Математические заметки

том 47 выпуск 2 февраль 1990

ОБОБЩЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ РОДЫ И ФУНКЦИИ БЕЙКЕРА — АХИЕЗЕРА

И. М. Кричевер

0. Введение. Классические мультипликативные роды многообразий обладают, как было показано в [1], замечательным свойством, которое теперь называется свойством жесткости. Эти роды (сигнатура и эйлерова характеристика для ориентируемых многообразий, A-род для спинорных многообразий, род Тодда и общий T_y-род для унитарных многообразий) совпадают с индексом соответствующих эллиптических операторов. Если на многообразии X действует компактная группа Ли G, то ядро и коядро соответствующего оператора являются конечномерными G-модулями, что позволяет естественно определить понятие эквивариантного рода — индекс-характера $h^G(X)$: $G \to Q$. Значение этого характера в единице группы совпадает с $h\ (X)$ -родом многообразия. Свойство «жесткости» означает, что если G — связная компактная группа Ли, то индекс-характер постоянен на группе. Для A-рода спинорного многообразия, допускающего нетривиальное действие такой группы, из этого следует, что $A\ (X) = 0$ (т. е. A-род является препятствием для существования нетривиальных действий на спинорных многообразиях связных компактных групп Ли [1]).

Доказательство этих утверждений в [1] основывалось на теореме Атьи — Зингера об индексе. В работах [2, 3] автора было предложено иное доказательство этих же утверждений, основная идея которого заключалась в прямом исследовании глобальных аналитических свойств выражений Коннера — Флойда (эти выражения будут представлены в п. 2). Кроме того, в [3] было доказано, что если первый класс Чжэня унитарного многообразия делится на целое число k, $c_1(X) \equiv 0 \pmod k$, то свойством жесткости обладает и A_k-род. (Производящий ряд для рода A_k, $k = 2, 3, 4, \ldots$, имеет вид $kxe^x/(e^{kx} - 1)$.) В частности, из этого следует, что если на таком многообразии существует нетривиальное действие S^1, сохраняющее квазикомплексную структуру, то $A_k\ (X) = 0$. Позднее этот результат был переоткрыт в [4].

Теория эллиптических родов и эллиптических когомологий, возникшая в последние годы в работах Виттена, Ошанина, Ландвебера, Стонга и продолжающая привлекать внимание многочисленных исследователей, была стимулирована гипотезой Виттена [5] о том, что свойством жесткости обладают индекс-характеры «скрученных» операторов Дирака, действующих в сечениях расслоений $S \otimes T_{R_i}$, где S — главное спинорное расслоение, а T_{R_i} — ассоциированные спинорные расслоения, отвечающие серии специальных спинорных представлений $R_0 = 1$, $R_1 = T$, $R_2 = \Lambda^2 T \oplus T$, $R_3 = \Lambda^3 T \oplus (T \otimes T) \oplus T, \ldots$ Здесь T — касательное расслоение. (В качестве основной ссылки по указанному вопросу укажем [6].)

Оказалось, что гипотеза Виттена эквивалентна свойству жесткости для эквивариантного эллиптического рода (подробное изложение истории см. в [7]). Эллиптический род — кольцевой гомоморфизм

$$\varphi\colon \Omega_*^{SO} \to R$$

был определен Ошаниным [8]. Его значение на образующих дается производящим рядом

$$g_\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi([CP^{2n}])}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{R(t)}}, \tag{0.1}$$

где $R(t) = 1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4$. Этот ряд является логарифмом формальной группы Эйлера

$$F(u, v) = g_\varphi^{-1}(g_\varphi(u) + g_\varphi(v)) = \frac{u\sqrt{R(v)} + v\sqrt{R(u)}}{1 - \varepsilon u^2 v^2}. \tag{0.2}$$

Для спинорных многообразий свойство жесткости эллиптического рода было доказано Ошаниным для случаев полусвободных действий и действий, сохраняющих квазикомплексную структуру [9].

Как было показано Виттеном [10], эллиптический род совпадает с индексом оператора типа Дирака на пространстве петель $\mathcal{L}X$, а свойство его жесткости для общих S^1-действий на спинорных многообразиях вытекает из естественных (но не доказанных в тот момент) свойств суперсимметричной нелинейной сигма-модели. Программа Виттена доказательства жесткости эллиптического рода была строго реализована Таубсом [11].

