Функциональный анализ и его приложения,
1986, т. 20, вып. 3, 42—54

УДК 517.93+513.015.7

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ «КОНЕЧНОЗОННЫХ» НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА. НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ПАЙЕРЛСА

И. М. Кричевер

В работах [1; 2] была предложена общая схема построения периодических и квазипериодических решений нелинейных уравнений, допускающих коммутационное представление. Эта схема была выработана автором на основе анализа алгебро-геометрических идей, использованных в цикле работ С. П. Новикова, Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева, А. Р. Итса, посвященных созданию эффективной спектральной теории конечнозонных операторов Шредингера (Штурма — Лиувилля) и построению на ее базе широкого класса квазипериодических решений уравнения Кортевега — де Фриза (КДФ). (Первый этап развития теории конечнозонного интегрирования отражен в [3; 4].)

Схема работ [1, 2] позволила не только впервые получить периодические и квазипериодические решения пространственно двумерных уравнений типа уравнения Кадомцева — Петвиашвили (КП), но и дать естественное и методологически удобное изложение результатов предшествующей конечнозонной теории одномерных эволюционных уравнений (КДФ, нелинейного Шредингера, sine-gordon). Оказалось, что при таком подходе алгебро-геометрический язык позволяет (если ограничиться лишь задачей построения решений этих уравнений) практически полностью исключить из рассмотрения спектральную теорию вспомогательных линейных операторов. По-видимому, с этим связано то, что в дальнейшем развитии методов «конечнозонного интегрирования» нелинейных уравнений (см. обзоры [5—11]) уделялось явно недостаточное внимание конечнозонной спектральной теории.

Эта теория вновь привлекла повышенное внимание после того, как в работах [12—14] была обнаружена возможность ее эффективного приложения к задачам типа Пайерлса — Фрелиха. На основе модели Пайерлса обычно строятся теории, описывающие характерные особенности квазиодномерных проводников. В [12—14] были найдены «однозонные» экстремали в различных континуальных приближениях этой модели. Эти исследования были продолжены в работах [15—18], в которых была проинтегрирована дискретная модель, пределами которой являются все рассматривавшиеся ранее ее континуальные варианты. В [15] было доказано, что в этой модели отсутствуют «многозонные» экстремали, и тем самым впервые было показано, что «однозонные» экстремали являются основным состоянием системы. В [16—18] был найден спектр возбуждений основного состояния и исследованы неинтегрируемые возмущения модели.

Во всех процитированных работах речь шла о стационарных состояниях в модели Пайерлса. Исследование нестационарных решений потребовало развития «спектральной» теории для нестационарного оператора Шредингера с двоякопериодическим потенциалом, $u(x, t) = u(x + L, t) = u(x, t + T)$.

Соответствующий оператор

$$M = i\partial_t - \partial_x^2 + u(x,t), \quad \partial_t = \partial/\partial t, \ \partial_x = \partial/\partial x \tag{1}$$

входит в коммутационное представление для уравнения КП, поэтому он активно рассматривался в [1; 2], где были построены интегрируемые потенциалы $u(x, t)$. Ни в этих, ни (насколько известно автору) в других работах не было сделано даже попыток сформулировать задачи, связанные со спектральной интерпретацией полученных результатов. Ряд постановок таких задач стал ясен автору в ходе многочисленных обсуждений с И. Е. Дзялошинским и С. А. Бразовским нестационарной задачи Пайерлса.

Представляется, что «спектральная» теория нестационарного оператора Шредингера имеет самостоятельный математический интерес.

В первом параграфе кратко формулируется конструкция алгебро-геометрических потенциалов нестационарного оператора Шредингера. Для этих потенциалов найдена «спектральная мера», определяющая разложение единицы по функциям Бейкера — Ахиезера (блоховским функциям), отвечающим «вещественным ферми-кривым».

Во втором параграфе выводятся нелинейные соотношения между решениями нестационарного уравнения Шредингера, $M\psi = 0$, и потенциалом $u(x, t)$. В стационарном случае соответствующие соотношения хорошо известны и служат в качестве производящих при выводе «формул следов». Эти соотношения использованы в заключительной части параграфа для построения решений уравнений, предложенных в [30; 31] для описания в различных приближениях взаимодействий длинных и коротких волн в плазме.

Заключительный параграф содержит краткую формулировку нестационарной задачи Пайерлса и конструкцию некоторых решений ее интегрируемых вариантов. Более детальное исследование как самих решений, так и условий их физической применимости было предпринято в совместной работе И. Е. Дзялошинского и автора, которая будет опубликована. В ней было рассмотрено приближение в модели Пайерлса, отвечающее «малости» запрещенной зоны. При таком приближении нестационарный оператор Шредингера трансформируется в нестационарный оператор Дирака.

§ 1. Спектральные разложения для алгебро-геометрических операторов ранга 1

Конструкция комплексных квазипериодических «конечнозонных» потенциалов нестационарного оператора Шредингера была предложена в [1] (подробнее см. [2]). Условия вещественности и неособости $u(x, t)$ были найдены в [7; 10] (их отправной точкой послужили идеи работы [19]). Начнем с изложения этих результатов и некоторых их обобщений (содержащих рациональные и солитоноподобные потенциалы), которые понадобятся в дальнейших приложениях к модели Пайерлса.

Пусть Γ — неособая алгебраическая кривая рода g с отмеченной точкой P_0, в окрестности которой зафиксирован локальный параметр $k^{-1}(P)$, $k^{-1}(P_0) = 0$. Кроме того, пусть на Γ зафиксирован дополнительный набор данных: пары точек $\varkappa_i^{\pm}$, $i = 1, \ldots, N$ и набор точек λ_j, $j = 1, \ldots, M$.

Стандартным образом доказывается, что для любого набора точек $\gamma_1, \ldots$ $\ldots, \gamma_G$, $G = g + N + M$, общего положения существует единственная функция $\psi(x, t, P)$, называемая функцией Бейкера — Ахиезера, такая, что:

1°. Вне P_0 эта функция мероморфна и имеет полюса лишь в точках γ_s.

