ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И КОММУТИРУЮЩИЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

Настоящая работа непосредственным примыкает к предшествующей работе авторов [1]. Как известно, в современной математической физике теория коммутирующих одномерных операторов появилясь, как побочный алгебраический аспект теории иинтегрирования нелинейных солитонных систем и спектральной теории периодических конечнозонных операторов [2]–[5].

Как чисто алгебраическая задача, проблема классификации обыкновенных скалярных дифференциальных операторов была поставлена еще в 20-х годах Бурхналом и Чаунди [6], которые далеко продвинулись в решении задачи для случая операторов взаимно-простых порядков (в котором ранг всегда равен 1), завершенном в [3]. Они же отмечали, что общая задача для ранга $r > 1$, представляется чрезвычайно трудной.

Первые шаги были сделаны в работах [7], [8]. Метод эффективной классификации коммутирующих дифференциальных операторов ранга $r > 1$ общего положения был создан авторами в работах [9], [10]. Коммутирующие пары ранга r зависят от $(r-1)$ произвольной функции одной переменной, гладкой алгебраической кривой Γ с *одной* отмеченной точкой P и набора параметров Тюрина (характеризующих оснащенное стабильное голоморфное расслоение). Мы называем такие конструкции *одноточечными.*

Для разностных операторов вся, ставшая уже классической, теория пар коммутирующих операторов ранга $r = 1$ основывалась только на *двухточечных конструкциях* [11], [12]. Кольца таких операторов оказывались изморфны кольцам $A(\Gamma, P^{\pm})$ мероморфных функций на алгебраической кривой Γ с полюсами в паре отмеченных точек $P^{\pm}$.

В предшествующей работе авторов [1] было показано, что для ранга $2l \geqslant 2$ широкий класс коммутирующих разностных операторов получается из одноточечной конструкции. Аналогично непрерывному случаю, эти операторы зависят от произвольных функции одной переменной $n \in Z$.

В настоящей работе нами получено описание широкого класса коммутирующих разностных операторов, построенных исходя из двухточечных конструкции. В отличие от одноточечных конструкции, здесь не возникает никаких произвольных функции; коэффициенты операторов могут быть вычислены через тэта-функции Римана. Как и для случая ранга 1, эти операторы приводят к решениям уравнений $2D$ цепочки Тода и всей связанной с ними иерархии.

Рассмотрим гладкую алгебраическую кривую Γ рода g с двумя отмеченными точками $P^{\pm}$. Пусть (γ) является набором rg точек γ_s, $s = 1, \dots, rg$, на Γ, а (α) является набором $(r-1)$-мерных векторов: $\alpha_s = (\alpha_{sj})$, $j = 1, \dots, r-1$. Согласно [9], [10], эти параметры (γ, α), называются *параметрами Тюрина.* В общем случае они определяют стабильное оснащенное расслоение $\mathscr{E}$ над Γ ранга r и степени $c_1(\det \mathscr{E}) = rg$.

Лемма 1. *Для любого набора параметров Тюрина (γ, α) общего положения существует единственная мероморфная вектор-функция $\psi_n(Q) = (\psi_n^i(Q))$, $i = 1, \dots, r$; $Q \in \Gamma$ такая, что:* (i) *вне $P^{\pm}$ функция $\psi_n^i(Q)$ имеет не более чем простые полюсы в точках γ_s; ее вычеты в этих точках удовлетворяют соотношению $\alpha_{si} \operatorname{res}_{\gamma_s} \psi_n^i = \operatorname{res}_{\gamma_s} \psi_n^r$;* (ii) *в окрестности отмеченных точек $\psi_n(Q)^i$, $n = kr + j$, $0 \leqslant j < r$, имеет вид*

$$\psi_n^i = z_{\pm}^{\mp k}\bigl(\xi_{n,\pm}^i + O(z_{\pm})\bigr), \tag{1}$$

где $\xi_{kr+j,+}^j = 1$, $\xi_{kr+j,+}^i = 0$, $i > j$; $\xi_{kr+j,-}^i = 0$, $i < j$ (здесь $z_{\pm}$ локальные координаты в окрестностях $P^{\pm}$).

Определенная выше вектор-функция является аналогом разностной функции Бейкера–Ахиезера для случая высших рангов.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов DMS-98-02577, DMS-97-04613.

