp(\lambda) + 2\sum_{k\neq i} \wp(x_{ik})\Big) + 2(1-\delta_{ij}) \Phi'(x_{ij}, \lambda), \quad (1.102)$$

где $\Phi(x, \lambda)$ — то же, что и в (1.93), $\Phi' = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, \lambda)$.

Лемма 1.5. Уравнения (1.100) эквивалентны уравнению

$$U_t + [U, V] = 0 \qquad (1.103)$$

(т. е. уравнению (1.95), в котором отсутствует зависимость от η и ξ заменено на t), где U и V имеют вид (1.101, 1.102).

Утверждение леммы следует из непосредственной проверки.

Из (1.103) следует, что функция

$$R(k, \lambda) = \det(2k + U(\lambda, t)) \qquad (1.104)$$

не зависит от t. Матрица U, имеющая существенные особенности при $\lambda = 0$, может быть представлена в виде

$$L(t, \lambda) = g(t, \lambda) \tilde{L}(t, \lambda) g^{-1}(t, \lambda),$$

где $\tilde{L}$ не имеет существенной особенности в $\lambda = 0$, а g — диагональная матрица $g_{ij} = \delta_{ij} \exp(\zeta(\lambda) x_i)$. Следовательно, $r_i(\lambda)$ — коэффициенты выражения

$$R(k, \lambda) = \sum_{i=0}^{n} r_i(\lambda) k^i,$$

являются эллиптическими функциями с полюсами в точке $\lambda = 0$. Функции $r_i(\lambda)$ представимы в виде линейной комбинации $\wp$-функции и ее производных. Коэффициенты такого разложения являются интегралами системы (1.99). Каждый набор фиксированных значений этих интегралов задает уравнением $R(k, \lambda) = 0$ алгебраическую кривую Γ_n n-листно накрывающую исходную эллиптическую кривую Γ.

Как показано в [34], род Γ_n равен в общем положении n. Якобиан кривой Γ_n изоморфен многообразию уровней интегралов r_i, а переменные на нем суть переменные типа углов.

Дальнейшая эффективизация решения уравнений (1.100) использовала связь уравнений (1.103) с наличием у нестационарного уравнения Шрёдингера с эллиптическим потенциалом решений специального вида.

Теорема 1.8. Уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\sum_{i=1}^{n}\wp\left(x-x_i(t)\right)\right)\psi=0 \tag{1.105}$$

имеет решение ψ вида

$$\psi=\sum_{i=1}^{n}a_i(t, k, \lambda)\,\Phi(x-x_i, \lambda)\,e^{kx+k^2t}, \tag{1.106}$$

где

$$\Phi(x, \lambda)=\frac{\sigma(\lambda-x)}{\sigma(\lambda)\,\sigma(x)}e^{\zeta(\lambda)x},$$

тогда и только тогда, когда $x_i(t)$ удовлетворяют уравнениям (1.100).

Функция ψ вида (1.106), как функция переменной x, имеет простые полюса в точках $x_i(t)$. Подставляя ее в (1.106) и приравнивая нулю коэффициенты при $(x-x_i)^{-2}$ и $(x-x_i)^{-1}$, получим, что ψ тогда и только тогда удовлетворяет (1.105), когда вектор $a=(a_1, \ldots, a_n)$ удовлетворяет уравнениям

$$U(t, \lambda)\,a(t, \lambda, k)=-2ka, \tag{1.107}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V(t, \lambda)\right)a(t, \lambda, k)=0, \tag{1.108}$$

где U и V — те же, что и в (1.101, 1.102).

Аналогично тому, как это делалось в § 2, выясняются аналитические свойства $a(t, k, \lambda)$ на римановой поверхности Γ.

Сформулируем окончательное утверждение.

Теорема 1.9. Собственная функция нестационарного уравнения Шрёдингера (1.105) $\psi(x, t, \gamma)$ определена на n-листной накрывающей Γ_n исходной эллиптической кривой. Функция $\psi(x, t, \gamma)$ является функцией Бейкера—Ахиезера с единственной существенной особенностью вида

$$\exp\left(n\lambda^{-1}(x-x_1(0))+n^2\lambda^{-2}t\right)$$

в выделенном прообразе P_0 на Γ_n точки $\lambda=0$.

Координаты $x_i(t)$ системы частиц (1.99) задаются уравнением

$$\theta(\mathbf{U}x+\mathbf{V}t+Z)=0=\prod_{i=1}^{n}\sigma(x-x_i(t)). \tag{1.109}$$

Здесь θ — тэта-функция, построенная по матрице b-периодов кривой Γ_n, векторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — векторы b-периодов абелевых дифференциалов с полюсами в P_0 второго и третьего порядков, соответственно.

Приведенные примеры показывают широкие возможности представлений нулевой кривизны в матрицах, элементы которых являются функциями типа Бейкера—Ахиезера, хотя в полной мере эти возможности подробно не проанализированы.

Глава 2

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА И МОДЕЛЬ ПАЙЕРЛСА

Первоначальный подход к построению конечнозонных решений уравнений КдФ, нелинейного Шрёдингера и ряда других основывался на спектральной теории линейных операторов с периодическими коэффициентами. Кратко укажем на взаимосвязь такого подхода с алгеброгеометрическим, который был изложен в предшествующей главе.

Пусть $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ — решения уравнений нулевой кривизны (1.17), периодически зависящие от x. Рассмотрим матрицу

$$W(x, t, \lambda) = \Psi(x+T, t, \lambda)\Psi^{-1}(x, t, \lambda), \qquad (2.1)$$

где T — период, а Ψ — решение уравнений (1.15, 1.16), называемую матрицей монодромии (описывающей сдвиг на период решений линейных уравнений (1.15, 1.16)).

Из того, что $\Psi(x+T, t, \lambda)$ является также решением уравнений (1.15, 1.16), следует, что

$$[\partial_x - U, W] = 0; \quad [\partial_t - V, W] = 0,$$

и мы приходим к уравнениям (1.50).

Матрица $W(x, t, \lambda)$ является аналитической вне полюсов U и V, где она имеет существенные особенности.

Вектор-функция $\psi(x, t, \gamma)$, определенная равенствами (1.51—1.55), является собственной функцией оператора сдвига на период и называется блоховской. Кривая Γ, на которой становится однозначной блоховская функция, имеет в общем случае бесконечный род (ее точки ветвления накапливаются к полюсам U и V).

Конечнозонные периодические решения выделяются условием конечности рода поверхности Γ, что эквивалентно рациональности по λ матрицы монодромии $W(x, t, \lambda)$.

Таким образом, периодические решения уравнений (1.17, 1.50) обладают тем свойством, что соответствующая им блоховская функция определена на кривой конечного рода и совпадает с функцией Бейкера—Ахиезера.

Ясно, что понятие конечнозонности дословно переносится на любой линейный оператор $\partial_x - U(x, \lambda)$ безотносительно к нелинейным уравнениям. Соответствующие матрицы U называются конечнозонными потенциалами.

Рассмотрим в качестве примера оператор Штурма—Лиувилля с периодическим вещественным потенциалом $u(x)$, $L = -\partial_x^2 + u(x)$.

Спектр этого оператора в $L_2(R)$ состоит из отрезков вещественной оси, называемых разрешенными зонами. Лакуны в спектре называются запрещенными зонами. Концы зон E_i являются простыми точками спектра периодической и антипериодической задач для оператора L. Они являются точками ветвления римановой поверхности Γ, двулистно расположенной над E-плоскостью и на которой блоховская функция является пероморфной вне бесконечноудаленной точки. Полюса ψ расположены по одному над каждой из запрещенных зон.

Условие конечнозонности потенциала $u(x)$ означает, что все запрещенные зоны, начиная с некоторого номера, исчезают и все точки спектра периодической и антипериодической задач для L, за исключением конечного числа, $E_1 < \ldots < E_{2n+1}$, вырождены. Кривая Γ задается в C^2 уравнением

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2n+1} (E - E_i). \tag{2.2}$$

Функция ψ является функцией Бейкера—Ахиезера и, следовательно, выражается формулой

$$\psi(x, \gamma) = \exp\left(x \int_{E_1}^{\gamma} \omega\right) \frac{\theta(A(\gamma) + Ux + Z)\,\theta(Z)}{\theta(A(\gamma) + Z)\,\theta(\mathbf{U}x + Z)}. \tag{2.3}$$

Разлагая (2.3) в окрестности бесконечности, получим формулу [23] для конечнозонных потенциалов оператора Штурма—Лиувилля

$$u(x) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\mathbf{U}x + Z) + \text{const}. \tag{2.4}$$

Изложение этих результатов и спектральной теории конечнозонных операторов Штурма—Лиувилля в целом можно найти в книге [17].

§ 1. Периодический разностный оператор Шрёдингера

Метод обратной задачи применим не только к уравнениям в частных производных, но к некоторым дифференциально-разностным системам. Например, уравнения цепочки Тода [69]

$$\ddot{x}_n = e^{-x_n + x_{n+1}} - e^{-x_{n-1} + x_n} \tag{2.5}$$

допускают представление Лакса $\dot{L} = [A, L]$, где

$$L\psi_n = c_n \psi_{n+1} + v_n \psi_n + c_{n-1} \psi_{n-1}, \tag{2.6}$$

$$A\psi_n = \frac{c_n}{2} \psi_{n+1} - \frac{c_{n-1}}{2} \psi_{n-1}, \tag{2.7}$$

$v_n = \dot{x}_n$, $c_n^2 = e^{x_{n+1} - x_n}$. Это представление было найдено в работах [38, 58].

Важным отличием таких систем от непрерывных является то, что все периодические решения дифференциально-разностных уравнений, допускающих представления типа Лакса, либо более общего разностного аналога уравнений нулевой кривизны, являются конечнозонными.

Явные выражения для периодических решений уравнений цепочки Тода были получены в работе [33] (см. также приложение автора к обзору [13]).

Целью настоящего параграфа является изложение алгебро-геометрического подхода к спектральной теории периодических разностных операторов на примере разностного оператора Шрёдингера (2.6). Как уже говорилось во введении, эта теория играет существенную роль не только при построении решений диференциально-разностных систем, но и при исследованиях модели Пайерлса.

Рассмотрим оператор (2.6) с периодическими коэффициентами $c_n=c_{n+N}$, $v_{n+N}=v_n$.

Основой современного подхода к спектральным задачам для периодических операторов является исследование аналитических свойств решений уравнения

$$L\psi_n=E\psi_n \tag{2.8}$$

при всех, в том числе и комплексных значениях параметра E.