Важным следствием подхода Виттена явилось чрезвычайно естественное в рамках квантовой теории поля объяснение модулярных свойств «универсального эллиптического рода», которые непосредственно были впервые обнаружены в [12, 13].

Универсальным эллиптическим родом называется гомоморфизм

$$\varphi\colon \Omega_*^{SO} \to Z\left[\frac{1}{2}\right][\delta, \varepsilon], \tag{0.3}$$

задаваемый формулой (0.1), в которой δ, ε рассматриваются как независимые переменные. Как было показано в упомянутых работах, гомоморфизм φ можно рассматривать как гомоморфизм

$$\varphi\colon \Omega_*^{SO} \to Q[[q]], \quad q = e^{2\pi i\tau},$$

образ которого есть модулярные формы уровня 2. При этом δ и ε есть образующие в кольце таких форм, имеющие веса 2 и 4 соответственно.

В недавней работе Хирцебруха [14] было предложено дальнейшее обобщение эллиптических родов, использующее модулярные формы уровня N. Доказано, что эти «эллиптические роды уровня N» обладают свойством жесткости в случае унитарных действий S^1 на многообразиях, первый класс Чжэня которых делится на N.

В настоящей работе будет определен «обобщенный эллиптический род» квазикомплексных многообразий, содержащий в качестве частных и предельных случаев все перечисленные выше роды. Важно отметить, что производящий ряд такого рода (см. (1.1), (1.4), (1.6)) является простейшей функцией типа Бейкера—Ахиезера, играющей ключевую роль в теории нелинейных интегрируемых уравнений. В частности, именно эта функция была использована в [15] при интегрировании эллиптической системы Мозера — Калоджеро. Она, как было показано в [15], удовлетворяет функциональному уравнению (1.9), обобщающему классические формулы сложения эллиптических функций.

В п. 2 доказывается, что предложенный род обладает свойством жесткости для унитарных S^1-действий на SU-многообразиях, т. е. квазикомплексных многообразиях, первый класс Чжэня которых равен нулю. Было бы крайне интересно понять, индексу какого оператора отвечает этот обобщенный эллиптический род.

1. Обобщенный эллиптический род. В рамках настоящей работы всюду, где не оговорено противное, мы рассматриваем унитарные категории, т. е. все многообразия предполагаются квазикомплексными, действия групп на них, пучки предполагаются унитарными.

Рациональный мультипликативный род Хирцебруха, т. е. гомоморфизм $h\colon U_* \to Q$, задается рядом $x/h(x)$, $h(x) = x + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i x^i$, $\lambda_i \in Q$. Значение такого гомоморфизма на классе бордизмов n-мерного многообразия X равно

$$h(X) = \left\langle \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{h(x_i)},\ [X] \right\rangle, \tag{1.1}$$

где x_i — образующие Ву, симметрические полиномы от которых есть классы Чжэня касательного расслоения

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} c_i(X). \tag{1.2}$$

В работе [16] С. П. Новиковым было доказано, что $h(x)$ совпадает с рядом $g_h^{-1}(x)$, функционально обратным логарифму

$$g_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h([CP^n])}{n+1} x^{n+1} \tag{1.3}$$

формальной группы $f_h(u, v)$, являющейся образом формальной группы «геометрических» кобордизмов

$$f(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v)), \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[CP^n]}{n+1} x^{n+1}$$

при гомоморфизме h.

Пусть Γ — произвольная эллиптическая кривая с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\operatorname{Im} \omega_2/\omega_1 > 0$. Определим функцию $\Phi(x, z) = \Phi(x, z \mid \omega_1, \omega_2)$ формулой

$$\Phi(x, z) = \frac{\sigma(z - x)}{\sigma(x)\sigma(z)} e^{\zeta(z)x}, \tag{1.4}$$

где $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ — стандартные функции Вейерштрасса (см. [17]).

Обозначим через $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(z, k_0 \mid \omega_1, \omega_2)$ комплекснозначный мультипликативный род

$$\hat{\varphi}\colon U_* \to C, \tag{1.5}$$

задаваемый формулой (1.1), где ряд $1/h(x)$ (зависящий от всех перечисленных параметров) равен

$$\hat{\Phi}(x, z, k_0 \mid \omega_1, \omega_2) = \Phi(x, z \mid \omega_1, \omega_2) e^{-k_0 x}. \tag{1.6}$$

Функция $\Phi(x, z)$ является, как было уже сказано во введении, простейшей функцией Бейкера — Ахиезера (общее определение которых было дано в [18]). Она является решением уравнения Ламе [19]

