Функциональный анализ и его приложения,
1989, т. 23, вып. 1, 24—40

УДК 517.9

АЛГЕБРЫ ТИПА ВИРАСОРО, ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И ОПЕРАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

Введение

Настоящая работа является непосредственным продолжением предшествующих работ авторов [1; 2], в которых была начата реализация программы последовательного операторного квантования «многопетлевых диаграмм» в теории бозонной струны.

В основе всех наших построений лежит следующая теоретико-функциональная конструкция на неособой римановой поверхности Γ рода $g < \infty$ с парой отмеченных точек $P_{\pm}$. Для любого целого числа λ, целого числа $n + \frac{1}{2}g$ определяется единственный с точностью до множителя тензор $f_n^{\lambda}(z)$, $z \in \Gamma$, веса λ, голоморфный на Γ вне точек $P_{\pm}$, где он имеет, возможно, полюсы, и обладающий следующим асимптотическим поведением:

$$f_n^{\lambda} = z_{\pm}^{\pm n - S(\lambda)} O(1)(dz_{\pm})^{\lambda},\ S(\lambda) = S(\lambda, g) = g/2 - \lambda(g-1), \tag{0.1}$$

$z_{\pm}$ — координаты в окрестностях точек $P_{\pm}$.

Строго говоря, это утверждение для $\lambda = 0, 1$ верно для всех n, кроме конечного числа $|n| \leqslant g/2$. Для всех $\lambda \neq 0, 1$ оно верно для всех $g > 1$, если тройка Γ, $P_{\pm}$ типична, а если $g = 1$, то это утверждение верно при $n \neq \neq {}^1/_2$. Приведенное определение тензоров f_n^{λ} обобщается на полуцелые λ, где оно дополнительно зависит от спинорной структуры.

Важнейшими являются случаи $\lambda = -1, 0, {}^1/_2, 1, 2$ (векторные поля, функции, спиноры, дифференциалы, квадратичные дифференциалы). Для них мы используем специальные обозначения $f_n^{-1} = e_n$, $f_n^0 = A_n$, $f_n^{1/2} = \Phi_n$, $f_n^1 = d\omega_{-n}$, $f_n^2 = d^2\Omega_{-n}$.

Тензоры f_n^{λ} обладают следующим важным мультипликативным свойством «почти-градуированности»:

$$f_n^{\lambda} f_m^{\mu} = \sum_{k=-g/2}^{g/2} Q_{n,m}^{\lambda,\mu,k} f_{n+m-k}^{\lambda+\mu}, \tag{0.2}$$

$$[e_n, f_m^{\lambda}] = \sum_{k=-g_0}^{g_0} R_{n,m}^{\lambda,k} f_{n+m-k}^{\lambda}, \quad g_0 = 3g/2. \tag{0.3}$$

В частности, при $\lambda = 0,1$ мы получаем коммутативную почти-градуированную алгебру $\mathscr{A}^{\Gamma}$ и почти-градуированную алгебру Ли $\mathscr{L}^{\Gamma}$

$$[e_n, e_m] = \sum_{k=-g_0}^{g_0} c_{n,m}^k e_{n+m-k}. \tag{0.4}$$

Фундаментальную роль в операторной теории взаимодействующей струны играют почти-градуированные центральные расширения этих алгебр — аналоги алгебр Гейзенберга и Вирасоро на римановых поверхностях.

Тройка $(\Gamma, P_{\pm})$ однозначно определяет абелев дифференциал третьего рода dk такой, что: а) вне точек $P_{\pm}$ он голоморфен, а в этих точках имеет простые полюсы с вычетами ± 1; в) периоды dk по любому циклу на Γ являются чисто мнимыми. Функция $\tau(z) = \operatorname{Re} k(z)$ называется «временем», ее линии уровня обозначаются через C_τ, область z таких, что $a \leqslant \tau(z) \leqslant b$ обозначается через $C_{[a,b]}$.

Теорема. *Для любого гладкого тензора $F^\lambda(\sigma)$ веса λ на контуре C_τ, $\sigma \in C_\tau$, или тензора, голоморфного в области $C_{[a,b]}$, имеет место разложение, аналогичное разложению Фурье—Лорана*

$$F^\lambda(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \sum_n f_n^\lambda(\sigma) \Big(\oint_{C_\tau} F^\lambda f_{-n}^{1-\lambda} \Big). \tag{0.5}$$

Тензоры $f_n^\lambda(z)$ имеют также тесную связь с теорией солитонов. Напомним, что функция Бейкера — Ахиезера F_N^λ общего положения дискретного аргумента $N \in Z$ определяется следующими аналитическими свойствами:

а) она имеет асимптотики $Q \to P_\pm$:

$$F_N^\lambda = z_\pm^{\pm N} O(1)(dz_\pm)^\lambda, \quad z_\pm = z_\pm(Q); \tag{0.6}$$

б) вне точек $P_\pm$ она имеет дивизор полюсов D_λ, не зависящий от N, степени $\deg D_\lambda = 2S(\lambda) + k$, $k \geqslant 0$;

в) она однозначно нормируется с помощью k линейно независимых условий (например, как в работах [1; 3] или несколько более общих).

В солитонной литературе в основном обсуждался случай $\lambda = k = 0$. При всех λ и $k = 0$ тензор Бейкера—Ахиезера сводится к скалярному:

$$\psi_N = F_N^\lambda / F_0^\lambda.$$

Поэтому в этом случае, согласно результатам работ [5; 6], тензор Бейкера — Ахиезера F_N^λ является совместной собственной функцией коммутирующих разностных операторов по N, коэффициенты которых выражаются через тэта-функции и, как следствие, квазипериодичны по переменной N (использование этой функции при $k \neq 0$ в теории солитонов обсуждается в работах [1; 3]).

Тензоры f_n^λ — это специальные предельные случаи общих тензоров Бейкера — Ахиезера, когда $k = 0$ и дивизор полюсов стремится к линейной комбинации точек $P_\pm$. При четных g надо полагать $f_n^\lambda = F_n^\lambda$, $D_\lambda \to S(\lambda)(P_+ + P_-)$, а при нечетных g следует положить $f_n^\lambda = F_{n-1/2}^\lambda$, $D_\lambda \to \left(S(\lambda) + \frac{1}{2}\right)P_+ + \left(S(\lambda) - \frac{1}{2}\right)P_-$. Очевидно, что асимптотика (0.6) перейдет в асимптотику (0.1). В этом построении тензорный вес λ играет важную роль. При пересчете к скалярным конструкциям мы получаем счетное множество дивизоров степени g, лежащих для $\lambda \neq 0$ вне точек $P_\pm$.

Для вещественных гиперэллиптических кривых, заданных уравнением

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - x_i), \tag{0.7}$$

и точек $P_+ = (\infty, +)$, $P_- = (\infty, -)$ один из контуров C_τ совпадает, как указал авторам А. А. Гончар, с набором a-циклов, соответствующих отрезкам вещественной оси $[x_{2i-1}, x_{2i}]$, $i = 1, \ldots, g$. В этом частном случае возможно сопоставление наших построений с некоторыми конструкциями классического анализа. Например, общие функции $F_N(x)$ встречались в классическом анализе как аналоги ортогональных многочленов на этой системе интервалов, $x \in R^1$. Никаких аналогов мультипликативных свойств тензоров f_n^λ, возникающих при специальном выборе полюсов F_N, в классическом анализе не обсуждалось.

§ 1. Основные понятия. Регулярность вакуума

В соответствии с представлениями работ [1; 2] алгебро-геометрической моделью бозонной струны является неособая риманова поверхность Γ рода g с двумя отмеченными точками $P_\pm$, которые соответствуют конформной компактификации мировой поверхности струны при $t \to \mp\infty$ в пространстве Минковского. Промежуточные положения струны определяются как образы контуров C_τ на Γ при вложении Γ в пространство Минковского.

Пусть $X^\mu(\sigma)$ и $P^\mu(\sigma)$, $\mu = 1, \ldots, D$ — операторы координаты и импульса бозонной струны со стандартными коммутационными соотношениями. Как было показано в [2], коэффициенты разложения дифференциала

$$\partial_\sigma X^\mu(\sigma)\, d\sigma + \pi P^\mu(\sigma) = \sum_n \alpha_n^\mu d\omega_n = J^\mu(\sigma) \tag{1.1}$$

по базисным дифференциалам $d\omega_n(z)$ вместе с единичным оператором являются образующими аналога алгебры Гейзенберга

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = \eta^{\mu\nu}\gamma_{nm}, \quad \gamma_{nm} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\tau} A_m dA_n. \tag{1.2}$$

Здесь $\eta^{\mu\nu}$ — метрика Минковского с сигнатурой $(-1, 1, 1, \ldots, 1)$.