Для любого E пространство решений уравнения (2.8) двумерно. Задав произвольные значения ψ_0 и ψ_1, все остальные значения ψ_n находятся из (2.8) рекуррентным образом. Стандартный базис $\varphi_n(E)$ и $\theta_n(E)$ задается условиями $\varphi_0=1$, $\varphi_1=0$, $\theta_0=0$, $\theta_1=1$. Из рекуррентной процедуры вычисления $\varphi_n(E)$ и $\theta_n(E)$ следует, что они являются полиномами по E,

$$\varphi_n(E)=\frac{c_0}{c_1\ldots c_{n-1}}\left(E^{n-2}-\left(\sum_{k=2}^{n-1}v_k\right)E^{n-3}+\ldots\right),$$

$$\theta_n(E)=\frac{1}{c_1\ldots c_{n-1}}\left(E^{n-1}-\left(\sum_{k=1}^{n-1}v_k\right)E^{n-2}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{0<i<j}^{n-1}v_iv_j-\sum_{k=1}^{n-2}c_k^2\right)E^{n-3}+\ldots\right). \tag{2.9}$$

Матрица $T(E)$ оператора монодромии $\hat{T}:y_n\to y_{n+N}$ в базисе φ и θ имеет вид:

$$\hat{T}(E)=\begin{pmatrix}\varphi_N(E), & \theta_N(E)\\ \varphi_{N+1}(E), & \theta_{N+1}(E)\end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Из (2.8) легко следует, что для любых двух решений этого уравнения, в частности для φ и θ, выражение (аналог Вронскиана)

$$c_n(\varphi_n\theta_{n+1}-\varphi_{n+1}\theta_n)$$

не зависит от n. Так как $c_0=c_N$, то

$$\det\hat{T}=\varphi_N\theta_{N+1}-\theta_N\varphi_{N+1}=\varphi_0\theta_1-\varphi_1\theta_0=1.$$

Собственные значения w оператора монодромии определяются из характеристического уравнения

$$w^2-2Q(E)w+1=0;\quad Q(E)=\frac{1}{2}(\varphi_N(E)+\theta_{N+1}(E)). \tag{2.11}$$

Полином Q имеет степень N и его старшие члены имеют вид

$$2Q(E)=\frac{1}{c_0\ldots c_{N-1}}\left(E^N-\left(\sum_{k=0}^{N-1}v_k\right)E^{N-1}+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{0\leqslant l<j}^{N-1}v_lv_j-\sum_{k=0}^{N-1}c_k^2\right)E^{N-2}+\ldots\right). \tag{2.12}$$

Спектры $E_i^{\pm}$ периодической и антипериодической задач для L определяются из уравнений $Q(E_i^{\pm})=\pm1$, так как при этом $w=\pm1$.

Обозначим через E_i, $i=1,\ldots,2q+2$, $q\leqslant N-1$, простые точки спектра периодической и антипериодической задач для L, т. е. простые корни уравнения

$$Q^2(E)=1. \tag{2.13}$$

Для точки E общего положения уравнение (2.11) имеет два корня w и w^{-1}. Каждому корню отвечает единственный собственный вектор $\{\psi_n\}$ матрицы монодромии, нормированный условием $\psi_0=1$,

$$L\psi_n=E\psi_n,\quad \psi_{n+N}=w\psi_n.$$

Это решение называется блоховским.

Теорема 2.1. Двузначная функция $\psi_n^{\pm}(E)$ является однозначной мероморфной функцией $\psi_n(\gamma)$ на гиперэллиптической кривой Γ, $\gamma\in\Gamma$, отвечающей римановой поверхности функции $\sqrt{R(E)}$,

$$R(E)=\prod_{i=1}^{2q+2}(E-E_i). \tag{2.14}$$

Вне бесконечноудаленных точек она имеет q полюсов $\gamma_1,\ldots,\gamma_q$. В окрестности бесконечноудаленных точек

$$\psi_n^{\pm}(E)=e^{\pm x_n}E^{\pm n}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^{\pm}(n)E^{-s}\right). \tag{2.15}$$

Здесь знаки $\pm$ отвечают верхнему и нижнему листам поверхности Γ (верхним будет называться лист, на котором в бесконечности $\sqrt{R}\sim E^{q+1}$).

Доказательство этой теоремы в значительной мере повторяет аналогичные утверждения из теории Штурма—Лиувилля [17].

Блоховское решение, как и любое другое решение уравнения (2.8), имеет вид $\psi_n=\psi_0\varphi_n+\psi_1\theta_n$. Вектор (ψ_0, ψ_1) является собственным для матрицы $\hat{T}$. Значит, $\psi_0=1$, $\psi_1=\frac{w-\varphi_N}{\theta_N}$ или

$$\psi_n=\varphi_n(E)+\frac{w-\varphi_N}{\theta_N}\theta_n(E). \tag{2.16}$$

Пусть e_j, $j=1, \ldots, N-q-1$, —двукратные корни уравнения $Q^2(E)=1$, т. е.

$$Q^2(E)-1=C^2r^2(E)R(E), \quad r(E)=\prod_{j=1}^{N-q-1}(E-e_j),$$
$$C^{-1}=c_0\ldots c_{N-1}. \tag{2.17}$$

В точках e_j в блоховском базисе матрица оператора $\hat{T}$ равна ± 1. Значит, она равна ± 1 и в любом другом базисе. Отсюда

$$\theta_N(E)=r(E)\tilde{\theta}_N(E), \quad \varphi_{N+1}(E)=r(E)\tilde{\varphi}_{N+1}(E), \tag{2.18}$$
$$\varphi_N(e_j)=\theta_{N+1}(e_j)=w(e_j)=\pm 1. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что $Q(E)-\varphi_N(E)=r(E)\tilde{Q}(E)$.

Здесь $\tilde{\theta}_N$, $\tilde{\varphi}_{N+1}$, $\tilde{Q}$—полиномы от E. Подставляя в (2.16) $w=Q+Cr\sqrt{R}$ и используя предшествующие равенства, получим

$$\psi_n^{\pm}=\varphi_n(E)+\frac{\tilde{Q}(E)\pm C\sqrt{R(E)}}{\tilde{\theta}_N(E)}\theta_n(E). \tag{2.20}$$

Это равенство и означает, что двузначная функция $\psi_n^{\pm}(E)$ является однозначной, мероморфной функцией точки $\gamma\in\Gamma$. Полюса ψ лежат в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$, расположенных по одной над корнями полинома $\tilde{\theta}_N(E)$. Действительно, если $\tilde{\theta}_N(E)=0$, то два корня $w_{1,2}$ равны $\varphi_N(E)$ и $\theta_{N+1}(E)$. При этом $\varphi_N(E)\neq\theta_{N+1}(E)$. Следовательно, для одного из корней w (т. е. на одном из листов Γ над корнем $\tilde{\theta}_N(E)=0$) числитель дроби в (2.20) обращается в нуль. Полюс ψ_n лежит на втором листе.

Для завершения доказательства осталось рассмотреть поведение $\psi_n^{\pm}(E)$ при $E\to\infty$. Из (2.16) следует, что в P^+ $\psi_1(E)$

имеет простой полюс. Непосредственно из (2.8) получим, что ψ_n имеет полюс в P^+ n-го порядка, $n>0$. Аналогично, $\psi_{-n}(E)$ имеет полюс в P^- n-ого порядка. Из этого и того, что w имеет в P^+ полюс N-го порядка, а в P^- нуль кратности N, вытекает равенство (2.15), где x_n таковы, что $x_0=0$, $\exp(x_n-x_{n+1})=c_n$.

Параметры $\gamma_1, \ldots \gamma_q$, вернее их проекции на E-плоскость (которые в дальнейшем для краткости будут обозначаться также), имеют естественный спектральный смысл.

Лемма 2.1. *Набор точек* e_j (*двукратно вырожденных точек спектра периодической и антипериодической задач для* L) *и* $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ *является спектром задачи* (2.8) *с нулевыми граничными условиями* $\tilde\psi_0=\tilde\psi_N=0$.

Доказательство. Кривая Γ над точками e_j имеет два листа, на каждом из которых функция $w(E)$ принимает одинаковое значение 1 или -1. В качестве $\tilde\psi_n$ можно взять

$$\tilde\psi_n(e_j)=\psi_n^+(e_j)-\psi_n^-(e_j)=\frac{2C\sqrt{R(e_j)}}{\tilde\theta_N(e_j)}\theta_n(e_j). \qquad (2.21)$$

Из (2.18) и того, что $r(e_j)=0$, получим, что $\tilde\psi_0(e_j)=\tilde\psi_N(e_j)=0$.

Точки γ_l являются нулями $\tilde\theta_N(E)$. Как уже говорилось выше, при $E=\gamma_l$ для одного из знаков перед $\sqrt{R}$ в (2.20) числитель второго слагаемого обращается в нуль. Значит для второго он отличен от нуля. Пусть это, например, знак плюс. Тогда

$$\tilde\psi_n(\gamma_j)=(\tilde Q+C\sqrt{R})\,\theta_n(\gamma_j)$$

есть нетривиальное решение уравнения (2.8), $E=\gamma_j$, с нулевыми граничными условиями.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть заданы произвольные различные точки E_i, $i=1, \ldots, 2q+2$, и точки $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ на римановой поверхности Γ функции $\sqrt{R(E)}$, проекции которых на E-плоскость различны. В разностных задачах аналог теоремы 1.5 есть теорема Римана—Роха [44]. В данном случае она утверждает, что существует единственная с точностью до пропорциональности мероморфная на Γ функция $\psi_n(\gamma)$, имеющая полюса в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$, полюс n-го порядка в P^+ и нуль n-го порядка в точке P^-. Функцию $\psi_n(\gamma)$ можно с точностью до знака нормировать, потребовав, чтобы коэффициенты при $E^{\pm n}$ на верхнем и нижнем листах в бесконечности были взаимнообратными. Зафиксировав произвольным образом знаки, обозначим соответствующие коэффициенты через $e^{\pm x_n}$. При этом $\psi_n(\gamma)$ будет иметь в окрестности бесконечности вид (2.15).

Лемма 2.2. *Построенные функции* $\psi_n(\gamma)$ *удовлетворяют уравнению* (2.8), *где коэффициенты оператора* L *равны*:

$$c_n = \exp(x_n - x_{n+1}), \quad v_n = \xi_1^+(n) - \xi_1^+(n+1). \tag{2.22}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi_n = L\psi_n - E\psi_n$. Она имеет полюса в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$. Из (2.15, 1.22) следует, что φ_n имеет полюс $(n-1)$ порядка в P^+ и нуль порядка n в точке P^-. По теореме Римана—Роха $\varphi_n = 0$.

Метод получения явных формул для ψ_n и коэффициентов L полностью аналогичен непрерывному случаю, который излагался в первой главе. Как и ранее, зафиксируем на Γ канонический набор циклов. Обозначим через dp нормированный абелев дифференциал третьего рода с единственными особенностями в бесконечности

$$i\,dp = \frac{E^q + \sum_{l=1}^{q} \alpha_l E^{q-l}}{\sqrt{R(E)}}\, dE = \frac{P(E)\, dE}{\sqrt{R(E)}}. \tag{2.23}$$

Коэффициенты α_l определяются из условий нормировки

$$\oint_{a_l} dp = \int_{E_{2l}}^{E_{2l+1}} dp = 0. \tag{2.24}$$

Лемма 2.3. Функция $\psi_n(\gamma)$ имеет вид:

$$\psi_n = r_n \exp\left(in \int_{E_1}^{\gamma} dp\right) \frac{\theta(A(\gamma) + n\mathrm{U} + Z(D))}{\theta(A(\gamma) + Z(D))}, \tag{2.25}$$

где $2\pi i U_k = \oint_{b_k} dp$, r_n — константа.

