И. М. Кричевер, Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия, *Докл. АН СССР*, 1985, том 285, номер 1, 31–36

существует сходящаяся к $y(\cdot)$ последовательность $x_k(\cdot) \in X_i(t_0, x_0, U, \epsilon_k)$, где $\epsilon_k \mapsto$ $\mapsto +0$ при $k \to \infty$. Полагаем

$$\Gamma_i^*(t_0, x_0) = \min_U \max_{y(\cdot)} \gamma(y(\cdot)) \text{ при } y(\cdot) \in Y_i(t_0, x_0, U), \quad i = 1, 2, 3.$$

Будем говорить, что оптимальный результат, гарантированный в классе универсальных стратегий, устойчив по отношению к информационным помехам, если $\Gamma_1^*(t_0, x_0) = \Gamma_2^*(t_0, x_0)$ при всех $(t_0, x_0) \in D$, где D – заданная область начальных позиций.

Поскольку при любом $\epsilon > 0$ имеем $X_1(t_0, x_0, U, \epsilon) = X_3(t_0, x_0, U, \epsilon)$, то получаем следующее

Утверждение. *Результат, гарантированный в классе универсальных стратегий, будет устойчивым тогда и только тогда, когда* $\Gamma_2^*(t_0, x_0) = \Gamma_3^*(t_0, x_0)$ *при всех* $(t_0, x_0) \in D$.

Институт кибернетики
Академии наук АзССР, Баку,

Поступило
5 X 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с. 2. *Красовский Н.Н.* – Матем. сб., 1978, т. 107 (149), № 4, с. 541–571. 3. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с. 4. *Филиппов А.Ф.* – Матем. сб., 1960, т. 51 (93), № 1, с. 99–128. 5. *Барабанова Н.Н., Субботин А.И.* – ПММ, 1971, т. 35, № 3, с. 385–392. 6. *Davy J.L.* – Bull. Austral. Math. Soc., 1972, vol. 6, p. 179–398. 7. *Aumann R.J.* – J. Math. Anal. Appl., 1965, vol. 12, p. 1–12. 8. *Филиппов А.Ф.* – Вестн. МГУ. Сер. матем., мех., 1967, № 3, с. 16–26. 9. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1976. 624 с. 10. *Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.* – ДАН, 1981, т. 259, № 1, с. 24–27.

УДК 513.835 МАТЕМАТИКА

И.М. КРИЧЕВЕР

ДВУМЕРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(Представлено академиком С.П. Новиковым 1 X 1984)

1. В работе [1] введено понятие "конечнозонных по отношению к одному уровню энергии" операторов Шредингера

$$H = \left(i\frac{\partial}{\partial x} - A_1\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial y} - A_2\right) + u(x, y) \tag{1}$$

с периодическими коэффициентами: потенциалом $u(x, y)$ и вектор-потенциалом $A_i(x, y)$. Такие операторы выделяются тем условием, что найдется уровень энергии E_0 такой, что блоховские решения уравнения

$$H\psi = E_0\psi, \tag{2}$$

т.е. такие решения, что

(3) $\psi(x+T_1, y) = w_1 \psi(x,y), \quad w_1 = e^{ip_1 T_1},$

(4) $\psi(x, y+T_2) = w_2 \psi(x,y), \quad w_2 = e^{ip_2 T_2},$

образуют "комплексную ферми-поверхность" конечного рода $\Gamma = \Gamma_{E_0}$. При этом эта поверхность компактифицируется двумя бесконечно удаленными точками P_1, P_2, в окрестности которых $\psi(x,y,P)$, $P \in \Gamma$, имеет вид

(5) $$\psi = \exp(k_1 z)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x,y) k_1^{-s}\right),$$

(6) $$\psi = \exp(k_2 \bar{z})\left(\sum_{s=0}^{\infty} \zeta_s(x,y) k_2^{-s}\right),$$

где $k_i^{-1} = k_i^{-1}(P)$ – локальные параметры в окрестностях P_i, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Вне точек P_i функция ψ мероморфна и имеет g полюсов $\{\gamma_s\}$, где g – род поверхности Γ.

Задача восстановления H по "спектральным данным", связанным с одним уровнем энергии: кривой Γ с фиксированными локальными параметрами в окрестностях двух выделенных точек и по дивизору полюсов $\{\gamma_s\}$ решена в [1] (см. подробнее в [2–4]; в [3] эта конструкция обобщена на случай "произвольного ранга").