2°. $\psi(x, t, P)$ удовлетворяет условиям

$$\psi(x, t, \varkappa_i^{+}) = \psi(x, t, \varkappa_i^{-}), \tag{2}$$

$$d\psi(x, t, P)\big|_{P=\lambda_j} = 0. \tag{3}$$

3°. В окрестности P_0 функция $\psi(x, t, P)$ имеет вид

$$\psi(x, t, P) = \exp(ikx + ik^2t + i\Phi(k))\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, t) k^{-s}\right), \qquad (4)$$
$$k = k(P),$$

где $\Phi = \sum_{j=1}^{G} \varphi_j k^j$ (в явной записи функции ψ опущена зависимость от вспомогательных параметров φ_j для краткости. Роль этих параметров будет обсуждена ниже).

Как следует из результатов работы [2] (обозначений которой мы в дальнейшем придерживаемся), функцию $\psi(x, t, P)$ можно искать в виде

$$\psi(x, t, P) = \exp\left(i \int^{P} x\Omega^{(2)} + t\Omega^{(3)} + \sum_j \varphi_j \Omega^{(j)}\right) \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{N+M} \alpha_m(x, t) \frac{\Theta(A(P) + xU^{(2)} + tU^{(3)} + \sum \varphi_j U^{(j)} + \zeta_m)}{\Theta(A(P) + \zeta_m)}, \qquad (5)$$

где $\Theta(v_1, \ldots, v_g)$ — тэта-функция Римана; $2\pi U^{(j)}$ — вектора b-периодов абелевых дифференциалов второго рода с нулевыми a-периодами, имеющих в окрестности P_0 особенность вида $(d(k^{j-1}))$; векторы ζ_m равны $K - A(\gamma_1) - \ldots - A(\gamma_{g-1}) - A(\gamma_{g-1+m})$, где A: $\Gamma \to J(\Gamma)$ — отображение Абеля и K — вектор римановых констант.

Коэффициенты $\alpha_m(x, t)$ в формуле (5) определяются из системы линейных уравнений, возникающих после подстановки (5) в (2) и (3).

Т е о р е м а 1. *Функция $\psi(x, t, P)$ удовлетворяет уравнению*

$$(i\partial_t - \partial_x^2 + u(x, t))\psi(x, t, P) = 0, \qquad (6)$$

где

$$u(x, t) = 2i\partial_x \xi_1(x, t). \qquad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о полностью аналогично доказательству работы [1] (где $N = M = 0$) и использует лишь единственность $\psi(x, t, P)$.

З а м е ч а н и е. При $N = M = 0$ получаем квазипериодический потенциал [2]

$$u(x, t) = -2\partial_x^2 \ln \Theta(U^{(2)}x + U^{(3)}t + \zeta + \Phi), \quad \Phi = \sum \varphi_j U^{(j)}. \qquad (8)$$

При $g = 0$, $M = 0$ конструкция дает (после переобозначения t на y, φ_3 на t) солитонные волновые фронты уравнения Кадомцева — Петвиашвили, полученные в [20]. При $g = 0$, $N = 0$ получаем рациональные решения КП (см. [21]), которые при правильном выборе параметров совпадают с рациональными солитонами КП, убывающими во всех направлениях и которые были получены с помощью метода обратной задачи рассеяния в [22].

В общем случае условия (2), (3) можно заменить на *произвольную систему* $N + M$ линейных условий на значения ψ и их производных по P (любого порядка) в разных точках с постоянными коэффициентами. (Дальнейшие обобщения см. в [23].)

З а м е ч а н и е 2. Параметры γ_s и φ_j не независимы. Обычно в качестве независимых параметров выбираются γ_s, а φ_j полагаются равными нулю. Как будет видно в дальнейшем, переход к параметрам φ_j (после спец альной фиксации γ_s) значительно более эффективен при описании вещественных и неособых потенциалов $u(x, t)$.

Пусть на кривой Γ имеется антиинволюция τ: $\Gamma \to \Gamma$ разделяющего типа, т. е. такая, что ее неподвижные овалы $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ разбивают Γ на два куска $\Gamma^{\pm}$. Кроме того, пусть τ оставляет точку P_0 неподвижной и переводит локальный параметр в ее окрестности в $\bar{k} = \tau^*(k)$. Наборы точек $\varkappa_i^{\pm}$, λ_j дожны удовлетворять условиям: $\tau(\lambda_i) = \lambda_j$; $\tau(\varkappa_i^+) = \varkappa_i^-$ и $\varkappa_i^{\pm} \in \Gamma^{\pm}$, либо $\tau(\varkappa_i^{\pm}) = \varkappa_j^{\pm}$, $i \neq j$, и в этом случае обе точки $\varkappa_i^{\pm}$ принадлежат одной из областей $\Gamma^{\pm}$ (в зависимости от того, какое из этих двух условий выполнено, пара $\varkappa_i^{\pm}$ будет называться парой первого или второго типа). Условимся далее пары $\varkappa_i^{\pm}$ первого типа нумеровать индексами $i = 1, \ldots, N_1$, $N_1 \leqslant N$).

Дивизор $D = \{\gamma_s\}$ называется допустимым, если $\gamma_1, \ldots, \gamma_G, \tau(\gamma_1), \ldots$ $\ldots, \tau(\gamma_G)$ являются нулями некоторого дифференциала Ω, имеющего полюса второго порядка с нулевыми вычетами в точках λ_j, P_0, простые полюса в точках $\varkappa_j^{\pm}$ с вычетами $\pm\alpha_j i$. При этом, если $\varkappa_j^{\pm}$ — пара первого типа, то $\alpha_j = \bar{\alpha}_j > 0$. Если зафиксировать на циклах σ_i естественную ориентацию, индуцированную на них с области Γ^+, то предполагается, что $\Omega\,|_{\sigma} \geqslant 0$.

Лемма 1. *Если выполнены сделанные выше предположения и $\varphi_j = \bar{\varphi}_j$, то определяемый этими данными в силу теоремы 1 потенциал $u(x, t)$ является вещественным и неособым.*

(При $N = M = 0$ достаточность этих условий была показана в [7; 10].)

Доказательство. Обозначим через $\psi^+(x, t, P)$ функцию

$$\psi^+(x, t, P) = \bar{\psi}(x, t, \tau(P)). \tag{9}$$

Из условий леммы следует, что дифференциал

$$\widetilde{\Omega} = \psi(x, t, P)\psi^+(x, t, P)\,\Omega \tag{10}$$

является мероморфным с нулевыми вычетами в точках λ_j и с вычетами в точках $\varkappa_i^{\pm}$, противоположными по знаку. Так как сумма всех вычетов мероморфного дифференциала равна нулю, то равен нулю и вычет $\widetilde{\Omega}$ в точке P_0. Отсюда $\xi_1 + \bar{\xi}_1 = 0$, и в силу (7) вещественность $u(x, t)$ доказана.