В окрестности бесконечноудаленной точки на верхнем листе имеем

$$\exp\left(i \int_{E_L}^{\gamma} dp\right) = E e^{-I_0}(1 - I_1 E^{-1} + \ldots). \tag{2.26}$$

Из (2.15) следует, что $\exp(2x_n + 2I_0 n)$ равно отношению значений множителей при экспоненте в (2.25), взятых в образах $A(P^\pm) = \pm z^0$. Из (2.25) и того, что, согласно билинейным соотношениям Римана $2z^0 = -\mathrm{U}$, получим

$$c_n^2 = e^{-2I_0} \frac{\theta(\mathrm{U}(n-1) + Z)\,\theta((n+1)\mathrm{U} + Z)}{\theta^2(n\mathrm{U} + Z)}, \tag{2.27}$$

где $Z = Z(D) - z^0$.

В окрестности P^+ имеем

$$A(\gamma) = z^0 + \mathbf{V}E^{-1} + O(E^{-2}),$$

где координаты V_k вектора $\mathbf{V}$ определяются равенством

$$\Omega_k = dE^{-1}(V_k + O(E^{-1})).$$

Разлагая (2.25) в ряд по E^{-1}, получим из (2.22)

$$v_n = \frac{d}{dt} \ln \frac{\theta((n-1)U + Z + Vt)}{\theta(nU + Z + Vt)} \Big|_{t=0} + I_1. \tag{2.28}$$

Теорема 2.2 Формулы (2.27, 1.28) восстанавливают коэффициенты L по параметрам E_i и γ_j.

Важно отметить, что формулы (2.27, 1.28) определяют в общем случае квазипериодические функции c_n и v_n. Для того чтобы c_n и v_n были периодическими, необходимо и достаточно, чтобы для соответствующего дифференциала dp были выполнены условия:

$$U_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{b_k} dp = \frac{m_k}{N}, \quad m_k — \text{целые}. \tag{2.29}$$

Как следует из определения ψ_n, параметры E_i, γ_j определяют их с точностью до знака. Изменения знаков при $\{\psi_n\}$ приводит лишь к соответствующему изменению знаков при $\{c_n\}$. Операторы, отличающиеся лишь знаками при c_n, можно не различать, поскольку их собственные функции *тривиально переводятся* друг в друга. (Формула (2.27) согласуется со сделанным замечанием, поскольку она выражает через E_i и γ_j не сами c_n, а их квадраты).

До сих пор речь шла об операторах L с произвольными комплексными коэффициентами. Пусть теперь v_n и c_n вещественны, тогда вещественными являются все введенные выше полиномы $\theta_n(E)$, $\varphi_n(E)$, $Q(E)$. Кроме того, периодическая и антипериодические задачи для L являются самосопряженными. Значит, имеется N вещественных точек спектра той и другой задачи, т. е. полином Q^2-1 имеет $2N$ вещественных корней. Отсюда в экстремумах полинома $Q(E)$, $dQ(E)=0$, имеет место $|Q(E)| \geqslant 1$.

Отрезки $[E_{2i-1}, E_{2i}]$, в которых $|Q(E)| \leqslant 1$, называются разрешенными зонами. В этих отрезках $|w|=1$ и многозначная функция $p(E)$, определяемая из равенства $w = e^{ipN}$, вещественна. Она называется квазиимпульсом. Ее дифференциал совпадает с (2.23), где в (2.24) a_i — циклы, расположенные над запрещенными зонами $[E_{2i}, E_{2i+1}]$.

Лемма 2. 4. Полюса γ_i блоховской функции $\psi_n(\gamma)$ вещественного оператора L расположены по одной в каждой из конечных запрещенных зон, $E_{2i} \leqslant \gamma_i \leqslant E_{2i+1}$.

Доказательство. Полюса γ_i являются нулями полинома $\theta_N(E)$. В этих точках

$$1 = \det T = \varphi_N(\gamma_j)\, \theta_{N+1}(\gamma_j) = 1.$$

Так как φ_N и θ_{N+1} вещественны, то

$$|Q(\gamma_j)| = \frac{1}{2} |\varphi_N(\gamma_j) + \theta_{N+1}(\gamma_j)| \geqslant 1$$

и γ_j лежит либо в запрещенной зоне, либо в одной из схлопнувшихся зон — точках e_j. В последних $\psi_n(\gamma)$, как было показано выше, не имеет особенностей. Рассмотрим семейство операторов L_t с коэффициентами $c_n{}^t = t + (1-t)c_n$, $v_n{}^t = (1-t)v_n$. Не ограничивая общности, можно считать, что $c_n > 0$, так как этого можно добиться изменением знаков c_n, что не сказывается на E_i, γ_j. Так как $c_n{}^t \neq 0$, то $\gamma_i{}^t$, непрерывно зависящие от t (как и $E_i{}^t$), при всех t лежат в запрещенных зонах. При $t=1$ все запрещенные зоны закрываются, т. е. все корни полинома Q^2-1, кроме первого и последнего, двукратно вырождены. Следовательно, $\gamma_i{}^1$ лежат в двукратных корнях Q^2-1. Деформация по t приводит к тому, что часть двукратных корней распадается в пары простых, являющихся концами запрещенной зоны. Внутри каждой из них из непрерывности по t лежит в точности одна точка γ_i. При $t=0$ получим требуемое утверждение.

Теорема 2.3. Если точки $E_1, \ldots, E_{2q+2}$ вещественны и точки $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ соответствующей римановой поверхности лежат по одной над каждой из запрещенных зон $[E_{2i}, E_{2i+1}]$, то определяемые ими, в силу теоремы 2.2, коэффициенты c_n и v_n оператора L вещественны.

Доказательство. Необходимость условий теоремы в классе периодических операторов дается леммой 2.4.

Пусть E_i вещественны. Комплексное сопряжение индуцирует антиинволюцию τ кривой $\Gamma:(E, \sqrt{R}) \to (\bar{E}, \overline{\sqrt{R}})$. Неподвижными овалами этой антиинволюции являются циклы, расположенные над отрезками $[E_{2i}, E_{2i+1}]$ и над бесконечной зоной, соединяющей через бесконечность точки E_{2q+2}, E_1.

Рассмотрим $\bar{\psi}_n(\tau(\gamma))$. Эта функция обладает всеми аналитическими свойствами ψ_n. Поскольку ψ_n этими свойствами определена с точностью до знака, то

$$\bar{\psi}_n(\tau(\gamma)) = \pm \psi_n(\gamma). \tag{2.30}$$

Из (2.22) следует, что v_n вещественны, а c_n либо вещественно, либо чисто мнимое (т. е. $c_n{}^2$ вещественно).

Докажем, что в предположениях теормы $c_n \neq 0$, $c_n \neq \infty$. Отрицание этого утверждения эквивалентно тому, что один или несколько нулей $\gamma_i(n)$ функции $\psi_n(\gamma)$ попадает в бесконечность на верхнем или нижнем листе Γ. Из (2.30) следует, что на циклах, расположенных над $[E_{2i}, E_{2i+1}]$, ψ_n либо вещественна, либо чисто мнимая. На каждом цикле имеется один полюс γ_i, поэтому имеется, по крайней мере, и один нуль. Так как всего нулей q, то $\gamma_i(n)$ расположены, как и γ_i, по одному над $[E_{2i}, E_{2i+1}]$ и, значит, отделены от бесконечности.

В силу доказанного, знак $c_n{}^2$ не меняется при непрерывных деформациях E_i и γ_i, для которых выполнены условия теоремы. Продеформируем их так, чтобы все запрещенные зоны закрылись. При этом легко проверить, что оператор L продеформируется в оператор L_0, у которого $v_n=0$, а $c_n^2=\text{const}>0$. Теорема доказана.

В заключение параграфа рассмотрим условия, выделяющие операторы L, для которых $v_n=0$, т. е.

$$L\psi_n=c_n\psi_{n+1}+c_{n-1}\psi_{n-1}. \tag{2.31}$$

С этим оператором связана задача интегрирования разностного аналога уравнения kg Ф

$$\dot{c}_n'=c_n'(c'_{n+1}-c'_{n-1}),\quad c_n'=c_n^2. \tag{2.32}$$

Теорема 2.4. Необходимыми и достаточными условиями того, что оператор L (восстанавливаемый в силу теоремы 2.2 по данным E_i и γ_j) имеет вид (2.31), т. е. $v_n=0$, является симметрия точек E_i относительно нуля и инвариантность точек γ_j относительно инволюции на Γ,

$$(E,\sqrt{R})\to(-E,\sqrt{R}),\quad R(E)=\prod_{i=1}^{q+1}(E^2-E_i^2).$$

Необходимость условий теоремы следует из того, что если $\psi_n(\gamma)$ — блоховская функция для оператора L (2.31), то для $\tilde{\psi}_n=(-1)^n\psi_n$:

$$L\tilde{\psi}_n=-E\tilde{\psi}_n,\quad \tilde{\psi}_{n+N}=(-1)^N w\tilde{\psi}_n.$$

Достаточность условий доказывается аналогично доказательству теоремы 2.3.

§ 2. «Конечнозонные потенциалы» и вариации интегралов Крускала

Как уже говорилось выше, периодические разностные операторы все являются конечнозонными. При этом число зон в общем случае имеет порядок периода N оператора. Выделение q-зонных разностных операторов $q<N$ может быть проведено с помощью того же алгебраического анзатца, что и в непрерывном случае. Так для рассматриваемого разностного оператора Шрёдингера этот анзатц имеет вид: оператор L является q-зонным тогда и только тогда, когда найдется оператор

$$L_1\psi_n=\sum_{k=-q-1}^{q+1}d_{n,k}\psi_{n+k} \tag{2.33}$$

такой, что

$$[L_1,L]=0. \tag{2.34}$$

Как и в непрерывном случае, уравнения (2.34) представляют собой по существу пучок нелинейных уравнений на коэффициенты v_n и c_n оператора L.

Все решения этих уравнений даются формулами (2.27, 1.28) и являются в общем случае квазипериодическими функциями n.

Целью настоящего параграфа является изложение на этом примере еще одного аспекта теории конечнозонного интегрирования — связи их с вариационными принципами для функционалов типа Крускала.

Определим функционалы $I_k = I_k\{c_n, v_n\}$ формулой

$$ip = \ln E - \sum_{k=0}^{\infty} I_k E^{-k}, \tag{2.35}$$

где $p(E)$ — квазиимпульс. Эти функционалы имеют вид:

$$I_k\{c_n, v_n\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r_k(c_n, v_n),$$

где локальные плотности r_k — полиномы. Из (2.12) имеем

$$I_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln c_n,$$

$$I_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v_n,$$

$$I_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(c_n^2 + \frac{v_n^2}{2}\right) \text{ и т. д.}$$

Теорема 2.5. Оператор L является q-зонным тогда и только тогда, когда его коэффициенты являются экстремалями функционала $H = I_{q+2} + \sum_{k=0}^{q+1} \alpha_k I_k$, где α_k — некоторые константы.

