В. М. Елеонский, И. М. Кричевер, Н. Е. Кулагин, Рациональные многосолитонные решения нелинейного уравнения Шредингера, *Докл. АН СССР*, 1986, том 287, номер 3, 606–610

Итак, если $\mu_3 > \mu_2$ (например, смесь вода – водяной пар – воздух), то область существования рассматриваемых систем (как и парциальных) та же, что и у двухфазных парожидкостных. Если же $\mu_3 < \mu_2$ (например, смесь вода – водяной пар – $NH_3$), то область существования рассматриваемых систем в $1/\theta$ раз шире, чем у двухфазных парожидкостных. Эти примечательным свойством системы с раздельными объемами пара и газа отличаются от парциальных, для которых при $\mu_3 < \mu_2$ законы расширения области существования значительно сложнее [2].

Поступило
30 IV 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Г.М.* – ДАН, 1982, т. 264, с. 1104. 2. *Арутюнян Г.М.* – ДАН, 1983, т. 272, с. 828. 3. *Арутюнян Г.М., Овсепян С.Т.* – Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа, 1977, № 5, с. 81. 4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.

УДК 538.2 + 531.38 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.М. ЕЛЕОНСКИЙ, И.М. КРИЧЕВЕР, Н.Е. КУЛАГИН

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

*(Представлено академиком С.П. Новиковым 29 IV 1985)*

В недавней работе [1] обнаружено рациональное солитоноподобное решение нелинейного уравнения Шредингера

$$ir_t + r_{xx} + 2(|r|^2 - M^2)r = 0. \tag{1}$$

Оно имеет вид

$$r = M\left(1 - 4\,\frac{1 + 4iM^2t}{1 + 4M^2x^2 + 16M^4t^2}\right). \tag{2}$$

Уравнение (1) (при $M = 0$) в классе быстро убывающих функций ($r \to 0$ при $|x| \to \infty$) проинтегрировано с помощью метода обратной задачи рассеяния в работе [2] (см. [3]). Широкий класс периодических и квазипериодических решений этого уравнения построен с помощью методов алгебраической геометрии [4, 5] (см. также обзоры [6, 7]).

Основной целью настоящей работы является построение общих рациональных многосолитонных решений нелинейного уравнения Шредингера (1) (неособых при всех вещественных $x, t$; $r \to M$ при $|x| \to \infty$).

Общая схема построения рациональных решений нелинейных уравнений, допускающих коммутационное представление, была предложена в работе одного из авторов [8, 9]. К сожалению, в этих работах совершенно не затрагивался вопрос об отборе неособых (при вещественных $x, t$) решений. По существу настоящая работа сводится к нахождению эффективного ответа на этот вопрос в случае уравнения (1).

Следует отметить, что используемый ниже подход к построению решений нелинейного уравнения Шредингера отличается от традиционного, при котором в качестве вспомогательных линейных операторов рассматриваются операторы, входящие в лаксово представление этого уравнения. Оказывается, что в качестве основного вспомогательного уравнения можно взять обычное линейное нестационарное уравнение Шредингера. Такой подход к построению конечнозонных решений уравнения (1) использовался в [10].

Рассмотрим функцию $\psi(x, t, k)$ вида

$$(3) \qquad \psi(x, t, k) = \frac{k^{2n} + a_1(x, t)k^{2n-1} + \ldots + a_{2n}(x, t)}{q_{2n}(k)} e^{kx + ik^2 t + \Phi(k)},$$

где $q_{2n}(k) = k^{2n} + b_1 k^{2n-1} + \ldots + b_{2n}$ – произвольно зафиксированный полином, а

$$(4) \qquad \Phi(k) = i \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j (ik)^j,$$

$\varphi_j$ – произвольные константы (в дальнейшем играющие роль параметров).

