Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 4, 47—61

УДК 517.9

АЛГЕБРЫ ТИПА ВИРАСОРО, РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И СТРУНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

Введение

Алгебро-геометрическая модель струны в пространстве Минковского (точнее, «диаграмма», около которой струна флуктуирует), в соответствии с представлениями работы [1], такова. Задана компактная риманова поверхность Г с двумя отмеченными точками $P_\pm \in \Gamma$. Существует единственный дифференциал третьего рода dk с двумя простыми полюсами в точках $P_\pm$, с вычетами ± 1 и чисто мнимыми периодами по всем контурам на Г. Вещественная часть соответствующего интеграла $\tau(z) = \operatorname{Re} k(z)$ однозначна на Г и представляет собой «время». Линии уровня $\tau(z) = \mathrm{const}$ представляют собой положения струны в данный момент. Набору $m = m_+ + m_-$ струн соответствует риманова поверхность Г с двумя наборами точек $P_{+,i}$, $P_{-,j}$, $i = 1, \ldots, m_+$, $j = 1, \ldots, m_-$ с дифференциалом dk, с вещественными вычетами c_{+i}, c_{-j} во всех точках $P_\pm$, $c_+ > 0$, $c_- < 0$, и чисто мнимыми периодами на Г. Также точно функция $\tau(z) = \operatorname{Re} k(z)$ однозначна и играет роль «времени». При $\tau \to \pm\infty$ контуры $\tau = \mathrm{const}$ распадаются на свободные струны. Компоненты связности, сосредоточенные около точек $P_\pm$, играют роль асимптотически свободных «in» и «out» струн. В работе [1] был построен богатый набор алгебраических объектов, связанных с этой картиной для $m = 1$, которые для рода $g = 0$ сводятся к теории алгебры Вирасоро и ее представлений. В настоящей работе мы продемонстрируем возникновение этих алгебраических образов в процессе квантования струны на таких алгебро-геометрических моделях — «диаграммах». Асимптотические «in» и «out» состояния соответствуют обычным фоковским пространствам свободных струн — малых контуров $\tau = \mathrm{const}$ около точек $P_\pm$. Глобальные алгебро-геометрические объекты на поверхности Г с отмеченными точками $P_\pm$ позволяют в принципе, проследить весь процесс взаимодействия.

Алгебро-геометрические объекты в теории Полякова, Белавина, Книжника и др. струн в евклидовом пространстве-времени, как известно, приводят к задачам на пространстве модулей римановых поверхностей. Вводимые нами алгебраические образы в этой теории не появляются.

По мнению авторов, развиваемый нами подход связывает алгебро-геометрическую теорию струн с традиционными идеями операторной квантовой теории струн в пространстве Минковского и позволит использовать математическую технику метода конечнозонного интегрирования в теории солитонов.

§ 1. Аналоги алгебр Гейзенберга и Вирасоро, связанные с римановыми поверхностями

В этом параграфе мы напомним необходимые для дальнейшего определения и конструкции работы [1].

Пусть Г — произвольная компактная риманова поверхность рода g с двумя отмеченными точками $P_\pm$. Через $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Gamma, P_\pm)$ обозначается коммутативное кольцо мероморфных функций на Γ, голоморфных вне точек $P_\pm$. В [1] был введен аддитивный базис $\mathcal{A}$, образованный функциями $A_n(Q)$, $Q \in \Gamma$, которые при $|n| > g/2$ однозначно определяются своим поведением в окрестностях $P_\pm$ вида

$$A_n(Q) = a_n^\pm z_\pm^{\pm n - g/2}(1 + O(z_\pm)), \quad a_n^+ = 1. \tag{1.1}$$

Здесь $z_\pm(Q)$ — фиксированные локальные координаты в окрестностях $P_\pm$. (При $|n| \leqslant g/2$ определение A_n незначительно меняется (см. подробности в [1]). Здесь и далее индексы n пробегают целые значения, если g четно, и полуцелые $n = \ldots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$, если g нечетно.

Определение. *Обобщенной алгеброй Гейзенберга, связанной с кривой Γ и парой точек $P_\pm$, называется алгебра, порожденная образующими α_n и центральным элементом t с соотношениями*

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \gamma_{nm} t, \quad [\alpha_n, t] = 0, \tag{1.2}$$

где числа γ_{nm} равны

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{2\pi i} \oint A_m \, dA_n. \tag{1.3}$$

Интеграл в (1.3) берется по любому контуру, разделяющему точки $P_\pm$. Поскольку все такие контуры гомологичны, а A_n голоморфны вне $P_\pm$, то γ_{nm} не зависят от выбора контура.

Важным свойством указанного центрального расширения коммутативной алгебры $\mathcal{A}$ является «локальность» соответствующего коцикла:

$$\gamma_{nm} = 0, \quad \text{при } |n+m| > g, \quad |n|, |m| > g/2, \tag{1.4}$$

$$\gamma_{nm} = 0, \quad \text{при } |n+m| > g+1, \quad |n| \text{ или } |m| \leqslant g/2. \tag{1.5}$$

Для дальнейшего нам потребуется рассмотреть пространство дифференциалов, голоморфных на Γ вне точек $P_\pm$, в которых они имеют полюса. Базис в этом пространстве образуют дифференциалы $d\omega_n(Q)$, которые при $|n| > g/2$ однозначно определяются, исходя из следующего поведения в окрестностях точек $P_\pm$:

$$d\omega_n = w_n^\pm z_\pm^{\mp n + g/2 - 1}(1 + O(z_\pm)) dz_\pm. \tag{1.6}$$

При $|n| \leqslant g/2$ $n \neq -g/2$, определим $d\omega_n$ из условий: в окрестностях

$$d\omega_n = z_+^{-n+g/2}(1 + O(z_+))\, dz_+, \qquad Q \to P_+, \tag{1.7}$$

$$d\omega_n = w_n^- z_-^{n+g/2-1}(1 + O(z_-))\, dz_-, \quad Q \to P_-. \tag{1.8}$$

Наконец, $d\omega_{-g/2}$ определим как единственный дифференциал dk:

$$d\omega_{-g/2} = dk, \tag{1.9}$$

имеющий простые полюсы в $P_\pm$ с вычетами ± 1 и чисто мнимыми периодами по всем циклам. (Этот дифференциал играет в теории выделенную роль; в [1] он обозначался через dp.)

Из (1.1) и (1.6)—(1.9) следует, что при $|n| > g/2$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint A_n \, d\omega_m = \delta_{nm}. \tag{1.10}$$

В [1] образующие A_n при $|n| \leqslant g/2$ определялись с точностью до константы, которую можно однозначно фиксировать, потребовав выполнения (1.10) при всех n, m.