В силу этой теоремы, уравнения (2.34) дают коммутационное представление пучка уравнений

$$\delta H = \delta I_{q+2} + \sum_{k=0}^{q+1} \alpha_k \delta I_k = 0; \quad \delta = \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial c_n} \delta c_n + \frac{\partial}{\partial v_n} \delta v_n\right) \tag{2.36}$$

параметризованных константами α_k.

Доказательство. Докажем сначала необходимость условий теоремы.

Лемма 2.5. Имеет место равенство

$$i\delta p = \frac{l_0 E^{q+1} + l_1 E^q + \ldots + l_{q+1}}{\sqrt{R(E)}}; \quad l_i = l_i(\delta c_n, \delta v_n). \tag{2.37}$$

Доказательство этого соотношения может быть получено полностью аналогично доказательству его непрерывного варианта [15].

Мы его выведем, исходя из других соображений, «которые легко обобщаются на случай вариаций, не сохраняющих группу периодов». (О смысле последнего высказывания чуть ниже).

Рассмотрим произвольную вариацию δc_n, δv_n оператора L в классе операторов с тем же периодом N. При такой вариации спектр оператора L возмутится таким образом, что концы старых зон E_i сдвинутся (обозначим их через E_i'), а двукратные точки спектра e_j возможно распадутся в простые $e_j^{\pm}$ (на месте e_j образуются новые лакуны).

Квазиимпульс является многозначной функцией на Γ, которая при обходе по b-циклам меняется на целое кратное $\frac{2\pi}{N}$. Отсюда δp является однозначной мероморфной функцией на Γ. Из (2.23) следует, что δdp имеет полюса второго порядка в точках E_i и возможно простые полюса над точками e_j. Из однозначности δp следует, что вычеты δdp над e_j равны нулю. Следовательно, δр имеет простые полюса в концах зон, а так как она нечетна, то имеет место равенство (2.37).

Разлагая равенство (2.37) в окрестности бесконечности, получим

$$
\begin{gathered}
l_0=-\delta I_0,\quad l_1=-\delta I_1+\frac{s_1}{2}\delta I_0,\quad s_1=\sum_i E_i,\\
l_2=-\delta I_2+\frac{s_1}{2}\delta I_1+\left(\frac{s_1^2}{8}-\frac{s_2}{2}\right)\delta I_0,\quad s_2=\sum E_iE_j, \qquad (2.38)\\
l_k=-\delta I_k+\sum_{i=0}^{k-1}\beta_{ik}\delta I_i.
\end{gathered}
$$

Из первых $q+1$ равенства коэффициенты l_k выразятся через δI_k, $k\leqslant q+1$. Приравнивая коэффициенты разложения (2.37) и (2.35) при E^{-q-2}, получим (2.36), где α_k являются симметрическими полиномами от E_i.

Необходимость условий теоремы следует из того, что по формуле же (2.37) для q-зонных операторов коэффициенты l_k независимы и, значит, независимы дифференциалы δI_k, $k\leqslant q+2$.

Пусть M^q — многообразие упорядоченных наборов $E_1<\ldots$ $\ldots<E_{2q+2}$. Замыкание $\hat{M}^N$ является стратифицированным многообразием, содержащим $M^q \in \hat{M}^N$, для всех $q\leqslant N$. Формула (2.23) определяет для любого набора $E_1,\ldots,E_{2q+2}$ дифференциал dp, а значит, и по (2.35) функционалы $I_k=I_k(\{E_i\})$.

Рассмотрим теперь вариацию $(E_1,\ldots,E_{2q+2})$ в $\hat{M}^N$. При такой вариации, помимо вариации, E_i, появляются новые лакуны $e_j^-<e_j^+$, $j=1,\ldots,N-q$.

Лемма 2.6. Пусть δU_k — вариация группы периодов dp, т. е.

$$\delta U_k=\frac{1}{2\pi}\oint_{b_k}\delta dp.$$

Тогда

$$i\delta p=\frac{\sum\limits_{k=0}^{q+1} l_k E^{q+1-k}}{\sqrt{R(E)}}+\sum_{k=1}^{q}\delta U_k\oint\limits_{a_k}\frac{dt\sqrt{R(t)}}{\sqrt{R(E)}\,(E-t)}. \qquad (2.39)$$

Доказательство леммы проводится как и при доказательстве предшествующей леммы с помощью сравнения аналитических свойств правой и левой частей.

Заметим, что (2.39) совпадает с (2.37), если $\delta U_k=0$ (соответствующие вариации называются вариациями, сохраняющими группу периодов дифференциала dp).

В следующем параграфе нам потребуются формулы для второй вариации квазиимпульса.

Теорема 2.6. Для произвольной вариации $(E_1,\ldots,E_{2q+2})$ в $\hat{M}^N$ имеет место

$$i\delta^2 p=\frac{\sum\limits_{k=0}^{q+1}\tilde{l}_k E^{q+1-k}}{\sqrt{R}}+\sum_{i=1}^{q}\delta^2 U_i\oint\limits_{a_i}\frac{dt\sqrt{R(t)}}{\sqrt{R(E)}\,(E-t)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{R}}\left(\sum_{i=1}^{2q+2}\frac{P(E_i)}{2(E-E_i)}(\delta E_i)^2+\sum_{j=1}^{N-q}\frac{P(e_j)}{4(E-e_j)}(\delta e_j)^2\right), \qquad (2.40)$$

где $\delta E_i=E_i'-E_i$, $\delta e_j=e_j^+-e_j^-$; $P(E)$ то же, что и в (2.23).

Доказательство. Пусть $(E_1',\ldots,E'_{2q+2},\ e_j^{\pm})$ — вариация $(E_1,\ldots,E_{2q+2})$. Соответствующий этому набору квазиимпульс имеет вид:

$$i\,dp'=\frac{P_N(E)}{\sqrt{R'(E)}\sqrt{\prod\limits_{j=1}^{N-q}(E-e_j^+)(E-e_j^-)}}\,dE. \qquad (2.41)$$

Коэффициенты полинома $P_N(E)$ определяются из уравнений

$$\int\limits_{E'_{2i}}^{E'_{2i+1}} dp'=0,\quad i=1,\ldots,q, \qquad (2.42)$$

$$\int\limits_{e_j^-}^{e_j^+} dp'=0,\quad j=1,\ldots,N-q. \qquad (2.43)$$

При $e_j^+=e_j^-=e_j$, $E_i'=E_i$ полином $P_N(E)$ равен $P(E)\prod\limits_j(E-e_j)$. Из этого и того, что δp не имеет полюсов над e_j, получим, разлагая (2.41), что $i\delta^2 p$ имеет вид (2.41) с некоторыми неопределенными коэффициентами при $(\delta E_l)^2$ и $(\delta e_j)^2$. Для определения последних необходимо сравнить главные члены у второй вариации (2.41) и дифференциала от (2.40) в точках E_l и e_j.

Заметим, что в случае вариации периодических операторов соответствующая вторая вариация $\delta^2 p$ дается формулой (2.40), в которой $\delta^2 U_k = 0$. Коэффициенты $\tilde{I}_k$ связаны с $\delta^2 I_k$ теми же формулами, что и I_k и δI_k (2.28).

Следствие. Пусть (c_n, v_n) — экстремаль функционала H (2.36). Тогда значение $\delta^2 H$ на вариации $(\delta c_n, \delta v_n)$ равно

$$\delta^2 H = \sum_{l=1}^{2q+2} \frac{P(E_l)}{2} (\delta E_l)^2 + \sum_{j=1}^{N-q} \frac{P(e_j)}{4} (\delta e_j)^2. \tag{2.44}$$

Глава 3

МОДЕЛЬ ПАЙЕРЛСА

§ 1. Интегрируемые случаи в модели Пайерлса

В этом параграфе мы рассмотрим специальные случаи модели Пайерлса, кратко описанной во введении.

Энергию деформации выберем в виде линейной комбинации интегралов цепочки Тода (2.35). Функционал Пайерлса тогда примет вид:

$$H = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{m} E_l^+ + \sum_{k=0}^{l} \varkappa_k I_k, \tag{3.1}$$

где E_l^+ — упорядоченный в порядке возрастания спектр периодической задачи для оператора Шрёдингера.

Наряду с этой моделью $(l=2)$, в работе [7] была рассмотрена модель, в которой $v_n = 0$ (отсутствует внутренняя степень свободы). Последняя модель в линеаризованном пределе

$$x_n = na + u_n, \quad |u_n| \ll 1, \quad c_n = c_0 (1 - \alpha (u_{n+1} - u_n))$$

совпадает с известной решетчатой моделью Су, Шрифера, Хигера [68], которая интенсивно исследовалась численно.

В этом же пределе модель допускает континуальное приближение [6, 7, 3, 4]. Так, если $\rho \ll 1$, где $\rho = \frac{m}{N}$ — плотность электронов, то континуальный предел H имеет вид $(v_n = 0)$,

$$H = \frac{1}{2\pi} \oint_{E_1}^{\mu} E\,dp + g \int_0^T u^2(x)\,dx, \tag{3.2}$$

где dp — дифференциал квазиимпульса оператора Штурма — Лиувилля $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$.

Теорема 3.1. Экстремали функционала H (3.1) имеют не более $2l-2$ запрещенных зон в спектре соответствующего оператора Шрёдингера.

Доказательство. Рассмотрим сначала вариацию первой части функционала (3.1). Так как E_i^+ есть корни полинома $Q(E)-1$ (2.12), то

$$\sum_{i=1}^{m} \delta E_i^+ = -\sum_{i=1}^{m} \operatorname{res}_{E_i} \frac{\delta Q}{Q-1}. \tag{3.3}$$

Введем обозначения:

$$Q \mp 1 = CR_\pm r_\pm^2, \tag{3.4}$$

где $R_\pm(E)$ — полиномы, корни которых являются простыми точками спектра периодической (соответственно, антипериодической) задачи для L. Полиномы $r_\pm(E)$ имеют корни в двукратных точках спектра этих же задач.