Фоковские пространства «in-» и «out-» состояний H_Γ^{in} и H_Γ^{out} определяются как пространства, порожденные операторами α_n^μ из вакуумных векторов $|0\rangle$ и $\langle 0|$ соответственно, которые определяются соотношениями

$$\begin{aligned} &\alpha_n^\mu |0\rangle = 0, \quad n > g/2, \quad n = -g/2, \\ &\langle 0|\alpha_n^\mu = 0, \quad n \leqslant -g/2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Замечание. Здесь и далее в работе мы рассматриваем лишь «аналитическую» часть фоковского пространства. Антианалитическая часть порождается операторами $\bar\alpha_n^\mu$, являющимися коэффициентами разложения дифференциала $X_\sigma^\mu d\sigma - \pi P^\mu$ по антиголоморфным дифференциалам $\overline{d\omega_n}$. Как было доказано в [2], операторы α_n^μ и $\bar\alpha_m^\nu$ коммутируют, и поэтому аналитические и антианалитические части полного фоковского пространства могут рассматриваться независимо и абсолютно параллельно.

Напомним, что в принятых в [2] обозначениях функции $A_n(z)$ с индексами $n > g/2$, $g = -g/2$ образуют базис в подпространстве голоморфных вне P_- функций, а с индексами $n \leqslant -g/2$ образуют базис в подпространстве голоморфных вне P_+ функций, $A_{-g/2} \equiv 1$. Это позволяет установить изоморфизмы H_Γ^{in} и H_Γ^{out} со стандартными фоковскими пространствами H_0^{in} и H_0^{out}, построенными на малых контурах вокруг точек $P_\pm$ с помощью «свободных» операторов $a_N^{\mu,\pm}$, N-целое, удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[a_N^{\mu,\pm}, a_M^{\nu,\pm}] = \eta^{\mu\nu} N \delta_{N+M,\,0}. \tag{1.4}$$

Правые и левые вакуумные векторы определяются соотношениями

$$a_N^{\mu,+}|0\rangle = 0, \quad N \geqslant 0; \quad \langle 0|a_N^{\mu,-} = 0, \quad N \leqslant 0. \tag{1.5}$$

Обозначим через $z_\pm$ «свободные» локальные координаты в малых окрестностях точек $P_\pm$, т. е. такие, что дифференциал dk имеет в них «свободный» вид $dk = \pm z_\pm^{-1} dz_\pm$.

По определению функции A_n имеют в окрестностях точек вид

$$A_n = z_\pm^{\pm n - g/2}\left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s^\pm(n)\, z_\pm^s\right) \tag{1.6}$$

для $|n| > g/2$ и чуть измененный для $|n| \leqslant g/2$ (подробнее см. [1; 2]). Непосредственно проверяется, что тогда операторы

$$\alpha_n^\mu = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s^+(n)\, a_{n+s-g/2}^{\mu,+} = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s^-(n)\, a_{n+g/2-s}^{\mu,-} \tag{1.7}$$

для $|n| > g/2$ и аналогично для $|n| \leqslant g/2$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.2). Используя равенства (1.7), можно формально построить преобразование Боголюбова между «свободными» фоковскими пространствами in и out состояний. Однако получающиеся при этом выражения для коэффициентов разложения $a_N^{\mu,+}$ через $a_M^{\mu,-}$ представляются в виде бесконечных рядов, которые, по-видимому, нигде не сходятся.

Как сами свободные операторы, так и стандартно определенные с их помощью тензоры энергии-импульса $T_0^{\pm}(z)$ имеют смысл лишь в окрестностях точек $P_\pm$ и расходятся в точках бифуркации контуров C_τ (т. е. в нулях дифференциала dk). В работе [2] был определен тензор энергии-импульса

$$T(z) = \frac{1}{2} : J^2(z) : = \frac{1}{2} \sum : \alpha_n \alpha_m : d\omega_n(z)\, d\omega_m(z), \tag{1.8}$$

который голоморфен на Г вне точек $P_\pm$ при любом обсуждавшемся там способе введения нормального упорядочивания: $\alpha_n\alpha_m$: операторов α_n^μ.

Если $d^2\Omega_k(z)$ — базисный набор квадратичных дифференциалов, то можно определить операторы L_k, разлагая по этому набору тензор энергии-импульса

$$T(z) = \sum_k L_k d^2\Omega_k(z), \quad L_k = \frac{1}{2} \sum_{n,m} l_{n,m}^k : \alpha_n \alpha_m :. \tag{1.9}$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[L_n, L_m] = \sum_{k=-g_0}^{g_0} c_{mn}^k L_{n+m-k} + D\chi_{nm}^\Sigma, \tag{1.10}$$

где

$$\chi_{nm}^\Sigma = \frac{1}{48\pi i} \oint \left((e_n''' e_m - e_n e_m''') - 2 (e_n' e_m - e_n e_m') R^\Sigma \right) \mathrm{d}z \tag{1.11}$$

и $R^\Sigma = R^\Sigma(z)$ — проективная связность на Г, зависящая от Σ — способа нормального упорядочения. Тем самым, операторы L_k задают представление центрального расширения алгебры (0.4), которое обобщает на случай римановых поверхностей алгебру Вирасоро. Центральный заряд D равен размерности пространства Минковского.

Допустимыми способами нормального упорядочения являются такие, для которых из (1.3) вытекают «соотношения регулярности вакуума»

$$\text{а) } L_n |0\rangle = 0,\ n \geqslant g_0 - 1; \quad \text{б) } \langle 0 | L_n = 0,\ n \leqslant -g_0 + 1. \tag{1.12}$$

В этих случаях соответствующие проективные связности R^Σ голоморфны на Г всюду, включая и точки $P_\pm$. К числу таких допустимых способов относятся все способы, описываемые формулами (2.26), (2.27) работы [2], в которых $\sigma_{\pm g} = \pm g/2$, $\sigma_{\pm(g-1)} = \pm (g/2 - 1)$.

Особо следует подчеркнуть, что условия (1.12) являются необходимыми при построении произвольной конформной теории поля на римановых поверхностях. Они вытекают из требования *«регулярности»* вакуума, которое означает, что для любого примарного поля $\Phi(z)$, имеющегося в теории, состояния $\Phi(z)|0\rangle$ и $\langle 0|\Phi(z)$ должны быть голоморфны в окрестностях точек P_+ и P_- соответственно. Отметим, что условия (1.3) есть следствие этого принципа в случае $\Phi(z) = J(z)$.

Для того чтобы проследить весь процесс взаимодействия струны, необходимо не только определить глобальные объекты (типа тензора энергии-импульса) на поверхности Γ с отмеченными точками $P_\pm$, но и ввести билинейное скалярное произведение между пространствами H^{in} и H^{out}. В работе [2] было введено скалярное произведение между некоторыми правыми и левыми (in и out) модулями Верма. Кратко приведем соответствующие конструкции в форме, которая эквивалентна исходной [2], но в большей степени приспособлена для дальнейшего.

Обозначим через $H_\lambda^+(p)$ пространство, порожденное базисом, состоящим из полубесконечных форм — «внешних произведений» — вида

$$f_{i_0}^\lambda \wedge f_{i_1}^\lambda \wedge \dots \wedge f_{i_{m-1}}^\lambda \wedge f_{S-p+m}^\lambda \wedge f_{S-p+m+1}^\lambda \wedge \dots, S = S(\lambda), \tag{1.13}$$

где индексы базисных полей f_n^λ, начиная с некоторого номера, пробегают все значения подряд до $+\infty$.

Замечание. В работах [1; 2] был рассмотрен более общий случай тензорных полей, голоморфных вне линии, соединяющей точки $P_\pm$, на которой они удовлетворяют определенным граничным условиям. Это обобщение позволяет определить модули $H_\lambda^+(p)$ для любых, а не только целых p. Мы остановимся подробнее на этом вопросе в следующем параграфе для случая $\lambda = 1/2$.

