Функциональный анализ и его приложения
1995, т. 29, вып. 2, с. 1–8

УДК 530.1

Общие рациональные редукции иерархии КП и их симметрии

© 1995. И. М. Кричевер

Основной целью настоящей работы является доказательство существования нового типа редукций иерархии уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП). Уравнение КП

$$\tfrac{3}{4}u_{yy} + (u_t - \tfrac{3}{2}uu_x - \tfrac{1}{4}u_{xxx})_x = 0 \tag{1}$$

было первым пространственно-двумерным уравнением, включенным в рамки метода обратной задачи. Как было замечено в [1, 2], уравнение (1) допускает представление нулевой кривизны

$$[\partial_y - L, \partial_t - A] = 0, \tag{2}$$

где

$$L = \partial_x^2 + u(x,y,t), \qquad A = \partial_x^3 + \tfrac{3}{2}u\partial_x + w(x,y,t)\,. \tag{3}$$

Представление нулевой кривизны использовалось и для описания бесконечного набора нелинейных уравнений, совместных с уравнением КП. Соответствующие уравнения представляли собой систему уравнений на коэффициенты $v_{i,n}$ бесконечного набора обыкновенных линейных дифференциальных операторов

$$L_n = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-2} v_{i,n}(t_1, t_2, \ldots)\,\partial_x^i, \tag{4}$$

эквивалентных операторным уравнениям

$$[\partial_m - L_m, \partial_n - L_n] = 0, \qquad \partial_n = \partial/\partial t_n\,. \tag{5}$$

В такой форме «иерархия» уравнения КП — это бесконечная система уравнений на бесконечный набор неизвестных функций, зависящих от бесконечного набора переменных.

Определение иерархии уравнения КП как системы коммутирующих эволюционных уравнений на пространстве бесконечных наборов $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, функций одной переменной было предложено в [3]. Соответствующие уравнения эквивалентны уравнениям Лакса

$$\partial_n \mathcal{L} = [\mathcal{L}^n_+, \mathcal{L}] \tag{6}$$

для псевдодифференциального оператора

$$\mathcal{L} = \partial_x + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \partial_x^{-i}. \tag{7}$$

(Здесь и далее через D_+ обозначается дифференциальная часть псевдодифференциального оператора D.) Эквивалентность двух определений иерархии КП была доказана в [4].

Основным типом редукций, рассматривавшихся в теории иерархии КП, являются редукции на стационарные точки одного из потоков иерархии (или линейной комбинации таких потоков). Соответствующие инвариантные подмногообразия имеют конечную функциональную размерность и отвечают псевдодифференциальным операторам $\mathcal{L}$, таким, что их n-я степень является дифференциальным оператором, т.е.

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^n_+ = L = \partial_x^n + \sum_{i=1}^{n-2} w_i(x) \,. \tag{8}$$

Коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ являются дифференциальными полиномами от коэффициентов w_i дифференциального оператора L, которые и параметризуют инвариантное подпространство иерархии КП.

Обозначим через $\mathcal{K}_{m,n}$ многообразие псевдодифференциальных операторов $\mathcal{L}$, таких, что

$$\mathcal{L}^n = L_1^{-1} L_2 \,, \tag{9}$$

где L_1 и L_2 — взаимно простые дифференциальные операторы порядков m и $n+m$ соответственно. (Здесь и далее под взаимно простыми операторами подразумеваются операторы, ядра которых не пересекаются.) Коэффициенты этих операторов

$$L_1 = \partial_x^k + \sum_{i=1}^{m-1} w_{1,i}\partial_x^i, \qquad L_2 = \partial_x^{n+k} + \sum_{j=1}^{n+m-1} w_{2,j}\partial_x^j \tag{10}$$

являются параметрами, задающими точки $\mathcal{K}_{m,n}$. Нормировка оператора $\mathcal{L}$, при которой в правой части (7) отсутствует свободный член, эквивалентна единственному соотношению на коэффициенты операторов L_1 и L_2

$$w_{1,m-1} = w_{2,n+m-1} \,. \tag{11}$$

Коэффициенты псевдодифференциальных операторов, принадлежащих $\mathcal{K}_{m,n}$, являются дифференциальными полиномами от $w_{1,i}$ и $w_{2,j}$.