Выделение данных обратной задачи, отвечающих самосопряженным операторам, оказалось весьма нетривиальным. Некоторые достаточные условия, позволившие неэффективно доказать существование самосопряженных конечнозонных операторов, предложены в [5].

В недавних работах [6, 7] найдены условия, выделяющие потенциальные ($A_i = 0$) вещественные гладкие "конечнозонные" операторы H. При этом эффективными оказались не только условия на кривую Γ, но и на расположение полюсов γ_s. В известном смысле эти условия оказались устойчивыми по отношению к увеличению рода Γ. Это позволило сформулировать в [7] гипотезу, согласно которой произвольный вещественный периодический потенциальный оператор H аппроксимируется конечнозонными. (Этот факт в теории одномерного оператора Шредингера хорошо известен. Аппроксимируемость произвольного потенциала конечнозонными квазипериодическими очевидна из конструкции последних. Аппроксимируемость периодическими конечнозонными потенциалами с тем же периодом, что и у $u(x)$, доказана в [8].)

Целью настоящей работы является построение аналогичной теории для двумерных разностных операторов. Переход к разностному случаю устраняет аналитические трудности, которые неизбежны при попытке доказательства гипотезы С.П. Новикова или при попытке построения прямой задачи, обратной к которой являлась бы конструкция работы [1]. Ниже прямое и обратное спектральные преобразования, связанные с одним уровнем энергии, будут построены для простейшего разностного оператора

(7) $L\psi_{nm} = \psi_{n+1,m+1} + a_{nm}\psi_{n+1,m} + b_{nm}\psi_{n,m+1} + v_{nm}\psi_{nm}$

с периодическими коэффициентами

$$a_{n+N,m} = a_{n,m+M} = a_{nm}, \quad b_{nm} = b_{n+N,m} = b_{n,m+M},$$
$$v_{nm} = v_{n+N,m} = v_{n,m+M}.$$

При этом оказывается, что разностные аналоги конечнозонных операторов имеют ненулевую коразмерность в пространстве всех периодических операторов. Сам по себе этот факт не противоречит разностному варианту гипотезы С.П. Новикова, поскольку общий оператор [7] является аналогом общего оператора [1]. Анализ ситуации, отвечающий правильным разностным аналогам операторов H, которые вещественны и потенциальны, составит предмет дальнейших исследований.

2. Оператор L на пространстве блоховских функций,

$$(8)\qquad \psi_{n+N,m} = w_1\psi_{nm},\quad \psi_{n,m+M} = w_2\psi_{nm},$$

индуцирует конечномерный линейный оператор $L(w_1, w_2)$. Его характеристическое уравнение

$$(9)\qquad Q(w_1, w_2, E) = \det(E\cdot 1 - L(w_1, w_2)) = 0$$

определяет двумерное алгебраическое многообразие M^2, каждой точке которого отвечает в общем положении единственный собственный вектор

$$(10)\qquad L\psi_{nm} = E\psi_{nm},$$

нормированный условием $\psi_{00} = 1$. Все остальные координаты ψ_{nm} являются мероморфными функциями на M^2.

Рассмотрим теперь алгебраическую кривую $\Gamma \subset M^2$, отвечающую нулевому уровню энергии. Полином $Q(w_1, w_2)$, задающий в C^2 кривую Γ, имеет вид

$$(11)\qquad Q(w_1, w_2) = \det L(w_1, w_2) = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant M\\ 0\leqslant j\leqslant N}} a_{ij}w_1^i w_2^j.$$

В общем случае род кривой, заданной таким уравнением, $g = (M-1)(N-1)$. Функции ψ_{nm} мероморфны на Γ, причем вне "бесконечноудаленных" точек, отвечающих компактификации Γ, все ψ_{nm} имеют возможные полюса в точках γ_s, в которых обращается в нуль определитель дополнительного к элементу $L^{00,00}$ минора матрицы оператора $L(w_1, w_2)$, записанного в каноническом базисе.

3. Не уточняя пока полный набор данных, определяющих ψ_{nm}, рассмотрим обратную задачу восстановления операторов L (вообще говоря, с квазипериодическими коэффициентами), которые аналогичны "конечнозонным операторам, определенным в [1] (см. п. 1).

Пусть задана произвольная кривая Γ рода g с отмеченными точками $P_1^\pm$, $P_2^\pm$.