При $g = 0$, когда Γ — обычная пополненная комплексная плоскость, а $P_\pm$ это точки $z = 0$ и $z = \infty$, функции A_n совпадают с z^n, образующими лорановский базис в пространстве гладких функций на окружности $|z| =$

$=\mathrm{const}$. Оказывается, что функции A_n являются «лорановским» базисом для кривых произвольного рода на специальной системе контуров C_τ. Эти контуры являются линиями уровня однозначной функции

$$C_\tau = \{Q, \operatorname{Re} k(Q) = \tau\}. \tag{1.11}$$

При $\tau \to \pm\infty$ контуры C_τ являются малыми окружностями, охватывающими точки $P_\mp$. При прохождении нулей дифференциала dk при изменении τ контуры C_τ претерпевают топологические перестройки: они распадаются на несвязные циклы, которые затем сливаются. Вне зависимости от τ имеет место следующая теорема, доказательство которой полностью аналогично доказательству леммы 1.2 работы [1].

Теорема 1.1. *Для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(Q)$ на контуре C_τ, $Q \in C_\tau$ имеет место равенство*

$$F(Q) = \frac{1}{2\pi i}\sum_n A_n(Q)\oint_{C_\tau} F(Q')\,d\omega_n(Q') \tag{1.12}$$

(*которое обобщает разложения Лорана на случай произвольных кривых*). *Двойственным является разложение любого гладкого дифференциала $df(Q)$ в ряд*

$$df(Q) = \frac{1}{2\pi i}\sum_n d\omega_n(Q)\oint_{C_\tau} df(Q')\,A_n(Q'). \tag{1.13}$$

Перейдем теперь к описанию аналогов алгебры Вирасоро. Пусть $\mathcal{L}^\Gamma = \mathcal{L}(\Gamma, P_\pm)$ — алгебра мероморфных векторных полей на Γ, голоморфных вне точек $P_\pm$. При $g > 1$ базис в этом пространстве образуют поля e_n, имеющие в окрестностях $P_\pm$ вид

$$e_n = \varepsilon_n^\pm z_\pm^{\pm n - g_0 + 1}(1 + O(z_\pm))\frac{\partial}{\partial z_\pm}, \quad g_0 = \frac{3g}{2}, \quad \varepsilon_n^+ = 1. \tag{1.14}$$

(Случай $g = 1$ разобран подробно в § 5 работы [1].) В [1] было доказано, что ограничения этих полей на любой контур C_τ образуют лорановский базис в пространстве всех гладких векторных полей на этом контуре.

Обозначим через $d^2\Omega_n$ образующие в пространстве квадратичных дифференциалов (тензоров типа (2, 0)) на Γ, голоморфных вне $P_\pm$, где они имеют полюсы. При $g > 1$ их можно однозначно выбрать так, что в окрестности $P_\pm$ будем иметь

$$d^2\Omega_n = (\varepsilon_n^\pm)^{-1} z_\pm^{\mp n + g_0 - 2}(1 + O(z_\pm))(dz_\pm)^\lambda. \tag{1.15}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\tau} e_n\, d^2\Omega_m = \delta_{nm}. \tag{1.16}$$

Теорема 1.2. *Для любого гладкого векторного поля $E(Q)$ на C_τ имеет место разложение*

$$E(Q) = \frac{1}{2\pi i}\sum_n e_n(Q)\oint E(Q')\,d^2\Omega_n(Q'). \tag{1.17}$$

Для любого гладкого квадратичного дифференциала d^2f на C_τ имеет место разложение

$$d^2f(Q) = \frac{1}{2\pi i}\sum_n d^2\Omega_n(Q)\oint e_n(Q')\,d^2f(Q'). \tag{1.18}$$

Определение. *Аналогом алгебры Вирасоро, связанным с кривой Γ с отмеченными точками будет называться алгебра $\widehat{\mathscr{L}}^\Gamma$, являющаяся одномерным «локальным» центральным расширением алгебры $\mathscr{L}^\Gamma$. Она порождает элементами E_n и t с коммутационными соотношениями*

$$[E_n, t] = 0; \quad [E_n, E_m] = \sum_{k=-g_0}^{g_0} c_{nm}^k E_{n+m-k} + \chi_{nm} t. \tag{1.19}$$

Здесь c_{nm}^k — структурные константы алгебры $\mathscr{L}^\Gamma$, в которой имеют место соотношения [1]

$$[e_n, e_m] = \sum_{k=-g_0}^{g_0} c_{nm}^k e_{n+m-k}. \tag{1.20}$$

Числа χ_{nm} определяют 2-коцикл на алгебре $\mathscr{L}^\Gamma$, который должен удовлетворять условию локальности

$$\chi_{nm} = 0, \text{ если } |n+m| > 3g. \tag{1.21}$$

В силу сходимости лорановских рядов по базису e_n на любом контуре C_τ, любой локальный коцикл на $\mathscr{L}^\Gamma$ продолжается до коцикла на алгебре всех гладких векторных полей на окружности. Так как у последней алгебры существует единственный нетривиальный класс гомологий двумерных коциклов [2], то все «локальные» центральные расширения алгебры $\mathscr{L}^\Gamma$ изоморфны. Точнее, если χ_{nm} и χ'_{nm} — два различных коцикла, задающих по формулам (1.19) расширения $\mathscr{L}^\Gamma$ и удовлетворяющих условию (1.21), то найдутся числа $s_{-g_0}, \ldots, s_{g_0}, \hat{c}$ такие, что

$$\chi'_{nm} = \hat{c}\left(\chi_{nm} - \sum_k c_{nm}^k s_{n+m-k}\right). \tag{1.22}$$

При этом соответствие $E'_n = E_n + s_n t$, $|n| < g_0$, $t' = \hat{c}t$ устанавливает изоморфизм центральных расширений, заданных коциклами χ_{nm} и χ'_{nm}. В дальнейшем нас будет интересовать не столько сама алгебра $\widehat{\mathscr{L}}^\Gamma$, являющаяся единственным локальным центральным расширением $\mathscr{L}^\Gamma$, сколько фиксированный в ней базис операторов E_n, t. Поэтому нас будут в дальнейшем интересовать все локальные коциклы χ_{nm}, а не только их класс гомологий.

В работе [1] «локальные» коциклы на алгебре $\mathscr{L}^\Gamma$ определялись с помощью задания на Γ «проективных» комплексных структур. Более эффективно эти коциклы могут быть определены с помощью задания на Γ проективных связностей.

Говорят, что на Γ задана голоморфная проективная связность R, если для любой локальной системы координат z_α (Q), заданной в области $U_\alpha \subset \Gamma$, определена голоморфная функция R_α (z_α). При этом на пересечении карт $U_\alpha \cap U_\beta$ соответствующие функции должны быть связаны соотношением

$$R_\beta (z_\beta) \left(\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha}\right)^2 = R_\alpha (z_\alpha) + \mathfrak{S}(f_{\alpha\beta}). \tag{1.23}$$

Здесь $f_{\alpha\beta}$ — функции перехода, $z_\beta = f_{\alpha\beta}(z_\alpha)$; $\mathfrak{S}(h)$ — производная Шварца

$$\mathfrak{S}(h) = \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2. \tag{1.24}$$

Имеется несколько канонических проективных связностей — Фукса, Шотки и др. [3; 4]. Из (1.23) следует, что разность любых двух проективных связностей является квадратичным дифференциалом. В дальнейшем мы будем рассматривать проективные связности R, голоморфные на Γ вне отмеченных точек $P_\pm$, в которых R имеет полюс не выше второго порядка. Любую такую связность можно однозначно представить в виде

$$R = R_0 + \sum_{n=-g_0}^{g_0} s_n\, d^2\Omega_n, \tag{1.25}$$

если зафиксировать какую-либо голоморфную проективную связность R_0.