A priori, определение точек $\mathcal{K}_{m,n}$ зависит от порядка сомножителей в правой части (9). Однако, как мы сейчас покажем, соответствующее подмногообразие псевдодифференциальных операторов не зависит от этого порядка, а зависит лишь от порядков «числителя» и «знаменателя» некоммутативной дроби.

Лемма 1. *Для любых двух взаимно простых дифференциальных операторов L_3 и L_4 порядков m и $n+m$ существуют единственные нормированные операторы L_1 и L_2 порядков m и $n+m$ соответственно, такие, что*

$$L_1^{-1} L_2 = L_4 L_3^{-1}. \tag{12}$$

(Нормированными мы будем называть дифференциальные операторы, старшие коэффициенты которых равны 1.)

Замечание 1. Утверждение леммы хорошо известно. Явные формулы для коэффициентов операторов могут быть найдены в [5]. Тем не менее мы приведем ее доказательство в форме, которая будет нам полезна в дальнейшем.

Доказательство леммы 1. Обозначим через $\mathcal{O}_i$, $i = 3, 4$, ядро оператора L_i, т.е.

$$y(x) \in \mathcal{O}_i : \quad L_i y(x) = 0 \,. \tag{13}$$

Размерность линейного пространства $\mathcal{O}_4$ равна $n + m$. В силу предположения леммы образ этого пространства под действием оператора L_3 имеет ту же размерность. Следовательно, равенство

$$L_2 y(x) = 0, \qquad y(x) \in L_3(\mathcal{O}_4), \tag{14}$$

однозначно определяет нормированный оператор L_2 порядка $n + m$. Оператор L_1 определяется равенством

$$L_1 y(x) = 0, \qquad y(x) \in L_4(\mathcal{O}_3) \,. \tag{15}$$

Из определения операторов L_1, L_2 следует, что ядра дифференциальных операторов $L_2 L_3$ и $L_1 L_4$, имеющих порядок $2n + m$, равны $\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4$. Значит, эти операторы равны между собой. Равенство

$$L_1 L_4 = L_2 L_3 \tag{16}$$

эквивалентно (12). Лемма доказана.

Аналогично доказывается и обратное утверждение о том, что для любой пары взаимно простых операторов L_1, L_2 найдутся единственные нормированные операторы L_3, L_4, такие, что выполняется равенство (12).

Теорема 1. *Для любых n и m пространства $\mathcal{K}_{m,n}$ являются инвариантными относительно иерархии* КП, *т.е. относительно уравнений* (6).

Доказательство. Равенство (6) для $\mathcal{L} \in \mathcal{K}_{m,n}$ эквивалентно равенству

$$\partial_i (L_1^{-1} L_2) = [(L_1^{-1} L_2)_+^{i/n}, L_1^{-1} L_2] \,. \tag{17}$$

Из (17) следует равенство

$$(\partial_i L_2) L_3 - (\partial_i L_1) L_4 = L_1 (L_1^{-1} L_2)_+^{i/n} L_4 - L_2 (L_1^{-1} L_2)_+^{i/n} L_3 \,, \tag{18}$$

где L_3 и L_4 — те единственные операторы, существование которых гарантируется утверждением предшествующей леммы.

Для доказательства утверждения теоремы необходимо показать, что при заданных операторах L_1, L_2 уравнение (18) однозначно определяет операторы $\partial_i L_1$ и $\partial_i L_2$ порядков $m - 1$ и $n + m - 1$ соответственно.