Особенность у потенциала может возникнуть лишь при тех значениях x_0, t_0, при которых один из нулей $\psi(x_0, t_0, P)$ попадает в P_0. Но в этом случае дифференциал $\widetilde{\Omega}(x_0, t_0, P)$ становится регулярным в P_0, а значит, можно рассмотреть его интеграл по неподвижным овалам. В силу положительности Ω на σ_i и того, что на σ_i имеем $\psi^+ = \bar{\psi}$, интеграл

$$\int\limits_{\{\sigma_i\}} \widetilde{\Omega}(x_0, t_0, P) > 0 \tag{11}$$

положителен. С другой стороны, он равен сумме вычетов в точках $\varkappa_i^+$, где $\varkappa_i^{\pm}$ — пара первого типа, и должен быть отрицательным в силу условий леммы. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Конечно, приведенное условие на $\{\gamma_s\}$ достаточно сложно. Но напомним еще раз, что достаточно найти лишь один такой набор, а затем получить все вещественные неособые потенциалы, отвечающие этой кривой и данным λ_j, $\varkappa_i^{\pm}$, с помощью вариации вещественных параметров φ_j при постоянном наборе полюсов.

Мы оставим без доказательства следующее несложное утверждение.

Лемма 2. *На любой кривой Γ с антиинволюцией разделяющего типа существуют допустимые дивизоры.*

Вещественные овалы $\{\sigma_i\}$ и пары $\varkappa_i^{\pm}$, $i = 1, \ldots, N_1$, первого типа будут называться спектром соответствующего нестационарного оператора Шредингера, а дифференциал Ω, входящий в определение допустимого набора полюсов функции Бейкера — Ахиезера, будет называться спектральной плотностью. Основанием для этого является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть параметры Γ, P_0, λ_j, $\varkappa_i^{\pm}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_G$, определяющие функцию Бейкера — Ахиезера, удовлетворяют всем перечисленным выше* *ограничениям* (*гарантирующим вещественность и неособость потенциала* $u(x, t)$). *Тогда*

$$\delta(x-y)=\int\limits_{\{\sigma_i\}\setminus P_0}\psi(x,t,P)\,\psi^+(y,t,P)\,\Omega-\sum_{i=1}^{N_1} r_i\psi(x,t,\varkappa_i^+)\,\psi^+(y,t,\varkappa_i^+), \quad (12)$$

$$r_j=2\pi i\operatorname{res}_{\varkappa_j^+}\Omega=-2\pi\alpha_j. \quad (13)$$

Доказательство. Обозначим через $\partial\Gamma^+$ границу Γ^+ (она образована набором σ_i), а через $\partial\Gamma^+_\varepsilon$ — цикл, полученный деформацей $\partial\Gamma^+$, соответствующей обходу радиуса ε точки P_0 внутри Γ^+.

Дифференциал $\psi(x, t, P)\,\psi^+(y, t, P)\,\Omega$ регулярен на $\partial\Gamma^+_\varepsilon$. Из определения Ω следует, что

$$\int\limits_{\partial\Gamma^+_\varepsilon}\psi(x,t,P)\,\psi^+(y,t,P)\,\Omega=\sum r_i\psi(x,t,\varkappa_i^+)\,\psi^+(y,t,\varkappa_i^+). \quad (14)$$

Разность циклов $\partial\Gamma^+_\varepsilon\setminus\partial\Gamma^+$ есть цикл C_ε, являющийся границей верхнего полукруга ε-окрестности точки P_0. В окрестности P_0, как следует из (4), функция $\psi(x, t, P)\times\psi^+(y, t, P)$ имеет вид

$$e^{ik(x-y)}\left(1+\sum_{s=2}^{\infty}J_s(x,y,t)\,k^{-s}\right). \quad (15)$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_{C_\varepsilon\setminus P_0}\psi(x,t,P)\,\psi^+(y,t,P)\,\Omega=\delta(x-y). \quad (16)$$

Суммируя (14) и (16), получим искомое равенство (12).

Как уже говорилось, при $M=0$, $N=0$ получающиеся в рамках настоящей конструкции потенциалы $u(x, t)$ являются квазипериодическими.

Условия, выделяющие периодические по x и t потенциалы, могут быть сформулированы следующим образом.

Мероморфный дифференциал на гладкой кривой Γ будет называться *абсолютно нормированным*, если его интегралы по всем циклам вещественны. Дифференциалы *квазиэнергии* dE и *квазиимпульса* dp определяются как абсолютно нормированные дифференциалы, голоморфные вне P_0 и имеющие в окрестности этой точки вид

$$dp=dk\,(1+O(k^{-2})),\quad dE=dk^2\,(1+O(k^{-3})). \quad (17)$$

Несложно убедиться, что такие дифференциалы существуют и единственны.

Лемма 3. *Если для любого цикла на* Γ *выполнены условия*

$$\text{а) }\oint dp=\frac{2\pi l}{L},\quad \text{б) }\oint dE=\frac{2\pi m}{T},\quad m,l\text{ — целые}, \quad (18)$$

то (*при* $M=N=0$) *соответствующие этой кривой конечнозонные потенциалы* $u(x, t)$ *периодичны, а функция Бейкера — Ахиезера является блоховской*

$$\psi(x+L,t,P)=w_1(P)\,\psi(x,t,P), \quad (19)$$

$$\psi(x,t+T,P)=w_2(P)\,\psi(x,t,P). \quad (20)$$

Доказательство. Из условий (18) следует, что функции

$$w_1(P)=\exp\left(iL\int\limits_Q^P dp\right),\; w_2(P)=\exp\left(iT\int\limits_Q^P dE\right) \quad (21)$$

корректно определены на Γ (т. е. не зависят от выбора пути интегрирования между начальной точкой Q и P). Вне точки P_0 они голоморфны.

Тогда равенства (19), (20) следуют из того, что их правые и левые части имеют одинаковые аналитические свойства. Так как $w_1(P)$ не зависят от x и t, то из (19), (20) следует периодичность $u(x, t)$.

