Функциональный анализ и его приложения,
1988, т. 22, вып. 3, 37—52

УДК 517.93

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ «ИНТЕГРИРУЕМЫХ» УРАВНЕНИЙ

И. М. Кричевер

Метод усреднения Уизема (или, как его еще называют, нелинейный метод ВКБ) является обобщением на случай уравнений в частных производных классического метода усреднения Боголюбова — Крылова. Этот метод применим к нелинейным уравнениям, обладающим запасом точных решений вида $u(Ux+Wt+\zeta\mid I)$. Здесь $u(z_1, \ldots, z_g\mid I)$ — функция с единичными периодами по z_i; $U=(U_1, \ldots, U_g)$, $W=(W_1, \ldots, W_g)$ — векторы, зависящие, как и сама функция u, от параметров $I=(I_1, \ldots, I_N)$, $U=U(I)$, $W=W(I)$. Эти решения служат основой построения асимптотических решений, главный член которых имеет вид

$$u(\varepsilon^{-1}S(X, T)+\zeta(X, T)\mid I(X, T)), \tag{1}$$

где I_k зависят от «медленных» переменных $X=\varepsilon x$, $T=\varepsilon t$, ε — малый параметр, а вектор-функция $S(X, T)$ определяется из уравнений

$$\partial_X S=U(I(X, T))=U(X, T); \quad \partial_T S=W(I(X, T))=W(X, T). \tag{2}$$

Уравнениями Уизема называются уравнения, описывающие «медленную» модуляцию параметров $I_k(X, T)$. Их можно получить, потребовав, чтобы следующий член асимптотического ряда имел равномерную оценку, меньшую по порядку, чем главный член. (Подробнее см. [1; 2], где можно найти и обширную библиографию по этому вопросу.)

Если параметры I_k являются интегралами исходного уравнения с локальными плотностями, т. е. $I_k=\int P_k(u, u', \ldots)\,dx$, $\partial_t P_k=\partial_x Q_k$, где P_k и $Q_k=Q_k(u, u', \ldots)$ — дифференциальные полиномы от u, то замкнутую систему уравнений на I_k можно получить (см. [3]), усредняя последнее равенство по «быстрым» переменным x, t,

$$\partial_T I_k=\partial_X J_k, \quad J_k=\int Q_k(u, u', \ldots)\,dx. \tag{3}$$

Следует отметить, что весьма часто уравнения (3) постулируются в качестве первичного принципа без дополнительного анализа и точной формулировки связи усредненной системы с задачей построения решений исходного уравнения.

Гамильтонова теория усредненных уравнений (3) была построена в работе [4], где была получена и классификация невырожденных общих гамильтоновых систем «гидродинамического» типа: $\partial_T I_k=v_k^i\partial_X I_i$ (здесь $v_k^i(I)$ зависят от I и не зависят от их производных). Эти результаты послужили отправной точкой для работы [5], в которой была предложена схема построения решений общего положения для «диагонализуемых» гамильтоновых систем гидродинамического типа, т. е. систем, для которых существуют инварианты Римана — переменные $r_i(I)$, при переходе к которым матрица v_k^i становится диагональной.

Наличие однофазных ($g=1$) периодических решений характерно для многих нелинейных уравнений. Существование же многофазных периодических решений является ситуацией исключительной. Наиболее широким классом таких уравнений являются уравнения, к которым применим метод обратной задачи. В частности, это уравнения, допускающие представление Лакса $\dot{L} = [A, L]$, где L, A — дифференциальные операторы по x, коэффициенты которых зависят от x и t. К их числу относятся уравнение Кортевега — де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение sine-gordon. Для этих и ряда других пространственно-одномерных эволюционных уравнений в цикле работ С. П. Новикова, Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева, А. Р. Итса были построены с помощью методов алгебраической геометрии многофазные периодические решения, получившие название конечнозонных. (Обзор этих результатов содержится в [6; 7]. Несколько позднее часть из них была получена в [8; 9].)

Основной целью настоящей работы является обобщение метода Уизема на случай пространственно-двумерных «интегрируемых» уравнений, аналогом представления Лакса для которых является предложенное в [10] представление вида

$$[\partial_y - L, \partial_t - A] = 0, \tag{4}$$

где L и A — дифференциальные операторы

$$L = \sum_{i=0}^{n} u_i(x, y, t)\, \partial_x^i, \quad A = \sum_{j=0}^{m} v_j(x, y, t)\, \partial_x^j \tag{5}$$

со скалярными или матричными $(l \times l)$-коэффициентами. В дальнейшем будет предполагаться, что старшие коэффициенты L и A являются постоянными диагональными матрицами $u_n^{\alpha\beta} = u_n^{\alpha}\delta_{\alpha\beta}$, $v_m^{\alpha\beta} = v_m^{\alpha}\delta_{\alpha\beta}$ с различными элементами на диагонали. В этом случае сопряжением $L' = gLg^{-1}$, $A' = gAg^{-1}$ с помощью диагональной матрицы $g(x)$, можно добиться того, что $v_{m-1}^{\alpha\alpha} = 0$.

Общая схема построения конечнозонных решений таких уравнений была предложена в [11] (см. также [12]; дальнейшие этапы развития теории конечнозонного интегрирования представлены в обзорах [13—17]). Эти решения явно выражаются в терминах тэта-функций Римана. Для соответствующих операторов L, A найдутся диагональные матрицы $a = a(I)$, $b = b(I)$, $c = c(I)$, Φ такие, что

$$L = g\hat{L}g^{-1}, \quad A = g\hat{A}g^{-1}, \tag{6}$$

где $g = \exp(ax + by + ct + \Phi)$, а коэффициенты $\hat{u}_i$ и $\hat{v}_j$ операторов $\hat{L}$ и $\hat{A}$ имеют вид

$$\hat{u}_i = \hat{u}_i(Ux + Vy + Wt + \zeta \mid I), \quad \hat{v}_j = \hat{v}_j(Ux + Vy + Wt + \zeta \mid I). \tag{7}$$

Здесь $\hat{u}_i(z_1, \ldots, z_{2g} \mid I)$, $\hat{v}_j(z_1, \ldots, z_{2g} \mid I)$ — функции с единичными периодами по z_l, аналитически зависящие от параметров $I = (I_1, \ldots, I_N)$. Векторы $U = U(I)$, $V = V(I)$, $W = W(I)$ являются вещественными и так же, как и a, b, c, зависят от I. Матрица Φ и вещественный вектор ζ в (7), (8) произвольны.

Предлагаемый метод построения уравнений Уизема основан лишь на внутренней самосогласованности выбора главного члена асимптотического ряда в таком виде, что для соответствующих операторов

$$L_0 = G\hat{L}_0G^{-1}, \quad A_0 = G\hat{A}_0G^{-1}, \tag{8}$$

где $G = \exp(\varepsilon^{-1}S_0(X, Y, T) + \Phi(X, Y, T))$, а коэффициенты $\hat{L}_0$, $\hat{A}_0$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\hat{u}_i(\varepsilon^{-1}S(X, Y, T) + \zeta(X, Y, T) \mid I(X, Y, T)), \\ &\hat{v}_j(\varepsilon^{-1}S(X, Y, T) + \zeta(X, Y, T) \mid I(X, Y, T)). \end{aligned} \tag{9}$$

Вектор-функция $S(X, Y, T)$ и диагональная матрица $S_0(X, Y, T)$ должны удовлетворять условиям, аналогичным (2):

$$\begin{aligned} \partial_X S &= U(X, Y, T), \quad \partial_Y S = V(X, Y, T), \quad \partial_T S = W(X, Y, T), \\ \partial_X S_0 &= a(X, Y, T), \quad \partial_Y S_0 = b(X, Y, T), \quad \partial_T S_0 = c(X, Y, T). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $Y = \varepsilon y$ (такая же, как и X, T) — «медленная» переменная.

Уравнения Уизема, полученные в § 2, представляют собой необходимые условия существования асимптотического решения уравнений (4) с главным членом вида (8), (9), у которого следующие члены асимптотического ряда допускают равномерную оценку, меньшую по порядку, чем главный член. В § 1 излагаются необходимые для дальнейшего сведения о конструкции конечнозонных решений уравнений, допускающих коммутационное представление (4).

В § 3 предложена схема построения решений уравнений Уизема для пространственно-двумерного случая. В частном случае пространственно-одномерных уравнений она дает более эффективную формулировку конструкции работы [5]. Кроме того, она содержит и решения, полученные в [18] для описания ударных волн в уравнении КдФ.