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\wp(x)\right)\Phi(x, z) = \wp(z)\Phi(x, z). \tag{1.7}$$

Как функция переменной z, $\Phi(z, x)$ двоякопериодична и имеет экспоненциальную особенность в точке $z = 0$. Из трансляционных свойств σ-функции Вейерштрасса следует

$$\Phi(x + 2\omega_l, z) = \Phi(x, z) \exp(2\zeta(z)\omega_l - 2\eta_l z), \tag{1.8}$$

$$l = 1, 2, 3, \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \eta_l = \zeta(\omega_l).$$

Функция $\Phi(x, z)$ по переменной x голоморфна всюду кроме точек решетки $2n\omega_1 + 2m\omega_2$, где она имеет простые полюсы, причем ее вычет в точке $x = 0$ равен 1.

В работе [15] было установлено, что функция $\Phi(x, z)$ удовлетворяет функциональным уравнениям

$$\Phi(x + y)[\wp(y) - \wp(x)] = \Phi'(x)\Phi(y) - \Phi'(y)\Phi(x), \tag{1.9}$$

$$\Phi(x)\Phi(-x) = \wp(z) - \wp(x). \tag{1.10}$$

Отметим, что эти уравнения были предложены в [20] для определения представления Лакса для системы Мозера — Калоджеро системы частиц с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - 2\sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j). \tag{1.11}$$

Покажем, что из (1.9), (1.10) следует, что функции $\Phi_l(x) = \Phi(x, \omega_l \mid \omega_1, \omega_2)$ порождают эллиптические роды Оганина. Действительно, из определения $\Phi(x, z)$ следует, что при $z = \omega_l$ эти функции, как функции переменной x, нечетны, т. е. $\Phi_l(x) = -\Phi_l(-x)$. Отсюда

$$\Phi_l^2(x) = \wp(x) - e_l, \quad e_l = \wp(\omega_l). \tag{1.12}$$

Значит,

$$2\Phi_l'(x)\,\Phi_l(x) = \wp'(x) = \sqrt{\prod_{l=1}^{3}(\wp(x) - e_l)}. \tag{1.13}$$

Соответствующая формальная группа по определению равна

$$f_l(u, v) = \frac{1}{\Phi_l(g_l(u) + g_l(v))}, \quad \Phi_l(g_l(u)) = \frac{1}{u}. \tag{1.14}$$

Из (1.13) и (1.14) следует, что

$$\Phi_l'(g_l(u)) = \frac{\sqrt{R_l(u)}}{u^2}, \tag{1.15}$$

где коэффициенты полинома $R_l = 1 - 2\delta_l u^2 + \varepsilon_l u^4$ равны

$$2\delta_l = \sum_{i \neq l}(e_l - e_i), \quad \varepsilon_l = \prod_{i \neq l}(e_l - e_i). \tag{1.16}$$

Раскрывая (1.14) с помощью (1.9) и используя при этом (1.15), получим, что $f_l(u, v)$ совпадает с формальной группой Эйлера (0.2).

Прежде чем разобрать другие частные случаи, отметим, что функция $\hat{\Phi}(x, z, k_0 \mid \omega_1, \omega_2)$, определенная в (1.6), удовлетворяет тем же функциональным уравнениям (1.9), (1.10).

Зафиксируем на Γ точку z_{nm} порядка N, т. е.

$$z_{nm} = \frac{2n}{N}\omega_1 + \frac{2m}{N}\omega_2, \quad n, m = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1.17}$$

Если определить

$$k_{nm} = -\frac{2n}{N}\eta_1 - \frac{2m}{N}\eta_2 + \zeta(z_{nm}), \tag{1.18}$$

то функция

$$\hat{\Phi}_{nm}(x \mid \omega_1, \omega_2) = \hat{\Phi}(x, z_{nm}, k_{nm} \mid \omega_1, \omega_2) \tag{1.19}$$

при сдвигах переменной x преобразуется следующим образом:

$$\hat{\Phi}_{nm}(x + 2\omega_1) = \hat{\Phi}_{nm}(x)\, e^{2\pi i n/N}, \tag{1.20}$$

$$\hat{\Phi}_{nm}(x + 2\omega_2) = \hat{\Phi}_{nm}(x)\, e^{2\pi i m/N}. \tag{1.21}$$

Из явных формул для Φ немедленно следует, что функция $\hat{\Phi}_{nm} = \hat{\Phi}_{nm}(x \mid \omega_1, \omega_2)$ порождает эллиптический род уровня N, введенный в работе [14].