Замечание. До сих пор мы никак не фиксировали локальный параметр k^{-1} в окрестности P_0, так как зависимость функции Бейкера — Ахиезера и соответствующего потенциала $u(x, t)$ от его выбора чрезвычайно проста. При замене k на $k + \alpha_0 + \alpha_1 k^{-1} + \ldots$ функции ψ, u переходят в

$$\psi \to \psi(x + 2\alpha_0 t, t, P)\, e^{i(\alpha_0 x + \alpha_0^2 t + 2\alpha_1 t)}, \quad u \to u(x + 2\alpha_0 t, t) - 2\alpha_1.$$

Тем не менее для дальнейших целей удобно выбрать такой локальный параметр, что $dp = dk$. Это его фиксирует однозначно, с точностью до пропорциональности, которая эквивалентна масштабной группе x, $t \to \lambda x$, $\lambda^2 t$, и сдвига $k \to k + \alpha_0$.

Как следует из доказанного утверждения, коэффициенты ξ_s разложения (4) по этому локальному параметру являются квазипериодическими функциями x, t при ($M = N = 0$). В общем случае ξ_s являются равномерно ограниченными по x на всей прямой.

Пусть кривая Γ удовлетворяет условиям (18а). Обозначим через $P_n(w)$ те точки на Γ, в которых функция $w_1(P_n) = w$. Отметим, что $P_n \to P_0$, $n \to \infty$.

Для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию

$$f(x + L) = w f(x), \tag{22}$$

рассмотрим ряд

$$\sum_n c_n(t)\, \psi(x, t, P_n(w)) = \sum c_n \psi_n, \tag{23}$$

где

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) \frac{\psi^+(y, t, P_n(w))}{\langle \psi_n \psi_n^+ \rangle_x} dy, \tag{24}$$

$\langle \cdot \rangle_x$ — среднее по периоду.

Теорема 3. *Если $f(x)$ непрерывно дифференцируема, то ряд* (23) *сходится к $f(x)$.*

(В целом условия сходимости ряда (23) такие же, как и у обычного ряда Фурье.)

Доказательство. Пусть R_N (для достаточно больших N) — окружность в окрестности P_0 радиуса $((2N + 1)\pi L)^{-1}$, N — целое.

Рассмотрим интеграл

$$S_N = \int_{R_N} \int_0^L f(y) \frac{\psi(x, t, P)\, \psi^+(y, t, P)}{(1 - w w_1^{-1}(P))} \Omega\, dy. \tag{25}$$

С одной стороны, он равен сумме вычетов подынтегрального выражения вне контура R_N, которая в силу (30) и того, что $iLdp = d \ln w_1$, совпадает с суммой тех членов ряда (23), для которых P_n лежит вне R_N. С другой стороны, воспользовавшись разложением (4) для ψ и тем, что в окрестности P_0 имеем $w_1 = e^{ikL}$, несложно показать, что S_N с точностью до $O(N^{-1})$ совпадает с суммой первых N членов обычного ряда Фурье для $f(x)$. Отсюда, устремляя N к ∞, получим утверждение теоремы.

Лемма 4. *Если $M = 0$ и все пары $\varkappa_i^{\pm}$, входящие в условия* (2), *являются парами первого типа, то соответствующий этим данным потенциал $u(x, t)$ при $x + Vt \to \infty$, где*

$$V \neq \frac{\operatorname{Im} E(\varkappa_i^+)}{\operatorname{Im} p(\varkappa_i^+)}, \tag{26}$$

имеет вид

$$u(x,t) = -2\partial_x^2 \ln \Theta (U^{(2)}x + U^{(3)}t + \zeta_\pm + \Phi), \tag{27}$$

$$\zeta_\pm = K - \sum_{s=1}^{g+N} A(\gamma_s) + \sum_{i=1}^{N} A(\varkappa_i^\mp). \tag{28}$$

Из условий (2) следует, что $\psi(x, t, P_0)$ при $x + Vt \to \pm\infty$ стремится к функциям $\psi_\pm(x, t, P)$, имеющим в P_0 вид (4). Вне P_0 они имеют полюса в точках γ_s и нули в точках $\varkappa_i^\pm$. По теореме Римана — Роха существуют единственные мероморфные функции $h_\pm(P)$ с полюсами в γ_s и нулями в $\varkappa_i^\pm$, $h_\pm(P_0) = 1$. Кроме $\varkappa_i^\pm$, функции $\psi_\pm$ имеют еще g нулей. Обозначим их через $\gamma_1^\pm, \ldots, \gamma_g^\pm$. По теореме Абеля

$$\sum_{i=1}^{g} A(\gamma_i^\pm) = \sum_s A(\gamma_s) - \sum_j A(\varkappa_j^\pm). \tag{29}$$

Функции $\psi_\pm(x, t, P)h_\pm^{-1}(P)$ являются функцями Бейкера — Ахиезера с g полюсами $\gamma_i^\pm$. Поэтому формула (27) следует из (29) и (8).

Замечание. Указанные потенциалы естественно называть «многосолитонными на фоне конечнозонных». Другая форма процедуры «одевания» солитонными потенциалами конечнозонных, основанная на преобразованиях Бэклунда — Дарбу, предложена в работе [25].

Теорема 4. *Если на кривой Γ дифференциалы dp и dE не имеют общих нулей (это условие выполнено для кривых общего положения), то спектральная мера Ω, соответствующая многосолитонному на фоне конечнозонного потенциала, равна*

$$\Omega = \frac{dp}{\langle\psi\psi^+\rangle_x} = i\,\frac{dE}{\langle\psi'\psi^+ - \psi\psi^{+\prime}\rangle_t}, \quad \psi' = \partial_x\psi \tag{30}$$

(где $\langle\cdot\rangle_x$ и $\langle\cdot\rangle_t$ означают средние по x и t соответственно).