Пусть f и g — два произвольных векторных поля. Тогда формула

$$\tilde{\chi}(f, g) = \left(\frac{1}{2}(f'''g - fg''') - R(f'g - fg')\right) dz, \tag{1.26}$$

определенная в каждой локальной системе координат, в которой f и g имеют вид $f(z)\partial/\partial z$, $g(z)\partial/\partial z$ (штрих означает производную по локальному параметру z), корректно задает 1-форму на Г. Если проективная связность R имеет вид (1.25), то коцикл

$$\chi_{nm} = \frac{\hat{c}}{24\pi i} \oint_{C_\tau} \tilde{\chi}(e_n, e_m) \tag{1.27}$$

определяет «локальное» центральное расширение алгебры $\mathcal{L}^\Gamma$.

К вопросу о явном вычислении проективных связностей, отвечающих коциклам, которые будут построены в следующем параграфе в процессе квантования струны, и связи этой задачи с проблемой «акцессорных» параметров мы вернемся позже.

§ 2. Аналоги алгебр Гейзенберга и Вирасоро в теории струны

Стандартно фазовое пространство классической бозонной замкнутой струны в D-мерном пространстве Минковского определяется как пространство 2π-периодических функций $x^\mu(\sigma)$ и 2π-периодических дифференциалов $p^\mu(\sigma)$ со скобкой Пуассона

$$\{p^\mu(\sigma'),\ x^\nu(\sigma)\} = \eta^{\mu\nu}\Delta(\sigma, \sigma'). \tag{2.1}$$

Здесь $\eta^{\mu\nu}$ — метрика Минковского с сигнатурой $(-1, 1, 1, \ldots)$ $\Delta(\sigma, \sigma')$ — «дельта-функция на окружности» (точнее $\Delta(\sigma, \sigma')$ — функция переменной σ и дифференциал по переменной σ'), причем для любой функции на окружности имеет место

$$f(\sigma) = \oint f(\sigma')\Delta(\sigma, \sigma'). \tag{2.2}$$

Такое определение фазового пространства не позволяет наивно включить в рассмотрение движения струны, при которых происходят топологические перестройки (деления и слияния) в процессе движения во времени. Возможный путь преодоления этой трудности подсказывает анализ системы контуров C_τ, построенных выше на любой римановой поверхности с двумя отмеченными точками.

Реализация двумерной римановой поверхности $\tilde{\Gamma}$ как «мировой линии» струны автоматически индуцирует разбиение $\tilde{\Gamma}$ в систему контуров, отвечающих положению струны в определенный момент времени. Комплексная структура на $\tilde{\Gamma}$ возникает из требования, что время — гармоническая функция на $\tilde{\Gamma}$. В роли «диаграмм» выступают лишь такие мировые линии, при которых у струны ни в какой момент τ не появляются и не исчезают новые компоненты, а компактификация алгебраична.

Рассмотрим задачу о квантовании таких диаграмм. Обычные коэффициенты Фурье должны быть заменены на коэффициенты разложений по функциям A_n, которые образуют базис в пространстве гладких функций на контурах C_τ при всех τ.

Итак, пусть $x^\mu(Q)$ и $p^\mu(Q)$ операторнозначные функции и дифференциалы на Г, коммутирующие, если Q и Q' лежат на разных контурах C_τ

(т. е. в разные моменты времени) и такие, что

$$[x^\mu(Q), p^\nu(Q')] = -i\eta^{\mu\nu}\Delta_\tau(Q, Q'), \ Q, Q' \in C_\tau, \tag{2.3}$$

где Δ_τ — «дельта-функция» на контуре C_τ. Из теоремы 1.1 следует, что

$$\Delta_\tau(Q, Q') = \frac{1}{2\pi i}\sum_n A_n(Q)\, d\omega_n(Q'). \tag{2.4}$$

Обозначим через X_n^μ операторные коэффициенты разложения

$$x^\mu(Q) = \sum_n X_n^\mu A_n(Q). \tag{2.5}$$

Поскольку p^μ является дифференциалом по переменной Q, то его следует разложить по базисным дифференциалам $d\omega_n$

$$p^\mu(Q) = \sum_n P_n^\mu\, d\omega_n(Q). \tag{2.6}$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что P_n^μ и X_m^ν удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[P_n^\mu, X_m^\nu] = \frac{1}{2\pi}\eta^{\mu\nu}\delta_{nm}. \tag{2.7}$$

Определим операторы α_n^μ как коэффициенты разложения дифференциала

$$\pi p^\mu + (x')^\mu = \sum_n \alpha_n^\mu\, d\omega_n(Q), \quad Q = (\tau, \sigma), \quad x' = \partial x/\partial\sigma. \tag{2.8}$$

Имеем

$$\sum_n \alpha_n^\mu\, d\omega_n(Q) = \sum_n (X_n^\mu\, dA_n(Q) + \pi P_n^\mu\, d\omega_n). \tag{2.9}$$

Воспользовавшись (1.13), получим

$$dA_n = \sum_m \gamma_{nm}\, d\omega_m, \tag{2.10}$$

где константы γ_{nm} даются формулой (1.3). Окончательно

$$\alpha_n^\mu = \pi P_n^\mu + \sum_m \gamma_{mn} X_m^\mu. \tag{2.11}$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = \gamma_{nm}\eta^{\mu\nu} \tag{2.12}$$

и реализуют представление прямого произведения D экземпляров Г-аналога алгебры Гейзенберга.

Сопряженные функции $\bar{A}_n(Q)$ и дифференциалы $\overline{d\omega_n}(Q)$ также образуют базисы в пространствах гладких функций и дифференциалов на контурах C_τ. Поэтому можно определить операторы $\bar{X}_n^\mu$ и $\bar{P}_n^\mu$ из разложений

$$x^\mu(Q) = \sum_n \bar{X}_n^\mu \bar{A}_n(Q), \tag{2.13}$$

$$p^\mu(Q) = \sum_n \bar{P}_n^\mu\, \overline{d\omega_n}(Q). \tag{2.14}$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$[\bar{X}_n^\mu, \bar{P}_m^\nu] = \frac{1}{2\pi}\eta^{\mu\nu}\delta_{nm}. \tag{2.15}$$

Операторы

$$\bar{\alpha}_n^\mu = -\pi\bar{P}_n^\mu + \sum_m \bar{\gamma}_{mn}\bar{X}_m^\mu \tag{2.16}$$

(где $\bar{\gamma}_{nm}$ — константы, сопряженные γ_{nm}) являются коэффициентами разложения

$$(x')^{\mu} - \pi p^{\mu} = \sum_{n} \bar{\alpha}_n^{\mu} \overline{d\omega_n}(Q). \tag{2.17}$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям сопряженного Г-аналога алгебры Гейзенберга

$$[\bar{\alpha}_n^{\mu}, \bar{\alpha}_m^{\nu}] = \eta^{\mu\nu}\bar{\gamma}_{nm}. \tag{2.18}$$