В теории конечнозонного интегрирования хорошо известно, что вырождению потенциала $2\wp(x)$ в уравнении Ламе до $2\operatorname{ch}^{-2}(x+x_0)$ отвечает вырождение эллиптической кривой Γ до сингулярной рациональной кривой Γ_{sing} с одной точкой самопересечения. Нормализация $C \to \Gamma_{\text{sing}}$ этой сингулярной кривой переводит функцию $\Phi(x, z)$ в функцию вида

$$\Phi_{\text{sing}}(x, k) = (-k + a)\,\mathrm{e}^{kx}, \tag{1.22}$$

где $k = z^{-1}$ — точка комплексной плоскости. Коэффициент $a = a(x)$ однозначно определяется из равенства

$$\Phi_{\text{sing}}(x, \eta) = \Phi_{\text{sing}}(x, -\eta), \tag{1.23}$$

отражающего тот факт, что точки η и $-\eta$ склеиваются при нормализации.

Таким образом, функция Φ_{sing} зависит как от параметра от величины η, совпадающей с точкой «дискретного спектра» вырожденного уравнения Ламе. Окончательно, находя из (1.23) коэффициент a, получаем

$$\Phi_{\text{sing}}(x, k \mid \eta) = (-k + \eta \operatorname{cth} \eta x)\mathrm{e}^{kx}. \tag{1.24}$$

При разных значениях параметров k, k_0, η производящей функции

$$\hat{\Phi}_{\text{sing}}(x, k, k_0 \mid \eta) = (-k + \eta \operatorname{cth} \eta x)\mathrm{e}^{(k-k_0)x} \tag{1.25}$$

получаем все классические роды многообразий:

$$1^\circ.\ k = k_0, \quad T_{a,b} \text{ — род}, \quad a = \eta - k_0, \quad b = \eta + k_0, \tag{1.26}$$

который при $a = 1$, $b = 0$ совпадает с родом Тодда, при $a = 1$, $b = 1$ — с сигнатурой многообразия, при $a = 1$, $b = -1$ — с эйлеровой характеристикой.

$$\begin{aligned} &2^\circ.\ k = \eta, \quad k_0 = \frac{N-2}{N}\eta - A_N \text{ — род многообразия,} \\ &\qquad\qquad A_{N=2} = A \text{ — род многообразия.} \end{aligned} \tag{1.27}$$

2. Теорема жесткости. В работе [2] для каждого мультипликативного рода h: $U_* \to 0$ определялся его эквивариантный аналог

$$h^G\colon U_*^G \to K(BG) \otimes Q, \tag{2.1}$$

где U_*^G — кольцо бордизмов многообразий с действием компактной группы Ли G. Для любого G-многообразия X проекция

$$p\colon X_G = (X \times EG)/G \to BG \tag{2.2}$$

на универсальное классифицирующее многообразие задает корректно определенный класс кобордизмов

$$\chi_0^G([X, G]) = p_!(1) \in U^*(BG), \tag{2.3}$$

где $p_!$ — гомоморфизм Гизина (прямой образ).

По теореме Дольда [21], каждому гомоморфизму h соответствует гомоморфизм функторов

$$\tilde{h}\colon U^*(\cdot) \to K(\cdot) \otimes Q. \tag{2.4}$$

Эквивариантный род определяется композицией гомоморфизмов

$$h^G = \tilde{h} \circ \chi_0^G\colon U_*^G \to U^*(BG) \to K(BG) \otimes Q. \tag{2.5}$$

Свойство жесткости рода h^G на определенном классе многообразий означает, что его значение

$$h^G([X, G]) \in Q \subset K(BG) \otimes Q \tag{2.6}$$

в случае действий связных компактных групп G принадлежит кольцу констант. Из функториальных свойств h^G следует, что свойство жесткости достаточно доказать для случая $G = S^1$, которым мы в дальнейшем и ограничимся.

Для $G = S^1$ универсальное классифицирующее пространство BS^1 есть CP^∞, а кольцо $U^*(CP^\infty)$ изоморфно

$$U^*(CP^\infty) = U^*[[u]]$$

кольцу формальных рядов от переменной u степени 2 с коэффициентами из U^*.

