

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Авилов, И. М. Кричевер, С. П. Новиков,
Эволюция итемовской зоны в теории Кортвега–
де Фриса, *Докл. АН СССР*, 1987, том 295, но-
мер 2, 345–349

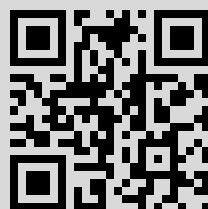
Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 138.86.44.163

31 мая 2022 г., 02:48:01



В.В. АВИЛОВ, И.М. КРИЧЕВЕР, академик С.П. НОВИКОВ

ЭВОЛЮЦИЯ УИТЕМОВСКОЙ ЗОНЫ В ТЕОРИИ КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИСА

Влияние вязкости. Рассмотрим уравнение Кортевега—де Фриса — Бюргерса (КдФБ) с малой вязкостью $\mu > 0$:

$$(1) \quad u_t + u_{xxx} + uu_x + \mu u_{xx} = 0, \quad |\mu u_{xx}| \ll |u_{xxx}|, |uu_x|.$$

При условиях (1) эволюция осцилляционной зоны описывается в рамках метода усреднения Боголюбова—Уитема, используя семейство кноидальных бегущих волн уравнения КдФ. Усреднение вязкого члена по этому семейству дополнительно приводит к правой части

$$(2) \quad \frac{\partial r_\alpha}{\partial t} + v_\alpha(r) \frac{\partial r_\alpha}{\partial x} = \mu g_\alpha(r), \quad \alpha = 1, 2, 3;$$

$$(3) \quad g_\alpha(r) = -\frac{4(r_2 - r_1)^2 Q(s)}{3\Phi_\alpha}, \quad \Phi_1 = E - K, \quad \Phi_2 = E - (1 - s^2)K,$$

$$\Phi_3 = E,$$

$$0 < Q = \frac{4}{15} \left[\frac{E - K}{s^4} + \frac{-E + 3K/2}{s^2} + E - \frac{K}{2} \right],$$

$$s^2 = (r_2 - r_1)/(r_3 - r_1),$$

$E(s)$ и $K(s)$ — полные эллиптические интегралы (см. [2]), формулы для v_α (см. [1, стр. 264]). Отметим свойства

$$(4) \quad g_1 \leq 0, \quad g_2 \geq 0, \quad g_3 > 0, \quad g(\lambda r) = \lambda^2 g(r);$$

$$(5) \quad v_1 \leq v_2 \leq v_3, \quad r_1 \leq r_2 \leq r_3, \quad v(\lambda r) = \lambda v(r).$$

Настоящая работа посвящена численному исследованию эволюции осцилляционной зоны в процессе "распада ступеньки" при наличии малой вязкости. Граничные условия для уравнения КдФБ (1) таковы:

$$u \rightarrow A_\pm, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Согласно представлениям, развитым в [3, 4], для $\mu = 0$ этот процесс описывается с помощью уравнения Уитема внутри осцилляционной зоны $\Delta(t) = [x^-(t), x^+(t)]$, сшитого с тривиальным уравнением Хопфа $u_t + uu_x = 0$ на ее границах x^\pm . В частности, имеем (см. также (12), (13) ниже)

$$(6) \quad \begin{aligned} u(x^-, t) &= r_3(x^-, t), & u(x^+, t) &= r_1(x^+, t), \\ r_1(x^-, t) &= r_2(x^-, t), & r_3(x^+, t) &= r_2(x^+, t). \end{aligned}$$

Таким образом, для $\mu = 0$ процесс описывался эволюцией многозначной функции $r(x, t)$, где $r = u$ вне Δ и $r = \{r_\alpha\}$ внутри Δ . Это отличает круг задач, возникших из дисперсной гидродинамики, от классического случая.

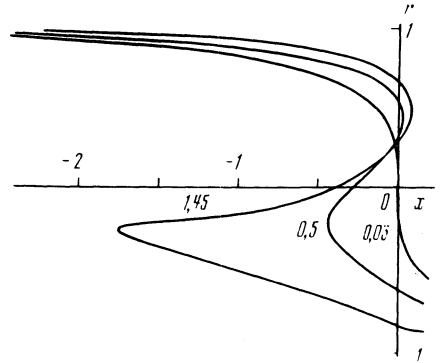
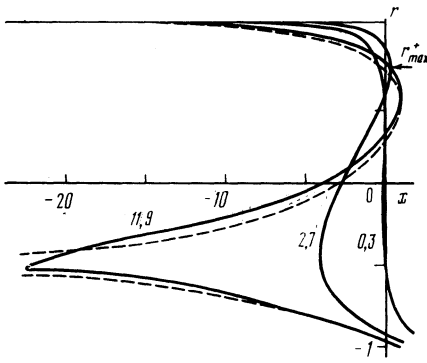