Л е м м а 2.1. *Имеет место равенство*

$$[\alpha_n^{\nu}, \bar{\alpha}_m^{\mu}] = 0. \tag{2.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Раскладывая $\bar{A}_n$ и $\overline{d\omega_n}$ по базисам A_k и $d\omega_k$ соответственно, получим

$$X_k = \sum_{s} \bar{X}_s f_{sk}, \quad P_k = -\sum_{s} \bar{P}_s \bar{f}_{ks}, \tag{2.20}$$

где

$$f_{sk} = \frac{1}{2\pi i} \oint \bar{A}_s \, d\omega_k. \tag{2.21}$$

Отсюда

$$[\alpha_n^{\mu}, \bar{\alpha}_m^{\nu}] = \frac{1}{2} \sum (\bar{f}_{nl}\bar{\gamma}_{lm} - \gamma_{ln} f_{ml}) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{l} \left(\oint \bar{A}_l \overline{dA_m} \oint A_n \, d\bar{\omega}_l - \oint A_l dA_n \oint \bar{A}_m \, d\omega_l \right) =$$

$$= \frac{i}{4\pi} \oint (dA_n \bar{A}_m + \overline{dA_m} A_n) = 0. \tag{2.22}$$

При переходе к предпоследнему равенству мы воспользовались (2.4).

Операторы α_n^{μ} и $\bar{\alpha}_n^{\mu}$ с $n > g/2$ будут называться операторами уничтожения, а с $n \leqslant g/2$ — операторами рождения «in»-состояний. Стандартным образом можно ввести фоковское пространство, порожденное операторами рождения «in»-состояний из «вакуума», который определяется соотношениями

$$\alpha_n^{\mu} \mid \Phi^{in}\rangle = \bar{\alpha}_n^{\mu} \mid \Phi^{in}\rangle = 0, \quad n > g/2. \tag{2.23}$$

Заметим, что операторы уничтожения коммутируют между собой, поэтому условия (2.23) непротиворечивы.

Подпространства $\mathcal{A}_{\pm}$, порожденные A_n с $\pm n > g/2$, плотны среди функций, голоморфных в окрестностях точек $P_{\pm}$ соответственно. Поэтому определенное нами фоковское пространство in-состояний совпадает с обычным фоковским пространством, стандартно построенным по разложениям x^{μ} и p^{μ} в ряд Фурье на малом контуре, охватывающем точку P_+.

Аналогично, если фоковское пространство «out-состояний» определить, как пространство, порожденное операторами α_n^{μ}, $\bar{\alpha}_n^{\mu}$ с $n \geqslant -g/2$ из out-вакуума, удовлетворяющего условиям (2.24), то оно совпадет со стандартным фоковским пространством малого контура в окрестности точки P_-

$$\langle \Phi^{out} \mid \alpha_n^{\mu} = \langle \Phi^{out} \mid \bar{\alpha}_n^{\mu} = 0, \quad n < -g/2. \tag{2.24}$$

Из сделанного замечания вытекает, что все ограничения, связанные с требованиями положительности нормы физических состояний, замыканием лоренцовых соотношений и приводящие в случае $g = 0$ к выделению критической размерности $D = 26$ [5; 6], остаются полностью справедливыми и в рассматриваемом нами случае $g > 0$. Нашей дальнейшей целью является доказательство того, что при любом g возможно построение непротиворечивой теории при $D = 26$.

Для классической струны плотность Гамильтониана и импульса являются полусуммой и разностью выражений

$$T = \frac{1}{2}(x' + \pi p)^2, \quad \bar{T} = \frac{1}{2}(x' - \pi p)^2, \tag{2.25}$$

которые являются квадратичными дифференциалами на каждом контуре C_τ. Для того чтобы определить квантовые аналоги этих выражений, требуется ввести понятие нормального упорядочения операторов рождения и уничтожения. Так как операторы α_n^μ, α_m^ν с $|n|$, $|m| < g/2$ некоммутативны, то возможности введения таких неэквивалентных между собой понятий достаточно велики.

Пусть $\Sigma^\pm$ — разбиение множества целочисленных точек двумерной плоскости на два подмножества таких, что Σ^+ отличается на конечное множество точек от полуплоскости Σ_0^+: (n, m), $n \leqslant m$. Для любого такого допустимого разбиения $\Sigma^\pm$ определим понятие нормального произведения

$$:\alpha_n\alpha_m: = \alpha_n\alpha_m, \ (n, m) \in \Sigma^+; \ :\alpha_n\alpha_m: = \alpha_m\alpha_n, \quad (n, m) \in \Sigma^-. \tag{2.26}$$

Замечание. Это определение нормального произведения далеко не самое общее. В следующем параграфе нам потребуется его расширение (см. (3.24)). Поскольку α_n^μ, α_m^ν коммутируют при выполнении условий (1.4), то понятие нормального произведения зависит от разбиения на два подмножества не всей плоскости, а только полосы $|n + m| \leqslant g$. Основные примеры таких разбиений можно задавать с помощью наборов чисел $\sigma_{-g}, \ldots, \sigma_g$. При этом будем относить

$$(n, m) \in \Sigma^+, \text{ если } n + m = s, \ n \leqslant \sigma_s, \ s = -g, \ldots, g. \tag{2.27}$$

При любом выборе понятия нормального произведения определим квантовые операторы

$$\begin{aligned} T(Q) &= \frac{1}{2}\sum_{n,m} :\alpha_n\alpha_m: d\omega_n(Q)\, d\omega_m(Q), \\ \bar{T}(Q) &= \frac{1}{2}\sum_{n,m} :\bar{\alpha}_n\bar{\alpha}_m: \overline{d\omega_n}(Q)\, \overline{d\omega_m}(Q). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Здесь и далее $\alpha_n\alpha_m = \sum \eta^{\mu\nu}\alpha_n^\mu\alpha_m^\nu$.