Выражения класса $\chi_0^{S^1}([X, S^1])$ в терминах инвариантов неподвижных точек называются выражениями Коннера — Флойда. В случае S^1-действий с изолированными неподвижными точками они имеют вид

$$\chi_0^{S^1}([X, S^1]) = \sum_s \prod_{i=1}^n \frac{1}{[u]_{j_{si}}} \tag{2.7}$$

(см. [16, 22, 23]; для произвольных действий они были впервые получены в работе [24], формулы которой уточняются в [25]). Здесь $[u]_j = g^{-1}(jg(u))$; $g(u) = \sum_{n=0}^\infty \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}$ — j-я степень в формальной группе «геометрических» кобордизмов $f(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v))$, целые числа j_{si}, $i = 1, \ldots, n = \dim_C X$, определяются из разложения представления S^1 в слое касательного пучка над неподвижной точкой m_s в сумму неприводимых представлений $\sum_j \eta^{j_{si}}$.

Равенство (2.7) означает, в частности, что лорановский ряд, стоящий в его правой части, содержит лишь правильную часть, свободный член которой совпадает с классом бордизмов многообразия $[X]$.

Как было доказано [2], образующая $u \in U^2(CP^\infty)$ при гомоморфизме $\tilde{h}$ переходит в $\tilde{h}(u) = g_h^{-1}(\ln \eta)$, где η, η^{-1} — образующие кольца $K(CP^\infty)$. Введем формальную переменную $x = \ln \eta$. Тогда из (2.7) следует, что эквивариантный род $\varphi^{S^1}([X, S^1])$, соответствующий обобщенному эллиптическому роду $\hat{\varphi}$ (1.5), (1.6), для многообразия с изолированными неподвижными точками имеет вид

$$\varphi^{S^1}([X, S^1]) = \varphi_X(x) = \sum_s \prod_{i=1}^n \hat{\Phi}(j_{si}x, z, k_0 \,|\, \omega_1, \omega_2) \tag{2.8}$$

(в левой части для краткости опущено явное указание на то, что функция $\varphi_X(x)$ зависит, как от параметров, от величин z, k_0, ω_1, ω_2).

По определению эквивариантного рода функция $\varphi_X(x)$ регулярна в точке $x = 0$. Нашей целью будет доказательство того, что для SU-многообразий она является константой. Необходимость ограничения рассмотрением лишь случая SU-многообразий мы продемонстрируем сначала на примере многообразий с изолированными неподвижными точками, а потом уже перейдем к общему случаю.

Из определения $\Phi(x, z)$ следует, что функция $\varphi_X(x)$ могла бы иметь полюсы во всех точках решетки $\Lambda = 2n\omega_1 + 2m\omega_2$. Из (1.8) следует, что

$$\varphi_X(x + 2\omega_l) = \sum_s e^{r_s Q_l(z, k_0)} \prod_{i=1}^n \hat{\Phi}(j_{si}x), \tag{2.9}$$

где

$$r_s = \sum_{i=1}^n j_{si}, \quad Q_l = 2(\zeta(z)\omega_l - \eta_l z - k_0\omega_l). \tag{2.10}$$

Если все величины r_s равны между собой, т. е. $r_s = N$, то

$$\varphi_X(x + 2\omega_l) = \varphi_X(x)\cdot e^{NQ_l(z, k_0)}. \tag{2.11}$$

Из этого равенства и того, что φ_X регулярна в точке $x = 0$, следует, что она регулярна во всех точках решетки Λ.

Оказывается, что если X является SU-многообразием, то r_s действительно не зависят от s. В работе [2] была доказана

ЛЕММА 2.1. *Пусть представление группы S^1 в слое S^1-пучка ζ над X над точкой неподвижного многообразия F_s равно $\sum_i \eta^{j_{si}}$; тогда если $c_1(\zeta)$ делится на k, то все суммы r_s сравнимы по модулю k:*

$$\sum_{i=1}^n \eta_{si} = r_s \equiv N \pmod{k}. \tag{2.12}$$

(Впоследствии это утверждение было передоказано в [14].)