Из определения квазиимпульса имеем

$$i\delta p = \frac{1}{N} \frac{\delta Q}{\sqrt{Q^2-1}} = \frac{1}{NC} \frac{\delta Q}{\sqrt{R}\, r_+ r_-}. \tag{3.5}$$

Сравнивая эту формулу с (2.37), получим

$$\frac{1}{NC}\,\delta Q = r_+ r_- \left(\sum_{k=0}^{q+1} l_k E^{q+1-k} \right). \tag{3.6}$$

С помощью (3.3) и (3.6) уравнения экстремалей примут вид:

$$0 = \delta H = \sum_{k=0}^{l} \varkappa_k \delta I_k - \sum_{i=1}^{m} \operatorname{res}_{E_i} \frac{\left(\sum_{k=0}^{q+1} l_k E^{q+1-k} \right) r_-(E)}{R_+(E)\, r_+(E)}. \tag{3.7}$$

Предположим далее, что $q+1 \geqslant l$. Тогда

$$l_k = \sum_{j=0}^{k} \beta_{jk} \delta I_j. \tag{3.8}$$

В сделанном предположении, вариации δI_k, $k \leqslant q+1$, независимы. Значит, коэффициенты при δI_k в (3.7) должны быть равны нулю. Равенство нулю коэффициентов при δI_k, $k = l+1, \ldots, q+1$, дает

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{res}_{E_i} \frac{E^{q+1-k} r_-(E)}{R_+(E)\, r_+(E)} = 0, \quad k = q+1, \ldots, l+1. \tag{3.9}$$

Аналогично, равенство нулю коэффициентов при δI_j, $j=0, \ldots, l$, означает, что

$$\varkappa_j = \sum_{k=0}^{q+1} \beta_{jk} \sum_{i=1}^{m} \operatorname{res}_{E_i} \frac{E^{q+1-k} r_-(E)}{R_+(E)\, r_+(E)}. \tag{3.10}$$

Покажем, что при $q>2l-2$ уравнения (3.9) не имеют решений. Не ограничивая общности, можно считать, что левее $\mu=E_m$ расположено не более $[\frac{q}{2}]$ запрещенных зон (так как в противном случае от уравнений (3.9) можно перейти к эквивалентным уравнениям, в которых суммирование ведется по $i>m$).

Пусть μ_s — произвольные точки (по одной в каждой из запрещенных зон левее μ). Тогда

$$\sum_{l=1}^{m} \operatorname{res}_{E_l} \frac{\prod\limits_{s}(E-\mu_s)\, r_-(E)}{R_+(E)\, r_+(E)} \neq 0. \tag{3.11}$$

Действительно, полином R_+r_+ имеет простые корни. Следовательно, в соседних точках знаки вычетов $(R_+r_+)^{-1}$ противоположны. Из определения разрешенных зон видно, что между соседними корнями R_+r_+, лежащими в одной зоне, обязательно имеется двукратный корень полинома $Q+1$ или корень полинома r_-. Таким образом, знак вычетов $r_-(r_+R_+)^{-1}$ постоянен внутри каждой разрешенной зоны и меняется при переходе к соседней зоне. Так как μ_s лежат в запрещенных зонах, то все вычеты в (3.11) знакопостоянны, а их сумма отлична от нуля.

Если степень полинома $\prod\limits_{s}(E-\mu_s)$ (которая не превосходит $\left[\frac{q}{2}\right]$) меньше либо равна $q-l$, то (3.11) противоречит (3.9). Значит, $\left[\frac{q}{2}\right]>q-l$ или $q\leqslant 2l-2$.

Основной интерес представляет термодинамический предел в рассматриваемой модели, $N\to\infty$, $m\to\infty$, $\frac{m}{N}\to\rho$ — плотность электронов.

В силу доказанной теоремы, при $N\to\infty$ число разрешенных зон у экстремалей H не превосходит $2l-2$. Следовательно, точки спектра периодической задачи L плотно заполняют разрешенные зоны, что позволяет в уравнениях (3.10) перейти от суммирования к интегрированию. Из определения квазиимпульса вытекает, что дифференциал (2.23)

$$idp=\frac{P(E)\,dE}{\sqrt{R(E)}}$$

определяет плотность, с которой в разрешенных зонах расположены точки E_l^+.

Вычеты дифференциала

$$\frac{dQ}{Q-1}=\frac{dE P r_+ r_-}{CR_+ r_+^2}=\frac{Pr_-}{CR_+r_+}\,dE$$

во всех двукратных точках спектра равны 2. Значит, во всех (кроме, не более чем в $4l$) точках вычет в (3.10) равен $\frac{E^{q+1-l}}{2P(E)}$.

Следствие. В термодинамическом пределе концы зон E_l функционала Пайерсла определяются из уравнений

$$\oint\limits_{E_1}^{\mu} \frac{E^{q+1-k}}{\sqrt{R}} dE=0, \quad l<k\leqslant q+1<2l-1,$$

$$\sum_{k=0}^{q+1} \beta_{kj} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{E_1}^{\mu} E^{q+1-k} \frac{dE}{\sqrt{R}}=\varkappa_j, \quad j=0, \ldots, l. \tag{3.12}$$

Здесь μ, называемое химпотенциалом, суть последний уровень энергии, до которого в (3.1) идет суммирование. Для определения μ имеется уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \oint\limits_{E_1}^{\mu} \frac{P(E)\, dE}{i\sqrt{R}}=\rho. \tag{3.13}$$

(Знак $\oint\limits_a^b$ означает, что интегрирование ведется по контуру, пересекающему вещественную ось в точках a и b).

Уравнения (3.12), (3.13) были получены в работе [7] иным способом. Вместо того, чтобы предельный переход проводить для уравнений (3.10), в работе [7] на множестве всех конечнозонных потенциалов был определен предельный функционал $\mathscr{H}$, который затем уже и варьировался.

Имея в виду исследование термодинамического предела для модели Пайерлса, определим более точно этот функционал $\mathscr{H}$. Пусть $E_1, \ldots, E_{2q+2}$ — упорядоченный набор различных вещественных точек. Формулы (2.23, 2.24) определяют дифференциал dp, который, в свою очередь, задает функционалы $I_k\{E_i\}$.

Функционал $\mathscr{H}$ задается формулой

$$\mathscr{H}\{E_i\}=\frac{1}{2\pi} \oint\limits_{E_1}^{\mu} E\,dp+\sum_{k=0}^{l} \varkappa_k I_k, \tag{3.14}$$

где μ определяется из условия (3.13).

Уравнения (3.9, 3.10) являются уравнениями экстремалей H в классе периодических потенциалов. Периодичность потенциала $\{c_n, v_n\}$, отвечающего набору $\{E_i\}$, требует выполнения соотношений (2.29), которые при периодических вариациях не меняются. Переходя в них к пределу $N\to\infty$, получим, что имеет место утверждение.

Теорема 3.2. Уравнения (3.12) являются необходимым и достаточным условием экстремальности $\mathscr{H}$ (при условии $\rho=$ $=\mathrm{const}$) относительно вариаций таких, что $\delta U_k=0$, где

$$U_k=\frac{1}{2\pi} \oint\limits_{E_1}^{E_{2k}} dp. \tag{3.15}$$

Здесь, как и при выводе уравнений (3.9, 3.10), предполагается, что $q+1 \geqslant l$. В этом же предположении из формулы (2.39) и (2.35) следует, что

$$\delta U_k = \sum_{s=q+2}^{2q} a_{ks} \delta I_s + \sum_{l=0}^{q+1} b_{kl} \delta I_l.$$

Аналогично выводу (3.9, 3.10), получим

Теорема 3.3. Необходимым и достаточным условием экстремальности $\mathscr{H}$ (при условии $\rho = \mathrm{const}$) на множестве всех конечнозонных состояний являются уравнения (3.12) и уравнения

$$\oint_{E_1}^{\mu} \frac{dE}{\sqrt{R(E)}} \oint_{E_{2k}}^{E_{2k+1}} \frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{E-t} = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{3.16}$$

Рассмотрим теперь устойчивость экстремалей функционала $\mathscr{H}$. По теореме (3.1) число зон у экстремали $\mathscr{H}$ не превосходит $2l-2$.

Теорема 3.4. В минимумах $\mathscr{H}$ химпотенциал μ лежит в запрещенной зоне. Число запрещенных зон не превосходит $l-1$.

Доказательство. Пусть μ лежит в разрешенной зоне

$$\delta^2 \mathscr{H} = \frac{1}{2\pi} \oint_{E_1}^{\mu} (E-\mu)\, d\delta^2 p + \sum_{k=0}^{l} \varkappa_k \delta^2 I_k + (\delta\mu)^2 \frac{dp}{dE}(\mu) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \oint_{E_1}^{\mu} \delta^2 p\, dE + \sum_{k=0}^{l} \varkappa_k \delta^2 I_k + (\delta\mu)^2 \frac{dp}{dE}(\mu).$$

Рассмотрим вариацию, при которой раскрывается щель в точке μ. Коэффициент при $(\delta\mu)^2$ в $\delta^2 p$ имеет вид:

$$-\frac{1}{2\pi} \oint_{E_1}^{\mu} \frac{P(\mu)\, dE}{\sqrt{R}(E-\mu)} + O(1).$$

Так как $P(\mu)(R(\mu))^{-1/2} > 0$, то первое слагаемое сингулярно и обращается в $-\infty$, что доказывает неустойчивость любой экстремали, в которой μ лежит в разрешенной зоне.

Если μ лежит в запрещенной зоне, то $U_m = \rho$ (где $E_{2m} \leqslant \mu \leqslant E_{2m+1}$). При этом относительно допустимых вариаций $U_m = \rho = \mathrm{const}$. Следовательно, соответствующие экстремали определяются из уравнений (3.12) и (3.16). В последней системе уравнение с индексом m должно быть опущено.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть $q \geqslant l$.

Лемма 3.1. Вторая вариация $\mathscr{H}$ равна

$$\delta^2 \mathscr{H} = \sum_{k=1}^{2q+2} \Lambda(E_k)(\delta E_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-q} \Lambda(e_j)(\delta e_j)^2, \tag{3.17}$$

где

$$\Lambda(e) = \frac{P(e)}{8\pi i} \oint_{E_1}^{E_{2m}} \frac{dE}{\sqrt{R(E)}\,(E-e)}. \tag{3.18}$$

Доказательство. Как и при доказательстве следствия теоремы (2.6), заметим, что коэффициенты полинома $\tilde{l}$ и величины $\delta^2 U_k$, фигурирующие в формуле (2.40), связаны с $\delta^2 I_j$ теми же формулами, что и l_k и δU_k в (2.39) с первыми вариациями δI_j. Отсюда, в силу уравнений (3.12, 3.16), имеем

$$\sum_{k=0}^{l} \varkappa_k \delta^2 I_k - \frac{1}{2\pi} \oint_{E_1}^{E_{2m}} \frac{\tilde{l}(E)\,dE}{i\sqrt{R(E)}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq m} \delta^2 U_k \oint_{E_1}^{E_{2m}} dE \oint_{E_{2k}}^{E_{2k+1}} \frac{dt\,\sqrt{R(t)}}{\sqrt{R(E)}\,(E-t)} = 0. \tag{3.19}$$

Подставляя выражение (2.40) в

$$\delta^2 \mathscr{H} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{E_1}^{E_{2m}} \delta^2 p\,dE + \sum_{k=0}^{l} \varkappa_k \delta^2 I_k$$

и учитывая (3.19), получим утверждение леммы.

Так как в минимумах все $\Lambda(e)$ должны быть положительны, а $P(E)$ меняет знак при переходе через запрещенную зону, то менять знак должен и второй сомножитель (если контур интегрирования не пересекает эту зону).