Эти операторы являются квадратичными дифференциалами на C_τ. Поэтому их можно разложить по базисным квадратичным дифференциалам $d^2\Omega_n$, $\overline{d^2\Omega_n}$

$$T = \sum_k L_k\, d^2\Omega_k; \quad \bar{T} = \sum_k \bar{L}_k\, \overline{d^2\Omega_k}. \tag{2.29}$$

Из теоремы 1.2 следует формула

$$L_k = \frac{1}{2}\sum_{n,m} l_{nm}^k :\alpha_n\alpha_m:; \quad \bar{L}_k = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \bar{l}_{nm}^k :\bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_m:, \tag{2.30}$$

где константы l_{nm}^k имеют вид

$$l_{nm}^k = \frac{1}{2\pi i}\oint e_k\, d\omega_n\, d\omega_m. \tag{2.31}$$

При этом для $|k| > g_0$ имеем

$$l_{nm}^k = 0, \quad \text{если} \quad |n + m - k| > \frac{g}{2}. \tag{2.32}$$

Для $|k| \leqslant g_0$ индексы n, m, для которых могут быть отличны от нуля константы l_{nm}^k, удовлетворяют тому же соотношению (2.32), при $|n|, |m| > \frac{g}{2}$, и соотношению $|n+m-k| \leqslant g+s$, если одно или два из чисел $|n|$, $|m|$ не превосходят $g/2$. Здесь s равно 1, 2 соответственно. В любом случае из определения нормального произведения и (2.32) следует, что действие операторов L_k и $\bar{L}_k$ корректно определено в фоковских пространствах «in»- и «out»-состояний. В силу (2.32) и (1.4) операторы L_k, $\bar{L}_k$ с $|k| > g_0$ не зависят от выбора нормального упорядочения и при этом

$$L_k \mid \Phi^{\text{in}} \rangle = 0 = \langle \Phi^{\text{out}} \mid L_{-k}, \ k > g_0. \tag{2.33}$$

Теорема 2.1. *Операторы L_k удовлетворяют коммутационным соотношениям*

$$L_i L_j - L_j L_i = \sum_{k=-g_0}^{g_0} c_{ji}^k L_{i+j-k} + D \cdot \chi_{ij}^{\Sigma} \cdot 1. \tag{2.34}$$

Здесь D — размерность пространства, а 2-коцикл χ_{ij}^{Σ} имеет вид (1.26), *где проективная связность R зависит лишь от способа нормального упорядочения и не зависит от D.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$[L_i, L_j] = \frac{1}{4} \sum_{n, m, k, s} l_{nm}^i l_{ks}^j (\gamma_{mk} :\alpha_n \alpha_s: + \gamma_{ns} :\alpha_k \alpha_m: +$$

$$+ \gamma_{ms} :\alpha_n \alpha_k: + \gamma_{nk} :\alpha_s \alpha_m: + D \cdot \tilde{F}_{nmks}) = \frac{1}{2} \sum_{n, s} f_{ns}^{ij} :\alpha_n \alpha_s: + D\chi_{ij}^{\Sigma}, \tag{2.35}$$

где

$$f_{ns}^{ij} = \sum_{m, k} (l_{nm}^i l_{ks}^j - l_{ks}^i l_{nm}^j) \gamma_{mk}. \tag{2.36}$$

При этом

$$\chi_{ij}^{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{n, m, k, s} l_{nm}^i l_{ks}^j F_{nmks}. \tag{2.37}$$

Здесь

$$F_{nmks} = 0, \qquad (n, s) \in \Sigma^{\pm}, \ (k, m) \in \Sigma^{\pm},$$

$$F_{nmks} = \gamma_{ns}\gamma_{km}, \quad (n, s) \in \Sigma^{+}, \ (k, m) \in \Sigma^{-}, \tag{2.38}$$

$$F_{nmks} = \gamma_{ns}\gamma_{mk}, \quad (n, s) \in \Sigma^{-}, \ (k, m) \in \Sigma^{+}. \tag{2.39}$$

Из (1.4), (1.5) и (2.32) следует, что сумма (2.37) содержит лишь конечное число ненулевых членов. Поэтому она корректно определена.

В силу определений (1.3), (2.31) имеем

$$\sum_{m, k} l_{nm}^i l_{ks}^j \gamma_{mk} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \sum_{m, k} \oint (d\omega_n \, d\omega_m e_i) \oint (d\omega_k \, d\omega_s e_j) \oint A_k \, dA_m =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{k} \oint d\omega_k \, d\omega_s e_j \oint d\,(d\omega_n e_i) \, A_k. \tag{2.40}$$

Для получения последнего равенства достаточно при взятии первого интеграла и суммы по m воспользоваться равенством (2.4). Аналогично из (2.40) получим

$$\sum_{m, k} l_{nm}^i l_{ks}^j \gamma_{mk} = \frac{1}{2\pi i} \oint (d\omega_s e_j) \, d\,(d\omega_n e_i). \tag{2.41}$$

Следовательно,

$$f_{ns}^{ij} = \frac{1}{2\pi i} \oint d\omega_n \, d\omega_s \, ([e_j, e_i]) = \sum_{k=-g_0}^{g_0} c_{ji}^k l_{ns}^{i+j-k} \tag{2.42}$$

и равенство (2.34) доказано. Непосредственно из (2.39) следует, что коцикл χ_{ij}^{Σ} является локальным. Теорема доказана.

В настоящее время авторами еще не получен полный ответ на важный и интересный вопрос о явном вычислении для всех способов нормального упорядочения соответствующих проективных связностей R_{Σ}. В заключение параграфа мы приведем выражение в терминах интегралов типа Коши для коцикла χ_{ij}^{Σ} в случае нормального упорядочения, задаваемого разбиением Σ следующего вида:

$$(n, m) \in \Sigma^{-},\ n > N,\ m < N. \tag{2.43}$$

Определим для этого необходимый класс мероморфных аналогов ядер Коши, которые являются частными случаями общих ядер подобного типа [7].

Обозначим для любого целого или полуцелого (в зависимости от четности g) N, $|N| > g/2$, через $K_N(z_1, z_2)dz_2$ мероморфный аналог ядра Коши, который является дифференциалом по переменной z_2, имеющим в окрестностях $P_{\pm}$ вид

$$K_N(z_1, z_2)dz_2 = z_2^{-N+g/2-1}O(1)dz_2,\ z_2 \to P_{+}, \tag{2.44}$$

$$K_N(z_1, z_2)dz_2 = z_2^{N+g/2}O(1)dz_2,\ z_2 \to P_{-}. \tag{2.45}$$

По переменной z_1 ядро K_N является мероморфной функцией, имеющей в окрестностях $P_{\pm}$ вид

$$K_N = z_1^{N+1-g/2}O(1),\quad z_1 \to P_{+}, \tag{2.46}$$

$$K_N = z_1^{-N-g/2}O(1),\quad z_2 \to P_{-}. \tag{2.47}$$

Вне $P_{\pm}$ ядро K_N голоморфно всюду кроме $z_1 = z_2$. При этом

$$K_N(z_1, z_2)\,dz_2 = \frac{dz_2}{z_2 - z_1} + \text{регулярные члены}. \tag{2.48}$$

Указанные свойства (в силу тех же аргументов, которые уже неоднократно использовались) однозначно определяют K_N.

Пример. Приведем явную формулу для $K_N(z_1, z_2)$ в случае $g = 1$, $P_{\pm}$: $z = \pm z_0$:

$$K_N(z_1, z_2) = \frac{\sigma^{N+1/2}(z_1 - z_0)\,\sigma^{N+1/2}(z_2 + z_0)\,\sigma(z_1 - z_2 + (2N+1)z_0)}{\sigma((2N+1)z_0)\,\sigma(z_2 - z_1)\,\sigma^{N+1/2}(z_1 + z_0)\,\sigma^{N+1/2}(z_2 - z_0)}. \tag{2.49}$$

(При $g > 1$ аналогичные выражения могут быть получены в терминах тэта-функций Римана).