В случае когда $c_1(X) = 0$, из утверждения леммы следует, что суммы r_s не зависят от s: $r_s = N$. Число N будет называться типом действия группы S^1 на X.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого SU-многообразия X значение эквивариантного рода*

$$\varphi_X(x) = \varphi^{S^1}([X, S^1]) \equiv \varphi([X]) \subset K(CP^\infty) \otimes C \tag{2.13}$$

является константой. Если действие S^1 на X имеет тип $N \neq 0$, то

$$\varphi_X(x) \equiv \varphi([X]) = 0. \tag{2.14}$$

Замечание. Для SU-многообразий зависимость обобщенных эллиптических родов от параметра k_0 тривиальна. Действительно, если $c_1(X) = 0$, то для любого ряда $h(x)$ имеем

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{h(x_i)} e^{-k_0 x_i} = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{h(x_i)}, \tag{2.15}$$

поскольку $\sum x_i = c_1 = 0$. Таким образом, для SU-многообразий обобщенные эллиптические роды зависят от трех параметров: z, ω_1, ω_2.

Доказательство теоремы практически без изменений повторяет доказательства работ [1, 2], поэтому мы приведем его схематично, отсылая за техническими деталями к упомянутым работам.

Прежде всего приведем выражения Коннера — Флойда для общего S^1-действия. Пусть F_s — связная компонента множества неподвижных точек действия S^1 на X. Нормальный пучок ν_s, как и любой комплексный S^1-пучок над тривиальным S^1-многообразием, представим в виде $\nu_s = \sum_j \nu_{sj} \otimes \eta^j$, где η^j — j-я тензорная степень стандартного представления S^1, а действие S^1 на пучках ν_{sj} тривиально. Набор комплексных пучков ν_{sj}, из которых лишь конечное число отлично от нуля, определяет класс бордизмов, принадлежащий группе R_n:

$$\beta(F_s) \in R_n = \sum U_s \left(\prod_{j\neq 0} BU(n_j)\right). \tag{2.16}$$

Суммирование ведется по наборам неотрицательных целых чисел s, n_j таким, что $n = s + 2\sum n_j$. Сумма по всем компонентам связности задает образ класса бордизмов $[X, S^1] \in U_*^{S^1}$ и индуцирует гомоморфизм β: $U_*^{S^1} \to R_*$,

$$\beta([X, S^1]) = \sum_s \beta(F_s).$$

Выберем в качестве образующих U_*-модуля $U_*(CP^\infty) = U_*(BU(1))$ классы бордизмов $(CP^n) \in U_{2n}(CP^\infty)$, соответствующие вложению $CP^n \hookrightarrow CP^\infty$. Стандартная мультипликативная структура в R_* позволяет выбрать в качестве образующих как U_*-модуля мономы

$$(CP_{j_1}^{l_1}) \times \ldots \times (CP_{j_r}^{l_r}). \tag{2.17}$$

Обозначим через $G_n(u)$ лорановский ряд

$$G_n(u) = \frac{1}{f(u, v)} \cap [CP^n], \tag{2.18}$$

где $\cap [CP^n]$ означает в данном случае замену v^k на $[CP^{n-k}]$. Так как $v^k \cap [CP^n] = 0$, $k > n$, то G_n корректно определен и имеет вид

$$G_n(u) = \frac{\alpha_{n+1}}{u^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{u^n} + \ldots$$

Предложение ([25], см. также [24]). *Композиция* $\chi_0^{S^1}$ *и вложения* $U^*(CP^\infty) \subset U^*[[u]] \otimes C[u^{-1}]$ *совпадает с композицией* $\Psi \circ \beta$, *где гомоморфизм* U_**-модулей* $\Psi\colon R_* \to U^*[[u]] \otimes \otimes C[u^{-1}]$ *определяется формулой*

$$\Psi\left(\prod_{m=1}^{r} (CP_{j_m}^{l_m})\right) = \prod_{m=1}^{r} G_{l_m}([u]_{j_m}). \tag{2.19}$$

Пусть обобщенный эллиптический род φ задается функцией $\hat{\Phi}(x)$ (зависящей от z, k_0, ω_1, ω_2 как от параметров). Обозначим через $\hat{\Phi}_n(x)$ функцию, полученную из $G_n(u)$ применением к коэффициентам этого ряда гомоморфизма φ и заменой переменной u на $1/\hat{\Phi}(x)$. Тогда из (2.18) и (1.9) следует

$$\hat{\Phi}_n(x) = -\frac{\hat{\Phi}(x)\dfrac{\bar{v}}{vg'_\Phi(v)} + \hat{\Phi}'(x)\bar{v}}{1 - \hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(-x)v\bar{v}} \cap [CP^n], \tag{2.20}$$

где

$$\hat{\Phi}(g_\Phi(v)) = 1/v, \quad \bar{v} = 1/\hat{\Phi}(-g_\Phi(v)), \tag{2.21}$$