Здесь особо следует отметить, что в простейшем случае «нульзонных» решений предлагаемая конструкция позволяет получать решения уравнений Уизема, являющихся в этом частном случае не чем иным, как квазиклассическим пределом исходных уравнений. Для пространственно-одномерных систем наша конструкция переходит в схему построения решений квазиклассических пределов уравнений типа Лакса, которая в ряде примеров была предложена В. А. Геогджаевым, который развивал результаты работы В. Е. Захарова, впервые доказавшего интегрируемость этих уравнений.

В качестве примера приведем конструкцию решений хорошо известного в нелинейной теории звуковых пучков уравнения Хохлова — Заболотской

$$\frac{3}{4}\sigma^2 u_{yy} + \left(u_t - \frac{3}{2} u u_x\right)_x = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) совпадает с уравнением Уизема (38) для «нульзонных» решений уравнения Кадомцева — Петвиашвили. Его решения, в соответствии с конструкцией § 3, можно получить, задав произвольный контур $\mathcal{L}$ на комплексной k-плоскости и дифференциал $dh(\tau)$ на нем.

Зададим функцию $\mathcal{F}$ формулой

$$\mathcal{F}(k, k_1, k_2) = \oint_{\mathcal{L}} \frac{dh(\tau)}{k - \xi(\tau)}, \quad \tau \in \mathcal{L},$$

где $\xi(\tau)$ определяется из уравнения

$$\xi^4 + 2u\xi^2 + \frac{4}{3} w\xi - (k_1 + k_2)^4 - 2u(k_1 + k_2)^2 + \frac{4}{3} w(k_1 + k_2) = \tau^4,$$

$$u = k_1 k_2 - (k_1 + k_2)^2,$$
$$w = 3k_1 k_2 (k_1 + k_2).$$

Здесь k_1, k_2 — произвольные параметры. Как следует из теоремы 2, если эти параметры определить из системы уравнений

$$\mathcal{F}(k_j, k_1, k_2) = x + 2\frac{i}{\sigma} k_j y + \left(3k_j^2 + \frac{3}{2} u\right) t, \quad j = 1, 2,$$

которая в неявном виде определяет k_1 и k_2 как функции переменных x, y, t, то функция

$$u(x, y, t) = k_1 k_2 - (k_1 + k_2)^2$$

будет удовлетворять уравнению (11).

Подробному изложению конструкции решений других уравнений, являющихся квазиклассическими пределами пространственно-двумерных интегрируемых уравнений, и анализу физических приложений этих решений будет посвящена отдельная публикация.

Достаточность полученных в настоящей работе уравнений Уизема для построения всего асимптотического ряда зависит от интегрируемости периодической задачи для исходного уравнения. В недавней работе автора была доказана интегрируемость этой задачи для уравнения КП-2, что позволяет доказать, что в случае этого уравнения уравнения Уизема являются не только необходимыми, но и достаточными. К сожалению, рамки одной работы не позволяют изложить этот вопрос в полном объеме. Ему будет посвящена отдельная статья.

§ 1. Необходимые сведения из теории конечнозонного интегрирования

Исходным объектом в конструкции [12] конечнозонных решений уравнений (4) является неособая алгебраическая кривая Γ рода g с отмеченными точками $P_1, \ldots, P_l$, в окрестности которых фиксированы локальные параметры $k_\alpha^{-1}(P)$, $k_\alpha^{-1}(P_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, l$. Кроме того, зафиксируем наборы полиномов $Q_\alpha(k)$ степени n, $R_\alpha(k)$ степени m и $\sigma_{i\alpha}(k)$ произвольных степеней, $i = 1, \ldots, 2g$.

Для любого набора точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+l-1}$ общего положения существует единственная функция $\psi_\alpha(x, y, t, \zeta, P)$, $P \in \Gamma$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{2g})$, которая:

1°) мероморфна вне точек P_β и имеет полюсы в точках γ_j;

2°) в окрестности точки P_β представима в виде

$$\psi_\alpha = \exp\left(k_\beta x + Q_\beta(k_\beta)\, y + R_\beta(k_\beta)\, t + \sum_i \sigma_{i\beta}(k_\beta)\, \zeta_i\right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x, y, t, \zeta)\, k_\beta^{-s}\right), \quad (12)$$

где $k_\beta = k_\beta(P)$, $\xi_0^{\alpha\beta} = e^{\Phi_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\Phi_\alpha$ — произвольные константы. (Функции подобного типа называются функциями Бейкера — Ахиезера.)

Обозначим через $\psi(x, y, t, \zeta, P)$ вектор-столбец с координатами ψ_α, $\alpha = 1, \ldots, l$. Как было показано в [12], существуют единственные операторы L и A вида (5) с матричными $(l \times l)$-коэффициентами (зависящими от ζ_i как от параметров) такие, что

$$(\partial_y - L)\, \psi(x, y, t, \zeta, P) = 0, \quad (\partial_t - A)\, \psi(x, y, t, \zeta, P) = 0. \quad (13)$$

Поскольку равенства (13) выполнены тождественно по P, то операторы L и A при всех ζ удовлетворяют уравнению (4).

Пусть функция $\psi_0(\zeta, P)$ определена равенством $\psi_0 = \sum_\alpha \exp(\Phi_\alpha' - \Phi_\alpha)\, \psi_\alpha(0, 0, 0, \zeta, P)$. Тогда функции $\tilde\psi_\alpha(x, y, t, P) = \psi_\alpha(x, y, t, \zeta, P)\, \psi_0^{-1}(\zeta, P)$ являются функциями Бейкера — Ахиезера, отвечающими значениям параметров Φ_α', $\zeta_i = 0$ и набору полюсов $\gamma_1', \ldots, \gamma_{g+l-1}'$, который совпадает с нулями ψ_0. Так как вектор-функция $\tilde\psi$ с компонентами $\tilde\psi_\alpha$ удовлетворяет тем же равенствам (13), что и ψ, то вариация параметров ζ, Φ эквивалентна вариации наборов полюсов γ_s. Обычно в качестве независимых параметров, определяющих конечнозонные операторы L, A, выбирают γ_s, полагая $\Phi_\alpha = 0$, $\zeta_i = 0$ (см. [12]). Если зафиксировать на Γ какой-либо набор $\gamma_1^0, \ldots, \gamma_{g+l-1}^0$, то в качестве независимых параметров можно выбрать $\Phi_1, \ldots, \Phi_{l-1}$ (в дальнейшем будет всегда предполагаться, что $\Phi_l = 0$) и ζ_i, которые вещественны. Этой параметризации мы и будем придерживаться.

Операторное уравнение (4) представляет собой систему нелинейных уравнений на коэффициенты u_i и v_j операторов L и A. Оказывается, что если

$n \leqslant m$, то эта система редуцируется к пучку систем лишь на коэффициенты A, параметризованных константами $h_{\alpha i}$, $i = 0, \ldots, n$; $\alpha = 1, \ldots, l$ (подробности см. в [12]). Для того чтобы выразить коэффициенты L через v_j, достаточно воспользоваться тем, что, как следует из (4), оператор $[L, A]$ должен иметь степень $m - 1$, причем диагональные элементы у старшего коэффициента должны быть равны нулю. Приравнивая последовательно нулю коэффициенты при ∂_x^{m-1+i}, $i = n, n - 1, \ldots, 1$, у $[L, A]$, однозначно находят $\partial_x u_i^{\alpha\alpha}$ и $u_{i-1}^{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$ ($h_{\alpha i}$ являются константами интегрирования). Как показано в [12], матричные элементы u_i являются дифференциальными полиномами от $v_j^{\alpha\beta}$ и $h_{\alpha i_1}$, $j \leqslant i$, $i_1 \leqslant i$.

Если положить $R_\alpha = v_m^\alpha k^m$, а $Q_\alpha = \sum_{i=0}^{n} h_{\alpha i} k^i$, то приведенная выше конструкция задает решения редуцированной системы, отвечающей набору констант $h_{\alpha i}$. Таким образом, полиномы Q_α параметризуют нелинейные уравнения, а остальные параметры параметризуют уже, собственно говоря, решения соответствующего уравнения.

В дальнейшем будет указан такой выбор полиномов $\sigma_{i\alpha}$, что при заменах локального параметра $k' = k'(k)$ соответствующие полиномы удовлетворяют условию $\sigma'_{i\alpha}(k') - \sigma_{i\alpha}(k) = O(k^{-1})$. В этом случае из определения функции Бейкера — Ахиезера следует, что при заменах локального параметра таких, что $k'_\alpha = k_\alpha + O(k_\alpha^{-m})$, два локальных параметра, связанных между собой указанным образом, будут называться эквивалентными, а множество классов эквивалентности, называемых m-ростками локальных параметров, будет обозначаться через $[k_\alpha^{-1}]_m$.