Доказательство. Пусть $\psi = \psi(x, t, P)$ и $\tilde\psi = \psi(x, t, \tilde P)$, где P и $\tilde P$ — произвольные точки Γ. Тогда из (6) и вещественности $u(x, t)$ следует:

$$i\partial_t(\psi\tilde\psi^+) = \partial_x(\psi'\tilde\psi^+ - \psi\tilde\psi^{+\prime}). \tag{31}$$

Усредняя это равенство по (x, t) и устремляя $\tilde P \to P$, получим следующее равенство:

$$i\,dE\,\langle\psi\psi^+\rangle_x = dp\,\langle\psi'\psi^+ - \psi\psi^{+\prime}\rangle_t. \tag{32}$$

Заметим, что, как было показано в ходе доказательства предшествующей леммы, точки $\varkappa_i^\pm$ соответствуют связанным состояниям и

$$\langle\psi\psi^+\rangle_x\big|_{P=\varkappa_i^\pm} = \langle\psi'\psi^+ - \psi\psi^{+\prime}\rangle_t\big|_{P=\varkappa_i^\pm} = 0. \tag{33}$$

Кроме этих N нулей, $\langle\psi\psi^+\rangle_x$ имеет еще $2g$ нулей, которые из (32) и того, что dp и dE не имеют общих нулей, обязаны совпадать с нулями dp. Следовательно, дифференциал $dp/\langle\psi\psi^+\rangle_x$ имеет полюса в точках $\varkappa_i^\pm$, нули в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+N}, \tau(\gamma_1), \ldots, \tau(\gamma_{g+N})$ и нужный вид в окрестности P_0.

Как сообщили автору Б. А. Дубровин и С. М. Натанзон, ими недавно было получено другое доказательство необходимости условий на дивизор полюсов ψ, приводящих к вещественным неособым потенциалам оператора Шредингера. Кроме того, ими доказана и необходимость наличия антиинволюции τ.

Значения квазиимпульса $p = p(E)$ при каждом значении квазиэнергии (после фиксации локально каких-либо ветвей этих многозначных функций) определяют функционалы на множестве конечнозонных потенциалов. В стационарном случае коэффициенты разложения p по степеням $k^{-1} = E^{-1/2}$ в окрестности P_0, $p = k + \sum\limits_s p_s k^{-s}$, имеют локальные плотности, т. е. $p_s = \int I_s([u])\,dx$, где $I_s([u]')$ — дифференциальные полиномы. В нестационарном случае это не так.

Теорема 5. *Вариация квазиимпульса δp при вариации $\delta u(x, t)$ потенциала равна*

$$\delta p = \frac{1}{TL} \iint \frac{\delta u(x,t)\,\psi(x,t,P)\,\psi^+(x,t,P)}{\langle \psi'\psi^+ - \psi\psi^{+'}\rangle_t}\,dx\,dt. \tag{34}$$

Доказательство этой теоремы мы опустим, поскольку оно полностью параллельно доказательству его стационарного варианта [27].

§ 2. Нелинейные соотношения в спектральной теории конечнозонных нестационарных операторов Шредингера

В этом параграфе будут выведены нелинейные соотношения между алгебро-геометрическими потенциалами линейного уравнения Шредингера и его решениями. Как будет видно в дальнейшем, эти соотношения могут быть использованы для построения решений некоторых нелинейных уравнений матфизики (подобный подход к построению конечнозонных решений нелинейного уравнения Шредингера был впервые использован в работе [29]).

Пусть $\psi(x, t, k)$ — формальное решение уравнения (6), имеющее вид (4). Уравнение (6) эквивалентно следующей системе уравнений на коэффициенты $\xi_s(x, t)$:

$$i\dot{\xi}_s - 2i\xi'_{s+1} - \xi''_s + u\xi_s = 0. \tag{35}$$

Рассмотрим ряд

$$\psi(x,t,k)\,\overline{\psi}(x,t,\overline{k}) = 1 + \sum_{s=2}^{\infty} J_s(x,t)\,k^{-s}. \tag{36}$$

Коэффициенты этого ряда J_s являются полиномами от ξ_l, $\overline{\xi}_l$:

$$J_2 = \xi_2 + \overline{\xi}_2 + |\xi_1|^2, \quad J_3 = \xi_3 + \overline{\xi}_3 + \xi_1\overline{\xi}_2 + \overline{\xi}_1\xi_2, \tag{37}$$
$$J_4 = \xi_4 + \overline{\xi}_4 + \xi_1\overline{\xi}_3 + \overline{\xi}_1\xi_3 + |\xi_2|^2$$

и т.д.

В стационарном случае эти коэффициенты были равны — $J_s = \delta I_s/\delta u$ — вариационным производным интегралов КдФ и являлись дифференциальными полиномами от $u(x)$ [3; 4].

Найдем аналогичные выражения для J_s в нестационарном случае. Так как $\xi_1 + \overline{\xi}_1 = 0$, то из уравнения (35) при $s = 1$ получим

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 - \overline{\xi}_2, \quad i(\xi'_2 + \overline{\xi}'_2) + \xi''_1 - i(\xi_1^2)' = 0. \tag{38}$$

Следовательно,

$$J_2 = i\xi'_1 + A(t) = \frac{u}{2} + A(t). \tag{39}$$

Аналогично из уравнения (42) при $s = 2$ выводится равенство

$$\partial_x J_3 = \frac{1}{2}\dot{A} + i(\dot{\xi}_1)'. \tag{40}$$

Предположим далее, что ξ_s являются ограниченными на всей оси по x (что будет всегда выполнено в наших конструкциях). Тогда из (40) имеем $\dot{A} = 0$ и $A = \text{const}$. Интегрируя (40), получим

$$J_3 = i\dot{\xi}_1 + B(t). \tag{41}$$

Наконец, при $s = 3$ из (42) получим после прямых вычислений с использованием предшествующих равенств

$$\partial_x J_4 = \frac{3}{4} i\dot{\xi}_1 - \frac{i}{4} \xi_1'''' - 3\xi_1'\xi_1'' + \frac{1}{2} \dot{B}. \tag{42}$$

Для дальнейших целей нам будет достаточно уже найденных выражений. Что же касается остальных коэффициентов J_s, то естественной представляется гипотеза, что $\partial_x^{s-2} J_s$ является дифференциальным полиномом от u. (Возможно, что при доказательстве этой гипотезы следует использовать предложенное в работах [35] описание иерархии уравнения КП, основанное на введении τ-функции.)

Алгебро-геометрические потенциалы $u(x, t)$ выделяются среди всех потенциалов тем, что среди коэффициентов J_s имеется лишь конечное число линейно независимых.

Обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Gamma, \lambda_j, \varkappa_i^{\pm})$ линейное пространство мероморфных дифференциалов, имеющих полюса не более чем второго порядка с нулевыми вычетами в точках λ_j и простые полюса в точках $\varkappa_i^{\pm}$ с противоположными вычетами. Размерность этого пространства равна $g + N + M = G$.

Так как

$$\psi(x, t, P)\psi^+(x, t, P)\,\Omega - dp \in \mathcal{L}(\Gamma, \lambda_j, \varkappa_i^{\pm}),$$

то среди J_s не более G линейно независимых.

В случае общего положения в качестве базисных дифференциалов можно выбрать дифференциалы Λ_s, нормированные условиями

$$\Lambda_s = dk\,(k^{-s} + O(k^{-G-2})), \quad s = 2, \ldots, G + 1. \tag{43}$$

В этом базисе коэффициенты разложения

$$\psi\psi^+\Omega = dp + \sum_{s=2}^{G+1} \Lambda_s \hat{J}_s(x, t) \tag{44}$$

совпадают с первыми коэффициентами разложения

$$\frac{\psi(x, t, k)\,\psi^+(x, t, k)}{\langle\psi\psi^+\rangle_x} = 1 + \sum_{s=2}^{\infty} \hat{J}_s(x, t)\,k^{-s}. \tag{45}$$

Заметим, что если $\langle\xi_1\rangle_x = 0$, то

$$\hat{J}_2 = J_2, \quad \hat{J}_3 = J_3, \quad \hat{J}_4 = J_4, \tag{46}$$

где J_2, J_3, J_4 определены выше.

Как будет видно ниже, специальный выбор параметров Γ, P_0, λ_j, $\varkappa_i^{\pm}$ позволяет получить из соотношения (46) равенства, которые вместе с уравнением (8) дают системы уравнений, описывающих в различных приближениях взаимодействие коротких и длинных волн в плазме.

Предположим, что на Γ имеется функция $h(P)$, голоморфная вне точек P_0, P_1, $\tau(P_1) = P_1$. Причем в последней она имеет простой полюс. Пусть, кроме того, параметры $\varkappa_i^{\pm}$ и λ_j выбраны так, что

$$h(\varkappa_i^+) = h(\varkappa_i^-), \quad dh|_{p=\lambda_j} = 0. \tag{47}$$

Обозначим через $\Phi(x, t)$ значение функции Бейкера—Ахиезера в точке P_1: $\Phi(x, t) = \psi(x, t, P_1)$.

Т е о р е м а 6. *Если $h(P)$ имеет в точке P_0 полюс второго порядка*

$$h(P) = k^2 + \alpha k + O(1), \tag{48}$$

то $\Phi(x, t)$ *удовлетворяет соотношению*

$$r(|\Phi|^2)_x = \frac{1}{2}(\dot{u} + \alpha u_x), \tag{49}$$

$$r = \operatorname{res}_{P_1} h\Omega. \tag{50}$$

Если $h(P)$ *имеет полюс третьего порядка в* P_0 *и*

$$h(P) = k^3 + \beta k + O(1), \tag{51}$$

то

$$r(|\Phi|^2)_{xx} = \frac{3}{8}\ddot{u} - \frac{1}{8}(u_{xxx} - 3uu_x)_x - \beta \dot{u}_{xx}. \tag{52}$$

Доказательство. Как следует из (47), сумма вычетов дифференциала

$$\Lambda = h(P)\,\psi(x, t, P)\,\psi^+(x, t, P)\,\Omega(P) \tag{53}$$

во всех точках, кроме P_0 и P_1, равна нулю. Отсюда

$$\operatorname{res}_{P_1}\Lambda = -\operatorname{res}_{P_0}\Lambda. \tag{54}$$

Левая часть этого равенства совпадает с $r|\Phi|^2$, а правая с $J_3 + \alpha J_2$ в первом случае и с $J_4 + \beta J_2$ — во втором. Из (54) и формул (39—42) следуют равенства (49—52).

Следствие. Формула (8) и формула

$$\Phi(x, t) = \exp\left(i\int^{P_1}(x\Omega^{(2)} + t\Omega^{(3)} + \Sigma\varphi_j\Omega^{(j)})\right) \times$$
$$\times \frac{\Theta(A(P_1) + xU^{(2)} + tU^{(3)} + \zeta_0 + \Phi)\,\Theta(\zeta_0 + \Phi)}{\Theta(A(P_1) + \zeta_0 + \Phi)\,\Theta(xU^{(2)} + tU^{(3)} + \zeta_0 + \Phi)} \tag{55}$$

задают квазипериодические решения систем (6), (49) и (6), (52) в первом и во втором случаях соответственно.

Система (6), (49) была предложена в [30], где была показана и ее интегрируемость. Система (6), (52) была получена в [31]. Там же было найдено простейшее солитонное решение. Семейство солитонных решений было найдено в [32]. В работе [33] для системы (6), (52) была найдена L, A, B-тройка. Периодические конечнозонные решения обеих систем до сих пор не были построены.

§ 3. Нестационарная модель Пайерлса

Теоремы разложения, доказанные в § 1, показывают, что вещественные овалы кривой Γ и пары $\varkappa_i^{\pm}$ первого типа соответствуют «одночастичным» состояниям электрона. Вводя числа заполнения $c(P)$, $P \in \{\sigma_i\}$; c_j, $j = 1, \ldots, N_1$ этих состояний, лагранжиан модели Пайерлса можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \int_0^L dx \left[\int_{\{\sigma_i\}} c(P)\,\Omega(P)\,\psi^+(i\partial_t - \partial_x^2 + w_x)\psi - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{N_1} r_i c_i \psi_i^+(i\partial_t - \partial_x^2 + w_x)\psi_i - \frac{M}{2}(w_t)^2 + \frac{g}{2}(w_x)^2\right], \tag{56}$$

где r_i определено формулой (13), $\psi_i = \psi(x, t, \varkappa_i^+)$.

В силу принципа Паули числа заполнения должны удовлетворять условию $0 \leqslant c(P) \leqslant 2$, $0 \leqslant c_i \leqslant 2$. Последние два слагаемых есть кинетическая энергия и энергия упругой деформации ионной решетки. В общем случае потенциал деформации $\Phi(w_x, w_{xx}, \ldots)$ может быть достаточно произвольным.