Действие векторных полей e_k на базисных полях f_n^λ, как было показано в [1], индуцирует представление алгебры (1.10) с центральным зарядом

$$D = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1). \tag{1.14}$$

«Порождающий» вектор правого модуля Верма

$$|\Psi_{\lambda, p}^+\rangle = f_{S-p}^\lambda \wedge f_{S-p+1}^\lambda \wedge \dots, \quad S = S(\lambda), \tag{1.15}$$

удовлетворяет соотношениям

$$L_n |\Psi_{\lambda, p}^+\rangle = 0, \quad n > g_0 = 3g/2; \quad L_{g_0} |\Psi_{\lambda, p}^+\rangle = h_+^{\lambda, p} |\Psi_{\lambda, p}^+\rangle. \tag{1.16}$$

Аналогичным образом определяется пространство $H_\lambda^-(p)$ «левых» полубесконечных форм, порожденное формами вида

$$\dots \wedge f_{-S+p-m-1}^\lambda \wedge f_{-S+p-m}^\lambda \wedge f_{j_{-m+1}}^\lambda \wedge \dots \wedge f_{j_0}^\lambda, \tag{1.17}$$

где индексы f_n^λ идут от $-\infty$ до некоторого номера подряд.

«Порождающий» вектор левого модуля Верма

$$\langle \Psi_{\lambda, p}^- | = \dots \wedge f_{-S+p-2}^\lambda \wedge f_{-S+p-1}^\lambda \wedge f_{-S+p}^\lambda, \quad S = S(\lambda) \tag{1.18}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\langle \Psi_{\lambda, p}^- | L_n = 0, \quad n < -g_0, \quad \langle \Psi_{\lambda, p}^- | L_{-g_0} = \langle \Psi_{\lambda, p}^- | h_-^{\lambda, p}. \tag{1.19}$$

Определим скалярное произведение между пространствами H_λ^+ и H_λ^- всех правых и левых «полубесконечных» форм

$$H_\lambda^\pm = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_\lambda^\pm(p), \quad p \in Z, \tag{1.20}$$

следующим образом. Для любых двух базисных полубесконечных форм $\Psi_\lambda^\pm \in H_\lambda^\pm$ определим бесконечную в обе стороны форму, «приставляя» друг к другу Ψ_λ^- и Ψ_λ^+. Если после перестановки сомножителей f_n^λ в ней получим стандартную форму

$$\dots \wedge f_{\varepsilon-2} \wedge f_{\varepsilon-1} \wedge f_\varepsilon \wedge f_{\varepsilon+1} \wedge \dots, \tag{1.21}$$

в которой все индексы идут подряд от $-\infty$ до ∞, то положим $\langle\Psi_\lambda^- \mid \Psi_\lambda^+\rangle = \pm 1$, где знак равен знаку соответствующей перестановки. Во всех остальных случаях полагаем $\langle\Psi_\lambda^- \mid \Psi_\lambda^+\rangle = 0$ и продолжаем так определенное скалярное произведение базисных элементов на H_λ^- и H_λ^+ по линейности. Отметим, что произведение «порождающих» векторов (1.15) и (1.17) равно

$$\langle\Psi_{\lambda, p_-}^- \mid \Psi_{\lambda, p_+}^+\rangle = \delta_{p_+ + p_-, 2S(\lambda)-1}. \tag{1.22}$$

Как установлено в [2], относительно так введенного скалярного произведения операторы L_n являются самосопряженными, т. е. для любых двух элементов Ψ_λ^-, Ψ_λ^+ имеем

$$\langle\Psi_\lambda^- \mid L_n\Psi_\lambda^+\rangle = \langle\Psi_\lambda^- L_n \mid \Psi_\lambda^+\rangle = \langle\Psi_\lambda^- \mid L_n \mid \Psi_\lambda^+\rangle. \tag{1.23}$$

Обсудим теперь требование «регулярности» вакуума (1.12) Как видно из (1.13) и (1.19), порождающие векторы $\mid\Psi_{\lambda, p_+}^+\rangle$ и $\langle\Psi_{\lambda, p_-}^-\mid$ удовлетворяют условиям (1.12), если:

а) $\quad h_\pm = 0,$

б) $$L_{g_0-1}\mid\Psi_{\lambda, p_+}^+\rangle = 0, \quad \langle\Psi_{\lambda, p_-}^-\mid L_{-g_0+1} = 0. \tag{1.24}$$

Лемма 1.1. *Вектор* $\mid\Psi_{\lambda, p_+}^+\rangle$ *или* $\langle\Psi_{\lambda, p_-}^-\mid$ *удовлетворяют условиям* (1.12а) *или* (1.12б) *соответственно* (*условиям регулярности вакуума*), *если соответствующая полубесконечная форма совпадает с внешним произведением всех неотрицательных степеней локального параметра* z_+ *или* z_-. *Это выполнено при*

$$p_+ = p_- = 0 \tag{1.25}$$

(*здесь предполагается, что* $g \neq 1$).

Доказательство. Базисные тензоры f_n^λ имеют в окрестностях точек $P_\pm$ вид

$$f_n^\lambda = \varphi_{n,\lambda}^\pm z_\pm^{\pm n - S(\lambda)}(1 + O(z_\pm))(dz_\pm)^\lambda, \tag{1.26}$$

где $\varphi_{n,\lambda}^\pm$ — константы, зависящие от Γ, $P_\pm$. Действие e_i на f_j^λ имеет вид (0.3). Отсюда следует, что необходимым условием выполнения равенств (1.24) являются равенства

$$R_{\pm(g_0-1), \pm S \mp p}^{\pm g_0} = 0, \quad S = S(\lambda). \tag{1.27}$$

Из формулы [2, (3.8)] получаем (1.25). Лемма доказана.

Тензоры f_n^λ, голоморфные на Γ вне точек $P_\pm$, определяются своим видом (1.25) в окрестностях точек $P_\pm$ однозначно с точностью до пропорциональности. Из (1.25) следует, что «порождающий» вектор $\mid\Psi_{\lambda, p_+}^+\rangle$ при $p_+ = 0$ совпадает с обычным «свободным» вакуумным вектором «in-струны», т. е. при $t \to -\infty$

$$\mid\Psi_{\lambda, 0}^+\rangle = 1 \wedge z_+ \wedge z_+^2 \wedge \ldots = \mid 0_\lambda\rangle \tag{1.28}$$

при выборе «in-нормировки» — $\varphi_{n,\lambda}^+ \equiv 1$.

Соответственно левый «порождающий» вектор $\langle\Psi_{\lambda, p_-}^-\mid$ при $p_- = 0$ совпадает с левым «свободным» вакуумом

$$\langle 0_\lambda \mid = \ldots \wedge z_-^3 \wedge z_-^2 \wedge z_-^1 \wedge 1 \tag{1.29}$$

(напомним, что в случае обычной комплексной плоскости $z_- = z_+^{-1}$) при выборе «out-нормировки» — $\varphi_{n,\lambda}^- = 1$. Чтобы не усложнять обозначения, мы будем пользоваться далее только «in-нормировкой». При такой нормировке левый порождающий вектор не совпадает с левым вакуумом, а лишь пропорционален ему:

$$\langle \Psi^-_{\lambda, 0}| = \Big(\prod_{n=-\infty}^{-S(\lambda)} \varphi^-_{n, \lambda}\Big) \langle 0_\lambda |. \tag{1.30}$$

Замечание. Как будет видно в дальнейшем из структуры явных формул для $\varphi^-_{n,\lambda}$, произведение в (1.30) является расходящимся и нуждается в подходящей регуляризации. К этому вопросу мы вернемся ниже, воспринимая пока это произведение формально.

Следствие. а) *Для всех целых* λ

$$\langle 0_\lambda \mid 0_\lambda \rangle = 0. \tag{1.31}$$

б) *Единственным значением* λ, *при котором для чисел* $p_+ = 0$, $p_- = 0$ *выполнено условие* $2S(\lambda) = p_+ + p_- + 1$ (*необходимое для нетривиальности определенного выше скалярного произведения между порождающими векторами*), *является* $\lambda = {}^1/_2$. *Верно равенство*

$$\langle 0_{1/2} | 0_{1/2} \rangle = \Big(\prod_{n=-\infty}^{-1/2} \varphi^-_{n, 1/2}\Big)^{-1}. \tag{1.32}$$

Замечание. Как указал авторам R. Iengo, формальное произведение в правой части (1.32) возникает при вычислении с помощью базиса $f_n^{1/2}$ континуального интеграла по спинорным полям, равного определителю оператора Дирака, и поэтому проблема регуляризации (1.32) есть обычная проблема регуляризации такого определителя.