Лемма 1. *Для любого набора точек общего положения $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g$ существует единственная с точностью до пропорциональности функция $\psi_{nm}(P)$, которая вне точек $P_i^\pm$ мероморфна и имеет полюсы в точках γ_s. В точках P_1^+, P_2^+ (P_1^-, P_1^-) она имеет полюсы (нули) порядков n и m соответственно.*

Утверждение леммы является непосредственным следствием теоремы Римана–Роха [9]. Явные формулы в терминах тэта-функций Римана для $\psi_{nm}(P)$ могут быть построены аналогично построению таких выражений для общей функции Клебша–Гордана–Бейкера–Ахиезера [10] (для собственных функций одномерного разностного оператора такие формулы получены в [11]).

Лемма 2. *Функция ψ_{nm} имеет вид*

$$(12)\qquad \psi_{nm}(P) = r_{nm}\exp\left(\int_{P_0}^{P} n\Omega_1 + m\Omega_2\right)\frac{\theta(A(P)+U_1n+U_2m+Z)}{\theta(A(P)+Z)},$$

где $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_g)$ – тэта-функция Римана, построенная по матрице b-периодов Γ; Ω_i – нормированные абелевы дифференциалы третьего рода с полюсами первого порядка в точках $P_i^\pm$ и с вычетами в них, равными ± 1; векторы $2\pi i U_j$ суть векторы b-периодов Ω_j; $A(P)$: $\Gamma \to J(\Gamma)$ – отображение Абеля; вектор Z с точностью до сдвига на вектор римановых констант равен $-\sum_s A(\gamma_s)$ (и в силу произвольности набора $\{\gamma_s\}$ в дальнейшем считается произвольным также).

Т е о р е м а 1. *Функции* $\psi_{nm}(P)$, *определенные в силу леммы* 1, *удовлетворяют уравнению*

(13) $L\psi_{nm}(P) = 0,$

где коэффициенты оператора L

$$(14)\quad a_{nm} = -d_2^+ \frac{r_{n+1,m+1}}{r_{n+1,m}} \frac{\theta(A(P_1^+) + U_1(n+1) + U_2(m+1) + Z)}{\theta(A(P_1^+) + U_1(n+1) + U_2 m + Z)};$$

$$(15)\quad b_{nm} = -d_1^+ \frac{r_{n+1,m+1}}{r_{n,m+1}} \frac{\theta(A(P_2^+) + U_1(n+1) + U_2(m+1) + Z)}{\theta(A(P_2^+) + U_1 n + U_2(m+1) + Z)};$$

$$(16)\quad v_{nm} = -a_{nm} d_1^- \frac{r_{n+1,m}}{r_{n,m}} \frac{\theta(A(P_2^-) + U_1(n+1) + U_2 m + Z)}{\theta(A(P_2^-) + U_1 n + U_2 m + Z)}.$$

Константы $d_i^\pm$ *зависят от* Γ *и определяются равенствами*

$$d_2^\pm = \int_{P_0}^{P_1^\pm} \Omega_2, \quad d_1^\pm = \int_{P_2}^{P_2^\pm} \Omega_1.$$

Любой набор g_{nm} определяет "калибровочное" преобразование операторов вида (7), при котором $a'_{nm} = g_{n+1,m+1} g^{-1}_{n+1,m} a_{nm}$, $b'_{nm} = g_{n+1,m+1} g^{-1}_{n,m+1} b_{nm}$, $v'_{nm} = g_{n+1,m+1} g^{-1}_{nm} v_{nm}$. На собственных функциях калибровочное преобразование действует: $\psi'_{nm} = g_{nm}\psi_{nm}$. Теорема 1 (доказательство которой стандартно в теории конечнозонного интегрирования) сопоставляет каждой кривой Γ с отмеченными точками $P_i^\pm$ и дивизору $\{\gamma_s\}$ степени g единственный с точностью до калибровочного преобразования оператор L вида (7).

Пусть на кривой Γ существуют функции w_1 и w_2 такие, что они имеют единственные полюса в точках P_1^+ и P_2^+ порядков n и m соответственно. В точках P_1^- и P_2^- они имеют нули кратностей n и m. В этом случае можно так нормировать ψ_{nm}, что будут выполнены равенства $\psi_{n+N,m} = w_1\psi_{nm}$; $\psi_{n,m+M} = w_2\psi_{nm}$ и коэффициенты оператора L будут периодическими.

Кривые Γ, обладающие указанным свойством, задаются уравнением следующего вида:

$$(17)\quad Q(w_1, w_2) = w_1^M(w_2 + a_1)^N + (w_1 + a_2)^M w_2^N - w_1^M w_2^N + b_2^N(w_1 + b_1)^M + \\ + b_1^M(w_2 + b_2)^N - b_1^M b_2^N + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant M-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant N-1}} a_{ij} w_1^i w_2^j.$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

С л е д с т в и е. *Предложенная конструкция приводит к периодическим операторам тогда и только тогда, когда кривая* Γ *задается уравнением вида* (17).