Вариация $\mathcal{L}$ по ψ^+ приводит к нестационарному уравнению Шредингера (6) для $\psi(x, t, P)$ с потенциалом $u(x, t) = w_x(x, t)$. Варьируя $\mathcal{L}$ по w, получим уравнение самосогласования

$$Mw_{tt} - gw_{xx} = \partial_x \left(\int_{\{\sigma_i\}} |\psi|^2 (x, t, P) c(P) \Omega(P) - \sum_{i=1}^{N_1} r_i c_i |\psi|^2 \right). \tag{57}$$

Уравнения (6), (57) и есть система уравнений нестационарной модели Пайерлса. Будем искать решения этих уравнений в виде бегущей волны, слабо промодулированной во времени, т. е. $w(x, t)$ ищется в виде $w = \widetilde{w}(x + Vt, t)$, где $\widetilde{w}(x, t)$ слабо зависит от t. Аналогично $\psi(x, t)$ представим в виде

$$\psi(x, t, P) = e^{-i/2Vx - i/4V^2t} \widetilde{\psi}(x + Vt, t, P).$$

При этом функция ψ будет удовлетворять уравнению (6) с потенциалом $u(x, t) = \widetilde{w}_x(x, t)$, а уравнение (57) с точностью до членов второго порядка малости перейдет в уравнение

$$\varkappa_2 \widetilde{w}_{xx} - \varkappa_3 \widetilde{w}_{xt} = \partial_x \left[\int_{\{\sigma_i\}} |\widetilde{\psi}|^2 c(P) \Omega - \sum_{i=1}^{N_1} r_i c_i |\widetilde{\psi}_i|^2 \right], \tag{58}$$

где $\varkappa_2 = MV^2 - g$, $\varkappa_3 = MV$.

Обозначим через F_s, $s = 2, \ldots, G + 1$ величины

$$F_s = \int_{\{\sigma_i\}} c(P) \Lambda_s - \sum_i r_{is} c_i, \tag{59}$$

где Λ_s — дифференциалы на Γ, определенные условиями (43), а

$$r_{is} = 2\pi i \operatorname{res}_{\varkappa_i^+} \Lambda_s. \tag{60}$$

Непосредственным следствием равенства (44) является

Теорема 7. *Если выполнены условия*

$$F_2 = \varkappa_2, \; F_3 = \varkappa_3, \; F_s = 0, \quad s = 4, \ldots, G + 1, \tag{61}$$

то функция Бейкера — Ахиезера $\psi(x, t, P)$ *и* $w(x, t) = 2i\xi_1(x, t)$ *удовлетворяют системе уравнений* (6) (*где* $u = w_x$) *и* (58).

Замечание. Если числа заполнения c_i, $c(P)$ принимают лишь значения 0 и 2 и при этом $c(P)$ — константа на каждом овале σ_i (т. е. часть зон σ_i и уровней заполнены полностью, а остальные пусты), то, по-видимому, аналогично стационарному случаю можно показать, что уже часть уравнений (61), отвечающая индексам $s \geqslant 4$, не имеет решений при $G \geqslant 6$.

Уравнения (61) следует дополнить уравнением, фиксирующим «плотность электронов»:

$$\int_{\{\sigma_i\}} c(P)\, dp = 2\pi\rho = \text{const}. \tag{62}$$

При $G = 2$ имеем всего 3 уравнения на параметры конструкции — параметры кривой Γ (их число при $g = 2$ равно 3) и точку P_0.

Рассмотрим подробнее физически интересный случай, отвечающий вырождениям кривых рода 2 до эллиптических кривых с самопересечениями — $g = 1$, $N = 1$ (т. е. случай «односолитонный на фоне однозонного»). Для этого вырожденного случая имеем 3 параметра — периоды 2ω, $2\omega'$ эллиптической кривой Γ и точку $\varkappa$, входящую в условия (2).

Прямые вычисления приводят уравнения (61), (62) к следующему явному виду:

$$F_2 = -4\omega = \varkappa_2, \quad \rho = \frac{i}{\omega'}, \tag{63}$$

$$F_3 = \frac{2}{\wp(\bar{\varkappa}) - \wp(\varkappa)}[(\bar{\varkappa} - \varkappa)\eta + \omega(\zeta(\varkappa) - \zeta(\bar{\varkappa})) + \pi i c_1] = \varkappa_3. \tag{64}$$

При этом предполагалось, что нижняя (по значениям квазиэнергии) разрешенная зона заполнена целиком: $c(P) = 2$, $\operatorname{Im} P = -i\omega'$, а верхняя пуста: $c(P) = 0$, $\operatorname{Im} P = 0$. Уравнения (63), определяющие периоды Г, совпадают с уравнениями самосогласования для стационарной модели Пайерлса [13]. Из (64) находится $\varkappa$.

Ограниченность объема статьи заставляет отказаться от явного выписывания формул для ψ и w, соответствующих Г и $\varkappa$. Они получаются непосредственной подстановкой формулы (5) в (2). Как следует из леммы 4, асимптотически при больших x и t потенциал $u(x, t) = w_x(x, t)$ имеет вид

$$u \to 2\wp(ix + \zeta_0 \pm (\varkappa - \bar{\varkappa})) + \text{const}. \tag{65}$$

С точки зрения решений нестационарной модели Пайерлса нас интересуют лишь те решения уравнений (6), (58), которые слабо зависят от t. В случае эллиптической кривой Г квазиэнергия E есть $\wp(z)$ — $\wp$-функция Вейерштрасса [34]. Поэтому, как следует из хода доказательства леммы 4, малость скорости солитона на фоне кноидальной волны эквивалентна малости $|\wp(\varkappa) - \wp(\bar{\varkappa})|$. Последнее выполнено, если

$$|i \operatorname{Im} \varkappa - \omega'| \ll 1. \tag{66}$$

Уравнение самосогласования (64) имеет решение $\varkappa$, удовлетворяющее условию (66), лишь, если

$$c_1 = 1. \tag{67}$$

Таким образом, как и в стационарном случае, на дискретном уровне должен быть локализован в точности один электрон. В этом случае у модели Пайерлса существует решение типа бегущей волны, слабо промодулированной по времени.