§ 2. Спинорные структуры и операторная реализация бозонной струны

Зафиксируем произвольное представление $\rho: \pi_1(\Gamma) \to C^*$ фундаментальной группы поверхности Γ в ненулевые комплексные числа и контур σ на Γ, соединяющий отмеченные точки $P_\pm$. Набор $(\Gamma, P_\pm, \rho, \sigma)$ будет называться оснащенной диаграммой. Обозначим через $\mathcal{F}^{1/2}(\rho, p)$ пространство половинных дифференциалов Φ на Γ, голоморфных вне контура σ, на котором предельные значения этих дифференциалов должны удовлетворять условию

$$\Phi^+ = e^{2\pi i p}\Phi^-. \tag{2.1}$$

Кроме того, эти дифференциалы при обходе по любому циклу γ умножаются на число $\rho(\gamma)$. Представления ρ_0 такие, что $\rho_0(\gamma) = \pm 1$ соответствуют обычным спинорным структурам на Γ.

Лемма 2.1. *Для представлений* ρ *общего положения для любого полуцелого* $\nu - p$ *существует единственный половинный дифференциал* $\Phi_\nu(z; \rho) \in \mathcal{F}^{1/2}(\rho, p)$ *такой, что в окрестностях точек* $P_\pm$ *он имеет вид*

$$\Phi_\nu = \varphi^\pm_{\nu, 1/2} z_\pm^{\pm\nu - 1/2}(1 + O(z_\pm))(dz_\pm)^{1/2}, \quad \varphi^+_{\nu, 1/2} \equiv 1, \tag{2.2}$$

константы $\varphi^-_{\nu, 1/2}$ *зависят от* Γ, $P_\pm$, ρ, σ.

Замечание. При $p = 0$ спинорные структуры ρ_0 являются представлениями, для которых справедливо утверждение теоремы, если у соответствующего расслоения не существует голоморфных сечений. Поэтому эти спинорные структуры обязаны быть четными.

Отметим еще, что для целых p, или, что то же самое, полуцелых ν, половинные дифференциалы Φ_ν не зависят от σ.

Все утверждения предшествующего параграфа автоматически переносятся после введения базиса половинных дифференциалов $\Phi_\nu(z; \rho)$ на случай $\lambda = {}^1/_2$. В частности, пространства правых и левых полубесконечных форм $H^\pm_{1/2, \rho}(p)$, построенных по $\Phi_\nu(z, \rho)$, $\nu - {}^1/_2 - p \in Z$, являются модулями над алгеброй (1.10) с центральным зарядом $D = 1$. «Порождающие» векторы (1.15) и (1.18) удовлетворяют при $\lambda = {}^1/_2$, $p_\pm = 0$ условиям «регулярности» вакуума (1.12) и для них имеют место формулы (1.30), (1.32), в которых теперь все величины зависят дополнительно от ρ. Вакуумные векторы в $H^\pm_{1/2,\rho}(0)$ будут далее для краткости обозначаться через $|\,0_\rho\rangle$ и $\langle 0_\rho\,|$.

Рассмотрим стандартные фоковские пространства $\mathcal{H}^\pm$ дираковских фермионов, порожденные операторами ψ_ν и ψ_ν^+ с полуцелыми индексами ν, удовлетворяющими антикоммутационным соотношениям

$$[\psi_\nu, \psi_\mu]_+ = 0, \quad [\psi_\nu^+, \psi_\mu^+]_+ = 0, \quad [\psi_\nu, \psi_\mu^+] = \delta_{\mu+\nu,\,0} \tag{2.2}$$

из «вакуумных векторов» $|\,0_F\rangle$ и $\langle 0_F\,|$ таких, что

$$\psi_\nu\,|\,0_F\rangle = \psi_\nu^+|\,0_F\rangle = 0, \quad \nu > 0; \quad \langle 0_F\,|\,\psi_\nu = \langle 0_F\,|\,\psi_\nu^+ = 0, \quad \nu < 0. \tag{2.3}$$

Если приписать операторам ψ_ν и ψ_ν^+ «заряды», равные 1 и -1 соответственно, то пространства $\mathcal{H}^\pm$ разлагаются в прямую сумму подпространств с фиксированным зарядом p (целым)

$$\mathcal{H}^\pm = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_p^\pm. \tag{2.4}$$

Соответствие, при котором оператору ψ_ν отвечает внешнее умножение полубесконечных форм на Φ_ν, а оператору ψ_ν^+ отвечает дифференцирование $\partial/\partial\Phi_{-\nu}$, устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{H}_p^\pm \approx H^\pm_{1/2\rho}(p)$. Для фермионных вакуумов имеют место равенства

$$|\,0_\rho\rangle = |\,0_F\rangle, \quad \langle 0_F\,| = \Big(\prod_{\nu=-\infty}^{-1/2} \varphi^-_{\nu,\,1/2}(\rho)\Big)\langle 0_\rho|. \tag{2.5}$$

Введем помимо базиса $\Phi_\nu(z;\rho)$ базис «двойственных» половинных дифференциалов, полагая по определению

$$\Phi_\nu^+ = \Phi_\nu^+(z;\,\rho) = \Phi_\nu(z;\,\rho^{-1}). \tag{2.6}$$

Для индексов ν, μ таких, что $\nu + \mu$ целое, произведение $\Phi_\nu\Phi_\mu^+$ является однозначным голоморфным дифференциалом на Γ, голоморфным вне точек $P_\pm$. Из (2.1) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \Phi_\nu\Phi_\mu^+ = \delta_{\mu+\nu,\,0}. \tag{2.7}$$

Определим «фермионные» поля $\psi(z;\rho)$ и $\psi^+(z;\rho)$ на поверхности Γ формулами, в которых суммирование идет по полуцелым ν:

$$\psi(z;\rho) = \sum_\nu \psi_\nu\Phi_{-\nu}(z;\rho), \quad \psi^+(z;\rho) = \sum_\nu \psi_\nu^+\Phi_{-\nu}^+(z;\rho). \tag{2.8}$$

Введенная с помощью дифференциала dk функция «времени» $\tau(z)$ на Γ позволяет определить «хронологически» упорядоченное произведение операторов.

Теорема 2.1. *Хронологически упорядоченное произведение операторов* $\psi(z;\rho)\psi^+(w;\rho)$, *где* $\tau(z) > \tau(w)$, *корректно определено. При* $z \to w$ *имеет место операторное разложение*

$$\psi(z;\rho)\,\psi^+(w;\rho) = \frac{\sqrt{dz\,dw}}{z-w} + J(z,\rho) + O(z-w). \tag{2.9}$$

Коэффициенты разложения операторнозначной 1-*формы* $J(z,\rho)$, *определяемой из* (2.9),

$$J(z,\rho) = \sum_n \alpha_n(\rho)\,d\omega_n(z),$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям аналога алгебры Гейзенберга

$$[\alpha_n(\rho), \alpha_m(\rho)] = \gamma_{nm}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Корректность оператора $\psi(z;\rho)\psi^+(w;\rho)$ означает, что его действие на любой элемент из $\mathcal{H}^\pm$ определяет корректно элемент из $\mathcal{H}^\pm \otimes \mathcal{F}_z^{1/2} \otimes \mathcal{F}_w^{1/2}$. При этом коэффициент при каждом базисном элементе из $\mathcal{H}^\pm$ содержит лишь конечное число произведений $\Phi_\nu(z;\rho)$ $\Phi_\mu^+(w;\rho)$. Представим оператор $\psi(z;\rho)\psi^+(w;\rho)$ в виде

$$\psi(z;\rho)\psi^+(w;\rho) = \sum_{\nu,\mu} :\psi_\nu\psi_\mu^+: \Phi_{-\nu}(z,\rho)\Phi_{-\mu}^+(w,\rho) + \sum_{\nu<0} \Phi_\nu(z;\rho)\Phi_{-\nu}^+(w,\rho), \tag{2.11}$$

где : : — обычное дираковское нормальное произведение фермионных операторов, в котором операторы уничтожения правого вакуума стоят правее всех операторов рождения. В силу этого определения первое слагаемое в (2.11) корректно определяет голоморфный вне точек оператор. Рассмотрим второе слагаемое.