Лемма 2.2. *Если* $\tau(z_1) < \tau(z_2)$, *то*

$$K_N(z_1, z_2)\,dz_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n(z_1)\,d\omega_n(z_2). \tag{2.50}$$

При $\tau(z_1) > \tau(z_2)$ *имеем*

$$K_N(z_1, z_2)\,dz_2 = -\sum_{n=-\infty}^{N} A_n(z_1)\,d\omega_n(z_2). \tag{2.51}$$

Приведем лишь краткий набросок доказательства. Сходимость правых частей равенств (2.50) и (2.51) следует, поскольку члены ряда мажорируются членами геометрической прогрессии $Me^{n(\tau(z_1)-\tau(z_2))}$. Из (2.4) следует, что (2.50) и (2.51) являются аналитическими продолжениями друг друга и определяют глобальный аналог ядра Коши K_N. Его поведение в окрестностях $P_{\pm}$ легко определить, воспользовавшись асимптотическим видом A_n и $d\omega_n$.

Отметим, что формулы (2.50) и (2.51) определяют K_N для всех N. Асимптотики K_N для $|N| \leqslant g/2$ незначительно отличаются от (2.44)—(2.47) подобно тому, как отличаются асимптотики A_n и $d\omega_n$ при $|n| \leqslant g/2$ от общего случая.

Из (2.37), (1.4) и (2.32) следует, что коцикл χ_{ij}^{Σ}, отвечающий разбиению (2.43), равен

$$\chi_{ij}^{\Sigma} = \frac{1}{32\pi^4} (\lambda_{ij}^N - \lambda_{ji}^N), \tag{2.52}$$

где

$$\lambda_{ij}^N = \sum \oint d\omega_n \, d\omega_m \, e_i \oint d\omega_k \, d\omega_s e_j \oint dA_n A_s \oint dA_k A_m. \tag{2.53}$$

Суммирование в (2.53) идет по $n \leqslant N$, $s > -N$, $k > N$, $m \leqslant N$. Выберем контуры интегрирования в (2.53) так, чтобы соответствующие переменные z_1, z_2, z_3, z_4 удовлетворяли условиям $\tau(z_1) < \tau(z_3) \leqslant \tau(z_4) < \tau(z_2)$. Тогда из леммы 2.2 следует

$$\lambda_{ij}^N = \oint\oint\oint\oint dz_1 \, dz_2 \, dz_3 \, dz_4 \, [e_i(z_1) \, e_j(z_2) \, K_N(z_4, z_1) \, K_{-N}(z_3, z_2) \times \\ \times (d_3 K_N(z_3, z_1)) \, (d_4 K_N(z_4, z_2))]. \tag{2.54}$$

Здесь d_3 и d_4 означают дифференцирования по переменным z_3 и z_4 соответственно. Стягивая контуры C_{τ_3} и C_{τ_4} к точкам $P_{\pm}$, можно получить выражение вида (1.26), где соответствующая проективная связность является линейной комбинацией первых коэффициентов разложений $K_{\pm N}$ в окрестности диагонали $z_1 = z_2$.

§ 3. Операторная реализация многопетлевых струнных диаграмм и конформные аномалии

Как уже говорилось выше, фоковские пространства «in»- и «out»-состояний совпадают с фоковскими пространствами, соответствующими малым контурам в окрестностях точек $P_{\pm}$, соответственно. Поэтому физические состояния в случае произвольного g определяются условиями

$$L_i | \Phi_{h_+}^{\text{in}} \rangle = 0, \quad i > g_0; \qquad L_{g_0} | \Phi_{h_+}^{\text{in}} \rangle = h_+ | \Phi_{h_+}^{\text{in}} \rangle, \tag{3.1}$$

$$\langle \Phi_{h_-}^{\text{out}} | L_i = 0, \quad i < -g_0; \quad \langle \Phi_{h_-}^{\text{out}} | L_{-g_0} = \langle \Phi_{h_-}^{\text{out}} | h_-, \tag{3.2}$$

где константы $h_{\pm}$ равны

$$h_+ = 1, \qquad h_- = \varepsilon_{-g_0}^-. \tag{3.3}$$

(Напомним, что в окрестности P_- поле e_{-g_0} имеет вид $\varepsilon_{-g_0}^- z \frac{\partial}{\partial z}$.) Действия операторов L_i с $i \geqslant g_0$ на $|\Phi_{h_+}^{\text{in}}\rangle$ и L_i с $i \geqslant -g_0$ на $\langle \Phi_{h_-}^{\text{out}}|$ порождают подпространства $V_{h_+}^{\text{in}}$, $V_{h_-}^{\text{out}}$. Как следует из (2.34), соответствия $E_i \to L_i$ и $E_i \to -L_i$ определяют представления аналога алгебры Вирасоро на $V_{h_-}^{\text{out}}$ и $V_{h_+}^{\text{in}}$ соответственно. При этом, эти пространства являются модулями Верма над $\mathcal{L}^{\Gamma}$. Нашей ближайшей целью будет построение скалярных произведений между элементами таких пространств

$$\langle \Phi | \Psi \rangle, \ \Phi \in V_{h_-}^{\text{out}}, \ \Psi \in V_{h_+}^{\text{in}} \tag{3.4}$$

таким образом, чтобы относительно этого произведения операторы L_i были самосопряженными, т. е.

$$\langle \Phi \mid L_i \mid \Psi \rangle = \langle \Phi L_i \mid \Psi \rangle = \langle \Phi \mid L_i \Psi \rangle. \tag{3.5}$$

Для этого нам потребуется реализация модулей Верма аналога алгебры Вирасоро, предложенная в [1] и обобщающая соответствующую конструкцию [8] для случая $g = 0$.

В [1] были определены базисы f_j в пространствах $F_\lambda(x_0)$ тензорных полей веса λ, которые голоморфны на Γ вне точек $P_\pm$ и контура σ, соединяющего эти точки. При этом предельные значения на σ любого поля $f \in F_\lambda(x_0)$ связаны соотношением

$$f^+ = f^- e^{2\pi i x_0}. \tag{3.6}$$

В [1] было показано, что действие e_i на f_j имеет вид

$$e_i f_j = \sum_{k=-g_0}^{g_0} R_{ij}^k f_{i+j-k}, \tag{3.7}$$

где R_{ij}^k — константы. В частности,

$$R_{ij}^{\pm g_0} = (\pm j \pm x_0 - S(\lambda) + \lambda(\pm i - g_0 + 1)) \frac{\varphi_j^\pm \varepsilon_i^\pm}{\varphi_{i+j\mp g_0}^\pm}. \tag{3.8}$$

Здесь $\varphi_j^\pm$ — константы, определяемые видом f_j в окрестностях $P_\pm$ (подробности см. в [1]), а

$$S(\lambda) = g/2 - \lambda(g-1) \tag{3.9}$$

(отметим, что по недосмотру авторов соответствующая формула (2.2) в работе [1] приведена с опечаткой).