Коэффициенты полинома $Q_{2n}(x, t, k) = k^{2n} + a_1(x, t)k^{2n-1} + \ldots + a_{2n}(x, t)$, а вместе с ними и вся функция $\psi(x, t, k)$ однозначно определяются из условий

$$(5) \qquad \left(\frac{k^2}{M^2 + k^2} \frac{\partial}{\partial k}\right)^{2j-1} \psi(x, t, k)|_{k=\pm M} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Эти уравнения означают, что разложение $\psi(x, t, k)$ в окрестностях точек $k = \pm M$ по локальному параметру

$$(6) \qquad z(k) = k - M^2/k$$

имеет вид

$$(7) \qquad \psi = \alpha_0^\pm + \alpha_1^\pm z^2 + \alpha_2^\pm z^4 + \ldots + \alpha_{n-1}^\pm z^{2n-2} + O(z^{2n}).$$

Условия (5) эквивалентны следующей системе линейных уравнений на $a_s = a_s(x, t)$, $s = 1, \ldots, 2n$:

$$(8) \qquad \begin{gathered} \sum_{s=1}^{2n} A_{js}^\pm a_s + A_{j0}^\pm = 0, \\ A_{js}^\pm(x, t) = \frac{\partial^{2n-s}}{\partial x^{2n-s}} \left(\frac{k^2}{k^2 + M^2} \frac{\partial}{\partial k}\right)^{2j-1} \frac{e^{kx + ik^2 t + \Phi(k)}}{q_{2n}(k)}\Bigg|_{k=\pm M}. \end{gathered}$$

Обозначим через $A(x, t)$ матрицу размером $(2n \times (2n + 1))$, в которой $s$-й столбец, $s = 0, \ldots, 2n$, составлен из векторов $A_{js}^\pm$, т.е.

$$(9) \qquad A_{js} = A_{js}^+, \quad j = 1, \ldots, n; \qquad A_{js} = A_{j-n, s}^-, \quad j = n + 1, \ldots, 2n.$$

Пусть $A^{(s)}(x, t)$, $s = 0, \ldots, 2n$, – матрицы размером $(2n \times 2n)$, полученные вычеркиванием $s$-го столбца из матрицы $A$. Тогда

$$(10) \qquad a_s(x, t) = (-1)^s \frac{\Delta_s(x, t)}{\Delta_0(x, t)}; \qquad \Delta_s = \det(A^{(s)}(x, t)).$$

Так как $\Delta_1(x, t) = \dfrac{\partial}{\partial x} \Delta_0(x, t)$, то

$$(11) \qquad a_1(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \Delta_0(x, t).$$

Отметим, что $A_{js}^{\pm}\exp(\mp Mx - iM^2t - \Phi(\pm M))$ полиномиально зависят от $x$ и $t$. Поэтому $a_s(x, t)$ являются рациональными функциями $x$ и $t$. Простой анализ структуры матрицы показывает, что степень по $x$ полинома $\Delta_0(x, t)$ равна $n(n+1)$. Кроме того,

$$(12)\quad a_{2n}(x, t) \to -M^{2n}, \quad |x| \to \infty.$$

Частным случаем теоремы 1 работы [8] является следующее утверждение.

Лемма 1. *Функция* $\psi(x, t, k)$ *вида* (3), *определенная уравнениями* (5), *удовлетворяет равенству*

$$(13)\quad i\psi_t + \psi_{xx} + u(x, t)\psi = 0,$$

*где*

$$(14)\quad u(x, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln \Delta_0(x, t).$$

Конечно, набор параметров $b_i$, $\varphi_j$, определяющих интегрируемый потенциал $u(x, t)$, не независим. Функция $\psi_1 = \psi(x, t, k)/\psi(0, 0, k)$ удовлетворяет тому же уравнению (13) и имеет вид

$$(15)\quad \psi_1 = \frac{Q_{2n}(x, t, k)}{Q_{2n}(0, 0, k)}e^{kx+ik^2t}.$$

Поэтому вариация параметров $\varphi_j$ эквивалентна вариации $b_i$. Обычно в качестве независимых параметров выбираются $b_i$, а $\varphi_j$ полагаются равными нулю. В настоящей работе в качестве независимых параметров выбраны $\varphi_j$, а полином $q_{2n}(k)$ будет зафиксирован особо.