Обозначим через $\mathcal{D}$ оператор, определенный правой частью формулы (18). Коэффициенты этого оператора являются дифференциальными полиномами от коэффициентов операторов L_1 и L_2, т.е. $\mathcal{D} = \mathcal{D}(L_1, L_2)$. Аналогично тому, как доказывается корректность уравнений иерархии КП, можно показать, что этот оператор имеет порядок $2n + m - 1$. Действительно, в силу того, что любой оператор коммутирует со своими степенями (в том числе и с дробными), дифференциальная часть оператора $(L_1^{-1}L_2)^{i/n}$ может быть заменена в равенстве (17) на интегральную часть:

$$(L_1^{-1}L_2)_-^{i/n} = (L_1^{-1}L_2)^{i/n} - (L_1^{-1}L_2)_+^{i/n}. \tag{19}$$

Следовательно,

$$\mathcal{D} = L_2(L_1^{-1}L_2)_-^{i/n}L_3 - L_1(L_1^{-1}L_2)_-^{i/n}L_4\,. \tag{20}$$

Это равенство и доказывает, что дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ имеет степень не выше $2n+m-1$.

Лемма 2. *Для любого дифференциального оператора $\mathcal{D}$ степени $2n+m-1$ и любых взаимно простых операторов L_3 и L_4 порядков m и $n+m$ существуют единственные операторы A_1 и A_2 порядков m и $n+m$, такие, что*

$$A_2L_3 - A_1L_4 - \mathcal{D} = 0\,. \tag{21}$$

Доказательство. Дифференциальный оператор A_1 порядка m однозначно определяется своим действием на любом m-мерном линейном пространстве. Следовательно, его можно задать равенством

$$A_1y(x) = \mathcal{D}y(x), \qquad y(x) \in L_4(\mathcal{O}_3)\,. \tag{22}$$

Аналогичным равенством определяется и оператор A_2:

$$A_2y(x) = \mathcal{D}y(x), \qquad y(x) \in L_3(\mathcal{O}_4)\,. \tag{23}$$

Из этих определений следует, что дифференциальный оператор, задаваемый левой частью равенства (21), имеющий порядок $2n+m-1$, имеет ядро размерности не меньше $2n+m$. Значит, он равен нулю.

Операторы A_i в случае, когда L_3, L_4 и $\mathcal{D}$ заданы равенствами (12) и (20), однозначно определяются операторами L_1 и L_2, т.е. $A_i = A_i(L_1, L_2)$. Следовательно, равенства

$$\partial_i L_1 = A_1(L_1, L_2), \qquad \partial_i L_2 = A_2(L_1, L_2) \tag{24}$$

корректно определяют эволюцию операторов L_1 и L_2, что и завершает доказательство теоремы.

При обсуждении доказанного результата с автором Т. Сиота (T. Shiota) предложил явный вид уравнений, описывающих эволюцию операторов L_1 и L_2.

Теорема 2. *Ограничение иерархии* КП *на $\mathcal{K}_{m,n}$ эквивалентно уравнениям*

$$\partial_i L_1 = L_1(L_1^{-1}L_2)_+^{i/n} - (L_2L_1^{-1})_+^{i/n}L_1\,, \tag{25}$$

$$\partial_i L_2 = L_2(L_1^{-1}L_2)_+^{i/n} - (L_2L_1^{-1})_+^{i/n}L_2\,. \tag{26}$$

Доказательство. В силу доказанной выше теоремы уравнение (17) однозначно определяет эволюцию операторов L_1 и L_2. С другой стороны, непосредственно проверяется, что (17) является следствием равенств (25), (26). Значит, для доказательства теоремы достаточно проверить, что правые части равенств

(25), (26) являются дифференциальными операторами порядков не выше $m-1$ и $n+m-1$. Последнее утверждение вытекает из того, что в силу равенств

$$L_1^{-1}(L_2L_1^{-1})^{i/n}L_1 = (L_1^{-1}L_2)^{i/n}, \qquad L_2^{-1}(L_2L_1^{-1})^{i/n}L_2 = (L_1^{-1}L_2)^{i/n} \tag{27}$$