а символ $\cap [CP^n]$ означает замену v^k на $\varphi([CP^{n-k}])$. Отсюда следует, что $\hat{\Phi}_n(x)$ голоморфна вне точек решетки Λ $2n\omega_1 + 2m\omega_2$, в которых она имеет полюсы порядка $n+1$. Кроме того, функция $\hat{\Phi}_n(x)$ имеет те же трансляционные свойства, что и порождающая функция $\hat{\Phi}(x) = \hat{\Phi}_0(x)$, т. е.

$$\hat{\Phi}_n(x + 2\omega_l) = \hat{\Phi}_n(x)\, e^{Q_l(z, k_0)}. \tag{2.22}$$

Из (2.19) следует, что для любого S^1-многообразия X функция $\varphi_X(x) = \varphi^{S^1}([X, S^1])$ имеет вид

$$\varphi_X(x) = \sum_s a_s \prod_{m=1}^{r} \hat{\Phi}_{l_{ms}}(j_{ms}x). \tag{2.23}$$

Формула (2.23) обобщает на случай общих S^1-действий выражение Коннера — Флойда (2.8).

По определению функция $\varphi_X(x)$ регулярна в окрестности $x = 0$. Из леммы 2.1 и (2.22) следует, что для SU-многообразий φ_X удовлетворяет соотношению (2.11). Значит, $\varphi_X(x)$ регулярна во всех точках решетки $2n\omega_1 + 2m\omega_2$. В принципе функция φ_X могла бы иметь полюсы в точках порядка j_{ms}, т. е. в таких точках x, что $j_{ms}x = 2n\omega_1 + 2m\omega_2$. Как и в работах [2, 3], для доказательства отсутствия полюсов у φ_X в точках порядка n достаточно воспользоваться выражениями для φ_X через инварианты подмногообразий, неподвижных относительно действия подгруппы $Z_n \subset S^1$ корней n-й степени из 1.

Пусть F_s — связные компоненты множества неподвижных точек действия подгруппы Z_n. Тогда [2, теорема 1.1]

$$\varphi_X(x) = \sum_s p_{s!}\left(\frac{1}{e((\nu_s)_{S^1})}\right), \tag{2.24}$$

где $e((\nu_s)_{S^1})$ — эйлерова характеристика пучка $(\nu_s \times ES^1)/S^1 \to \to (F_s \times ES^1)/S^1 = (F_s)_{S^1}$ над многообразием $(F_s)_{S^1}$, а $p_s\colon (F_s)_{S^1} \to \to CP^\infty$ — проекция. Нормальный пучок ν_s к F_s в X представим в виде

$$\nu_s = \sum\nolimits_{j=1}^{n-1} \nu_{sj} \otimes \eta^j, \tag{2.25}$$

где ν_{sj} — пучки, на которых подгруппа Z_n действует тривиально. Так как

$$\frac{1}{e((\nu_s)_{S^1})} = \prod\nolimits_j \prod\nolimits_{s,k} \frac{1}{f([u]_j, \lambda_{js}^k)}, \tag{2.26}$$

где λ_{sj}^k — образующие Ву пучка ν_{sj}, то из (1.9) следует, что имеет место формула следующего вида:

$$\widetilde{\varphi} \circ p_{s!}\left(\frac{1}{e((\nu_s)_{S^1})}\right) = \prod\nolimits_{j=1}^{n-1} \sum\nolimits_\omega H_\omega(jx) D_\omega(nx), \tag{2.27}$$

где ω — мультииндексы; $H_\omega(x)$ — функция, голоморфная вне точек решетки $2n\omega_1 + 2\tilde{m}\omega_2$, а $D_\omega(nx)$ — значение на наборе пучков ν_{sj} эквивариантного характеристического класса (определение которых см. в [1, 2]), отвечающего мультииндексу ω. Явный вид этих функций несуществен. Важно лишь следующее. Из функториальных свойств эквивариантных характеристических классов [2, теорема 1.2] следует, что функция $D_\omega(x)$ есть эквивариантный характеристический класс набора S^1-пучков $\tilde{\nu}_{sj}$, где новое действие S^1 на пучках определяется как действие фактор-группы $S^1/Z_n \approx S^1$ (напомним, что действие Z_n на ν_{sj} тривиально). По определению $D_\omega(x)$ регулярна в точке $x = 0$. Из ее явного вида следует, что $D_\omega(x)$ при сдвигах на $2\omega_l$ ведет себя подобно (2.11). Следовательно, $D_\omega(x)$ голоморфна во всех точках решетки. Из (2.27) вытекает, что $\varphi_X(x)$ не имеет полюсов в точках порядка n. Значит, $\varphi_X(x)$ голоморфна всюду и удовлетворяет соотношению (2.11). Тем самым мы получаем, что функция $\varphi_X(x)$ является константой, причем если $N \neq 0$, то эта константа равна нулю. Теорема доказана.