Теорема. *Пусть полином* $q_{2n}(k)$ *имеет вид*

$$(16)\quad q_{2n}(k) = \prod_{j=1}^{n}\left(k^2 - \frac{\omega^{2m_j+1}+1}{\omega^{2m_j+1}-1}M^2\right),$$

*где* $\omega = \exp(\pi i/2n+1)$, *а* $0 \leqslant m_j \leqslant 2n-1$ – *целые числа такие, что* $m_i \neq 2n - m_j$ *ни для каких* $i, j$ (*например*, $m_j = j$). *Тогда функция*

$$(17)\quad r(x, t) = -\frac{\Delta_{2n}(x, t)}{M^{2n-1}\Delta_0(x, t)} = -\frac{a_{2n}(x, t)}{M^{2n-1}}$$

*является неособым рациональным решением степени* $n(n+1)$ *уравнения* (1). (*Здесь* $\Delta_0$, $\Delta_{2n}$ *определены формулами* (8–10), *в которых параметры* $\varphi_j$ *вещественны*, $\varphi_j = \overline{\varphi}_j$.) *Динамика его полюсов* (*комплексных*) *удовлетворяет уравнениям движения системы Мозера–Калоджеро*

$$\ddot{x}_i = 4\sum_{j\neq i}(x_i - x_j)^{-3}.$$

Доказательство. Дифференциал

$$(18)\quad d\Omega = \frac{q_{2n}(k)\overline{q_{2n}}(-\overline{k})}{(k^2-M^2)^{2n}}dk = \frac{(k^2+M^2)^{2n+1} + (k^2-M^2)^{2n+1}}{(k^2-M^2)^{2n}k^2}dk$$

можно представить в виде

$$(19)\quad d\Omega = \left(\frac{E^{2n+1}}{y} + 1\right)dE,$$

где

$$(20)\quad E(k) = k + \frac{M^2}{k}, \quad y = z^{2n+1} = \left(k - \frac{M^2}{k}\right)^{2n+1}.$$

Так как $E^2 = z^2 + 4M^2$, то разложение $E(k)$ в окрестности $k = \pm M$ по локальному параметру $z(k)$ содержит лишь четные степени $z$. Значит в окрестностях $k = \pm M$ имеет место разложение

$$(21)\quad d\Omega = \left(\frac{\beta_n^\pm}{z^{2n}} + \frac{\beta_{n-1}^\pm}{z^{2n-2}} + \ldots + \frac{\beta_1^\pm}{z^2} + O(1)\right)dz.$$

Рассмотрим дифференциал

$$(22)\quad d\Omega_1 = \psi(x, t, k)\psi^+(x, t, k)d\Omega,$$

где

$$(23)\quad \psi^+(x, t, k) = \bar{\psi}(x, t, -\bar{k}).$$

При вещественных $\varphi_j$ экспоненциальные множители у $\psi$ и $\psi^+$ сокращаются. Так как нули $d\Omega$ совпадают с полюсами $\psi$, $\psi^+$, то этот дифференциал имеет вид

$$(24)\quad d\Omega_1 = \frac{Q_{2n}(x, t, k)\bar{Q}_{2n}(x, t, -\bar{k})}{(k^2 - M^2)^{2n}}dk.$$

Из (7) и (21) следует, что лорановская часть разложения $d\Omega_1$ в окрестностях $k = \pm M$ по параметру $z$ содержит лишь четные степени $z^{-1}$. Значит $d\Omega_1$ не имеет вычетов в этих точках. Отсюда получаем, что равен нулю и вычет $d\Omega$ в бесконечности

$$(25)\quad 0 = \operatorname{res}_\infty d\Omega_1 = \bar{a}_1(x, t) - a_1(x, t).$$

Дифференциал $(k + M^2/k)d\Omega_1$ по тем же соображениям, что и $d\Omega_1$, не имеет вычетов при $k = \pm M$. Следовательно, равна нулю сумма его вычетов в нуле и бесконечности

$$(26)\quad \operatorname{res}_0(k + M^2/k)d\Omega_1 + \operatorname{res}_\infty(k + M^2/k)d\Omega_1 = 0.$$

Вычет в нуле равен

$$(27)\quad \operatorname{res}_0(k + M^2/k)d\Omega_1 = |a_{2n}(x, t)|^2/M^{4n-2}.$$

Функцию $\psi(x, t, k)$ можно в окрестности бесконечности, $k = \infty$, представить в виде

$$(28)\quad \psi(x, t, k) = e^{kx + ik^2t + \Phi(k)}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, t)k^{-s}\right).$$

Имеем

$$(29)\quad \operatorname{res}_\infty(k + M^2/k)d\Omega_1 = |\xi_1|^2 - \xi_2 - \bar{\xi}_2 - M^2.$$

Подстановка ряда (28) в (13) дает систему равенств

$$(30)\quad i\frac{\partial}{\partial t}\xi_s + 2\xi'_{s+1} + \xi''_s + u\xi_s = 0.$$

Так как $\xi_1 = a_1$, то первое равенство ($s = 0$) совпадает с (14). Сложим равенство с номером $s = 1$ с комплексно-сопряженным. В силу вещественности $\xi_1$ получим

$$(31)\quad (\xi_2 + \bar{\xi}_2 - \xi_1^2)' = -\xi_1'' = u'/2.$$

Следовательно,

$$(32)\quad M^2 + u/2 + c(t) = |a_{2n}|^2/M^{4n-2},$$

где $c(t)$ возникает при интегрировании (31).