уравнения (25), (26) эквивалентны уравнениям

$$\partial_i L_1 = (L_2L_1^{-1})_-^{i/n}L_1 - L_1(L_1^{-1}L_2)_-^{i/n}, \tag{28}$$

$$\partial_i L_2 = (L_2L_1^{-1})_-^{i/n}L_2 - L_2(L_1^{-1}L_2)_-^{i/n}. \tag{29}$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Формулы (28), (29) аналогичны формулам для эволюции сомножителей $L = L_1L_2$, где L_i являются дифференциальными или псевдодифференциальными операторами специального вида, которые были получены в [6].

Пример. Частным случаем доказанных утверждений являются результаты работ [8, 9], в которых была показано, что иерархия нелинейного уравнения Шрёдингера может быть получена как специальная редукция иерархии КП. В обозначениях настоящей работы соответствующая редукция — это редукция на пространство $\mathcal{K}_{1,2}$.

Коэффициенты псевдодифференциального оператора $\mathcal{L}$ вида

$$\mathcal{L} = (\partial_x + v)^{-1}(\partial_x^2 + v\partial_x + w) = \partial_x + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \partial_x^{-i} \tag{30}$$

являются дифференциальными полиномами от функций v и w и последовательно определяются равенствами

$$u_1 = w, \qquad u_{i+1} + u_{ix} + vu_i = 0, \quad i > 1. \tag{31}$$

Рассмотрим второе из эволюционных уравнений иерархии КП (6), т.е. уравнение, описывающее зависимость оператора $\mathcal{L}$ от переменной t_2. Для $n=2$ оператор $\mathcal{L}_+^2$ равен $\partial_x^2 + 2u_1$. Соответствующие уравнения для первых двух коэффициентов оператора $\mathcal{L}$ с учетом равенства (31) при $i = 1, 2$ представляют собой замкнутую систему уравнений на две неизвестные функции

$$\partial_2 u_1 = u_{1xx} + 2u_{2x}, \qquad u_2 = -u_{1x} + vu_1, \tag{32}$$

$$\partial_2 u_2 = u_{2xx} + 2u_{3x} + 2u_1u_{1x} = u_{2xx} - 2(u_{2x} + vu_2)_x + 2u_1u_{1x}. \tag{33}$$

Определим новые неизвестные функции r и q с помощью соотношений

$$u_1 = rq, \quad v = -r_x/r. \tag{34}$$

Для них уравнения (32), (33) эквивалентны системе

$$\partial_2 r = r_{xx} + rqr, \qquad \partial_2 q = -q_{xx} + qrq, \tag{35}$$

которая для $r = \pm q^*$ и $t_2 = it$ переходит в нелинейное уравнение Шрёдингера

$$ir_t - r_x x \mp |r|^2 r = 0. \tag{36}$$

Замечание 3. Уравнения (35) допускают представление Лакса $L_t = [A, L]$, где L — оператор Дирака. Представляется естественной гипотеза, что предложенные редукции иерархии КП содержат все уравнения, допускающие представление Лакса с дифференциальными операторами L с матричными коэффициентами произвольной размерности.

Ограничения иерархии КП на инвариантные пространства $\mathcal{K}_{m,n}$ представляют собой «квантование» соответствующих алгебраических орбит иерархии бездисперсионного уравнения КП, которые были введены в работе [7]. Иерархия бездисперсионного уравнения КП представляет собой систему коммутирующих эволюционных уравнений

$$\partial_i K = \{K_+^i, K\} = \partial_p(K_+^i)\,\partial_x K - \partial_x(K_+^i)\,\partial_p K \tag{37}$$

на коэффициенты лорановского ряда

$$K(p) = p + \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x, t_1, \ldots)p^{-i}. \tag{38}$$