Обозначим через $S_p(z, w;\rho)$ аналоги ядер Сеге, которые однозначно определяются своими следующими аналитическими свойствами. По переменным z и w ядро S_p является половинным дифференциалом, преобразующимся при обходе по любому циклу в соответствии с представлениями ρ и ρ^{-1} соответственно. При фиксированном w ядро S_p по переменной z голоморфно вне точек $P_\pm$, $z = w$ и контура σ, на котором для граничных значений S_p выполнено соотношение (2.1) ($S_p^+ = \exp(2\pi i p) S_p^-$). В окрестностях точек $P_\pm$ имеют место разложения

$$S_p = z_\pm^{\pm p}\, O(1)\,(dz_\pm)^{1/2}, \quad w = \text{const}. \tag{2.12}$$

По переменной w ядро S_p удовлетворяет тем же условиям, что и по переменной z, но с заменой p на $-p$. Наконец, последнее условие, однозначно определяющее S_p. В окрестности $z = w$ ядро S_p имеет вид

$$S_p(z, w;\rho) = \frac{\sqrt{dz\,dw}}{z-w} + ds_p(z;\rho) + O(z-w). \tag{2.13}$$

Дифференциал $ds_p(z,\rho)$, определяемый из разложения (2.13), голоморфен вне точек $P_\pm$, где он имеет простые полюсы с вычетами $\pm p$ (т. е. дифференциал ds_0 голоморфен на Γ всюду).

Лемма 2.2. *Для* $\tau(z) > \tau(w)$ *ряд* (2.14) *сходится и равен*

$$S_p(z, w;\rho) = \sum_{\nu=-\infty}^{p-1/2} \Phi_\nu(z;\rho)\Phi_{-\nu}^+(w;\rho). \tag{2.14}$$

Для $\tau(z) < \tau(w)$ *сходится ряд* (2.15)

$$S_p(z, w;\rho) = -\sum_{p+1/2}^{\infty} \Phi_\nu(z;\rho)\Phi_{-\nu}^+(w;\rho) \tag{2.15}$$

(*суммирование в* (2.14) *и* (2.15) *идет по* ν *таким, что* $\nu - 1/2 - p \in Z$).

Доказательство леммы полностью аналогично доказательству леммы 2.2 работы [2]. Ее утверждение для $p = 0$ доказывает корректность хронологического произведения операторов и равенство (2.9), где

$$J(z,\rho) = \sum_{\nu,\mu} :\psi_\nu\psi_\mu^+: \Phi_{-\nu}(z;\rho)\Phi_{-\mu}^+(z,\rho) + ds_0(z,\rho). \tag{2.16}$$

Разлагая (2.16) по базисным дифференциалам $d\omega_n(z)$, получим

$$\alpha_n(\rho) = \sum_{\nu,\mu} a_{\nu,\mu}^n :\psi_\nu\psi_\mu^+: + a_n, \tag{2.17}$$

где константы $a^n_{\nu,\mu}$ и a_n, зависящие от Γ, $P_\pm$, ρ, равны

$$a^n_{\nu,\mu}=\frac{1}{2\pi i}\oint(A_n\Phi_{-\nu}\Phi^+_{-\mu});\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint A_n\,ds_0. \tag{2.18}$$

Для $|n|>g/2$ имеем, в силу (1.6) и (2.2), что

$$a^n_{\nu,\mu}=0,\quad |n-\nu-\mu|>g/2. \tag{2.19}$$

Для $|n|\leqslant g/2$ ширина полосы в плоскости ν,μ, для которой $a^n_{\nu,\mu}\neq 0$, несколько увеличивается, но остается по-прежнему конечной. Так как дифференциал ds_0 голоморфен, то

$$a_n=a_n(\rho)=0,\quad |n|>g/2,\quad n=-g/2. \tag{2.20}$$

Доказательство соотношений (2.10) мы опустим, поскольку оно проводится аналогично доказательству соотношений (1.11) в теореме 2.1 работы [2]. Теорема доказана.

В дальнейшем для любого оператора H через $\langle H\rangle_\rho$ будет для краткости обозначаться его вакуумное среднее, т. е.

$$\langle H\rangle_\rho=\frac{\langle o_\rho|H|o_\rho\rangle}{\langle o_\rho|o_\rho\rangle}.$$

Следствие 1. *Вакуумное среднее операторов* $\psi(z;\rho)\psi^+(w;\rho)$ *равно*

$$\langle\psi(z;\rho)\psi^+(w;\rho)\rangle_\rho=S_0(z,w;\rho). \tag{2.21}$$

Это равенство вытекает из формул (2.11) и (2.14), а также того, что по определению нормальных произведений фермионных операторов имеем $\langle:\psi_\nu\psi^+_\mu:\rangle_\rho=0$.

Замечание. Формула (2.21) для случая спинорных структур ρ_0 совпадает с хорошо известным выражением для «фермионного пропагатора». Однако при отсутствии операторной реализации она для $g>0$ выступает в физической литературе скорее в качестве определения левой части равенства.

Формулы (2.17) обобщают на случай $g>0$ формулы «ферминизации» операторов рождения и уничтожения свободной бозонной струны. Возникновение аномального члена a_n в этих формулах является следствием такого определения α_n, при котором бы сохранялось на произвольных римановых поверхностях операторное разложение (2.9).

Следствие 2. *Имеет место равенство*

$$\langle\alpha_n(\rho)\rangle_\rho=a_n=a_n(\rho). \tag{2.22}$$

Для представлений ρ_0, отвечающих фиксации на Γ спинорной структуры, из равенств (2.14) и (2.15) следует, что

$$S_0(z,w;\rho_0)=-S_0(w,z;\rho_0). \tag{2.23}$$

Из (2.23) вытекает, что $ds_0(z,\rho_0)=0$. Отсюда получаем

Следствие 3. *Для спинорных структур* ρ_0 *имеем для всех* n

$$\langle\alpha_n(\rho_0)\rangle_{\rho_0}=0. \tag{2.24}$$

(Напомним, что ρ_0 — четная спинорная структура.)

Из хода доказательства теоремы 2.1 видно, что корректно определено хронологическое произведение любого числа «фермионных» операторов, причем для этого произведения справедлива, как и в случае $g=0$, *теорема Вика*:

$$\Psi(z_1;\rho)\ldots\Psi(z_N;\rho)=\sum_I\pm\prod_{i,j\in I}\langle\Psi(z_i;\rho)\Psi(z_j;\rho)\rangle_\rho:\prod_{k\notin I}\Psi(z_k;\rho): \tag{2.25}$$

Здесь $\Psi(z; \rho)$ — это либо $\psi(z; \rho)$, либо $\psi^+(z, \rho)$. Суммирование в (2.25) идет по всем четным подмножествам набора индексов $(1, \ldots, N)$ и по всем способам разбиения этих наборов на пары (i, j). Знак перед произведением является знаком соответствующей перестановки. Для того чтобы можно было воспользоваться формулой (2.25) для вычисления вакуумных средних, необходимо привести еще равенства

$$\langle \psi(z; \rho)\, \psi(w; \rho)\rangle_\rho = 0; \quad \langle \psi^+(z; \rho)\, \psi^+(w; \rho)\rangle_\rho = 0. \tag{2.26}$$

Рассмотрим теперь не только вакуумные, но и другие порождающие векторы, заданные формулами (1.15) и (1.18) при $\lambda = {}^1/_2$ (и которые зависят от ρ, а для нецелых p еще и от σ). Для краткости обозначим их через

$$|\Psi^+_{1/2, \rho, p}\rangle = |p_\rho\rangle, \tag{2.27}$$

$$\langle \Psi^-_{1/2, \rho, p}| = \Big(\prod_{\nu=-\infty}^{p-1/2} \varphi^-_{\nu, 1/2}(\rho)\Big) \langle p_\rho|. \tag{2.28}$$

Появление нормировочного множителя в (2.28) связано с использованием «in»-нормировки ($\varphi^+_\nu \equiv 1$). Асимптотически векторы $|p_\rho\rangle$ и $\langle p_\rho|$ совпадают в окрестностях точек $P_\pm$ с соответствующими векторами свободной струны.

Пусть p — целое. Тогда операторы $\alpha_n(\rho)$, определенные формулой (2.17), действуют на векторы $|p_\rho\rangle$ и $\langle p_\rho|$ следующим образом:

$$\alpha_n\, |p_\rho\rangle = 0, \quad n > g/2; \qquad \alpha_{-g/2}\, |p_\rho = p\, |p_\rho\rangle, \tag{2.29}$$

$$\langle p_\rho|\, \alpha_n = 0, \quad n < -g/2; \quad \langle p_\rho|\, \alpha_{-g/2} = p\, \langle p_\rho|. \tag{2.30}$$

Эти формулы вытекают из утверждения следующей леммы.