Таким образом, многообразие решений, отвечающих кривым рода g, параметризуется наборами данных

$$(\Gamma, P_1, [k_1^{-1}]_m, \ldots, P_l, [k_l^{-1}]_m) \tag{14}$$

и величинами $\Phi_1, \ldots, \Phi_{l-1}, \zeta_i$.

Комплексная размерность пространства модулей кривых рода g равна $3g - 3$. Поэтому размерность многообразия данных (14), которое в дальнейшем будет обозначаться через M_g, равна $N = 3g - 3 + l(m + 2)$. На M_g может быть введена комплексно-аналитическая структура. Пусть $I = (I_1, \ldots, I_N)$ — произвольная локальная система координат на M_g. Зависимость всех величин в последующих формулах от I_k является комплексно-аналитической.

Для того чтобы убедиться в справедливости сформулированных во введении утверждений о виде коэффициентов L и A, достаточно привести выражения через тэта-функции Римана для функций Бейкера — Ахиезера в форме, которая слегка отличается от стандартной [12].

Зафиксируем на Γ канонический базис циклов a_i, b_j с матрицей пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. Стандартным образом определяются (см. [12] или [20]): базис нормированных голоморфных дифференциалов ω_k, векторы $B_k = (B_{ki})$ их b-периодов и соответствующая тэта-функция Римана — целая функция g комплексных переменных, которая при сдвигах аргументов на базисные единичные векторы e_k в C^g и на векторы B_k преобразуется следующим образом:

$$\theta(\tau + e_k) = \theta(\tau), \quad \theta(\tau + B_k) = e^{-\pi i B_{kk} - 2\pi i \tau_k}\theta(\tau). \tag{15}$$

Пусть q — произвольная точка Γ. Отображения Абеля называется соответствие, при котором точке P сопоставляется вектор $A(P)$ с координатами $A_k = \int_q^P \omega_k$. Для любого набора g точек общего положения $\tilde{\gamma}_s$ функция

$\theta\,(A\,(P)+Z)$, где

$$Z=-A\,(\tilde{\gamma}_1)-\ldots-A\,(\tilde{\gamma}_g)+K \tag{16}$$

(K — вектор римановых констант) имеет ровно g нулей, совпадающих с $\tilde{\gamma}_s$.

Пусть $\gamma_1^0,\ldots,\gamma_{g+l-1}^0$ — некоторый фиксированный набор точек на Γ. По теореме Римана — Роха существует единственная функция h_α, имеющая полюсы в точках γ_s^0 и удовлетворяющая условию нормировки $h_\alpha\,(P_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$.

Зададим функцию $\varphi_\alpha\,(z,P)$, $z=(z_1,\ldots,z_{2g})$, формулой

$$\varphi_\alpha=h_\alpha(P)\exp\Big(2\pi i\sum_{k=1}^{g}(A_k(P)-A_k(P_\alpha))\,z_{k+g}\Big)\times$$
$$\times\frac{\theta\Big(A(P)+Z_\alpha+\sum\limits_{k=1}^{g}(z_kl_k+z_{k+g}B_k)\Big)\,\theta\,(A(P_\alpha)+Z_\alpha)}{\theta\,(A(P)+Z_\alpha)\,\theta\Big(A(P_\alpha)+Z_\alpha+\sum\limits_{k=1}^{g}(z_kl_k+z_{k+g}B_k)\Big)}, \tag{17}$$

где

$$Z_\alpha=K+\sum_{\beta\neq\alpha}A\,(P_\beta)-Z_0,\quad Z_0=\sum_s A\,(\gamma_s^0). \tag{18}$$

Из (16) следует, что φ_α имеет единичные периоды по всем переменным z_i.

Определим дифференциалы dp, dE, $d\Omega$ как мероморфные дифференциалы на Γ с особенностями в P_α вида dk_α, $dQ_\alpha\,(k_\alpha)$, $dR_\alpha\,(k_\alpha)$ соответственно, однозначно нормированные требованием, что их периоды по любому циклу мнимые. Пусть U — вещественный вектор с координатами

$$U_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{a_k}dp,\quad U_{k+g}=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k}dp,\quad k=1,\ldots,g. \tag{19}$$

Аналогично по dE и $d\Omega$ определяются $2g$-мерные векторы V и W.

Разрезав Γ вдоль циклов a_i и b_j, можно выбрать однозначную ветвь интегралов $p\,(P)$, $E\,(P)$, $\Omega\,(P)$ соответствующих дифференциалов. В окрестности P_α они имеют вид

$$p=k_\alpha-a_\alpha+O\,(k_\alpha^{-1}),\quad E=Q_\alpha\,(k_\alpha)-b_\alpha+O\,(k_\alpha^{-1}),\quad \Omega=R_\alpha\,(k_\alpha)-c_\alpha+O\,(k_\alpha^{-1}); \tag{20}$$

p, E и Ω можно определить однозначно, если потребовать, чтобы $a_l=b_l=c_l=0$.

Обозначим через $d\sigma_j$, $d\sigma_{j+g}$ любые дифференциалы с особенностями в P_α, которые имеют единственные ненулевые периоды по циклам a_j и b_j соответственно, равные $\pm 2\pi i$, $j=1,\ldots,g$. Их первообразные будут обозначаться через $\sigma_j\,(P)$, $j=1,\ldots,2g$.

Пусть полиномы $\sigma_{i\alpha}$, входящие в определение функции Бейкера — Ахиезера, являются лорановскими частями разложения σ_i в окрестности P_α по k_α^{-1}.

Лемма 1. *Вектор-функция Бейкера — Ахиезера, имеющая полюсы в выделенном наборе γ_s^0, представима в виде*

$$\psi=e^{ax+by+ct+\Phi}\varphi\,(Ux+Vy+Wt+\zeta,P)\,e^{px+Ey+\Omega t+\sum\limits_{i=1}^{2g}\sigma_i\zeta_i}, \tag{21}$$

где φ — вектор с координатами φ_α, определенными формулой (17); *a, b, c, Φ — диагональные матрицы с элементами a_α, b_α, c_α, Φ_α на диагонали (в силу сделанных предположений $a_l=b_l=c_l=\Phi_l=0$); $p=p\,(P)$, $E=E\,(P)$, $\Omega=\Omega\,(P)$, $\sigma_i=\sigma_i\,(P)$.*

Доказательство леммы состоит из прямой проверки того, что все координаты вектора, заданного правой частью равенства (21), являются корректно определенными функциями P с требуемыми аналитическими свойствами.

Как следует из доказательства равенств (13) (см. [12]), коэффициенты операторов $\hat{L}$, $\hat{A}$, связанных с L, A соотношениями (6), являются дифференциальными полиномами от матриц $\tilde{\xi}_s^{\alpha\beta}$, элементы которых являются коэффициентами разложения φ_α в окрестности P_β. Так как $\varphi(z, P)$ периодичны по z_i, то соотношения (7) доказаны.

Определим, следуя (21), понятие двойственной вектор-функции Бейкера — Ахиезера. Для любого набора $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+l-1}$ общего положения существует единственный с точностью до пропорциональности абелев дифференциал $\hat{\omega}$ второго рода с полюсами второго порядка в P_β, обращающийся в нуль во всех точках γ. Двойственным называется набор точек $\gamma_1^+, \ldots$ $\ldots, \gamma_{g+l-1}^+$, являющихся остальными нулями $\hat{\omega}$. Из этого определения следует, что векторы Z и Z^+, соответствующие при отображении Абеля дивизорам $\{\gamma_s\}$ и $\{\gamma_s^+\}$, связаны соотношением

$$Z + Z^+ = \mathscr{K} + 2\sum_\alpha A(P_\alpha). \tag{22}$$

Двойственной функцией Бейкера — Ахиезера называется вектор-строка с координатами $\psi_\alpha^+(x, y, t, \zeta, P)$, которые мероморфны вне P_β и имеют полюсы в γ_s^+; в окрестности P_β они представимы в виде

$$\psi_\alpha^+ = e^{-k_\beta x - Q_\beta(k_\beta)y - R_\beta(k_\beta)t - \sum_i \sigma_{i\beta}(k_\beta)\zeta_i}\left(\sum_{s=0}^\infty \xi_s^{+\alpha\beta}(x, y, t, \zeta)\, k_\beta^{-s}\right), \tag{23}$$

где $\xi_0^{+\alpha\beta} = e^{-\Phi_\alpha}\delta_{\alpha\beta}$.