Из хода доказательства теоремы видно, что свойство $c_1(X) = 0$ использовалось для доказательства трансляционных свойств (2.11). Из (1.20), (1.21) следует, что в случае родов $\hat{\varphi}_{nm}$, задаваемых рядами $\hat{\Phi}_{nm}(x)$, достаточно равенства $c_1(X) \equiv 0 \pmod N$. В этом случае можно полностью повторить весь ход доказательства теоремы 1 и получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2 [14]. *Пусть первый класс Чжэня S^1-многообразия X делится на N. Тогда эквивариантный род, отвечающий производящей функции $\hat{\Phi}_{nm}(x)$, является константой*

$$\varphi_{n,m}^{S^1}([X, S^1]) \equiv \varphi_{nm}([X]). \tag{2.13}$$

Если действие S^1 на X имеет тип $M \neq 0 \pmod N$, то $\varphi_{nm}([X]) = 0$.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступило
02.10.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Atiyah M. F., Hirzebruch F. Spin-manifolds and group actions // Essay on Topology and Related Topics. Springer-Verlag, 1970. P. 18—28.

[2] Кричевер И. М. Формальные группы и формула Атьи—Хирцебруха // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38. № 6. С. 1289—1304.

[3] Кричевер И. М. Препятствия к существованию S^1-действий. Бордизмы разветвленных накрывающих // Изв. АН СССР. 1976. Т. 40, № 4. С. 828—844.

[4] Hattori A. Spin-structures and S^1-actions // Inv. Math. 1978. V. 48. P. 7—36.

[5] Witten E. Fermionic Quantum Numbers in Kaluza—Klein Theory // Proceedings of the 1983 Shelter Conference on Quantum Field theory and Foundations of Physics. eds. NKhuri: MIT Press. 1985.

[6] Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology / ed. P. S. Landveber // Lect. Notes in Math., 1326. Springer-Verlag, 1988.

[7] P. S. Landveber Elliptic Genera. An introductory overview // [6].

[8] Ochanin S. Sur les genres multiplicatiff définis par des intégrals elliptiques // Topology. 1987. V. 26. P. 143—151.

[9] Ochanin S. Genres elliptiques équivariant // [6].

[10] Witten E. Elliptic genera and quantum field theory // Comm. Math. Phys. 1987. V. 109. P. 525—536; The index of the Dirac operator in loop space // [6].

[11] Taubes C. H. S^1-action and elliptic genera: Harvard University preprint, 1987.

[12] Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Elliptic modular forms and elliptic genera // Topology. 1988. V. 27. P. 163—170.

[13] Zagier D. Note on the Landveber—Stong elliptic genus // [6].

[14] Hirzebruch F. Elliptic genera of level N for complex manifolds (Prepr. / MPI / 88—24).

[15] Кричевер И. М. Эллиптические решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили и интегрируемые системы частиц // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 4. С. 45—54.

[16] Операции Адамса и неподвижные точки // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32. С. 1245—1263.

[17] Batemen G. (Erdelyi A.) Higher Transcendental Functions. V. 2. McGraw-Hill, 1953.

[18] Кричевер И. М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 1. С. 15—31.

[19] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

[20] Calogero F. Integrable many-body problem (Prepr. / Univ. di Roma N 89, 1978).

[21] Dold A. Relations between ordinary and extraordinary cohomology. Colloquim on Algebraic Topology: Aarhess, 1962.

[22] Мищенко А. С. Многообразия с действием и неподвижные точки // Математические заметки. 1968. Т. 4, № 4. С. 381—386.

[23] Каспаров Г. Г. Инварианты классических линзовых пространств в теории бордизмов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33. С. 735—747.

[24] Мищенко А. С. Бордизмы с действиями и неподвижные точки // Мат. сб. 1969. Т. 80. С. 307—313.

[25] Гусейн-Заде С. М., Кричевер И. М. О формуле для неподвижных точек действий // УМН. 1973. Т. 27, № 1. С. 245—246.