Лемма 2.3. *Оператор* $J(z; \rho)$, *определенный из разложения* (2.9) *и имеющий вид* (2.16), *можно представить в форме*

$$J(z; \rho) = \sum_{\nu, \mu} :\psi_\nu \psi^+_\mu: \Phi_{-\nu}(z; \rho)\, \Phi^+_{-\mu}(z; \rho) + ds_p(z; \rho), \tag{2.31}$$

где $:\ :_p$ — *нормальное упорядочение фермионных операторов по отношению к вектору* $|p_\rho\rangle$, *при котором операторы его уничтожения стоят правее операторов рождения.*

Доказательство леммы вытекает из равенства (2.14).

Определим для любого p (а не только для целых) действие операторов α_n в пространстве $H^+_{1/2, \rho}(\pm p)$ с помощью формулы

$$\alpha_{n, p}(\rho) = \sum a^n_{\nu, \mu} :\psi_\nu \psi^+_\mu:_p + a_{n, p};\ \nu - p - {}^1/_2 \in Z,\ \mu + \nu \in Z, \tag{2.32}$$

где константы $a^n_{\nu, \mu}$ даются формулой (2.18), а константа $a_{n, p}$ также дается формулой (2.18), но после замены в последней дифференциала ds_0 на ds_p.

Прежде чем сформулировать утверждение следующей леммы, отметим, что операторы $\alpha_{n, p}$, определенные формулой (2.32) при каком-либо p, действуют в пространствах $H^\pm_{1/2, \rho}(\pm p')$, $p - p' = k$ — целое.

Лемма 2.4. *Операторы* $\alpha_{n, p}$, *заданные формулой* (2.32) *при* p *и* p' *таких, что* $p - p' = k$ — *целое, совпадают. Для этих операторов справедливы равенства* (2.29) *и* (2.30).

Векторы $|p_\rho\rangle$ и $\langle p_\rho|$, как и всякие порождающие векторы, аннулируются операторами L_n с $n > g_0$ и $n < -g_0$ соответственно. Кроме того,

$$L_{g_0}|p_\rho\rangle = \frac{p^2}{2}|p_\rho\rangle; \quad \langle p_\rho|L_{-g_0} = \varphi^-_{-g_0, -1} \cdot \frac{p^2}{2}\langle p_\rho| \tag{2.33}$$

(напомним, что оператор L_{-g_0} соответствует векторному полю e_{-g_0}, имеющему в окрестности точки P_- вид $\varphi^-_{-g_0, -1} \cdot z_-(1 + O(z_-)\partial/\partial z_-)$.

Равенства (2.33) означают, что векторы $|p_\rho\rangle$ и $\langle p_\rho|$ имеют, как говорят, конформную размерность, равную $p^2/2$. Это согласуется с тензорным весом величины

$$\mathcal{A}(p; P_+, P_-, \Gamma, \rho) = \frac{\langle -p_\rho | p_\rho\rangle}{\langle 0_\rho | 0_\rho\rangle}, \tag{2.34}$$

которую мы вначале рассмотрим для случая целых p. Оба бесконечных произведения (1.30) и (2.28) являются расходящимися и нуждаются в регуляризации. Вместе с тем, для случая целых p их отношение корректно определено. Имеем

$$\mathcal{A}(\pm p; P_+, P_-, \Gamma, \rho) = \prod_{\mp 1/2}^{\mp p \pm 1/2} (\varphi^-_{\nu, 1/2}(\rho))^{\pm 1}, \quad p > 0. \tag{2.35}$$

Нормировочные константы $\varphi^-_{\nu, 1/2}$ зависят по самому своему определению не только от Γ, $P_\pm$, ρ, но и от выбора локальных координат в окрестностях точек $P_\pm$. Таким образом, они являются по переменным $P_\pm$ тензорами веса ν. При этом величина $\mathcal{A}(p, P_+, P_-)$ является тензором веса $\lambda_p = p^2/2$.

Выражения для величин $\varphi^-_{\nu, 1/2}(\rho)$ мы приведем лишь для случаев представлений ρ_0, отвечающих четным спинорным структурам. (Общий случай отличается от этого незначительными изменениями.) Для этого зафиксируем на Γ базис циклов a_i, b_j с канонической матрицей пересечений. Фиксация этого базиса позволяет ввести: базис нормированных голоморфных дифференциалов ω_i на Γ, матрицу их b-периодов, якобиан $J(\Gamma)$ кривой Γ, отображение Абеля A: $\Gamma \to J(\Gamma)$ и ввести тэта-функцию Римана $\theta(v)$, $v = (v_1, \ldots, v_g)$. Аналогично тому, как в [5; 7] строятся формулы для решений уравнений цепочки Тода, можно получить следующее выражение:

$$\varphi^-_{\nu, 1/2} = E(P_+, P_-)^{-2\nu} \frac{\theta[\rho_0]((\nu - 1/2)(A(P_+) - A(P_-)))}{\theta[\rho_0]((\nu + 1/2)(A(P_+) - A(P_-)))}, \tag{2.36}$$

где $\theta[\rho_0](v)$ — тэта-функция с четной характеристикой ρ_0, а $E(P_+, P_-)$ — так называемая прим-форма (см. [8; 9]):

$$E^2(P_+, P_-) = \frac{\theta^2[m](A(P_+) - A(P_-))}{\left(\sum \omega_i(P_+)\theta_i[m](0)\right)\left(\sum \omega_i(P_-)\theta_i[m](0)\right)}. \tag{2.37}$$

Выбором локальных координат $z_\pm$ значение прим-формы в точках $P_\pm$ можно сделать равным 1. При таком выборе $z_\pm$ естественно положить бесконечное произведение в (1.32) равным

$$\langle o_\rho | o_\rho\rangle = \theta[\rho_0](0). \tag{2.38}$$

В этих же локальных координатах имеем

$$\mathcal{A}(p, P_+, P_-, \Gamma, \rho) = \frac{\theta[\rho_0](p(A(P_+) - A(P_-))}{\theta[\rho_0](0)}. \tag{2.39}$$

К выражению (2.39) можно прийти и для не целых p, если сначала регуляризовать подобно (2.38) произведение в (2.28), а потом взять отношение соответствующего выражения и (2.38). Правда, для нецелых p получающаяся величина зависит от контура σ через вектор разности $A(P_+) - A(P_-)$ с координатами

$$A_k(P_+) - A_k(P_-) = \int_\sigma \omega_k. \tag{2.40}$$

Усредняя величину $\mathcal{A}(p, P_+, P_-, \Gamma, \rho_0)$ по всем классам гомологий цикла σ, получим для рациональных $p = r/n$ выражение

$$\mathcal{A} = \frac{(\varepsilon_m(P_+, P_-))^{P^2}}{\theta[\rho_0](0)} \cdot \prod_{N,M} \left[\frac{\theta[\rho_0](p(A_+ - A_-)) + N + BM))}{\theta^{p^2}[m]((A_+ - A_-) + N + BM)} \right]^{n^{-2g}}, \tag{2.41}$$

$$A_\pm = A(P_\pm); \quad \varepsilon_m^2(P_+, P_-) = \left(\sum \omega_i(P_+)\theta_i[m](0)\right)\left(\sum \omega_i(P_-)\theta_i[m](0)\right),$$

где произведение берется по всем целочисленным векторам $N = (N_1, \ldots, N_g)$, $M = (M_1, \ldots, M_g)$, $|N_i|$, $|M_i| \leqslant n$, а B — матрица b-периодов голоморфных дифференциалов на Γ [1]).