Значит, существуют точки $E_{2k} \leqslant \mu_k \leqslant E_{2k+1}$, $k \neq m$, такие, что

$$\oint_{E_1}^{E_{2m}} \frac{dE}{\sqrt{R(E)}(E-\mu_s)} = 0. \tag{3.20}$$

Вычет на бесконечности подынтегрального выражения в (3.20) равен нулю. Поэтому

$$\oint_{E_{2m}}^{E_{2q+2}} \frac{dE}{\sqrt{R(E)}(E-\mu_s)} = 0. \tag{3.21}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $m \leqslant q+1-m$, так как в противном случае в последующих рассуждениях надо от интегралов (3.20) перейти к (3.21).

Пусть ν_s, $s<m$, — произвольные точки, лежащие по одной в каждой запрещенной зоне с номерами меньшими m. Тогда

$$\oint_{E_1}^{E_{2m}} \frac{dE}{i\sqrt{R(E)}} \cdot \frac{\prod\limits_{k<m} (E-\nu_k)}{\prod\limits_{s>m} (E-\mu_s)} \neq 0, \tag{3.22}$$

так как подынтегральное выражение вдоль всех разрешенных зон, расположенных внутри контура, знакопостоянно (при переходе от зоны к зоне знак $\sqrt{R}$ меняется, но также меняется *и знак числителя второго сомножителя в подынтегральном выражении*). Разлагая подынтегральное выражение на простейшие дроби, получим, что если $m<g+1-m$, то (3.22) есть сумма выражений вида (3.20), а значит, обязано равняться нулю. Если $m=q+1-m$, то (3.22) аналогичным образом сведется к $\oint\limits_{E_1}^{E_{2m}} \frac{dE}{i\sqrt{R(E)}}$, что также равно нулю, в силу уравнений самосогласования (3.12), при $q \geqslant l$. Полученное противоречие между (3.22) и (3.12, 3.20) доказывает теорему.

Рассмотрим в качестве основного примера модель, исследованную в работе [7], в которой $l=2$. Изложенные выше результаты в этом частном случае дают, что минимум $\mathscr{H}$ реализуется на однозонном состоянии. Концы зон E_1, E_2, E_3, E_4, отвечающие минимуму, определяются из уравнений

$$\varkappa_2 = \frac{i}{2\pi} \oint\limits_{E_1}^{\mu} \frac{dE}{\sqrt{R}}, \tag{3.23}$$

$$0 = \oint\limits_{E_1}^{\mu} (2E - s_1) \frac{dE}{\sqrt{R}}, \quad s_1 = \sum_{l=1}^{4} E_l, \tag{3.24}$$

$$\varkappa_0 = \frac{i}{2\pi} \oint\limits_{E_1}^{\mu} \frac{\left(E^2 - \frac{s_1}{2} E + \frac{s_2}{2} - \frac{s_1{}^2}{8}\right)}{\sqrt{R}} dE, \quad s_2 = \sum E_l E_j, \tag{3.25}$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{E_1}^{\mu} \frac{(E+a)\, dE}{\sqrt{R}}. \tag{3.26}$$

Константа a находится из условий нормировки (2.25)

$$\oint\limits_{E_2}^{E_3} \frac{E+a}{\sqrt{R}} dE = 0. \tag{3.27}$$

Как показано в [7], уравнения (3.23—3.26) существенно упрощаются после перехода к эллиптической параметризации. Функция

$$z = \int\limits_{E_1}^{E} \frac{dE'}{\sqrt{R(E')}}. \tag{3.28}$$

отображает эллиптическую кривую Г функции $\sqrt{R}$, $R = \prod_{l=1}^{4} (E - E_l)$, на тор с периодами 2ω, $2\omega'$

$$\omega=\int\limits_{E_1}^{E_2}\frac{dE}{\sqrt{R(E)}},\quad \omega'=\int\limits_{E_2}^{E_3}\frac{dE}{\sqrt{R(E)}}. \tag{3.29}$$

Обращение эллиптического интеграла (3.29) дается формулой

$$E(z)=\zeta(z+z_0)-\zeta(z-z_0)+h, \tag{3.30}$$

где $\zeta(z)=\zeta(z|\omega,\omega')$ — функция Вейерштрасса. (Все необходимые сведения об эллиптических функциях можно найти в [2]). Параметры ω, ω', z_0, h заменяют E_1, E_2, E_3, E_4. В этих параметрах уравнения (3.23—3.26) приобретают вид:

$$z_0=(\rho-1)\,\omega', \tag{3.31}$$

$$\varkappa_2=\frac{i}{\pi}\,\omega, \tag{3.32}$$

$$\pi i+2\eta z_0=\omega\,(2\zeta\,(2z_0)+h), \tag{3.33}$$

$$-\varkappa_0=\frac{2i}{\pi}\,(\eta+\wp\,(2z_0))\omega. \tag{3.34}$$

Соответствующие значения c_n и v_n даются формулами (2.27) и (2.28), в которых тэта-функция определена одним параметром $B_{11}=\tau=-\frac{\omega}{\omega'}$, $U=\rho$, $V=1$. В [7] приведена формула и для энергии основного состояния $\mathscr{H}(\rho)=\min\mathscr{H}$, которую здесь мы опустим, ввиду ее громоздкости. Там же исследована и модель, описанная во введении (в которой $v_n=0$).

§ 2. Общая модель Пайерлса

С физической точки зрения, важными являются следующие два утверждения, вытекающие из результатов предшествующего параграфа. Во-первых, основное состояние системы вырождено. Сдвиг на вектор Z в формулах (2.27, 2.28) не меняет значения $\mathscr{H}$, так как $\mathscr{H}$ зависит лишь от концов зон E_i и не зависит от γ_j. Подобное вырождение отвечает за так называемую фрелиховскую проводимость и проявляется в наличии дополнительных звуковых (бесщелевых) ветвей спектра возбуждений над основным состоянием системы. Вторым следствием является то, что $\mathscr{H}(\rho)$ — энергия основного состояния является гладкой функцией плотности электронов.

Ниже будет рассмотрена общая модель Пайерлса

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\oint\limits_{E_1}^{\mu}E\,dp+\varkappa_2 I_2-\varkappa_0 I_0+gW, \tag{3.35}$$

где

$$W=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(\Phi_1(v_n)+\Phi_2(c_n^2)). \tag{3.36}$$

Оказывается, что энергия основного состояния $\mathcal{H}_*(\rho)$ при $g\neq\neq 0$ становится в общем случае разрывной в рациональных точках $\rho=r/q$. Величина скачка имеет порядок $\sim g\exp(-\alpha q)$. Ряд физических соображений и результаты машинного счета [9, 50] указывают на то, что с вопросами соизмеримости (которым в последнее время уделяется большое внимание в физической литературе (см., например, обзор [51])) связано и вырождение основного состояния. Мы докажем, что для иррациональных ρ при $0\leqslant g\leqslant g_\rho$ основное состояние действительно вырождено.

В дальнейшем функционал (3.35) при $g=0$ (и который рассматривался в качестве основного примера в предшествующем параграфе) будет обозначаться через $\mathcal{H}_0$.

Обратим внимание на то, что в окрестности основного состояния $\mathcal{H}_0$ не является гладкой функцией, так как в этом состоянии $E_2\leqslant\mu\leqslant E_3$. Функционал $\mathcal{H}_0$ является гладким относительно вариаций, при которых

$$\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}^{E_2}dp=U=\text{const}. \tag{3.37}$$

Обозначим через $\mathcal{H}_0(\rho, U)$ минимум $\mathcal{H}_0$ на множестве однозонных состояний при фиксированном ρ и U в (3.37). Концы зон, отвечающие этому минимуму, определяются из уравнений (3.23—3.26). При этом если $U>\rho$, то $E_1\leqslant\mu<E_2$, а если $U<\rho$, то $E_3<\mu\leqslant E_4$. Производная $\frac{\partial\mathcal{H}_0(U,\rho)}{\partial U}$ разрывна в точке $U=\rho$. Из (2.39) следует, что она имеет правые и левые пределы $h(E_3)>0$ и $h(E_2)<0$, соответственно, где

$$h(e)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{E_1}^{e}\frac{dE}{\sqrt{R(E)}}\oint_{E_2}^{E_3}\frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{E-t}. \tag{3.38}$$

Функция $h(e)$ монотонно убывает на отрезках $[E_1, E_2]$ и $[E_3, E_4]$. При этом $h(E_1)=h(E_4)=0$. На отрезке $[E_2, E_3]$ она линейно растет от $h(E_2)<0$ до $h(E_3)>0$. Следовательно, в окрестности $U=\rho$.

$$\mathcal{H}_0(U,\rho)=\mathcal{H}_0(\rho)+h_1|U-\rho|+h_2(U-\rho)+O((U-\rho)^2),$$
$$h_1+h_2=h(E_3),\quad h_2-h_1=h(E_2). \tag{3.38$'$}$$

Замечание. В том определении химпотенциала, которое давалось выше, его значение внутри запрещенной зоны было неоднозначно. Если доопределить μ в этом случае с помощью соотношения

$$\mu=\frac{\partial\mathcal{H}(\rho)}{\partial\rho},$$

то из (3.38) μ будет удовлетворять равенству $h(\mu)=0$.

При малых g система (3.35) может рассматриваться как возмущение интегрируемой модели с $g=0$. Для того, чтобы применять обычные в таких случаях соображения, нам при доказательстве основной теоремы этого параграфа потребуются формулы для второй вариации $\mathcal{H}_0$ и для первой вариации W.

Подставляя (2.27) и (2.28) в (3.36), можно считать, что W есть функция

$$W=W(\{E_i\},\ Z)$$

наборов $\{E_i\}=(E_1,\ldots,\ E_{2q+2})$, $Z=(z_1,\ldots,\ z_q)$.

Рассмотрим характер зависимости W от Z.

Формула (2.29) сопоставляет каждому набору $\{E_i\}$ q-мерный вектор $U(\{E_i\})$ с координатами $0<U_1<\ldots<U_q<1$. Набор $\{E_i\}$ называется нерезонансным, если не существует целочисленного вектора $r=(r_1,\ldots,\ r_q)$ такого, что

$$\langle r,\ U(\{E_i\})\rangle=r_0, \tag{3.39}$$

где r_0 — целое. Для резонансных наборов через $R(\{E_i\})$ будет обозначаться группа, образованная теми $r \in R(\{E_i\})$, для которых имеет место (3.39) при некотором целом r_0

Лемма 3.2. Функционал W равен

$$W(\{E_i,\ Z\})=\sum_{r\in R(\{E_i\})}\mathcal{F}_r\exp(2\pi i<r,\ Z>+\pi i r_0), \tag{3.40}$$

где

$$\mathcal{F}_m=\int\ldots\int\mathcal{F}(z_1,\ldots,\ z_q)e^{-2\pi i\langle m,\ r\rangle}dz_1\ldots dz_q$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\mathcal{F}(Z)=\Phi_1(v(Z))+\Phi_2(c^2(Z)),$$

$$c^2=\frac{\theta(Z-U)\theta(Z+U)}{\theta^2(Z)}e^{-2I_0},\quad U=U(\{E_i\}), \tag{3.41}$$

$$v(Z)=\frac{d}{dt}\ln\frac{\theta(Z+U)}{\theta(Z+U+Vt)}\bigg|_{t=0}+I_1. \tag{3.42}$$

Из (2.27, 2.28) следует, что

$$\Phi_1(v_n)+\Phi_2(c_n^2)=\mathcal{F}\left(nU-\frac{U}{2}+Z\right).$$

Предел

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathcal{F}\left(nU-\frac{U}{2}+Z\right)$$

легко находится, если воспользоваться разложением Фурье для $\mathcal{F}(z)$.