Аналогично предшествующей теореме из (44) следует

Теорема 8. *Если выполнены условия*

$$F_2 = -g,\ F_3 = 0,\ F_4 = M,\ F_s = 0; \quad s = 5, \ldots, G+1, \tag{68}$$

то $\psi(x, t, P)$ и $w(x, t) = 2i\xi_1(x, t)$ *удовлетворяют уравнениям* (6) *и условию самосогласования*

$$M\left(w_{tt} - \frac{1}{8}w_{xxxx} + \frac{3}{8}w_x w_{xx}\right) - g w_{xx} = \partial_x\left[\int_{\sigma_i} |\psi|^2 c(P)\,\Omega - \sum_i c_i r_i |\psi_i|^2\right]. \tag{69}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова—Шабата и их периодических решений//ДАН СССР.—1976.— Т.227, —вып. 2.— С. 291—294.
2. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии// Функцион. анализ и его прил. 1977.— Т. 11, вып. 1.— С. 15—31.
3. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия// УМН.—1976.— Т. 31, вып. 1.— С. 55—136.
4. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.
5. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений// УМН.—1980.— т. 32, вып. 6. —С. 183—208.
6. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения//УМН.—1980.— Т. 35, вып. 6.— С. 47—68.

7. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения. УМН.—1981.— Т. 36, вып. 2.— С. 11—80.
8. *Dubrovin B. A., Krichever I. M., Novikov S. P.* Topological and algebraic geometry methods in contemporary mathematical physics. II//Soviet Scientific Reviews. Math. Phys. Reviews: OPA, Amsterdam, 1982.— V. 3 P. 1—151.
9. *Новиков С. П.* Двумерные операторы Шредингера в периодических полях//Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.—М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983.— Т. 23.— С. 3—32.
10. *Дубровин Б. А.* Матричные конечнозонные операторы//Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983.— Т. 23.— С. 33—78.
11. *Кричевер И. М.* Нелинейные уравнения и эллиптические кривые //Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983.— Т. 23.— С. 79—136.
12. *Бразовский С. А., Гордюнин С. А., Кирова Н. Н.* Точное решение модели Пайерлса с произвольным числом электронов на элементарную ячейку//Письма в ЖЭТФ.— 1980.— Т. 31, вып. 8.— С. 486—490.
13. *Белоколос Е. Д.* Задачи Пайерлса—Фрелиха и конечнозонные потенциалы. I//ТМФ.— 1980.— Т. 45, вып. 2.— С. 268—280.
14. *Белоколос Е. Д.* Задачи Пайерлса—Фрелиха и конечнозонные потенциалы. II//ТМФ.— 1981.— Т. 48, вып. 1.— С. 60—69.
15. *Бразовский С. А., Дзялошинский И. Е., Кричевер И. М.* Точно решаемые дискретные модели Пайерлса//ЖЭТФ.—1982.— Т. 83, вып. 1.— С. 389—415.
16. *Дзялошинский И. Е., Кричевер И. М.* Звук и волна зарядовой плотности в дискретной модели Пайерлса//ЖЭТФ.—1983.— Т. 85, вып. 11.— С. 1771—1789.
17. *Кричевер И. М.* Модель Пайерлса//Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, вып. 4.— С. 10—26.
18. *Дзялошинский И. Е., Кричевер И. М.* Эффекты соизмеримости в дискретной модели Пайерлса//ЖЭТФ.—1982.— Т. 83, вып. 5.— С. 1576—1581.
19. *Чередник И. В.* Об условиях вещественности в «конечнозонном» интегрировании// ДАН СССР.—1980.— Т. 252, вып. 5.— С. 1104—1108.
20. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I//Функцион. анализ и его прил.—1974.— Т. 8, вып. 3.— С. 43—53.
21. *Кричевер И. М.* О рациональных решениях уравнения Кадомцева—Петвиашвили и об интегрируемых системах частиц на прямой//Фукнцион. анализ и его прил. 1978.— Т. 12, вып. 1.— С. 76—78.
22. *Bordag L. A., Its A. R., Matveev V. B., Manakov S. V., Zakharov V. E.* Two-dimensional solitons of Kadomtzev—Petviashvely equation//Phys. Lett., 1977.— P. 205—207.
23. *Кричевер И. М.* Метод Лапласа, алгебраические кривые и нелинейные уравнения// Функцион. анализ и его прил.—1984.— Т. 18, вып. 3.— С. 43—56.
24. *Fay J.* Theta-functions on Riemann surfaces//Lect. Notes in Math.—1973.— V. 352.
25. *Matveev V. B.* Darboux transformations and the solutions of KP equation depending on the functional parameters//Lect. Math. Phys.— 1979.— V. 3.— P. 213—225.
26. *Кузнецов Е. А., Михайлов А. В.* Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией//ЖЭТФ.— 1974.— Т. 67, вып. 11.— С. 1019—1027.
27. *Дубровин Б. А.* Периодическая задача для уравнения Кортевега—де Фриза//Функцион. анализ и его прил. — 1975.— Т. 9, вып. 3.— С. 41—51.
28. *Дубровин Б. А.* Обратная задача рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов//Функцион. анализ и его прил.— 1975.— Т. 9, вып. 1.— С. 65—66.
29. *Чередник И. В.* Дифференциальные уравнения для функций Бейкера—Ахиезера// Функцион. анализ и его прил.— 1978.— Т. 12, вып. 3.— С. 45—54.
30. *Yajima N., Oikawa M.* Interections between langmure's and sonice waves//Prog. Theor. Phys.— 1976.— V. 56.— P. 17—19.
31. *Makchankov V. G.* On the stationary solutions of Schrödinger equation with self-congruent potential satisfi Bussinesque equation//Phys. Lett.— 1974.— V. 50, A.— P. 42—44.
32. *Bogomolov Y., Kol'chugina I., Litvak A., Sergeev A.* Near-sonic Langmur solitons//Phys. Lett.— 1982 — V. 91A.— P. 9—14.
33. *Мельников В. К.* Некоторые новые нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи//Мат. сб.— 1983.— Т. 121, № 4.— С. 469—498.
34. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1974.
35. *Date E., Jimbo M., Kashivara, Miva T.* Transformation groups for solitonequations//I.— Proc. Japan Acad.— 1981.— V. 57A.— P. 342—347; III.— J. Phys. Soc. Japan.— 1981.— V. 50.— P. 3806—3812.

Московский энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступило в редакцию
4 октября 1985 г.