Рис. 1. Эволюция многозначной функции $r(x, t)$ при $\mu = 0,1$. Штриховой кривой показано стационарное решение. Здесь и на рис. 2, 4 цифры у кривых обозначают время

Рис. 2. Эволюция $r(x, t)$ при $\mu = 1$

Уравнение (1) обладает стационарным решением $u(\eta) = u(x - Vt, \mu)$ таким, что

$$(7) \quad u \rightarrow A_{\pm}, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

При этом если вязкость мала согласно (1), то решение $u(x - Vt, \mu)$ бесконечно осциллирует с затухающей амплитудой для $x \rightarrow -\infty$ и стремится к солитону на переднем фронте $x > x^+$. При $\mu = 0$ уравнение для $u(x - Vt)$ имеет вид $u''(\eta) = \dots$. Его правая часть на фазовой плоскости (u, u') имеет две особые точки (центр и седло), отвечающие константам A_{\pm} . Сепаратриса седла замкнута и соответствует солитону; она содержит центр внутри себя. При фиксированных A_{\pm} для $\mu = 0$ имеем семейство периодических решений внутри сепаратрисы

$$(8) \quad u(x, t) = \frac{2a}{s^2} \operatorname{dn}^2 \left[\left(\frac{a}{6s^2} \right)^{1/2} (x - Vt), s \right] + \gamma,$$

где $a = r_2 - r_1$, $\gamma = r_2 + r_1 - r_3$,

$$(9) \quad 3A_+A_- = 4r_1r_2 - (r_3 - r_2 - r_1)^2, \quad A_- + A_+ = \frac{2}{3} (r_1 + r_2 + r_3) = 2V.$$

При малом $\mu > 0$ найдется решение $u(x - Vt, \mu)$ с асимптотикой (7), изображаемое спиралью на той же фазовой плоскости, ведущей из центра в седло; параметры r_{α} медленно меняются при изменении x ; величина A_{\pm} постоянны по своему смыслу вдоль этого решения:

$$(10) \quad \frac{dA_{\pm}}{dx} = 0.$$

Усредняя решение $u(x - Vt, \mu)$ по циклам (8), получим точное стационарное решение $r_{\alpha}(x - Vt, \mu)$ уравнения (2), где следующие величины постоянны:

$$(11) \quad 3V = \sum_{\alpha} r_{\alpha} = \frac{3}{2} (A_+ + A_-) = \text{const}, \quad A_+A_- = \text{const}.$$

Решение со свойством (11) находится одной квадратурой. График его приведен на рис. 1 (штриховая кривая). Если $A_{\pm} = \mp 1$, то $V = 0$, передний фронт $r_2(x^+) = r_3(x^+)$ находится в конечной точке x^+ , где $r_2^+ = r_3^+ = 1/2$, а задний фронт $r_1 = r_2$

находится при $x = -\infty$, где $r_1^- = r_2^- = -\frac{1}{2}$. К этой ситуации можно свести общий случай изменением масштабов и преобразованием Галилея: $x \rightarrow x + Ct$, $r_\alpha \rightarrow r_\alpha + 0$, $v_\alpha \rightarrow v_\alpha + C$.

Довольно ясно, что эволюционный процесс многозначной функции $r(x, t)$ при наличии вязкости $\mu > 0$, если вообще он корректно определен для данного начального условия (в частности, не встречается гидродинамического типа опрокидываний), за достаточно большое время $t \rightarrow \infty$ выведет при граничных условиях (7) на стационарное решение, описанное выше (11).

В работе [4] дано при $\mu = 0$ точное определение эволюции многозначных начальных условий $r(x, t)$, включая эволюцию области $\Delta(t)$, и дана численная реализация этого процесса. Здесь мы развиваем подход [4] на случай $\mu \neq 0$. Как и в [4], многозначная функция $r(x, t)$ с условиями (6) должна быть один раз гладкой (класса C^1), в том числе в точках x^\pm, r^\pm . Вблизи концов x^\pm, r^\pm интервала $\Delta(t)$ требуется выполнение асимптотик, аналогичных асимптотикам (10), (11) из [4]:

$$(12) \quad x'' = (a_+ + b_+(r - r^+))f(1 - s^2) + O((r - r^+)^3),$$

$$x'' = x - x^+ \leq 0, \quad f(y) = y^2 [\ln(16/y) + \frac{1}{2}];$$

$$(13) \quad x' = a_-(r - r^-)^2 + b_-(r - r^-)^3 + o((r - r^-)^3), \quad x' = x - x^- \geq 0.$$