Двойственная функция Бейкера — Ахиезера имеет вид

$$\psi^+ = e^{-px - Ey - \Omega t - \sum_{i=1}^{2g} \sigma_i\zeta_i}\, \varphi^+(-Ux - Vy - Wt - \zeta, P)\, e^{-ax-by-ct-\Phi}, \tag{24}$$

где компоненты $\varphi_\alpha^+(z, P)$ — вектор-строки $\varphi^+(z, P)$ — даются формулой (17), в которой векторы Z_α следует заменить на $Z_\alpha^+ = Z_\alpha + Z_0 - Z_0^+$. Кроме того, надо функцию h_α заменить на функцию h_α^+, имеющую полюсы в γ_s^{0+} и такую, что $h_\alpha^+(P_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$.

В работе [21] было доказано, что ψ^+ удовлетворяет уравнениям

$$\psi^+(x, y, t, \zeta, P)(\partial_y - L) = 0, \quad \psi^+(x, y, t, \zeta, P)(\partial_t - A) = 0, \tag{25}$$

где операторы L и A те же, что и в (13).

В этих формулах, как и в дальнейшем, правое действие любого оператора $D = \sum_{i=0}^k w_i\partial_x^i$ на вектор-строку f^+ равно действию формально сопряженного оператора, т. е.

$$f^+D = \sum_{i=0}^k (-\partial_x)^i (f^+w_i). \tag{26}$$

В заключение параграфа приведем (нужное для вывода в дальнейшем тождеств) для любого дифференциального по x оператора D степени k определение «ассоциированных» с ним операторов $D^{(j)}$, $j = 0, \ldots, k$, имеющих степень $k - j$. Они однозначно определяются требованием, чтобы для любых вектор-строки f_1^+ и вектор-столбца f_2 выполнялось равенство

$$(f_1^+D)f_2 = \sum_{j=0}^k \partial_x^j\left(f_1^+(D^{(j)}f_2)\right). \tag{27}$$

Отсюда сразу следует, что $D^{(0)} = D$,

$$D^{(1)} = -\sum_{i=1}^{k} i w_i \partial_x^{i-1}, \quad D^{(2)} = \sum_{i=2}^{k} \frac{i(i-1)}{2} w_i \partial_x^{i-2} \tag{28}$$

и т. д. Удобно определить $D^{(j)}$ и для $j > k$, полагая их равными нулю.

§ 2. Уравнения Уизема

Как уже говорилось выше, уравнения (4) мы рассматриваем (при $n \leqslant m$) как пучок нелинейных уравнений на коэффициенты оператора A, параметризованных набором констант. При этом коэффициенты L выражаются через коэффициенты A и $h_{\alpha i}$, что условно запишем в виде $L = \mathscr{L}(A, h_{\alpha i})$. Еще раз отметим, что если зафиксировать эти выражения, то для любого оператора с тем же старшим коэффициентом, что и у A, оператор $L' = \mathscr{L}(A', h_{\alpha i})$ обладает тем свойством, что $[L', A']$ является оператором порядка $m - 1$ с нулевыми диагональными элементами у старшего коэффициента.

Задачу построения асимптотических решений мы рассмотрим в более общей постановке, чем та, о которой шла речь во введении. Пусть $K(A)$ — дифференциальный оператор порядка $m - 1$ с нулевыми диагональными элементами у старшего коэффициента. Его коэффициенты являются дифференциальными полиномами от коэффициентов оператора A. Единственное требование, которому эти полиномы должны удовлетворять, заключается в том, что если оператор A имеет вид (6), (7), то такой же вид должен иметь и $K(A)$ (в случае скалярных операторов это условие автоматически выполнено).

Рассмотрим задачу построения асимптотических решений

$$\tilde{A} = A_0 + \varepsilon A_1 + \ldots; \quad \tilde{L} = \mathscr{L}(\tilde{A}, h_{\alpha i}) = L_0 + \varepsilon L_1 + \ldots, \tag{29}$$

(где A_i — дифференциальные операторы порядка $m - 1$ с нулевыми диагональными элементами у старших коэффициентов) для уравнений

$$\partial_t L - \partial_y A + [L, A] - \varepsilon K(A) = 0, \tag{30}$$

являющихся при $k \neq 0$ слабым возмущением исходного уравнения (4).

Обозначим через $\Delta^{m-1} = \Delta^{m-1}(a, b, c, U, V, W)$ пространство дифференциальных (по x) операторов степени $m - 1$, которые имеют вид $D = g\hat{D}g^{-1}$, где $g = \exp(ax + by + ct)$, а коэффициенты $\hat{D}$ являются квазипериодическими функциями с векторами периодов U, V, W по соответствующим переменным, т. е. $\hat{w}_i = \hat{w}_i(Ux + Vy + Wt)$, где $\hat{w}_i(z_1, \ldots, z_{2g})$ — функции с единичными периодами по z_i. Для любого оператора $D \subset \Delta^{m-1}$ определим оператор D^{Σ} формулой $\exp(\varepsilon^{-1}S_0)\hat{D}^S \exp(-\varepsilon^{-1}S_0)$, где коэффициенты оператора $\hat{D}^S$ равны $\hat{w}_i(\varepsilon^{-1}S(X, Y, T))$. Здесь $S_0(X, Y, T)$ — диагональная матрица, S — вектор, $\Sigma = (S_0, S)$. В этих обозначениях операторы L_0 и A_0, заданные формулами (8), (9), равны $L_0 = L^{\Sigma}$, $A_0 = A^{\Sigma}$.

Пусть S_0 и S удовлетворяют условиям (10). Тогда операторы $\tilde{L}$ и $\tilde{A}$, главные части которых равны L_0, A_0, удовлетворяют уравнению (30) с точностью до $O(\varepsilon)$. Для того чтобы выписать уравнения, определяющие L_1 и A_1, необходимо ввести следующее определение.

Пусть величины I, ζ, Φ, параметризующие конечнозонные операторы L и A, зависят от какого-либо параметра τ. «Усеченной производной» операторов $L(\tau)$, $A(\tau)$ вдоль τ будут называться операторы $\hat{\partial}_\tau L$, $\hat{\partial}_\tau A$, полученные дифференцированием (6), (7), в которых формально полагается, что векторы

U, V, W и матрицы a. b, c постоянны. Из этого определения следует, что

$$\partial_\tau A = \hat{\partial}_\tau A + [\partial_\tau a\cdot x + y\partial_\tau b + t\partial_\tau c, A] + \sum_{i=1}^{2g} (x\partial_\tau U + y\partial_\tau V + t\partial_\tau W)\frac{\partial A}{\partial \zeta_i} \quad (31)$$

(такое же равенство имеет место и для оператора $\hat{\partial}_\tau L$).

Если параметры L и A зависят от X, Y, T, то определим оператор $F = F(L, A)$:

$$F = \hat{\partial}_T L - \hat{\partial}_Y A + \{L, A\}, \quad (32)$$

$$\{L, A\} = \sum_{i=0}^{n} u_i \sum_{k=0}^{i} k\ C_i^k \partial_x^{k-1}(\hat{\partial}_X v_j)\partial_x^{i+j-k} - \sum_{j=0}^{m} v_j \sum_{k=0}^{j} kC_j^k \partial_x^{k-1}(\hat{\partial}_X u_i)\partial_x^{i+j-k}. \quad (33)$$

Оператор $\{L, A\}$ получается из $[L, A]$, если в коэффициентах последнего во всех дифференциальных выражениях заменить ∂_x на $\partial_x + \varepsilon\hat{\partial}_X$ и взять члены первой степени по ε. Отсюда следует, что F имеет степень $m - 1$ с нулевыми диагональными элементами у старшего коэффициента. Из определения усеченных производных имеем, что $F \subset \Delta_0^{m-1}$ (здесь и далее $\Delta_0^{m-1} \subset \Delta^{m-1}$ — подпространство операторов с указанными выше старшими коэффициентами).

Подставляя (29) в (30) и приравнивая нулю коэффициент при ε, получим уравнение

$$L_{1t} - A_{1y} + [L_0, A_1] + [L_1, A_0] + F^\Sigma - K^\Sigma = O(\varepsilon). \quad (34)$$

Пусть ψ и ψ^+ — функции Бейкера — Ахиезера, соответствующие операторам L и A. Тогда функции ψ_0 и ψ_0^+, полученные с помощью замены в формулах (21) и (24) вектора $Ux + Vy + Wt$ на $\varepsilon^{-1}S(X, Y, T)$, диагональной матрицы $ax + by + ct$ на $\varepsilon^{-1}S_0(X, Y, T)$, а $px + Ey + \Omega t$ — на $\varepsilon^{-1}\sum_i \sigma_i S_i(X, Y, T)$ (S_i — компоненты S), удовлетворяют уравнениям (13) и (25), в которых L и A заменены на L_0, A_0, с точностью до $O(\varepsilon)$.