Теорема 1. *Пусть $\psi_n^i(Q)$ является векторной функцией Бейкера-Ахиезера, соответствующей набору алгебро-геометрических данных $\{\Gamma, P^{\pm}, (\gamma, \alpha)\}$. Тогда для любой функции $f(Q) \in A(\Gamma, P^{\pm})$ существует единственный разностный оператор L_f вида:*

$$L_f = \sum_{i=-rn_-}^{rn_+} u_i(n)T^i, \qquad u_{\pm rn_{\pm}} = f_{\pm} \neq 0, \tag{2}$$

такой, что $L_f\psi_n^i(Q) = f(Q)\psi_n^i(Q)$, $i = 1, \ldots, r$. Здесь $Ty_n = y_{n+1}$ оператор сдвига, а $n_{\pm}$ порядки функции $f(Q)$ в точках $P^{\pm}$.

Как функция ψ, так и коэффициенты операторов могут быть явно вычислены через тэта-функцию Римана, отвечающую кривой Γ. Коэффициенты операторов L_f являются периодическими функциями тогда и только тогда, когда $\mathrm{A}(P^+) - A(P^-)$ является точкой конечного порядка на якобиане $J(\Gamma)$.

Замечание 1. Обратим внимание на то, что в этой конструкции нет функциональных параметров даже и в случае ранга $r > 1$. Из формула (2) следует, что среди операторов L_f имеются как такие, что все сдвиги T^i положительны, $i > 0$, так и такие операторы, что все сдвиги отрицательны, $i < 0$. Одноточечные конструкции никогда не приводят к таким операторам. Мы естествено приходим здесь и к конструкции представлений варианта алгебры Каца-Муди $\widehat{sl}(r, C)$, ассоциированной с алгебраической кривой Γ с отмеченными точками $P^{\pm}$ по схеме работы [13].

Замечание 2. Авторы также построили для любого ранга $r > 1$ двухточечные вектор-функции Бейкера–Ахиезера, задающие решения полной иерархии уравнений $2D$ цепочки Тода. Они зависят от $2(r-1)$ произвольных функций. Эта конструкция содержит теорию интегрируемых потенциалов двумерного оператора Шредингера, связанных с расслоениями высших рангов, начатую авторами в работе [14].

Рассмотрим кольцо $\mathscr{D}$ разностных операторов конечного порядка. В силу теоремы 1 набор параметров Тюрина общего положения (γ, α) задает гомоморфизм $G_{(\gamma,\alpha)}: A(\Gamma, P^{\pm}) \mapsto \mathscr{D}$, образ которого является максимальным коммутативным подкольцом. Следующая теорема показывает, что предложенная конструкция описывает все подобные кольца общего положения.

Теорема 2. *Для любого кольцевого мономорфизма $G: A(\Gamma, P^{\pm}) \mapsto \mathscr{D}$, такого что операторы $L_f = G(f)$ имеют вид (2), нормированные совместные собственные функции определяют оснащенное голоморфное расслоение ранга r и степени rg. В общем положении, когда это расслоение описывается параметрами Тюрина (γ, α), гомоморфизм G совпадает с гомоморфизмом $G = G_{(\gamma,\alpha)}$, задаваемым в силу теоремы 1 с помощью соответствующей векторной функции Бейкера–Ахиезера.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Кричевер И. М., Новиков С. П. // УМН. 2000. Т. 55. №1. С. 187–188. [**2**] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. // УМН. 1976. Т. 31. №1. С. 55–136. [**3**] Кричевер И. М. // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 183–208. [**4**] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Итоги науки и техники. Фундаментальные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1985. [**5**] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. [**6**] Burchnall J. L., Chaundy T. W. // Proc. Roy. Soc. London. 1928. V. 118. P. 557–583. [**7**] Dixmier J. // Matematika. 1969. V. 13. №4. P. 27–40. [**8**] Дринфельд В. Г. // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11. №1. С. 11–31. [**9**] Кричевер И. М. // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №3. С. 20–31. [**10**] Кричевер И. М., Новиков С. П. // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №4. С. 41–52. [**11**] Кричевер И. М. // УМН. 1978. Т. 33. №4. С. 215–216. [**12**] Mumford D. // Proccedings of International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto 1977). Tokyo: Kinokuniya Book Store, 1978. P. 115–153. [**13**] Кричевер И. М., Новиков С. П. // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. №2. С. 46–63. [**14**] Кричевер И. М., Новиков С. П. // УМН. 1980. Т. 35. №6. С. 47–68.

Columbia University, New York, University of Maryland, College Park,
Институт теоретической физики им. Ландау

Принято редколлегией
03.04.2000