Для иррациональных p результат усреднения имеет вид

$$\mathcal{A}(p, P_+, P_-, \Gamma, \rho_0) = \left[\frac{\theta[\rho_0](A(P_+) - A(P_-))}{E(P_+, P_-)\theta[\rho_0](0)} \right]^{p^2}. \tag{2.42}$$

Последнее выражение допускает аналитическое продолжение на комплексные значения p, что необходимо для определения двухточечной амплитуды рассеяния в случае метрики Минковского. Действительно, как видно из результатов настоящего параграфа, in и out — фоковские пространства бозонной струны в D-мерном пространстве Минковского изоморфны D-кратной тензорной степени пространств $H^{\pm}_{1/2,\rho}(0)$, которые изоморфны подпространствам с нулевым зарядом фоковского пространства дираковских фермионов

$$H^{\text{in}}_{\text{out}\,\Gamma} \approx (H^{\pm}_{1/2,\rho}(0))^{\otimes D} \approx (\mathcal{H}_0^{\pm})^{\otimes D}. \tag{2.43}$$

При этом изоморфизме операторы α_n^μ переходят в операторы, которые на μ-м сомножителе действуют как оператор $\alpha_n(\rho)$, если $\mu > 1$, и как оператор $i\alpha_n(\rho)$ при $\mu = 1$. На остальных сомножителях α_n^μ действуют как единичные операторы.

При таком определении состояние с импульсом $|\vec{p}\rangle$, $\vec{p} = (p^\mu)$, совпадает с тензорным произведением соответствующих порождающих векторов

$$|\vec{p}\rangle = \bigotimes_{\mu=1}^{D} |\sqrt{\eta^\mu}\, p^\mu_\rho\rangle, \quad \eta^{\mu\nu} = \eta^\mu \delta^\nu_\mu. \tag{2.44}$$

Следовательно,

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\vec{p}, P_+, P_-, \Gamma, \rho) = \prod_{\mu=1}^{D} \mathcal{A}(\sqrt{\eta^\mu}\, p^\mu, P_+, P_-, \Gamma, \rho). \tag{2.45}$$

Другой вариант построения в случае метрики Минковского таков. Меняя определение «вершинного» оператора, переводящего $|0\rangle$ в $|p\rangle$, за счет замены in-нормировок базисных полей на out-нормировки, приходим к выражению (p — целое)

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\vec{p}, P_+, P_-, \Gamma, \rho) = \prod_{\mu=1}^{D} [\mathcal{A}(p^\mu, P_+, P_-, \Gamma, \rho)]^{\eta^\mu}. \tag{2.46}$$

К анализу этой возможности авторы предполагают вернуться в последующих работах. Сейчас мы не знаем, какой вариант правилен.

§ 3. «Псевдотензор» энергии-импульса

Отсутствие естественного нормального упорядочения произведений бозонных операторов α_n^μ в случае $g > 0$ приводит, как уже говорилось выше, к неоднозначности определения (1.8) тензора энергии-импульса. Основной

[1]) Другой вариант состоит в усреднении только по контурам $\sigma=\sigma(\tau)$ из P_+ в P_-, вдоль которых «время» $\tau(\sigma)$ монотонно возрастает. В настоящее время мы не знаем, какой вариант правилен.

целью настоящего параграфа является введение инвариантным образом «псевдотензора» энергии-импульса $\widetilde{T}(z)$, зависящего лишь от «диаграммы» Γ, P_+, P_-.

Теорема 3.1. *Хронологическое произведение операторов $J(z)J(w)$, $J = (J^\mu)$ корректно определено. При $z \to w$ имеет место операторное разложение*

$$J(z)\,J(w) = D\frac{dz\,dw}{(z-w)^2} + 2\widetilde{T}(z) + O(z-w). \tag{3.1}$$

Для любой проективной связности R_Σ, голоморфной вне точек $P_\pm$, коэффициенты L_k разложения операторнозначного квадратичного дифференциала

$$T = \widetilde{T} - \frac{D}{2}R_\Sigma = \sum_k L_k d^2\Omega_k \tag{3.2}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.11), (1.12) *аналога алгебры Вирасоро.*

Доказательство. Зафиксируем следующий способ нормального упорядочения:

$$\begin{aligned} &:\alpha_n\alpha_m: \,= \alpha_m\alpha_n, \quad \text{если } n > g/2,\ m < -g/2,\\ &:\alpha_n\alpha_m: \,= \alpha_n\alpha_m, \quad \text{в остальных случаях.}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Оператор $J(z)J(w)$ можно представить в виде

$$J(z)\,J(w) = \sum :\alpha_n\alpha_m: d\omega_n(z)\,d\omega_m(w) + D\sum_{n>g/2}^{m<-g/2} \gamma_{nm}\,d\omega_n(z)\,d\omega_m(w). \tag{3.4}$$

(Если изменить способ нормального упорядочения, то равенство (3.4) останется справедливым, если соответствующим образом изменить пределы суммирования во втором слагаемом правой части (3.4).)

Первое слагаемое в (3.4) корректно определяет голоморфный вне точек $P_\pm$ оператор. Рассмотрим второе слагаемое. Пусть $\Omega(z, w)$ — бидифференциал на Γ, который однозначно определяется своими аналитическими свойствами: по каждой из переменных z и w он является голоморфным вне диагонали $z = w$ дифференциалом; по переменной z он имеет нуль порядка g в точке P_-, а по переменной w — нуль порядка g в точке P_+. В окрестности $z = w$ он имеет вид

$$\Omega(z, w) = \frac{dz\,dw}{(z-w)^2} + R_0(z) + O(z-w). \tag{3.5}$$

Значение регулярной части $\Omega(z, w)$ на диагонали — $R_0(z)$ — является голоморфной проективной связностью.

Лемма 3.1. *Для $\tau(z) > \tau(w)$ ряд* (3.6) *сходится и равен*

$$\Omega(z, w) = \sum_{n>g/2}^{m<-g/2} \gamma_{nm}\,d\omega_n(z)\,d\omega_m(w). \tag{3.6}$$

Доказательство. По определению γ_{nm} имеем, что правая часть в (3.6) равна

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\tau} \sum dA_n(z_1)\,A_m(z_1)\,d\omega_n(z)\,d\omega_m(w) \tag{3.7}$$

(здесь и в (3.8) суммирование ведется, как и в (3.5), по $n > g/2$, $m < -g/2$). Интеграл берется по контуру $\tau(z_1) = \tau_1$, где $\tau(z) > \tau_1 > \tau(w)$. В силу леммы 2.2 работы [2] ряды, стоящие под знаком интеграла в (3.7), сходятся. Используя получающиеся выражения, найдем

$$\sum \gamma_{nm}\,d\omega_n(z)\,d\omega_m(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint dz_1\left(\frac{\partial}{\partial z_1} K_{g/2+1}(z_1, z)\,dz\right) K_{-g/2-1}(z_1, w)\,dw, \tag{3.8}$$

где $K_N(z, w)\,dw$ — ядра типа Коши, определенные в [2]. Из (3.8) и аналитических свойств этих ядер вытекает утверждение леммы.

Лемма 3.1 и равенство (3.4) доказывают первое утверждение теоремы и равенство (3.1), из которого следует, что

$$\tilde{T}(z) = \frac{1}{2}\sum :\alpha_n\alpha_m: d\omega_n(z)\, d\omega_m(z) + \frac{D}{2} R_0(z). \tag{3.9}$$

Последнее утверждение теоремы достаточно доказать лишь для одной какой-либо связности. Например, для связности $R_0(z)$. В этом случае имеем

$$T(z) = \tilde{T} - \frac{D}{2} R_0 = \frac{1}{2}\sum :\alpha_n\alpha_m: d\omega_n\, d\omega_m, \tag{3.10}$$

где нормальное упорядочение дается формулами (3.3). Для коцикла χ^{Σ}_{nm}, отвечающего этому способу нормального упорядочения, можно получить выражение, аналогичное формуле [2, (2.54)], которая была выведена в [2] для других способов нормального упорядочения. Сравнение получающегося выражения с (3.8) доказывает утверждение теоремы.

Доказательство следующего фундаментального в конформной теории поля операторного разложения произведения тензоров (вернее, псевдотензоров) энергии-импульса аналогично доказательству теорем 2.1 и 3.1 и поэтому будет опущено.