Используя соответствующие равенства и уравнение (34), получим

$$\partial_t(\psi_0^+(L_1\psi_0)) - \partial_y(\psi_0^+(A_1\psi_0)) + \sum_{j\geqslant 1}\partial_x^j(\psi_0^+((L_0^{(j)}A_1 - A_0^{(j)}L_1)\psi_0)) + O(\varepsilon) =$$
$$= -(\psi_0^+((F^\Sigma - K^\Sigma)\psi_0). \quad (35)$$

Следовательно, для того чтобы уравнение (34) имело равномерно ограниченное решение, необходимо равенство нулю среднего по x, y, t (в дальнейшем оно будет обозначаться через $\langle\cdot\rangle_0$) от правой части равенства (35). Отсюда вытекает уравнение

$$\langle\psi^+F\psi\rangle_0 - \langle\psi^+K\psi\rangle_0 = 0. \quad (36)$$

Это уравнение должно быть выполнено тождественно по P. Из теоремы Римана — Роха сразу следует, что среди уравнений (36) при разных P имеется не более $N_1 = g + lm - 1$ независимых. Действительно, левая часть (36) является мероморфной функцией на Γ, имеющей полюсы в полюсах ψ и ψ^+ и полюсы кратности $m - 2$ в точках P_α. По теореме Римана — Роха размерность линейного пространства таких функций равна N_1.

Для того чтобы получить полную систему, описывающую динамику по X, Y, T параметров I конечнозонных решений, уравнения (36) следует дополнить условиями совместности уравнений (10), определяющих S_0 и S:

$$\begin{gathered}\partial_Y U = \partial_X V, \quad \partial_T U = \partial_X W, \quad \partial_T V = \partial_Y W,\\ \partial_Y a = \partial_X b, \quad \partial_T a = \partial_X c, \quad \partial_T b = \partial_Y c.\end{gathered} \quad (37)$$

Рассмотрим многообразие $\hat{M}_g$ пар (P, μ), где μ — набор данных (14), а P — точка кривой Γ, входящей в этот набор. Это многообразие естественно расслаивается над M_g. Пусть $(\lambda, I_1, \ldots, I_N)$ — локальная система координат на $\widehat{M}_g$ такая, что при фиксированных I_k функция $\lambda(P)$ параметризует некоторую область $\Gamma = \Gamma(I)$. Любую такую систему координат будем называть связностью расслоения $\widehat{M}_g \to M_g$, поскольку для любого пути $I(\tau)$ в $\widehat{M}_g$ и точки $P_0 \in \Gamma(I(\tau_0))$ можно определить поднятие этого пути в $\widehat{M}_g$, определив точки $P(\tau)$ условием $\lambda(P(\tau)) = \lambda(P_0)$.

Многозначные функции p, E, Ω, определенные на каждой кривой, являются многозначными функциями на $\widehat{M}_g$, т. е. $p = p(\lambda, I)$, $E = E(\lambda, I)$, $\Omega = \Omega(\lambda, I)$.

Теорема 1. *Система уравнений* (36, 37) *эквивалентна следующему уравнению на* $p(\lambda, X, Y, T)$, $E(\lambda, X, Y, T)$, $\Omega(\lambda, X, Y, T)$:

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial E}{\partial Y} - \frac{\partial \Omega}{\partial Y}\right) - \frac{\partial E}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\partial \Omega}{\partial X}\right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial E}{\partial X}\right) = \frac{\langle \psi^+ K \psi \rangle_0}{\langle \psi^+ \psi \rangle_0} \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \quad (38)$$

Доказательство. Пусть $P(\tau)$, $I(\tau)$ — произвольная кривая в $\widehat{M}_g$. Тогда вдоль этой кривой $p = p(\tau)$, $E = E(\tau)$, $\Omega = \Omega(\tau)$. Если от τ зависят и ζ, Φ, то соответствующие конечнозонные операторы также зависят от τ: $L = L(\tau)$, $A = A(\tau)$.

Лемма 2. *Имеют место соотношения*

$$\partial_\tau \Omega \langle \psi^+ \psi \rangle_{xt} + \langle \psi^+ \partial_\tau c \psi \rangle_{xt} + \sum_{i=1}^{2g} \left\langle \varphi^+ \partial_\tau W_i \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i} \right\rangle_{xt} =$$
$$= - \partial_\tau p \langle \psi^+ (A^{(1)} \psi) \rangle_{xt}) - \langle \psi^+ (A^{(1)} \partial_\tau a \psi \rangle_{xt}) -$$
$$- \sum_{i=1}^{2g} \left\langle \varphi^+ \left(\hat{A}^{(1)} \partial_\tau U_i \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i} \right\rangle_{xt} \right) + \langle \psi^+ (\hat{\partial}_\tau A \psi) \rangle_{xt}), \quad (39)$$

$$\left\langle \psi^+ \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta_i} \psi \right) \right\rangle_{xt} = \left\langle \psi^+ \left(\frac{\partial A}{\partial \Phi_\alpha} \psi \right\rangle_{xt} = 0. \quad (40)$$

Здесь φ и φ^+ — предэкспоненциальные множители в (21) и (24); оператор $A^{(1)}$ определяется по A в (27), $\hat{A}^{(1)} = g^{-1} A^{(1)} g$, $g = \exp(ax + by + ct)$, $\langle \cdot \rangle_{xt}$ — среднее по x, t.

Доказательство. Пусть $\psi^+ = \psi^+(x, y, t, P(\tau))$, $\psi_1 = \psi(x, y, t, P(\tau_1))$. Из (13) и (25) следует, что

$$\partial_t (\psi^+ \psi_1) = - \sum_{j=1}^{m} \partial_x^j (\psi^+ (A^{(j)} \psi)) + (\psi^+ ((A_1 - A) \psi)), \quad (41)$$

где $A_1 = A(\tau_1)$, $A = A(\tau)$. Дифференцируя (41) по τ_1 и полагая $\tau_1 = \tau$, получим

$$\partial_\tau \Omega (\varphi^+ \varphi) + (\varphi^+ \partial_\tau c \varphi) + \sum_{i=1}^{2g} \left(\varphi^+ \partial_\tau W_i \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i} \right) = - \partial_\tau p (\varphi^+ (\hat{A}^{(1)} \varphi)) - (\varphi^+ (\hat{A}^{(1)} \partial_\tau a \varphi)) -$$
$$- \sum_{i=1}^{2g} \left(\varphi^+ \left(\hat{A}^{(1)} \partial_\tau U_i \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i} \right) \right) + (\psi^+ ((\partial_\tau A) \psi)) + R. \quad (42)$$

Здесь остаточный член R представляет собой сумму членов вида

$$R = \sum_s (q_s^0 + q_s^1 x + q_s^2 y + q_s^3 t)(q_s^4 \partial_x \widetilde{w}_s (Ux + Vy + Wt + \zeta) +$$
$$+ q_s^5 \partial_t \widetilde{w}_s (Ux + Vy + Wt + \zeta)), \quad (43)$$

где q_s^i — константы, а $\widetilde{w}_s$ периодичны по z_i.

Векторы U и W определяют прямолинейные обмотки на T^{2g}. Обозначим через $T_1(\zeta)$ замыкание обмотки $Ux + Wt + \zeta$. Оно является k-мерным подтором в T^{2g}. Для любой функции вида $w(Ux + Wt + \zeta)$ можно рассмотреть среднее по подтору T_1, обозначаемое в дальнейшем через $\langle w\rangle_{T_1}$. Оно совпадает со средним по x, t, т. е. $\langle w\rangle_{T_1} = \langle w\rangle_{xt}$.

Усредним равенство (42) по T_1 $(\zeta + Vy)$ (отметим, что среднее по x, t брать нельзя, так как часть коэффициентов в (43) линейно зависит от x, t). Из (43) следует, что $\langle R\rangle_{T_1} = 0$.

Рассмотрим усредненные равенства (42) для вариаций, при которых P, I не меняются, а последовательно меняются ζ_i и Φ_α. Для этих вариаций все слагаемые, кроме предпоследнего, равны нулю. Отсюда

$$\left\langle \psi^+ \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta_i}\psi\right)\right\rangle_{T_1} = \left\langle \psi^+ \left(\frac{\partial A}{\partial \Phi_\alpha}\psi\right)\right\rangle_{T_1} = 0 \tag{44}$$

и так как в (44) средние по T_1 совпадают со средними по x, t, то выполнены равенства (40).