Следствие 1. Для нерезонансных наборов $\{E_i\}$ W не зависит от Z и равен

$$W_0(\{E_i\}) = \int \ldots \int \mathscr{F}(Z) dz_1 \ldots dz_q \tag{3.43}$$

Следствие 2. Если не все частоты U_k рациональны, то, соответствующий уровень функционала W вырожден.

Доказательство. В предположении следствия все резонансные соотношения зависимы. Значит, найдется вектор Z_* такой, что $\langle r, Z_* \rangle = 0$. Из (3.40) тогда следует, что $W(\{E_i\}, Z + tZ_*)$ не зависит от t.

Формула (3.43) определяет «непрерывную» часть функционала W, который для общих Φ_1 и Φ_2 разрывен во всех резонансных наборах. Если $|r|$ — минимальный порядок резонанса, $|r| = |r_1| + \ldots + |r_q|$, $r \in R(\{E_i\})$, то величина скачка

$$|W(\{E_i\}, Z) - W_0(\{E_i\})|$$

имеет порядок $\mathscr{F}_r$ и убывает с ростом $|r|$ для аналитичных Φ_i как $\exp(-a|r|)$, a — некоторая константа.

Обозначим через $W_*(\{E_i\}) = \min\limits_Z W(\{E_i\}, Z)$. По следствию 1 она почти всюду равна W_0. Из (3.40) следует, что

$$\int \ldots \int W(\{E_i\}, Z) dz_1 \ldots dz_q = W_0(\{E_i\}).$$

Значит

$$W_*(\{E_i\}) \leqslant W_0(\{E_i\}).$$

Рассмотрим произвольную вариацию $(E_1', \ldots, E_4', e_j^\pm)$ однозонного состояния $E_1, \ldots, E_4$.

Лемма 3.3. Вариация W равна

$$|\delta W| \leqslant |W_*(\{E_i'\}) - W_*(\{E_i\})| + \sum_{j=1}^{N} f(e_j) \delta e_j, \tag{3.44}$$

$$f(e_j) \leqslant C \exp(-r_j a_1), \quad C - \text{const}, \tag{3.45}$$

где r_j — минимальное из целых (положительных) чисел таких, что

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{E_1}^{e_j} dp = r_j U + r_j', \quad U = \frac{1}{2\pi} \oint_{E_1}^{E_2} dp \tag{3.46}$$

для некоторого целого r_j'.

Доказательство. Пусть Ω — нормированный дифференциал на поверхности Γ функции $\sqrt{R(E)}$

$$\Omega = \alpha \frac{dE}{\sqrt{R}}, \quad -\oint_{E_2}^{E_3} \Omega = 1, \quad B_{11} = \oint_{E_1}^{E_2} \Omega.$$

Нормированные абелевы дифференциалы Ω_1 и Ω_2 на поверхности Γ' с точками ветвления $(E_1, \ldots, E_4, e^-, e^+)$ с точностью до членов порядка $(\delta e)^2 = (e^+ - e^-)^2$ равны:

$$\Omega_1=\Omega, \quad \Omega_2=\frac{\alpha_1 E+\alpha_2}{\sqrt{R(E)}\,(E-e)}\,dE. \tag{3.47}$$

Константы α_i определяются тем, что вычет Ω_2 в точке $E=e$ равен 1 (равен интегралу по стянувшемуся циклу a_2), а $\int\limits_{E_2}^{E_3} \Omega_2=0$. Матрица b-периодов кривой Γ' равна:

$$B'_{11}=B_{11}+O\left((\delta e)^2\right), \tag{3.48}$$

$$B'_{12}=2\int\limits_{E_1}^{e} \Omega, \tag{3.49}$$

$$\exp\left(\pi i B_{22}\right)=\tilde{A}(e)\,\delta e+O\left((\delta e)^2\right). \tag{3.50}$$

Разлагая соответствующую θ-функцию, получим

$$\theta(z_1, z_2)=\theta(z_1)+e^{\pi i B_{22}}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \left[\exp\left(2\pi i\,(m z_1+z_2)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\pi i\,(2B_{12}m+B_{11}m^2)\right)+\exp\left(2\pi i\,(m z_1-z_2)+\pi i\,(B_{11}m^2-2B_{12}m)\right)\right]\right\}+$$

$$+O\left((\delta e)^2\right)=\theta(z_1)+\tilde{A}(e)\,\delta e\left[\theta(z_1+B_{12})\,e^{2\pi i z_2}+\right.$$

$$\left.+\theta(z_1-B_{12})\,e^{-2\pi i z_2}\right]+O\left((\delta e)^2\right). \tag{3.51}$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(z_1, z_2)=\mathcal{F}(z_1)+\delta e\left(F_+(z_1)\,e^{2\pi i z_2}+F_-(z_1)\,e^{-2\pi i z_2}\right). \tag{3.52}$$

Здесь $F_\pm(z_1)$ — периодические функции z_1, аналитически зависящие от $B_{12}(e)$. Подставляя (3.52) в (3.40), получим, что

$$|\delta W|\leqslant|W_*(\{E_1'\})-W_*(\{E_i\})|+$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1}\delta e_i\left(\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left|F^+_{kr(e)}\right|+\left|F^-_{kr(e)}\right|\right)+O\left((\delta e)^2\right), \tag{3.53}$$

где $r(e)$ — целое число такое, что

$$\oint\limits_{E_1}^{r(e)} dp\equiv 2\pi r(e)\,U\ (\mathrm{mod}\,1),$$

а $F^\pm_m$ — коэффициенты Фурье функций $F_\pm(z_1)$. Лемма доказана.

Объединяя полученные результаты, мы приходим к следующему основному утверждению:

Теорема 3.5. Пусть Φ_1 и Φ_2 аналитичны в некоторой окрестности вещественной оси, на которой они положительны, и пусть ρ удовлетворяет условию $\left|\rho-\frac{m}{n}\right|>\frac{\alpha}{n^2}$ при $n>n_0$, где n_0 и α — некоторые константы. Тогда существует $g_0>0$ такое, что при $g<g_0$ энергия основного состояния $\mathcal{H}_*(\rho)=\min\mathcal{H}$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathscr{H}_*(\rho)-\mathscr{H}_*(\{E_i^*\})|<\frac{g^2C^2}{2\Lambda},$$

где E_i^* — основное состояние для невозмущенного функционала $\mathscr{H}_0$, которое дается (3.23—3.26), $\Lambda>0$ равно $\min\Lambda(e)$ в (3.18).

Кроме того,

1. Спектр оператора L, отвечающего основному состоянию системы, имеет щели в точках e_s, определяемых из условия

$$\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}^{e_s} dp\equiv s\rho\,(\mathrm{mod}\,1).$$

2. Ширина щели имеет порядок

$$|\delta e_s|\leqslant\frac{gC\exp(-sa_1)}{2\Lambda}+O(g^2).$$

3. Основное состояние дается формулами (2.27) и (2.28), в которых все частоты имеют вид:

$$U_k=r_k\rho+r_k',$$

r_k, r_k' — целые.

4. Если ρ иррационально, то основное состояние вырождено.

Доказательство. Обозначим через $V_h\subset\hat{M}$ окрестность $\{E_i^*\}$, состоящую из таких наборов (E_i', e_j^*), что

$$\sum_{j=1}^{N-1}(\delta e_j)+\sum_{i=1}^{4}|\delta E_i|=\varepsilon\leqslant h, \tag{3.54}$$

а через $\bar{V}_h$ дополнение к этой окрестности.

В силу того, что $\mathscr{H}_0$ не имеет экстремалей, кроме $\{E_i^*\}$, и Φ_1 и Φ_2 положительны, для достаточно малых h имеем

$$\min_{\bar{V}_h}\mathscr{H}_*\geqslant\min_{\bar{V}_h}\mathscr{H}_0\geqslant\mathscr{H}_0(\rho)+\frac{\Lambda}{2}h^2.$$

Если $gW_*(\{E_i\})\leqslant\frac{\Lambda}{2}h^2$, то минимум $\mathscr{H}$

$$\mathscr{H}_*(\rho)\leqslant\mathscr{H}_0(\rho)+gW(\{E_i\})$$

достигается в окрестности V_h.

Пусть ρ такое, как в условии теоремы, тогда W дифференцируемо в $\{E_i^*\}$ относительно всех вариаций, в том числе и относительно вариаций, изменяющих период

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{E_1}^{E_2} dp=U.$$

Действительно, если $|U-\rho|<\varepsilon$, $U=\frac{m}{n}$, то $n>\sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}}$.

Следовательно,

$$|W_*(\{E_l\})-W_0(\{E_l\})|<C_1\exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}}\,a_1\right)$$

и $W(\{E_l\})$ имеет производную по U, равную производной W_0.

Пусть g удовлетворяет условию

$$g\left.\frac{\partial W}{\partial U}\right|_{E_l=E_l^*}\leqslant\min(h_1\pm h_2),$$

где h_l определены в (3.38′). Тогда из (3.38′) вытекает, что $\min\mathscr{H}$ достигается при $U=\rho$.

Пусть $(E_l', e_j^\pm)$ — основное состояние системы. Так как оно принадлежит V_h, то можно воспользоваться результатами лемм 3.1 и 3.3. Имеем

$$\mathscr{H}_0+gW\geqslant\mathscr{H}_0(\rho)+\frac{\Lambda}{2}\varepsilon^2+gW_*(\{E_l^*\})-gC\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant\mathscr{H}_0(\rho)+gW_*(\{E_l^*\})-\frac{g^2C^2}{2\Lambda},$$

где ε определено в (3.54). Из «диагональности» $\delta^2\mathscr{H}_0$ можно получить более точную оценку на ширину каждой новой щели

$$\delta e_j\sim\frac{gf(e_j)}{2\Lambda(e_j)}\leqslant g\frac{f(e_j)}{2\Lambda}<g\frac{C\exp(-r_ja_1)}{2\Lambda}.$$

Тем самым все пункты теоремы, кроме последнего, доказаны. Вырожденность основного состояния при иррациональных ρ дается следствием 2 леммы 3.2.