(Символ $[\ldots]_+$ в (37) обозначает часть лорановского ряда, содержащую неотрицательные степени переменной p.) Алгебраическими орбитами иерархии (37) в [7] назывались ограничения этой иерархии на пространства лорановских рядов, таких, что

$$K^n = E(p,t) = p^n + u_{n-2}p^{n-2} + \cdots + u_0 + \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_\alpha} v_{i,\alpha}(p-p_\alpha)^{-i}. \tag{39}$$

Отметим, что в [7] было показано, что алгебраические орбиты бездисперсионной иерархии КП обладают дополнительными симметриями, т.е. ограничения иерархии (37) на пространство лорановских рядов K, для которых выполнено соотношение (39), совместимо с эволюционными уравнениями

$$\partial_{i,\alpha} K = \{\Omega_{i,\alpha}, K\} = \partial_p(\Omega_{i,\alpha})\,\partial_x K - \partial_x(\Omega_{i,\alpha})\,\partial_p K, \tag{40}$$

где $\Omega_{i,\alpha}$ — полином степени i от переменной $(p-p_\alpha)^{-1}$, такой, что при $p \to p_\alpha$ имеет место равенство

$$\Omega_{i,\alpha} = \sum_{s=1}^{i} w_{s,i,\alpha}(p-p_\alpha)^{-s} = E^{i/n_\alpha} + O(p-p_\alpha). \tag{41}$$

Как показывает следующая теорема, эти дополнительные симметрии допускают квантование.

Теорема 3. *Ограничения иерархии КП на инвариантные подпространства $\mathcal{K}_{m,n}$ совместимы с эволюционными уравнениями, имеющими форму уравнений Лакса*

$$\mathcal{L}_\tau = [A_{-i}, \mathcal{L}], \tag{42}$$

где

$$A_{-i} = M_1^{-1} M_2, \tag{43}$$

M_1 — нормированный дифференциальный оператор порядка i, а M_2 — дифференциальный оператор порядка $i-1$.

Доказательство. Уравнение (42) для $\mathcal{L} = L_1^{-1}L_2$ эквивалентно уравнению

$$(\partial_\tau L_2)L_3 - (\partial_\tau L_1)L_4 = L_1 A_{-i} L_4 - L_2 A_{-i} L_3\,, \tag{44}$$

где L_3, L_4 — операторы, такие, что имеет место равенство (12). Так как псевдодифференциальный оператор A_{-i} имеет отрицательную степень, то правая часть $\mathcal{D}$ равенства (44) является псевдодифференциальным оператором порядка, не превосходящего $2n+m-1$. Заключительные рассуждения доказательства теоремы 1 показывают, что в этом случае для того, чтобы уравнение (44) корректно определяло эволюцию операторов L_1 и L_2, необходимо и достаточно, чтобы правая часть этого уравнения была дифференциальным оператором. Покажем, что это условие позволяет выразить коэффициенты операторов M_1 и M_2 через коэффициенты операторов L_1 и L_2 и замкнуть тем самым систему уравнений. Из утверждения леммы 1, позволяющего заменять левые дроби на правые, следует, что $\mathcal{D}$ может быть преобразован к виду

$$\mathcal{D} = D_1 D_2^{-1}\,, \tag{45}$$

где D_1, D_2 — дифференциальные операторы, причем оператор D_2 имеет степень $2i$. Таким образом, условие делимости дифференциального оператора D_1 на дифференциальный оператор D_2 эквивалентно системе $2i$ обыкновенных дифференциальных уравнений на $2i$ неизвестных коэффициентов операторов M_1 и M_2. Тем самым утверждение теоремы доказано.