Теорема 3.2. *Хронологическое произведение операторов $\tilde{T}(z)\tilde{T}(w)$ корректно определено.* При $z \to w$ *имеет место разложение*

$$\tilde{T}(z)\tilde{T}(w) = \frac{D}{2(z-w)^4} + \frac{2\tilde{T}(z)}{(z-w)^2} + \frac{\tilde{T}_z(z)}{z-w} + O(1). \tag{3.11}$$

Полученные выше операторные разложения в сочетании с теоремой Вика позволяют легко находить средние от произведений операторов $J(z_i)\tilde{T}(z_j)$. Рассмотрим в качестве примера среднее от оператора $\tilde{T}(z)$, отвечающее за конформную аномалию. Из теоремы 2.1 следует

$$\langle J(z)\,J(w)\rangle_\rho = \lim_{z_1\to z}\lim_{w_1\to w}\left\langle\left(\psi(z)\,\psi^+(z_1) - \frac{1}{z-z_1}\right)\left(\psi(\omega)\,\psi^+(\omega_1) - \frac{1}{w-w_1}\right)\right\rangle_\rho. \tag{3.12}$$

Используя для вычисления среднего от произведения четырех фермионных операторов формулу (2.24), получим

$$\langle J(z)\,J(w)\rangle_\rho = -S_0(z, w; \rho)\,S_0(w, z; \rho). \tag{3.13}$$

Разложение бидифференциала

$$-S_0(z, w; \rho)\,S_0(w, z, \rho) = \frac{dz\,dw}{(z-w)^2} + R_\rho(z) + O(z-w) \tag{3.14}$$

на диагонали $z = w$ определяет проективную связность $R_\rho(z)$, зависящую от представления ρ, но не зависящую от точек $P_\pm$. Поэтому, хотя вся наша конструкция зависит от фиксации пары точек $P_\pm$, вакуумное среднее $\langle\tilde{T}(z)\rangle_\rho$ от этого произвола не зависит. Из (3.1) и (3.13) следует

$$\langle\tilde{T}(z)\rangle_\rho = \frac{D}{2} R_\rho(z). \tag{3.15}$$

Пример. $g = 1$. Для трех спинорных структур ρ_α, отвечающих фиксации трех четных полупериодов ω_α, $\alpha = 1, 2, 3$ эллиптической кривой Γ, соответствующее ядро Сеге имеет вид

$$S_0(z, \omega, \rho_\alpha) = \frac{\sigma(z-w+\omega_\alpha)}{\sigma(z-w)\,\sigma(w_\alpha)}\, e^{-\eta_\alpha(z-w)}. \tag{3.16}$$

Отсюда и из (3.14) получим

$$\langle \tilde{T}(z)\rangle_{\rho_\alpha} = \frac{D}{2}\wp(\omega_\alpha), \tag{3.17}$$

где σ, $\wp$ — функции Вейерштрасса. Этот результат совпадает с результатами вычислений для среднего тензора энергии-импульса на эллиптической кривой, полученными в [10] с помощью иного подхода, основанного на использовании тождеств Уорда.

§ 4. Дополнения и некоторые замечания

В предшествующих параграфах, как и в работах [1; 2], рассматривался лишь «бозонный сектор» в теории замкнутой струны. Хорошо известно, что построение конформно инвариантной теории требует введения дополнительных «духовых» полей $b(z)$ и $c(z)$, имеющих тензорный вес 2 и -1 соответственно. Разлагая эти поля по базисным тензорам

$$b(z) = \sum_n b_n d^2\Omega_n(z), \tag{4.1}$$

$$c(z) = \sum_n c_n e_n(z), \tag{4.2}$$

определим операторы b_n и c_n с обычными антикоммутационными соотношениями

$$[b_n, b_m]_+ = 0, \quad [c_n, c_m]_+ = 0, \quad [b_n, c_m]_+ = \delta_{n,m}. \tag{4.3}$$

Как было показано в [11], использование наших конструкций (в частности, базисов e_n и $d^2\Omega_n$) позволяет естественно обобщить на случай поверхностей Γ рода $g > 0$ определение тензора энергии-импульса $T^{b,c}(z)$ духовых полей и определение оператора BRST заряда Q. Не останавливаясь в деталях на этих определениях, мы сделаем лишь несколько замечаний о вакуумных средних в «духовом» секторе. В соответствии с принципом «регулярности» вакуумные векторы $|o_{gh}\rangle$ и $\langle o_{gh}|$ духового сектора должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} b_n\,|o_{gh}\rangle &= 0, \quad n \geqslant g_0 - 1; \quad \langle o_{gh}|\,b_n = 0, \quad n \leqslant -g_0 + 1;\\ c_n\,|o_{gh}\rangle &= 0, \quad n < g_0 - 1; \quad \langle o_{gh}|\,c_n = 0, \quad n > -g_0 + 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Эти векторы можно отождествить с «вакуумными» векторами $|o_2\rangle$ и $\langle o_2|$, определенными в § 1 (формулы (1.28), (1.30) при $\lambda = 2$), если задать представление операторов b_n и c_n в $H_2^{\pm}$, при котором оператору c_n соответствует внешнее умножение полубесконечных форм на $f_n^2 = d^2\Omega_{-n}$, а оператору b_n — «внутреннее» дифференцирование $\partial/\partial f_n^2$. Как уже отмечалось выше, скалярное произведение таких векторов равно нулю:

$$\langle o_2 | o_2\rangle = 0. \tag{4.5}$$

Простейшая отличная от нуля величина, которую можно образовать с помощью скалярных произведений, имеет вид

$$\begin{aligned} &\langle o_2|c_{-1}c_0c_1|o_2\rangle = 1, \quad g = 0,\\ &\langle o_2|b_{-1/2}c_{1/2}|o_2\rangle \neq 0, \quad g = 1,\\ &\langle o_2|b_{-g_0+2}\ldots b_{g_0-2}|o_2\rangle = \Big(\prod_{n=-\infty}^{-g_0+1}\varphi_{n,2}^{-}\Big)^{-1}, \quad g > 1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Поскольку операторы b_n с $|n| \leqslant g_0 - 2$ соответствует при $g > 1$ голоморфным квадратичным дифференциалам, образующим базис в кокасательном расслоении к многообразию модулей кривых рода g, то квадрат модуля формулы (4.6) определяет некоторую меру на многообразии модулей кривых рода g с парой отмеченных точек. К вопросу о выражении через эти величины и нормы вакуумных векторов бозонного сектора меры Полякова на многообразии модулей мы обратимся в последующей работе.

Отметим дополнительно, что остается пока открытым вопрос об определении среднего $\langle T^{b,c}\rangle_{gh}$ тензора энергии-импульса духов. Дело в том, что аналогично (4.5) имеем

$$\langle o_2 \mid T^{b,c}(z) \mid o_2\rangle = 0. \tag{4.7}$$

Отличны от нуля выражения типа

$$\langle o_2 \mid T^{b,c}(z) b_{-g_0+2} \ldots b_{g_0-2} \mid o_2\rangle \neq 0. \tag{4.8}$$

Возможно, произвол, который имеется здесь, связанный с тем, что оператор $T^{b,c}$ можно поставить справа от операторов b_n или между ними, компенсирует произвол в бозонном секторе, связанный с фиксацией спинорной структуры на Г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кричевер И. М.*, *Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов // Функцион. анализ и его прил.— 1987. Т. 21, вып. 2.— С. 46—63.
2. *Кричевер И. М.*, *Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского // Функцион. анализ и его прил.— 1987. Т. 21, вып. 4.— С. 47—61.
3. *Кричевер И. М.* Метод Лапласа, алгебраические кривые и нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его прил.— 1984. Т. 18, вып. 3.— С. 43—56.
4. *Кричевер И. М.* Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шредингера, нестационарная модель Пайерлса // Функцион. анализ и его прил.— 1986. Т. 20, вып. 3.— С. 42—54.
5. *Кричевер И. М.* Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения // УМН.— 1978. Т. 33, вып. 4.— С. 215—216.
6. *Mumford D.* An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions of the Toda lattice equation and related non-linear equations // Int. Symp. Geom. Kyoto.— 1977.— P. 115—153.— Kinokuniya Store, Tokyo, 1977.
7. *Кричевер И. М.* Нелинейные уравнения и эллиптические кривые // Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983. Т. 23.— С. 79—136.
8. *Fay J.* Theta-functions on Riemann surfaces // Lect. Notes in Math. Springer.— 1973. V. 352.— P. 137.
9. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН.— 1981.— Т. 36, вып. 2.— С. 11—80.
10. *Bonora L.*, *Bregola M.*, *Cotto-Rumsisino P.*, *Martellini A.* Virasoro-type algebras and BRST operators on Rieman surfaces. Preprint CERN.— TH. 4889/87, 1987.
11. *Eguchi T.*, *Ooguri H.* Conformal and Current algebras on general Riemann surface // Univ. of Tokyo. Preprint UT — 491, 1986.

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау

Поступило в редакцию
28 марта 1988 г.