Размерность пространства периодических "конечнозонных" операторов равна числу независимых переменных в уравнении (17) плюс род кривой Γ, равный $(M-1)(N-1)$. Всего имеется $2(M-1)(N-1) + 4$ параметрических семейств периодических операторов L, определенных с точностью до калибровочного преобразования. Размерность же всех периодических операторов, определенных с точностью до калибровки, равна $2MN + 1$.

4. Обобщим конструкцию предшествующих пунктов так, чтобы она давала все (по крайней мере, по размерности) периодические операторы (7).

Рассмотрим произвольную кривую Γ, заданную уравнением вида (11). В общем случае w_1 имеет на Γ N простых полюсов и N простых нулей $P_1^\pm$, $P_2^\pm$, ...

$\ldots, P_N^{\pm}$ (фиксация номеров точек произвольна, но выбрана). Аналогично, через $Q_1^{\pm}, Q_2^{\pm}, \ldots, Q_M^{\pm}$ обозначим полюсы и нули функции w_2.

Для любого набора точек $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g$ общего положения существует единственная с точностью до пропорциональности функции $\psi_{nm}(P)$, имеющая полюсы в точках γ_s, а также в точках $P_1^+, P_2^+, \ldots, P_n^+, Q_1^+, Q_2^+, \ldots, Q_m^+$. Кроме того, потребуем, чтобы ψ_{nm} обращалась в нуль в точках $Q_1^-, Q_2^-, \ldots, Q_m^-$ и $P_1^-, P_2^-, \ldots, P_n^-$; здесь $0 \leqslant n \leqslant N$, $0 \leqslant m \leqslant M$. Из определения $P_i^{\pm}$ и $Q_i^{\pm}$ вытекает, что $\psi_{Nm} = w_1 \psi_{0m}$, $\psi_{nM} = w_2 \psi_{n0}$. Поэтому непротиворечиво можно доопределить ψ_{nm} при всех значениях n и m формулой

$$\psi_{nm} = w_1^{h_1} w_2^{h_2} \psi_{n_1, m_1},$$

где $n = h_1 N + n_1$, $m = h_2 M + m_1$, $0 \leqslant n_1 \leqslant N-1$, $0 \leqslant m_1 \leqslant M-1$.

Теорема 2. *Существует единственный оператор L вида* (7) *такой, что*

$$L\psi_{nm}(P) = 0.$$

Коэффициенты L являются периодическими функциями n и m.

Коэффициенты a_{nm} и b_{nm} оператора L однозначно определяются из условия отсутствия у выражения

$$\tilde{\psi}_{nm} = \psi_{n+1,m+1} + a_{nm}\psi_{n+1,m} + b_{nm}\psi_{n,m+1} \tag{18}$$

полюсов в точках P_{n+1}^+ и Q_{m+1}^+. Если это так, то функция $\tilde{\psi}_{nm}$ имеет те же аналитические свойства, что и ψ_{nm}, а значит, пропорциональна ей. Теорема доказана.

Число параметров в этой конструкции (коэффициенты полинома Q плюс произвольные точки γ_s) равно $(M+1)(N+1) - 1 + (M-1)(N-1) = 2MN + 1$, т.е. в пространстве всех периодических операторов вида (7), определенных с точностью до калибровочных преобразований, наша конструкция дает открытое множество операторов. Изменение нумерации $P_i^{\pm}$ и $Q_j^{\pm}$ приведет к другим открытым множествам. По-видимому, дополнение к объединению всех этих открытых множеств будет уже замкнуто, но полностью это еще не доказано.

5. В заключение укажем на некоторые "интегрируемые" случаи оператора H вида

$$H\psi_{nm} = a_{nm}\psi_{n+1,m} + b_{nm}\psi_{n,m+1} + c_{nm}\psi_{n-1,m} + d_{n,m}\psi_{n,m-1} + v_{nm}\psi_{nm}. \tag{19}$$

Для таких операторов с периодическими коэффициентами можно, так же как и в п. 2, построить многообразие M^2 блоховских решений и кривую $\Gamma_{E_0} \subset M^2$, отвечающую одному уровню энергии. К сожалению, в настоящее время не удалось эффективно описать такие кривые и остальные данные на них, которые позволили бы восстановить по ним оператор H.