Замечание 4. Следует отметить, что доказанная теорема утверждает существование симметрий вида (42), (43), но оставляет открытым вопрос о полной классификации таких симметрий. В частности, она не дает ответов на вопросы о том, какую алгебру они образуют и сколько таких симметрий существует при заданном i. Условие коммутации двух симметрий указанного вида имеет форму уравнений нулевой кривизны

$$[\partial/\partial\tau_1 - M_1^{-1}M_2\,, \partial/\partial\tau_2 - M_3^{-1}M_4] = 0\,. \tag{46}$$

Последние уравнения безотносительно к вопросам симметрий инвариантных подмногообразий иерархии КП были недавно рассмотрены в работе [10] как новая форма генерации интегрируемых уравнений.

Замечание 5. Обратим внимание на то, что симметрии вида (42), (43) существуют и для обычных редукций Лакса иерархии КП. Например, для уравнения КдФ (т.е. случая $\mathcal{L}^2 = L = \partial_x^2 + u$) и $i=1$ уравнение

$$L_\tau = u_\tau = [(v\partial_x + w)^{-1}, L] \tag{47}$$

эквивалентно уравнениям

$$u_\tau w^2 + v(u_\tau w)_x = w_{xx} - vu_x\,, \qquad v(u_\tau v)_x + 2u_\tau vw = v_{xx} + 2w_x\,, \tag{48}$$

$$u_\tau v^2 = 2v_x\,. \tag{49}$$

Полагая

$$w = \tfrac{1}{2}v_x\,, \tag{50}$$

получим, что из (48), (49) следует равенство

$$u = \tfrac{1}{2}\varphi_{xx} - \tfrac{1}{4}\varphi_x^2, \tag{51}$$

где φ определяется из соотношения

$$v = e^{\varphi}. \tag{52}$$

Равенства (51) и (49) показывают, что уравнение

$$\partial_\tau\left(\tfrac{1}{2}\varphi_{xx} - \tfrac{1}{4}\varphi_x^2\right) = 2\varphi_x e^{-\varphi} \tag{53}$$

эквивалентно уравнению Лакса (47) при условии (50).

В последующей публикации мы предполагаем обратиться к сформулированным выше открытым вопросам, а также к проблеме построения алгебро-геометрических решений общих «рациональных» редукций иерархии КП и их рациональных симметрий.

Литература

1. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Интегрирование уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I. Функц. анализ и его прил., **8**, вып. 4, 43–53 (1974).
2. *Дрюма В. С.* Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега–де Фриза. Письма в ЖЭТФ, **19**, №12, 219–225 (1974).
3. *Sato M.* Soliton equations and universal Grassmann manifold. Math. Lect. Notes Ser., Vol. 18, Sophia University, Tokyo (1984).
4. *Takebe T.* From general Zakharov–Shabat equations to KP and the Toda lattice hierarchies. In: Proc. RIMS Research Project 1991, Adv. Ser. Math. Phys., Vol. 16 (1992), pp. 923–940 .
5. *Ore O.* Theory of noncommutative polynomials. Ann. of Math., **34** (1933) 480–508.
6. *Дринфельд В. Г., Соколов В. В.* Алгебры Ли и уравнения типа КдФ. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 24, ВИНИТИ, М. (1984), с. 81–180.
7. *Krichever I.* Tau-function of the universal Whitham hierarchy and topological field theories. Comm. Pure Appl. Math., **47**, 1–40 (1994).
8. *Topan F.* $N = 1, 2$ Super-NLS Hierarchies as Super-KP Coset Reductions. Preprint ENSLAPP-L-467/94, Paris.
9. *Orlov A. Yu.* Vertex operators, $\bar{\partial}$-problems, symmetries, variational identities and Hamiltonian formalism for $2+1$ integrable systems. In: Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, World Scientific, Singapore (1988).
10. *Zakharov V. E.* Dispersionless limit of integrable systems in $2+1$ dimensions. In: Singular limits of Dispersive Waves (eds. N. Ercolani, I. Gabitov, D. Levermore, and D. Serre) NATO ARW series, New York (1994).

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН

Поступило в редакцию
1 сентября 1994 г.