Обозначим через $H_{\lambda, N}(x_0)$ пространство, порожденное базисом, состоящим из полубесконечных форм — внешних произведений вида

$$f_{i_1+N} \wedge f_{i_2+N} \wedge \ldots \wedge f_{i_{m-1}+N} \wedge f_{m+N} \wedge f_{m+1+N} \wedge \ldots, \tag{3.10}$$
$$i_1 < i_2 < \ldots < i_{m-1} < m,$$

где индексы полей f, начиная с некоторого номера, пробегают все значения подряд до ∞.

Если определить действие e_i на формах (3.10) по правилу Лейбница, то из (3.7) следует, что это действие корректно определено при $|i| > g_0$. Для любого коцикла χ_{ij}, задающего локальное центральное расширение $\mathcal{L}^\Gamma$, существует единственное продолжение действий e_i с $|i| > g_0$ до представления алгебры $\widehat{\mathcal{L}}^\Gamma$. Условимся нормировать коциклы так, что они имеют вид (1.27) с $\hat{c} = 1$. Тогда оператор t действует на $H_{\lambda, N}(x_0)$ умножением на число

$$D = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1), \tag{3.11}$$

называемое «центральным зарядом». Вектор

$$|\Psi_0\rangle = f_{N+1} \wedge f_{N+2} \wedge f_{N+3} \wedge \ldots \tag{3.12}$$

удовлетворяет условиям

$$E_i |\Psi_0\rangle = 0, \ i > g_0; \ E_{g_0} |\Psi_0\rangle = -h_+ |\Psi_0\rangle. \tag{3.13}$$

Старший вес $\tilde{h}_+$ зависит от x_0, λ и выбора коцикла χ_{ij}. Если соответствующая проективная связность R имеет в окрестности $P_\pm$ вид

$$R = \rho^\pm z_\pm^{-2}(1 + O(z_\pm)), \tag{3.14}$$

то

$$\chi_{i, -i\pm 3g} = \frac{(i \mp g_0)^3 - (i \mp g_0) - 2\rho \pm (i \mp g_0)}{12} \varepsilon_i^\pm \varepsilon_{-i\pm 3g}^\pm. \tag{3.15}$$

Вычисляя действие $[L_i, L_{-i+3g}]$ на $|\Psi_0\rangle$ с помощью (3.8) и используя (1.19) и (3.15), получим формулу (см. примечание)

$$h_+ = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{6}\rho_+ + (N - S(\lambda) + x_0 + 1)(2\lambda + N + x_0 - S(\lambda))\right). \tag{3.16}$$

Действие операторов L_i на $V_{h_-}^{\text{out}}$ определяет модуль Верма, порожденный вектором $\langle\Phi_{h_-}^{\text{out}}|$, аннулируемым e_i с $i < -g_0$. Такой модуль можно реализовать, определив действие e_i на левых полубесконечных формах. Однако нам будет нужна его реализация иного вида. Обозначим через $H_{\lambda, N}(x_0)$ пространство, порожденное формами

$$f_{j_1+N}^+ \wedge f_{j_2+N}^+ \wedge \ldots \wedge f_{j_{m-1}+N}^+ \wedge f_{m+N}^+ \wedge f_{m+1+N}^+ \wedge \ldots \tag{3.17}$$

Здесь f_j^+ — элементы пространства $F_{1-\lambda}(-x_0)$, однозначно с точностью до пропорциональности определяемые своим асимптотическим видом в окрестностях $P_\pm$

$$f_j^+ = z^{\mp j \mp x_0 - S(\lambda)+1} O(z_\pm)(dz)^{1-\lambda}. \tag{3.18}$$

Соответствующие константы однозначно можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f_n f_m^+ = \delta_{nm}. \tag{3.19}$$

Отсюда следует, что действие e_i на f_j^+ равно

$$e_i f_j^+ = -\sum_{k=-g_0}^{g_0} R_{i,\, j-i+k}^k f_{j-i+k}^+. \tag{3.20}$$

Так же, как и в предшествующем случае, можно определить действия e_i на $H_{\lambda, N}^+(x_0)$. При этом вектор

$$\langle\Phi_0| = f_{N+1}^+ \wedge f_{N+2}^+ \wedge \ldots \tag{3.21}$$

удовлетворяет условиям

$$\langle\Phi_0|E_i = 0,\ i < -g_0,\ \langle\Phi_0|E_{-g_0} = \langle\Phi_0|h_-.$$

Соответствующее представление $\hat{\mathscr{L}}^\Gamma$ имеет тот же центральный заряд (3.11), а старший вес h_- дается формулой

$$h_- = \frac{\varepsilon_{-g_0}^-}{2}\left(\frac{D}{6}\rho_- + (S(\lambda) + N + x_0)(S(\lambda) + N + x_0 + 1 - 2\lambda)\right). \tag{3.22}$$

Определим скалярное произведение между элементами $H_{\lambda, N}(x_0)$ и $H_{\lambda, N}^+(x_0)$, задав его на базисных элементах (3.10) и (3.17)

$$\langle j_1, \ldots, j_{m-1} | i_1, \ldots, i_{m-1}\rangle = \delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2} \ldots \delta_{j_{m-1} i_{m-1}} \tag{3.23}$$

и продолжив на остальные по линейности. Относительно этого произведения операторы E_i являются, как следует из (3.20), кососимметрическими. Произведение между $H_{\lambda, N}(x_0)$ и $H_{\lambda, N}^+(x_0)$ определяет произведение между $V_{h_+}^{\text{in}}$ и $V_{h_-}^{\text{out}}$, причем операторы L_i являются относительно этого произведения самосопряженными. Важно отметить, что мы определили нетривиальное скалярное произведение между пространствами, соответствующими значениям старших весов h_+, h_-, которые дают формулы (3.16) и (3.22). Для каждого фиксированного способа нормального упорядочения множество таких допустимых пар h_+, h_- однопараметрическое. Поэтому естественно возникает вопрос, а могут ли h_+, h_- принимать одновременно значения (3.3).

По-видимому, если ограничиваться лишь нормальными упорядочиваниями, введенными в § 2, то ответ на этот вопрос отрицателен. Расширим это понятие, определив

$$:\alpha_n \alpha_m: = \alpha_n \alpha_m + \tilde{\gamma}_{mn}. \tag{3.24}$$

Здесь $\tilde{\gamma}_{mn}$ — произвольные константы, равные нулю для всех, кроме конечного числа, точек полуплоскости $n \leqslant m$ и равные γ_{mn} для всех, кроме конечного числа, точек полуплоскости $n > m$. Случаю (2.26) отвечают $\tilde{\gamma}_{mn} = 0$, $(n, m) \in \Sigma^+$, $\tilde{\gamma}_{mn} = \gamma_{mn}$ $(n, m) \in \Sigma^-$.

Варьируя расширенное понятие нормального упорядочивания, можно реализовать произвольный коцикл χ_{nm}. В частности, параметры $\rho_\pm$ в (3.16) и (3.22) можно считать произвольными.