Ниже будут восстановлены операторы H вида (19) по данным на кривой $\Gamma \subset M^2$, которая в отличие от Γ_{E_0} накрывает при проекции M^2 всю E-плоскость. Дальнейшее развитие этого подхода будет опубликовано в следующей работе.

Рассмотрим кривую Γ, на которой существует функция $E(P)$, имеющая на Γ четыре простых полюса $P^{\epsilon_1, \epsilon_2}$, $\epsilon_i = \pm 1$. Через $\psi_{nm}(P)$ далее будет обозначаться функция, которая с точностью до пропорциональности определяется дивизором $\{\gamma_s\}$ степени g общего положения. Вне точек $P^{\epsilon_1, \epsilon_2}$ она имеет полюсы в точках γ_s, а в окрестности $P^{\epsilon_1, \epsilon_2}$ она имеет вид

$$\psi_{nm} = E^{\epsilon_1 n + \epsilon_2 m} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s^{\epsilon_1, \epsilon_2}(n, m) E^{-s} \right). \tag{20}$$

Теорема 3. *Существует единственный оператор H такой, что*

$$H\psi_{nm}(P) = E(P)\psi_{nm}(P). \tag{21}$$

Коэффициенты a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}, d_{nm} определяются из сравнения главных частей обеих частей равенства в точках $P^{\epsilon_1, \epsilon_2}$. Коэффициент v_{nm} может быть определен, например, из сравнения коэффициентов при E^{n+m} в точке $P^{1,1}$. Для ψ_{nm} имеет место представление (12), если переопределить соответствующим образом дифференциалы Ω_i. Это выражение приводит к явным формулам для коэффициентов H, которые мы опустим здесь лишь за неимением места. При этом становится ясно, что эти коэффициенты являются квазипериодическими функциями n и m.

Государственный научно-исследовательский энергетический институт им. Г.М. Кржижановского, Москва

Поступило 5 X 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П.* – ДАН, 1976, т. 229, № 1, с. 15. 2. *Кричевер И.М.* – УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 180. 3. *Кричевер И.М., Новиков С.П.* – УМН, 1980, т. 35, № 6, с. 47. 4. *Новиков С.П.* В сб.: Совр. проблемы математики. М., 1983, т. 23, с. 3. 5. *Чередник И.В.* – ДАН, 1980, т. 252, № 5, с. 1104. 6. *Веселов А.П., Новиков С.П.* – ДАН, 1984, т. 279, № 1. 7. *Веселов А.П., Новиков С.П.* – ДАН, 1984, т. 279, № 4. 8. *Марченко В.А., Островский И.В.* – Матем. сб., 1974, т. 75, № 3, с. 331. 9. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960. 10. *Кричевер И.М.* – Функц. анализ и его прилож., 1977, т. 11, № 1, с. 15. 11. *Кричевер И.М.* – УМН, 1978, т. 33, № 4, с. 215.

УДК 517.948.35 МАТЕМАТИКА

А.С. ЛЕОНОВ

МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ ПСЕВДООБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 25 VII 1984)

1. Пусть $\mathfrak{A}$ – нормированное пространство матриц размерности $m \times n$ с евклидовой нормой, а R^n и R^m – евклидовы пространства вектор-столбцов размерности n и m соответственно. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$(1) \qquad \bar{A}z = \bar{u}, \quad \bar{A} \in \mathfrak{A}, \quad z \in R^n, \quad \bar{u} \in R^m.$$

Предположим, что система (1) совместна и $\bar{z} \in R^n$ – ее нормальное решение [1]. Будем считать, что вместо точных данных $\{\bar{A}, \bar{u}\}$ задачи (1) в нашем распоряжении имеются их приближения $\{A_\mu, u_\delta\}$ такие, что

$$A_\mu \in \mathfrak{A}, \quad u_\delta \in R^m; \quad \|A_\mu - \bar{A}\| \leqslant \mu, \quad \|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta.$$

Здесь числа μ и δ определяют точность задания матрицы и правой части системы (1). Задача заключается в построении по данным $\{A_\mu, u_\delta, \mu, \delta\}$ устойчивого в R^n приближения к нормальному решению $\bar{z}$. Такая задача рассматривалась в ряде работ [1–3] и др. В данной работе предлагается новый метод решения поставленной задачи, использующий величины $\{A_\mu, u_\delta, \mu\}$.

2. Как известно [4–6], нормальное решение $\bar{z}$ может быть найдено по точным данным $\{\bar{A}, \bar{u}\}$ задачи (1) с помощью псевдообратной матрицы $\bar{A}^+$: $\bar{z} = \bar{A}^+\bar{u}$. На при-