Для любой диагональной постоянной матрицы r

$$\langle \psi^+ ([r, A]\psi)_{T_1} = \langle \psi^+ ([r, A]\psi)\rangle_{xt} = \langle \partial_t (\psi^+ r\psi)\rangle_{xt} = 0. \tag{45}$$

Отсюда и из (31) следует, что

$$\langle \psi^+ (\partial_\tau A\psi)\rangle_{T_1} = \langle \psi^+ (\hat{\partial}_\tau A\psi)\rangle_{xt} \tag{46}$$

и усредненное равенство (42) переходит в (39).

Следствие 1. *Дифференциалы dp и $d\Omega$ связаны равенством*

$$d\Omega \langle \psi^+\psi\rangle_{xt} + dp\, \langle \psi^+ (A^{(1)}\psi)\rangle_{xt} = 0. \tag{47}$$

Доказательство. Рассмотрим вариацию P по Γ при постоянных I, ζ, Φ. Тогда все слагаемые, кроме первых двух в обоих частях (39), равны нулю. Отсюда следует (47). (Впервые подобное равенство в случае, когда A является оператором Штурма — Лиувилля, было получено в [22].)

Из (47) следует, что в случае общего положения, когда нули dp и $d\Omega$ не пересекаются, нули мероморфных на Γ функций $\langle \psi^+\psi\rangle_{xt}$ и $\langle \psi^+ A^{(1)}\psi\rangle_{xt}$ совпадают с нулями этих дифференциалов. В силу аналитической зависимости всех этих нулей от I_k последнее утверждение справедливо для любой кривой Γ. Отметим, что из него вытекает, что средние в (47) не зависят от y.

Равенства, полностью аналогичные (39) и (40), имеют место и для оператора L (для краткости мы их опустим). Из этих соотношений следует, в частности, что

$$dE \langle \psi^+\psi\rangle_{xy} + dp\, \langle \psi^+ (L^{(1)}\psi)\rangle_{xy} = 0. \tag{48}$$

Замечание. Если в качестве отмеченного набора γ_s^0 полюсов функции Бейкера — Ахиезера выбрать половину нулей дифференциала dp, то для такой функции будет выполнено (как следует из доказанного) соотношение $\langle \psi^+\psi\rangle_{xt} = \langle \psi^+\psi\rangle_{xy} = 1$.

Из определения (27) следует, что для операторов $L^{(j)}$, $A^{(j)}$, ассоциированных с L, A, удовлетворяющих (4), имеют место равенства

$$L_t^{(j)} - A_y^{(j)} + \sum_{k=0}^{j} [L^{(k)}, A^{(j-k)}] = 0. \tag{49}$$

Используя эти соотношения и уравнения, которым удовлетворяют $\psi^+ = \psi^+ (x, y, t, P(\tau))$ и $\psi_1 = \psi (x, y, t, P(\tau_1))$, получим

$$\sum_{j=1}^{m} \partial_x^{j-1} [\partial_t (\psi^+ (L^{(j)}\psi_1)) - \partial_y (\psi^+ (A^{(j)}\psi_1)) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \partial_x^{j-1} [(\psi^+ (L^{(j)} (A_1 - A) \psi_1)) - (\psi^+ (A^{(j)} (L_1 - L) \psi_1)), \tag{50}$$

где $L = L(\tau)$, $L_1 = L(\tau_1)$, $A = A(\tau)$, $A_1 = A(\tau_1)$.

Продифференцируем (50) по τ_1 и положим $\tau_1 = \tau$. Усредним полученное равенство по подтору T_0, соответствующему обмотке $Ux + Vy + Wt + \zeta$. Среднее от всех слагаемых в (50), кроме соответствующих $j = 1$, равно нулю. Аналогично доказательству леммы 2 можно показать, что усредненное равенство (50) приводит к соотношению (51).

Лемма 3.' *Имеют место равенства*

$$\partial_\tau\Omega \langle\psi^+ (L^{(1)}\psi)\rangle_0 - \partial_\tau E \langle\psi^+ (A^{(1)}\psi)\rangle_0 + \langle\psi^+ L^{(1)}\partial_\tau c\psi\rangle_0 - \langle\psi^+ A^{(1)}\partial_\tau b\psi\rangle_0 + \\ + \sum_{i=1}^{2g} \left\langle \varphi^+ (L^{(1)}\partial_\tau W_i - A^{(1)}\partial_\tau V_i) \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_i} \right\rangle_0 = \langle\psi^+ ((L^{(1)}\hat\partial_\tau A - A^{(1)}\hat\partial_\tau L)\psi)\rangle_0. \quad (51)$$

Непосредственно проверяется, что для любых двух операторов L, A выполнено равенство

$$\{L, A\} = L^{(1)}\hat\partial_X A - A^{(1)}\hat\partial_X L. \quad (52$$

Поэтому утверждение леммы 3 позволяет найти среднее $\langle\psi^+ (\{L, A\}\psi)\rangle_0$. Из (39) при $\tau = Y$ находится выражение для $\langle\psi^+\hat\partial_Y A\psi\rangle_0$. Полагая $\tau = T$ в аналогичном равенстве для L, найдем $\langle\psi^+\hat\partial_T L\psi\rangle_0$.

Суммируя получающиеся выражения и используя (47), (48), получим, что $\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{\langle\psi^+ F\psi\rangle_0}{\langle\psi^+\psi\rangle_0}$ равно левой части (38) плюс сумма членов, каждый из которых равен нулю в силу (37). (Эти дополнительные слагаемые имеют вид $\langle\psi^+ L^{(1)} (\partial_T a - \partial_X c)\psi\rangle_0$ и т. д.) Теорема доказана.

Изложенная в § 1 конструкция решений уравнений (4) содержит в частном случае и конструкцию решений уравнений Лакса $L_t = [A, L]$. Рассмотрим подмногообразие данных (14), $M_g^0 \subset M_g$, для которых соответствующий дифференциал dE является точным, т. е. функция $E(P)$ является однозначной на $\Gamma \subset M_g^0$. В этом случае коэффициенты L и A не зависят от y и (4) переходит в уравнение Лакса. Функцию $E(P)$ можно использовать для параметризации окрестностей всех точек соответствующих кривых, кроме конечного числа. При этом $p = p(E, X, T)$ и $\Omega = \Omega(E, X, T)$ и уравнения (38) превращаются в

$$\partial_X\Omega - \partial_T p = \frac{\langle\psi^+ K\psi\rangle_0}{\langle\psi^+\psi\rangle_0}\frac{dp}{dE}. \quad (53)$$

При $K \equiv 0$ равенство (53) совпадает с уравнением $\partial_T p = \partial_X\Omega$, впервые полученным в частном случае уравнения КдФ в работе [3]. Следует отметить, что это уравнение было получено в [3] как следствие усредненных законов сохранения, т. е. уравнений (3), которые постулировались априорно. Вывод уравнений (3), как необходимых условий ограниченности поправочного члена асимптотического ряда, был в случае уравнения КдФ получен в [1].

§ 3. Конструкция решений усредненных уравнений

Пусть $n_\alpha \geqslant m$ — целые числа, $\sum_\alpha n_\alpha = g + l(m + 1)$. Для любой кривой Γ рода g с отмеченными точками P_α общего положения и локальными параметрами k_α^{-1} существует единственная с точностью до прибавления константы функция $\lambda(P)$, имеющая полюсы лишь в P_α (кратности n_α) и такая, что в окрестности P_α $\lambda^{1/n_\alpha}(P) = k_\alpha + O(k_\alpha^{-m})$. В случае общего положения можно считать, что нули дифференциала $d\lambda$ простые, $d\lambda(q_i) = 0$, $i = 0, \ldots, N = 3g - 3 + l(m + 2)$. Функцию $\lambda(P)$ можно однозначно нормировать, положив $\lambda(q_0) = 0$. Тогда величины $\lambda_i = \lambda(q_i)$, $i = 1, \ldots, N$, являются локальными координатами на M_g. (В случае уравнений Лакса подобные координаты на M_g^0 являются инвариантами Римана.) Наборы $(\lambda(P), \lambda_i)$ образуют локальные системы координат на $\widehat{M}_g$ всюду, кроме окрестностей q_j. (Связности на $\widehat{M}_g$, задаваемые таким образом, будут называться каноническими.)