Отметим, что зонная структура разностного оператора Шрёдингера, отвечающего основному состоянию модели Пайерлса (которое, по доказанному, является квазипериодическим с двумя периодами ρ и 1), полностью аналогична структура спектра оператора Штурма—Лиувилля с почти периодическим потенциалом, которая была получена в работе [56] (о приложении результатов [56] в континуальных приближениях в задаче Пайерлса см. [51]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И.*, Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов. Докл. АН СССР, 1961, *141*, № 2, 263—266 (РЖМат, 1962, 10Б78)
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.*, Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 1974, (РЖМат, 1975, 1Б69К)
3. *Белоколос Е. Д.*, Задачи Пайерлса — Фрелиха и конечнозонные потенциалы. I. Теор. и матем. физ., 1980, *45*, № 2, 268—280
4. —, Задачи Пайерлса—Фрелиха и конечнозонные потенциалы. II. Теор. и матем. физ., 1981, *48*, № 1, 60—69
5. *Бразовский С. А., Гордюнин С. А., Кирова Н. Н.*, Точное решение модели Пайерлса с произвольным числом электронов на элементарную ячейку. Письма в Ж. Экспер. и теор. физ., 1980, *31*, № 8, 486—490
6. —, *Дзялошинский И. Е., Кирова Н. Н.*, Спиновые состояния в модели

Пайерлса и конечнозонные потенциалы. Ж. экспер. и теор. физ., 1981, *82*, № 6, 2279—2298
7. —, —, *Кричевер И. М.*, Точно решаемые дискретные модели Пайерлса. Ж. экспер. и теор. физ., 1982, *83*, № 1, 389—415
8. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.*, Асимптотика резольвенты Штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега-де Фриза. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 5, 67—100 (РЖМат, 1976, 3Б792)
9. *Дзялошинский И. Е.*, Теория геликоидальных структур. Ж. экспер. и теор. физ., 1964, *47*, № 5, 992—1008
10. —, *Кричевер И. М.*, Эффекты соизмеримости в дискретной модели Пайерлса. Ж. экспер. и теор. физ., 1982, *83*, № 5, 1576—1581
11. —, —, Звук и волна зарядовой плотности в дискретной модели Пайерлса. Ж. экспер. и теор. физ., 1983, *85* (в печати)
12. *Дубровин Б. А.*, Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. Функц. анализ и его прил., 1975, *9*, № 3, 41—51 (РЖМат, 1976, 1Б727)
13. —, Тэта-функции и нелинейные уравнения. Успехи мат. наук, 1981, *36*, № 2, 11—80 (РЖМат, 1981, 8А434)
14. —, Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов. Функц. анализ и его прил., 1975, *9*, № 1, 65—66 (РЖМат, 1975, 6Б947)
15. —, *Матвеев В. Б., Новиков С. П.*, Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. Успехи мат. наук, 1976, *31*, № 1, 55—136 (РЖМат, 1976, 7Б972)
16. —, *Натанзон С. М.*, Вещественные двухзонные решения уравнения sine-gordon. Функц. анализ и его прил., 1982, *16*, № 1, 27—43 (РЖМат, 1982, 6Б160)
17. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.*, Теория солитонов: метод обратной задачи. М. Наука, 1980, 495 с.
18. —, *Михайлов А. В.*, Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи, Ж. экспер. и теор. физ., 1978, *74*, № 6, 1953—1974
19. —, *Шабат А. Б.*, Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 3, 13—22 (РЖМат, 1980, 3Б432)
20. —, —, Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I., Функц. анализ и его прил., 1974, *8*, № 3, 43—53 (РЖМат, 1974, 12Б273)
21. *Зверович Э. И.*, Краевые задачи теории аналитических функций, Успехи мат. наук, 1971, *26*, № 1, 113—181 (РЖМат, 1971, 10Б357)
22. *Итс А. Р.*, О конечнозонных решениях уравнения изложение см.: *Matveev V. B.*, Abelian functions and solitons, preprint of Wroclaw University № 373, 1976)
23. —, *Матвеев В. Б.*, Об одном классе решений уравнения Кортевега-де Фриза, В сб. «Проблемы матем. физики», № 8, Л., Ленинград. ун-т, 1976, 70—92 (РЖМат, 1977, 2Б635)
24. *Козел В. А., Котляров В. П.*, Почти периодические решения уравнения $u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0$. Докл. АН УССР, 1976, *А*, № 10, 878—881 (РЖМат, 1977, 4Б338)
25. *Кричевер И. М.*, Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 6, 180—208 (РЖМат, 1978, 9Б678)
26. —, Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 1, 15—31 (РЖМат, 1977, 6Б831)
27. —, Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Функц. анализ и его прил., 1978, *12*, № 3, 20—31 (РЖМат, 1978, 11Б1044)
28. —, Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального по-

ля и уравнения sine-gordon, Докл. АН СССР, 1980, *253*, № 2, 288—292 (РЖМат, 1980, 11Б588)

29. —, Модель Пайерлса. Функц. анализ и его прил., 1982, *16*, № 4, 10—26 (РЖМат, 1983, 2Б901)
30. —, Алгебро-геометрическая спектральная теория разностного оператора Шрёдингера и модель Пайерлса. Докл. АН СССР, 1982, *265*, № 5, 1054—1058 (РЖМат, 1982, 12Б776)
31. —, О рациональных решениях уравнения Кадомцева — Петвиашвили и об интегрируемых системах частиц на прямой. Функц. анализ и его прил., 1978, *12*, № 1, 76—78 (РЖМат, 1978, 6Б453)
32. —, Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений. Докл. АН СССР, 1976, *227*, № 2, 291—294 (РЖМат, 1976, 7Б501)
33. —, Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 4, 215—216 (РЖМат, 1979, 2Б703) (РЖМат, 1979, 2Б703)
34. —, Эллиптические решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили и интегрируемые системы частиц. Функц. анализ и его прил., 1980, *14*, № 4, 45—54 (РЖМат, 1981, 2Б517)
35. —, *Новиков С. П.*, Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 6, 47—68 (РЖМат, 1981, 5А537)
36. —, —, Голоморфные расслоения и нелинейные уравнения. Конечнозонные решения ранга 2. Докл. АН СССР, 1979, *247*, № 1, 33—37 (РЖМат, 1979, 11Б1039)
37. —, —, Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева—Петвиашвили (КП) I. Функц. анализ и его прил., 1978, *12*, № 4, 41—52 (РЖМат, 1979, 5Б871)
38. *Манаков С. В.*, *О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах.* Ж. экспер. и теор. физ., 1974, *67*, № 2, 543—555
39. *Мусхелишвили Н. И.*, Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962, с. 599 (РЖМат, 1963, 1Б249К)
40. *Новиков С. П.*, Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза. Функц. анализ и его прил., 1974, *8*, № 3, 54—66 (РЖМат, 1975, 1Б962)
41. *Пайерлс Р.*, Квантовая теория твердых тел. М., ИЛ, 1956
42. *Серр Ж.*, Алгебраические группы и поля классов. М., Мир, 1968, с. 285 (РЖМат, 1969, 3А345К)
43. *Скотт Э.* (ред.), Солитоны в действии. М., Мир, 1981, 312 с.
44. *Спрингер Дж.*, Введение в теорию римановых поверхностей. М., ИЛ, 1961 (РЖМат, 8Б107К)
45. *Чередник И. В.*, Алгебраические аспекты двумерных киральных полей. I., В сб. «Совр. проблемы мат» (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР), М., 1981, *17*, 175—218 (РЖМат, 1981, 10А358)
46. —, Об условиях вещественности в «конечнозонном интегрировании». Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 5, 1104—1108 (РЖМат, 1980, 10Б868)
47. —, Об интегрируемости двумерного асимметричного кирального $O(3)$-поля и его квантового аналога. Ядерная физика, 1981, *33*, № 1, 278—281
48. —, О решениях алгебраического типа асимметричных дифференциальных уравнений, Функц. анализ и его прил., 1981, *15*, № 3, 93—94 (РЖМат, 1982, 1А542)
49. *Ablowitz M. A., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.*, Method for solving the sine-gordon equation. Phys. Rev. Lett., 1973, *30*, 1262—1264 (РЖМат, 1975, 9Б480)
50. *Aubry S.*, Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices. Ann. Israel Phys. Soc., 1980, *3*, 133—164
51. —, Metal-insulator transition in one dimensional deformable lattices. Bifurcation Phenomena in Math. Phys. and Related Topics, ed. *Bardos C., Bessis D.*, 1980, 163—184

52. *Baker H. M.*, Note on the foregoing paper «Commutative ordinary differential operators». Proc. Royal Soc. London, 1928, *118*, 584—593
53. *Bullough R. K., Caudrey P. J.* (Editors), Solitons. Springer-Verlag, 1980
54. *Calodgero F.*, Exactly solvable one-dimensional manybody systems. Lett. Nuovo Cimento, 1975, *13*, 411—415
55. *Choodnovsky D. V., Choodnovsky G. V.*, Pole expansions of nonlinear partial differential equations. Lett. Nuovo Cimento, 1977, *40 B*, 339—350
56. *Dinaburg E. I.; Sinai Y. C.*, Schrodinger equation with quasi-periodic potentials. Fund. Anal., 1976, *9*, 279—283
57. *Faddeev L. D.*, Quantum scattering transformation Proc. Freiburg summer Inst., 1981, Plenum press. 1982.
58. *Flashka H.*, Toda lattice. II. Prog. Theor. Phys., 1974, *51*, 543—555 (РЖМат, 1974, 12Б304)
59. *Gardner C., Green J., Kruskal M., Miura R.*, A method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Lett., 1967, *19*, 1095—1098
60. *Lax P. D.*, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitory waves. Comm. Pure and Appl. Math., 1968, *21*, N 5, 467—490
61. *Leznov A. N., Saveliev M. N.*, On the two-dimensional system differential equations. Comm. Math. Phys., 1980, *74*, 111—119
62. *Mansfild P.*, Solutions of Toda lattice. preprint Cambridge Univ., Cambridge, CB 39 EW, 1982
63. *Mikhailov A. V.*, The reduction problem in the Zakharov—Shabat equations. Physica 3D, 1981, v. 1, 215—243
64. *Mikhailov A. V.*, The landau-Lifshitz equation and the Riemann—Hilbert boundary problem on torus. Phys. Lett., 1982, v. 92 a, 2, 51—55
65. *Perelomov A. M.*, Completely integrable classical systems connected with semisimple Lie algebras. Lett. Math. Phys., 1977, *1*, 531—540
66. *Pohlmeyer K.*, Integrable Hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints. Comm. Math. Phys., 1976, *46*, 207—223 (РЖМат, 1976, 9Б427)
67. *Sklyanin E. K.*, On complete integrability of the Landau—Lifshitz equation. Preprint LOMI E—3—1979, Leningrad, 1979
68. *Su W. P., Schriffer I. R., Heeger A. I.*, Soliton exitations in polyacetylen, Phys. Rev., 1980, *B22*, 2099—2108
69. *Toda M.*, Waves in nonlinear lattice. Prog. Theor. Phys. Suppl., 1970, *45*, 174—200