Для величин $r^\pm(t), x^\pm(t)$ из (12), (13) следуют уравнения

$$(14) \quad \dot{r}^+ = -(r^+ - r_1^+)^2 [(12a_+)^{-1} + 16/45], \quad \dot{x}^+ = v^+ = (r_1^+ + 2r^+)/3;$$

$$(15) \quad \dot{r}^- = -1/(2a_-), \quad \dot{x}^- = 2r^- - r_3^-.$$

Сопоставление с (12), (13) из [4] показывает, что наличие вязкости меняет только уравнение для r^+ . При $t \rightarrow \infty$ величина a_+ имеет конечный предел $a_\infty^+ \neq \infty$ в отличие от случая $\mu = 0$. Внутри интервала $\Delta(t)$ действует уравнение (2), вне — уравнение $u_t + uu_x = 0$ для $u = r$. Геометрия трех семейств характеристик для величин $r_\alpha(x, t)$ такая же, как и в [4], в том числе около границ зоны $(x^\pm(t), t)$ в (x, t) -плоскости. Однако значение r_α не сохраняется вдоль характеристик, что ведет к определенным численным осложнениям. Выбор начального условия при $t = t_0 > 0$ таков: в области $\Delta(t_0)$ берется автоматическое решение Гуревича—Питаевского (ГП) [1, стр. 275–284] для опрокидывания фронта дисперсной ударной волны при условиях $r_3^- < A_-$, $r_1^+ > A_+$. Вне зоны $\Delta(t_0)$ берется функция $r(x, t_0) = u(x)$, выходящая плавно и монотонно на значения A_\pm при $x \rightarrow \pm\infty$ с условиями (12), (13) и (6).

Обсудим теперь ограничения на начальные условия, вытекающие из нашей схемы. До "опрокидывания фронта" ($t < 0$), когда не было осцилляционной зоны, выполнено условие применимости уравнения Хопфа

$$(16) \quad |u_{xxx}| \ll |uu_x|, \quad |\mu u_x| \ll |uu_x|.$$

Пусть его решение $x = ut + P(u)$ таково, что $P(u)$ меняется на характерных размерах A . Масштаб характерных изменений x обозначим через B . К моменту t_0 образовавшаяся при $t \sim 0$ осцилляционная зона успела развиться локально до автоматической асимптотики ГП. При этом в течение времени до t_0 можно было пренебречь вязким членом, в силу (1)

$$(17) \quad |\mu u_{xx}| \ll |u_{xxx}|, \quad |uu_x|.$$

При $t = t_0$ мы должны иметь внутри $\Delta(t_0)$

$$(18) \quad \Delta r/t_0 = (r_3^- - r_1^+)/t_0 \gg \mu |g_\alpha(r)| \sim \mu (\Delta r)^2,$$

где величины $g_\alpha(r)$ имеют порядок $(\Delta r)^2$ в силу их однородности (4). Необходи-

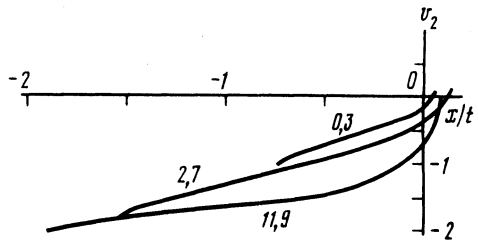
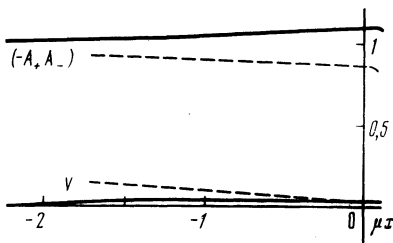


Рис. 3. Величины, характеризующие приближение к стационарному решению: кривая 1 — $V(x)$, 2 — $(-A_+A_-)$ как функции μx при $\mu = 0,1$ и $t = 11,9$. Штриховые кривые — соответствующие кривые при $\mu = 1$ и $t = 1,45$

Рис. 4. Эволюция $v_2(x, t)$ при $\mu = 0,1$. Момент времени $t = 2,7$, соответствует максимуму $r^+(t)$ (стрелка на рис. 1)

мо также

$$(19) \quad \Delta r \ll A$$

в зоне, где $P(u)$ аппроксимируется кубической параболой [1, стр. 275]. В зоне $\Delta(t_0)$ должно укладываться большое число периодов функции (8)

$$(20) \quad k = T^{-1} \sim \frac{\pi}{K(s)} \left(\frac{a}{6s^2} \right)^{1/2}, \quad T \ll \Delta(t_0).$$