Зафиксируем на произвольной кривой общего положения Γ_0 кусочно-гладкий контур $\mathcal{L}$ (состоящий из конечного числа замкнутых или разомкнутых кривых с конечным числом пересечений), наборы точек t_ν и $\widetilde{P}_\mu$, лежащие на и вне этого контура соответственно. С помощью канонической связности можно определить соответствующие контур и точки на любой кривой Γ, достаточно близкой к Γ_0. (Например, точке $t \subset \mathcal{L} \subset \Gamma_0$ достаточно сопоставить точку $t' \subset \mathcal{L}' \subset \Gamma$, которая определяется из условия $\lambda(t') = \lambda(t)$.)

Л е м а 4. *Для любого дифференциала dh на $\mathcal{L}$, H-непрерывного (непрерывного по Гельдеру) всюду, кроме точек t_ν, и такого, что в окрестности t_ν дифференциал $(\lambda - \lambda(t_\nu))^{s_\nu}\,dh$ ограничен, существует единственный дифференциал $d\Lambda$, удовлетворяющий условиям:*

1°. *$d\Lambda$ мероморфен на Γ вне $\mathcal{L}$, имеет там простой полюс в q_0 и полюсы в P_μ вида*

$$d\Lambda = d\lambda\Big(\sum_{i=1}^{\varkappa_\mu} \tilde{r}_{\mu i}(\lambda - \lambda(\widetilde{P}_\mu))^{-i} + O(1)\Big)\,. \tag{54}$$

2°. *Предельные значения $d\Lambda^\pm$ на $\mathcal{L}$ H-непрерывны вне t_ν и удовлетворяют уравнению «скачка»*

$$d\Lambda^+ - d\Lambda^- = dh. \tag{55}$$

При этом $(\lambda - \lambda(t_\nu))^{s_\nu} d\Lambda$ ограничен в окрестности t_ν.

3°. $$\oint (\lambda - \lambda(t_\nu))^i d\Lambda = r_{\nu i},\ i = 1, \ldots, s_\nu, \tag{56}$$

(интеграл берется по малой окружности на Γ, охватывающей точку t_ν).

Здесь $\tilde{r}_{\mu i}$, $i = 1, \ldots, \varkappa_\mu$, и $r_{\nu i}$, $i = 1, \ldots, s_\nu$, — произвольные наборы чисел.

4°. *$d\Lambda$ имеет мнимые периоды по всем циклам на Γ.*

Утверждение леммы стандартно для теории краевых задач. Дадим краткий набросок его доказательства. Пусть $d\widetilde{\Lambda}$ — дифференциал, определенный с помощью интеграла типа Коши

$$d\widetilde{\Lambda} = \frac{d\lambda}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} A(\lambda, t)\,\mathrm{dh}(t), \tag{57}$$

где $A(\lambda, q)\,d\lambda$ — мероморфный аналог ядра Коши, являющийся по q мероморфной функцией с нулями кратности s_ν в t_ν, а по λ — мероморфным дифференциалом с полюсами в t_ν кратности s_ν и простыми полюсами в точках q и q_0. В окрестности q он имеет вид $d\lambda\left(\frac{1}{\lambda - q} + O(1)\right)$. Такой дифференциал можно задать формулой (2.5) из работы [20], где можно найти дальнейшие подробности о краевых задачах на римановых поверхностях. Предельные значения $d\widetilde{\Lambda}^\pm$ на $\mathcal{L}$ удовлетворяют (55). Поэтому $d\Lambda = d\widetilde{\Lambda} + d\widetilde{\omega}$, где $d\widetilde{\omega}$ является мероморфным дифференциалом с полюсами кратностей s_ν и $\varkappa_\mu$ в точках t_ν и $\widetilde{P}_\mu$ соответственно и простым полюсом в q_0. Размерность пространства таких дифференциалов равна $g + \sum\limits_\nu s_\nu + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu$ и поэтому условия (54), (56) и 4° позволяют однозначно фиксировать $d\widetilde{\omega}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\lambda_i = \lambda(q_i)$ так зависят от X, Y, T, что для любого $i = 1, \ldots, N$ выполнено одно из двух условий:*

$$\oint \frac{1}{\sqrt{\lambda - \lambda_i}}\,(d\Lambda + X\,dp + Y\,dE + T\,d\Omega) = 0 \quad \text{либо} \quad \lambda_i = \text{const}. \tag{58}$$

Тогда $p = p(\lambda, X, Y, T)$, $E = E(\lambda, X, Y, T)$, $\Omega = \Omega(\lambda, X, Y, T)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\partial_T p = \partial_X \Omega, \quad \partial_Y p = \partial_X E, \quad \partial_Y \Omega = \partial_T E. \tag{59}$$

Интеграл в (58) берется по малому контуру, охватывающему точку q_i. Если q_i не лежит на $\mathscr{L}$, то первое из условий (58) означает, что дифференциал, стоящий в скобках, обращается в нуль в точке q_i.

Доказательство. Рассмотрим дифференциал $\partial_X d\hat{S}$, где $d\hat{S} = d\Lambda + X\,dp + Y\,dE + T\,d\Omega$. Из постоянства «скачка» $d\hat{S}$ на $\mathscr{L}$ следует, что $\partial_X d\hat{S}$ мероморфен на Γ. Из (54), (56) вытекает, что этот дифференциал голоморфен в t_ν и $\tilde{P}_\mu$. Кроме точек P_α и q_0, единственные точки, в которых он мог бы иметь полюса,— это точки q_i, в которых имеет особенности связность. Дифференциал $d\hat{S}$ не имеет особенностей в q_i, поэтому при любом $j = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место первое из равенств (60). Второе является его следствием.

$$\oint (\sqrt{\lambda - \lambda_i})^j\, d\hat{S} = 0 \Rightarrow \oint (\lambda - \lambda_i)^{j/2}\, \partial_X\, d\hat{S} - j\,\frac{\lambda_{iX}}{2} \oint (\lambda - \lambda_i)^{j/2-1} d\hat{S} = 0. \tag{60}$$

Отсюда имеем, что при всех j равно нулю первое из слагаемых в (60) (при $j \neq 1$ это вытекает из первого равенства, а при $j = 1$ надо воспользоваться (58)). Следовательно, $\partial_X d\hat{S}$ голоморфен вне точек P_α и q_0. В точках P_α он имеет ту же особенность, что и dp. Значит, в частности, его вычеты в этих точках равны нулю. Из равенства нулю суммы всех вычетов любого мероморфного дифференциала следует, что равен нулю его вычет в точке q_0. Тем самым, $\partial_X d\hat{S} - dp$ является голоморфным дифференциалом на Γ. В силу условия 4° и условий нормировки dp, dE, $d\Omega$ этот голоморфный дифференциал должен иметь мнимые периоды по всем циклам. Следовательно, он равен нулю. Аналогично доказывается, что $\partial_Y d\hat{S} = dE$ и $\partial_T d\hat{S} = d\Omega$. Равенства (59) являются следствием равенства смешанных производных $\hat{S}(P) = \int^P d\hat{S}$.

Замечание 1. Как следует из доказательства теоремы, вектор периодов дифференциала $d\hat{S}$ и матрица S_0 с диагональными элементами, равными коэффициентам при нулевых степенях k_α в разложениях $\hat{S}(P)$ по степеням k_α^{-1} в окрестностях P_α, удовлетворяют условиям (10).

Величины $v_i^1 = \frac{dE}{dp}(q_i)$, $v_i^2 = \frac{d\Omega}{dp}(q_i)$ и

$$w_i = \left(\oint \frac{1}{\sqrt{\lambda - \lambda_i}}\, d\Lambda\right)\left(\oint \frac{dp}{\sqrt{\lambda - \lambda_i}}\right)^{-1} \tag{61}$$

зависят от λ_j и определяют функции $v_i^{1,2} = v_i^{1,2}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, $w_i = w_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$. Условия (58) в этих обозначениях имеют вид

$$w_i + X + Yv_i^1 + Tv_i^2 = 0 \text{ либо } \lambda_i = \text{const}. \tag{62}$$

При заданных X, Y, T уравнения (62) задают систему N уравнений на N неизвестных λ_j. Ее решения $\lambda_j(X, Y, T)$ определяют частные решения уравнений Уизема для невозмущенных уравнений (4), т. е. в случае $K \equiv 0$.

Эти решения зависят от выбора канонической связности и от параметров, входящих в определение дифференциала $d\Lambda$, т. е. $\mathscr{L}$, dh, t_ν, $r_{\nu i}$, $\tilde{P}_\mu$, $\tilde{r}_{\mu i}$. Указанный в начале параграфа способ выбора канонической связности можно расширить.