В силу (14) при $x \to \infty$ потенциал $u(x, t) \to 0$. Правая часть равенства (32) при $x \to \infty$ стремится (согласно (12)) к $M^2$. Отсюда $c(t) = 0$ и окончательно

(33) $\quad u(x, t) = 2(|r(x, t)|^2 - M^2)$.

С точностью до умножения на константу $r(x, t)$ совпадает с $\psi(x, t, 0)$. Поэтому $r(x, t)$ удовлетворяет уравнению (13), которое с учетом связи (33) превращается в нелинейное уравнение Шредингера (1).

Функцию $\psi(x, t, k)$ можно представить в виде

$$(34) \qquad \psi = e^{kx+ik^2t}\left(1 + \sum_{i=1}^{n(n+1)} \frac{d_i(t, k)}{(x - x_i(t))}\right),$$

поэтому утверждение о динамике полюсов $x_i(t)$ является следствием теоремы 2 работы [8]. (Еще раз подчеркнем, что речь идет не об изоморфизме системы Мозера– Калоджеро и системы полюсов рациональных решений уравнения (1). Динамике полюсов соответствует ограничение уравнений движения системы Мозера–Калоджеро, фазовая размерность которой равна $2n(n+1)$, на инвариантное подмногообразие размерности $2n$.)

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что полюса $x_i(t)$ никогда не могут быть вещественными. Это эквивалентно тому, что $\Delta_0(x, t) \neq 0$ при вещественных $x$ и $t$.

Если $\Delta_0(x_0, t_0) = 0$, то существует решение однородной системы уравнений (8), т.е. существует функция $\tilde{\psi}(x, t, k)$ вида

$$(35) \qquad \tilde{\psi} = \frac{\tilde{a}_1 k^{2n-1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}}{q_{2n}(k)} e^{kx_0+ik^2t_0+\Phi(k)},$$

удовлетворяющая условиям (5). Дифференциал

$$(36) \qquad \tilde{\psi}\tilde{\psi}^+ d\Omega$$

регулярен в бесконечности, поэтому его интеграл по мнимой оси имеет смысл:

$$(37) \qquad I = \int \tilde{\psi}\, \tilde{\psi}^+ d\Omega \neq 0,$$

так как при $k = -\bar{k}$ имеем $\tilde{\psi}^+(x, t, k) = \bar{\tilde{\psi}}(x, t, k)$ и в (37) интегрируется с положительным множителем положительная величина $|\tilde{\psi}|^2$. С другой стороны, дифференциал (36) (как и все рассмотренные ранее) не имеет вычетов при $k = \pm M$. Следовательно, $I = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Решение (2) соответствует $n = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{4M^2}$ (при $n = 1$ параметры $\varphi_1$ и $\varphi_2$ соответствуют сдвигам переменных $x$ и $t$).

Поступило
11 V 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахмедиев Н.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е.* Межвузовск. сб., Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горьковск. гос. ун-т, 1985. 2. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* – ЖЭТФ, 1971, т. 61, вып. 1 (7), с. 118–134. 3. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* – Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с. 4. *Итс А.Р.* – Вестн. Ленингр. ун-та, 1976, № 7, с. 39–46. 5. *Итс А.Р., Котляров В.П.* – Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 11, с. 965–968. 6. *Дубровин Б.А.* – УМН, 1981, т. 36, № 2, с. 11–80. 7. *Дубровин Б.А.* В сб.: Современные проблемы математики (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР), 1983, т. 23, с. 33–76. 8. *Кричевер И.М.* – Функц. анализ и его прилож., 1978, т. 12, вып. 1, с. 76–78. 9. *Кричевер И.М.* – Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1979, т. 84, с. 117–130. 10. *Чередник И.В.* – Функц. анализ и его прилож., 1978, т. 12, № 3, с. 45–52.