Вне $\Delta(t_0)$ следует проверить условия применимости уравнения Хопфа. Кроме (16) надо следить, чтобы отброшенные члены не оказывали влияния вне Δ в течение всего процесса. Используя общую группу масштабных преобразований уравнений Хопфа и (2), обезразмериваем их обычным образом:

$$(21) \quad x = Bx', \quad u = Au', \quad t = BA^{-1}t', \quad \mu = B^{-1}\mu'.$$

В безразмерных переменных имеем:

$$\Delta'(t'_0) \sim (t'_0)^{3/2}, \quad \Delta r' \sim (t'_0)^{1/2}$$

в режиме ГП. Отсюда следует, что все условия (16)–(20) сведутся к неравенствам

$$(22) \quad t'_0 \ll 1, \quad (\mu')^{-2/3} \gg t_0 \gg (A^{1/2}B)^{-7/4}.$$

Далее мы будем опускать штрих над буквами, а величины A, B забудем (они говорят о происхождении и выпадают из уравнений Хопфа и (2)). Новая величина μ теперь уже может быть не мала. В новых переменных после преобразования Галилея мы имеем $A_+ = -1, A_- = 1$. Вне $\Delta(t_0)$ мы берем в численных примерах функцию $x = tu + 3(u - \text{arth}(u))$. Решение ГП и отрезок Δ имеют вид в момент t_0 (см. [1, стр. 283] для $z^{\pm*}$):

$$(23) \quad r_\alpha(x, t_0) = (t_0 - t_1)^{1/2} l_\alpha(r) + r_0, \\ z^- \leq z \leq z^+, \quad z = (x - x_1)\lambda(t_0 - t_1)^{-3/2}.$$

*Из работы [3] мы знаем, что $z^- \approx -1,41, z^+ \approx +0,117$; уточнение численных расчетов показывает, что $z^- \approx -\sqrt{2}$ с точностью 4 знаков. Методом, развитым И.М. Кричевером, это решение можно найти аналитически точно, как "усредненно конечнозонное решение" в терминологии [5].

Параметры t_1 , λ , x , r_0 произвольны. Их надо выбрать из четырех условий сшивки (выше) — значений $u(x^\pm)$, $u^1(x^\pm)$. Таким образом, осцилляторная зона в начальный момент t_0 определяется функцией $u(x, t_0)$.

Результаты численного моделирования иллюстрируются рис. 1–4. В качестве тестов на близость данного режима к конечным и промежуточным асимптотикам взяты следующие величины:

- 1) $V(r)$ и $-A_+A_-(r)$ при $\mu = 0,1$ и $\mu = 1$ при больших t ; должно быть и $V = 0$ и $-A_+A_- = 1$ в точном стационарном режиме (11);
- 2) величина $v_2(x/t)$ при $\mu = 0,1$ и $t = 0,03; 2,7; 11$. В момент времени $t = 2,7$ величина $r^+(t)$ имеет максимум; величина v_2 близка к линейной $v_2 \approx xt^{-1}$ в этот момент. Это указывает на реализацию промежуточной асимптотики: для $\mu = 0$ такой режим описывал асимптотику при $t \rightarrow \infty$ в задаче о распаде ступени согласно [1, стр. 268]. При $\mu = 1$ этот режим не реализуется как промежуточный (заметим, что безразмерному $\mu = 1$ отвечает малая вязкость в исходных переменных).

Таким образом, если эволюционный процесс в этом описании определен в течение бесконечного времени, то он однозначно при $t \rightarrow \infty$ выводит на стационарный режим (11). Характер промежуточных этапов эволюции зависит от начальных условий и параметра μ . При этом использовано предположение, что осцилляция действительно возникает. Выход ее на асимптотику ГП к моменту $t = t_0$ исследован в [4]. Здесь этот момент мы берем уже как начальный.

З а д а ч а. Исследовать общие закономерности возникновения осцилляторной зоны из теории КдФ (вязкость существенна позже), где впервые начинают действовать уравнения типа Уитема. Пока нет ясности в том, какие классы начальных условий для уравнения Уитема реализуемы.

Как сообщил авторам Л.П. Питаевский, в самое последнее время им совместно с А.В. Гуревичем независимо получено уравнение (2) и стационарное решение (11).

Институт теоретической физики
им. Л.Д. Ландау
Академии наук СССР
Черноголовка Московской обл.

Поступило
26 III 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория солитонов/Под ред. С.П. Новикова. М.: Наука, 1980. 320 с.
2. Бейтмен Э.Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967, т. 3.
3. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. — ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 590.
4. Авиллов В.В., Новиков С.П. — ДАН, 1987, т. 294, № 2.
5. Царев С.П. — ДАН, 1985, т. 282, № 3, с. 280.