Пусть $\mathfrak{M} \subset M_g$ — подмногообразие M_g (возможно, совпадающее с ним). Будем говорить, что на расслоении $\hat{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{M}$, являющемся ограничением расслоения $\hat{M}_g$ на $\mathfrak{M}$, задана допустимая связность, если на каждой кривой Γ, входящей в набор данных, определяющих точку $\mathfrak{M}$, задана функция $\lambda(P)$ такая, что для любого числа λ_0, принадлежащего малой окрестности $\lambda(P_\alpha)$, величины $k_\alpha^i(P)$, $i = 1, \ldots, m$, где P определяется из условия $\lambda(P) = \lambda_0$, являются корректно определенными функциями λ_0, т. е. не зависят от кривой Г. Отметим, что канонические связности являются допустимыми. Точки q_i, в которых $d\lambda$ обращается в нуль, являются особенностями связности.

Теорема 2'. *Пусть* $(\Gamma, P_\alpha, [k_\alpha^{-1}]_m) \subset \mathfrak{M}$ *так зависят от* X, Y, T, *что во всех особенностях допустимой связности на* Γ *выполнено одно из условий* (58). *Тогда соответствующие абелевы интегралы* p, E, Ω *удовлетворяют уравнениям* (59).

В частном случае подмногообразия данных $\mathfrak{M} = M_g^0$, определяющих решения уравнений Лакса, допустимой связностью является связность, заданная функцией $E(P)$, существующая на каждой кривой, входящей в наборы данных из M_g^0. Уравнения (62) при этом, если все $E_i \neq \mathrm{const}$, переходят в уравнения, предложенные в [5]. Следует отметить, что в [5] отсутствовало какое бы то ни было эффективное построение функций w_i, за исключением случая, когда w_i порождались усредненными полиномиальными законами сохранения исходного уравнения Лакса. Соответствующие решения назывались «усредненными n-зонными». В рамках настоящей конструкции такие решения отвечают случаю $dh = 0$, а все точки $\widetilde{P}_\mu$ совпадают с P_α. Из этой интерпретации усредненно n-зонных решений следует пропущенное в [5] свойство их автомодельности. Более точно рассмотрим уравнения Уизема, соответствующие уравнению КдФ.

Следствие. Пусть $d\Omega_n$ — голоморфный всюду, кроме $E = \infty$, дифференциал на гиперэллиптической кривой Γ_g, заданной уравнением $y^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (E - E_j)$. В окрестности $E = \infty$ он имеет особенность вида $d\Omega_n = d(E^{n/2}) + O(1)$. Тогда уравнение (62) при $w_i = \frac{d\Omega_n}{dp}(E_i)$ определяет решения уравнений Уизема с показателем автомодельности $\gamma = \frac{2}{n-3}$.

Уравнения Уизема для КдФ имеют автомодельные решения вида $E_i = t^\gamma E_i\left(\frac{x}{t^{1+\gamma}}\right)$ с произвольным показателем γ. Для построения таких решений достаточно выбрать в качестве контура $\mathscr{L}$ разрез на Γ_g вдоль всей вещественной оси, положить $dh = \alpha_i d(E^{n/2})$, $n = 3 + \frac{2}{\gamma}$, константы α_i могут быть различными на разных берегах разреза. Отметим, что, разбирая более детально сформулированное следствие, можно показать, что использованное в [18] автомодельное решение с показателем $\gamma = 1/2$ является усредненно 7-зонным.

Важной задачей является определение «эквивалентных» наборов параметров конструкции ($\mathscr{L}$, dh, . . .), т. е. наборов, приводящих к одинаковым решениям уравнений Уизема. С этой задачей тесно связана и проблема эффективизации решения задачи Коши для уравнений Уизема в случае пространственно-одномерных уравнений.

Добавление. В работе [22] было предложено нетривиальное обобщение уравнений Лакса на случай пространственно-двумерных систем, отличное от [4]. Наиболее интересным из таких уравнений является уравнение Новикова—Веселова [23]

$$u_t = \partial^3 u + \bar\partial^3 u + \partial(vu) + \bar\partial(\bar v u), \quad 3\partial u = \bar\partial v, \tag{63}$$
$$\partial = \partial/\partial z, \quad \bar\partial = \partial/\partial \bar z, \quad z = x + iy.$$

Оказывается, что, хотя коммутационное представление для этого уравнения отличается от (4), уравнения Уизема и в этом случае имеют вид (38). Более точно: параметрами, определяющими конечнозонные решения уравнения (63), являются: кривая Г, на которой имеется голоморфная инволюция σ с двумя неподвижными точками P_1, P_2, и антиголоморфная инволюция τ, коммутирующая с σ, $\tau\sigma = \sigma\tau$, $\tau(P_1) = P_2$. Кроме того, в окрестностях P_1, P_2 фиксированы ростки $[k_1]_3$, $[k_2]_3$ локальных параметров k_1, k_2 таких, что $\sigma^* k_i = -k_i$, $\tau^* k_1 = \bar{k}_2$. Определим на таких кривых дифференциалы dp_x, dp_y, $d\Omega$, имеющие в окрестностях P_1, P_2 вид $dp_x \approx i\ dk$, $dp_y \approx \pm dk$, $d\Omega \approx \approx i\ dk^3$, нормированные условием вещественности периодов по всем циклам.

Теорема 3. *Уравнения Уизема для уравнения Новикова — Веселова имеют вид* (38), *где* $dp = dp_x$, $dE = dp_y$, $d\Omega = d\Omega$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Конечнозонные почти-периодические решения в ВКБ-приближениях // Современные проблемы математики (Итоги науки и техники).— Т. 15.— М.: ВИНИТИ, 1980. С. 3—94.
2. *Dobrokhotov S. Yu., Maslov V. P.* Multiphase asymptotics of nonlinear partial differential equations with a small parameter // Soviet Scientific Reviews. Math. Phys. Reviews: OPA, Amsterdam, 1982. V. 3.— P. 221—280.
3. *Flaschka H., Forest M., McLaudhlin D.* The multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg — de Vries equation // Comm. Pure and Appl. Math.— 1980. V. 33, № 6.— P. 739—784.
4. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова — Уизема // ДАН СССР.— 1983. Т. 270, вып. 4.— С. 781—785.
5. *Царев С. П.* О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа // ДАН СССР.— 1985. Т. 282, вып. 3.— С. 534—537.
6. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН.— 1976. Т. 31, вып. 1.— С. 55—136.
7. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.
8. *Lax P. D.* Periodic solutions of Korteweg — de Vries equation // Comm. Pure and Appl. Math.— 1975. V. 28.— P. 141—188.
9. *McKean H., Moerbeke P. van.* The spectrum of Hill's equation // Invent. Math.— 1975. V. 30, № 3.— P. 217—274.
10. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. 1 // Функцион. анализ и его прил.— 1974. Т. 8, вып. 3.— С. 43—53.
11. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова—Шабата и их периодических решений // ДАН СССР.— 1976. Т. 227, вып. 2.— С. 291—294.
12. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функцион. анализ и его прил.— 1977. Т. 11, вып. 1.— С. 15—31.
13. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН.— 1981. Т. 36, вып. 2.— С. 11—80.
14. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН.— 1977. Т. 32, вып. 6.— С. 183—208.
15. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // УМН.— 1980. Т. 35, вып. 6.— С. 47—68.
16. *Dubrovin B. A., Krichever I. M., Novikov S. P.* Topological and algebraic geometry methods on contemporary mathematical physic. II // Soviet Scientific Reviews. Math. Phys. Reviews: OPA, Amsterdam, 1982. V. 3. P. 1—151.
17. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Интегрируемые системы. 1 // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления (Итоги науки и техники). Т. 4. — М.: ВИНИТИ, 1985. С. 179—285.
18. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.* Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // ЖЭТФ.— 1973. Т. 65.— С. 590—604.
19. *Кричевер И. М.* Периодическая задача для уравнения Кадомцева — Петвиашвили // ДАН СССР.— 1988. Т. 298, вып. 4.— С. 565—569.
20. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций // УМН.— 1971. Т. 26, вып. 1.— С. 113—181.
21. *Чередник И. В.* Эллиптические кривые и матричные солитонные дифференциальные уравнения // Алгебра. Геометрия. Топология (Итоги науки и техники). Т. 22.— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1984. С. 205—265.
22. *Манаков С. В.* Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // УМН.— 1976. Т. 31, вып. 5.— С. 245—246.
23. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные периодические операторы Шредингера: явные формулы и эволюционные уравнения // ДАН СССР.— 1984. Т. 279, вып. 1.— С. 20—24.

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступило в редакцию
13 октября 1986 г.