Введенное скалярное произведение позволяет определить для любого оператора из ассоциативного кольца, порожденного операторами L_i, понятие его среднего

$$\langle L_{i_1} \dots L_{i_k} \rangle_{x_0} = \langle \Phi_{h_-}^{\text{out}} | L_{i_1} \dots L_{i_k} | \Phi_{h_+}^{\text{in}} \rangle \tag{3.25}$$

(индекс x_0 мы используем для того, чтобы напомнить, что допустимые пары h_+, h_- параметризуются с помощью x_0).

По определению средние $\langle L_i \rangle_{x_0}$ равны нулю при $|i| > g_0$. Средние же

$$S_i = \langle L_i \rangle_{x_0}, \quad i = -g_0, \dots, g_0 \tag{3.26}$$

являются априори нетривиальными величинами. Поскольку эти средние являются коэффициентами разложения среднего от тензора энергии-импульса, то эти величины отвечают за так называемую конформную аномалию, при которой $\langle T(z) \rangle \neq 0$.

К сожалению, ограниченность объема статьи не позволяет достаточно подробно привести вычисления даже для простейшего после $\langle L_{\pm g_0} \rangle = h_\pm$ случая среднего $\langle L_{g_0 - 1} \rangle_{x_0}$. Укажем лишь некоторые наиболее существенные моменты.

Имеем

$$\langle L_i L_{-i+3g-1} \rangle = \sum_{n=N+1}^{N+i-g_0+1} R_{i,\, n-i+g_0-1}^{g_0-1} R_{-i+3g-1,\, n}^{g_0} + \sum_{n=N+1}^{N+i-g_0} R_{i,\, n-i+g_0}^{g_0} R_{-i+3g-1,\, n}^{g_0-1}. \tag{3.27}$$

Здесь $R_{ij}^{g_0}$ дается формулой (3.8), а для получения $R_{ij}^{g_0-1}$ достаточно приравнять коэффициенты при z^{i+j-g_0-S+1} в формуле (3.7). Обозначим через $\varphi_{j,\lambda}$ коэффициент разложения $(z \to P_+)$

$$f_j = z^{j-S(\lambda)+x_0} (1 + \varphi_{j,\lambda} z + O(z^2))(dz)^\lambda. \tag{3.28}$$

Тогда

$$R_{ij}^{g_0-1} = (j - S(\lambda) + x_0 + \lambda(i - g_0 + 1))(\varphi_{i,-1} + \varphi_{j,\lambda} - \varphi_{i+j-g_0,\lambda}) + \varphi_{j,\lambda} + \lambda\varphi_{i,-1}. \tag{3.29}$$

Дальнейшие непосредственные вычисления приводят к равенству $(I = i - g_0)$

$$\langle L_i L_{-i+3g-1} \rangle = \varphi_{i,-1}\left(D\,\frac{I(I+1)(I+2)}{12} + (2I+1)h_+\right) + \varphi_{-i+3g-1}\left(D\,\frac{I^3 - I}{12} + 2Ih_+\right) + (N - S(\lambda) + x_0 + 1)(2I+1)\varphi_{N,\lambda}. \tag{3.30}$$

Из (2.34) вытекает

$$\langle L_i L_{-i+3g-1} \rangle = (2I+1)\langle L_{g_0-1} \rangle + c_{-i+3g-1,\, i}^{g_0-1} h_+ + D\chi_{i,\, -i+3g-1}^{\Sigma}. \tag{3.31}$$

При вычислении коцикла $\chi_{i,-i+3g-1}$ необходимо, кроме его определения, воспользоваться соотношениями

$$l_{n,\, i-n-9/2}^i = 1, \qquad l_{n,\, i-n-9/2-1} = \varphi_{n,1} + \varphi_{i-n-9/2,\, 1} + \varphi_{i,-1}, \tag{3.32}$$

$$\gamma_{n,\, g-n} = n - 9/2, \quad \gamma_{n,\, g-n-1} = (n - 9/2)\varphi_{g-n-1,\, 0} + (n - 9/2 + 1)\varphi_{n,0}, \tag{3.33}$$

которые являются просто следствиями определений величин l_{nm}^i и γ_{nm}. Из равенства (1.10) при $m = n + 1$ следует

$$\varphi_{n,0} + \varphi_{n+1,1} = 0. \tag{3.34}$$

Воспользовавшись этим равенством, можно получить, что при $\sigma_g = g/2$ (в этом случае $\rho_+ = 0$) и $\sigma_{g-1} = g/2 + 1$

$$\chi^{\Sigma}_{i,\,-i+3g-1} = \frac{I\,(I+1)\,(I+2)}{12}\,\varphi_{i,\,-1} + \frac{I^3 - I}{12}\,\varphi_{-i+3g-1,\,-1}. \tag{3.35}$$

Подстановка (3.35) в (3.31) дает ($c^{g_0-1}_{i,\,j}$ дается (3.29) при $\lambda = -1$)

$$\langle L_{g_0-1}\rangle_{x_0} = h_+\varphi_{g_0-1,\,-1} + (N - S\,(\lambda) + x_0 + 1)\varphi_{N,\,\lambda}. \tag{3.36}$$

Пример ($g = 1$). В этом случае $\varphi_{g_0-1,\,-1} = 0$, а $\varphi_{N,\,\lambda}$ легко получить, разлагая формулу (5.2) работы [1],

$$\varphi_{N,\,\lambda} = \zeta\,(((2N + x_0) + 1)z_0) - (N + x_0 + 1/2)\zeta\,(2z_0). \tag{3.37}$$

Уже на этом примере видно, что прямое вычисление средних $\langle L_i\rangle$ весьма громоздко. Авторы предполагают в последующей публикации привести инвариантный способ вывода этих средних в рамках построения моделей конформной теории поля на произвольных римановых поверхностях рода $g > 0$.

Примечание. Важно отметить, что физическим значениям $D > 1$ соответствуют комплексные значения λ. В частности, при $D = 26$, $h = 1$ $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{5i}{2\sqrt{3}}$, $\mu = N + x_0 + g/2\,(2\lambda - 1) = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2\sqrt{3}}$. Любопытно, что при $\lambda = 2$ и $\mu = 0$ получаем нефизическую ситуацию $D = -26$, $h = -1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов // Функцион. анализ и его прил.— 1987. Т. 21, вып. 2.— С. 46—63.
2. *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности // Функцион. анализ и его прил.— 1968. Т. 2, вып. 4.— С. 92—93.
3. *Schottky F.* Über eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt // J. Reine Angew. Math.— 1887. Bd. 101.— P. 227—272.
4. *Schiffer M., Hawley N.* Half — order differentials on Riemann surfaces // Acta Math.— 1966. V. 115 — P. 199—236.
5. *Shwartz J.* Superstring theory // Phys. Rep.— 1982. V. 89.— P. 223—322.
6. *Thorn C.* A detailed Study of the Physical State Conditions in covariantly Quantized String Theories. Preprint Inst. for Theor. Phys. University of California, 1986.
7. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций // УМН.— 1971. Т. 26. вып. 1.— С. 113—181.
8. *Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.* Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро // Функцион. анализ и его прил.— 1982. Т. 16, вып. 2.— С. 47—63.

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау

Поступило в редакцию
26 мая 1987 г.