ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И РАЗНОСТНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ: ОДНОТОЧЕЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

Рассмотрим аналогично [1] неособую алгебраическую кривую Γ с отмеченной точкой $P_0 = \infty$ и локальной координатой $z = k^{-1}$, $z(P_0) = 0$. Обозначим через $A = A(\Gamma, P_0)$ кольцо алгебраических функций с единственным полюсом в P_0. Зададим "данные обратной задачи" в виде набора точек $(\gamma_1, \dots, \gamma_{lg})$, где l – это "ранг" и g – род кривой Γ, параметров α_{sj}, $s = 1, \dots, lg$, $j = 1, \dots, l-1$ и матричной $l \times l$-функции $\chi_n^{(0)}(k)$ $(n \in \mathbb{Z})$ с ненулевыми элементами только $\chi^{(0)p,p+1} = 1$, $p \leqslant l-1$, $\chi^{(0)lq} = a_q$, $q = 1, \dots, l$, где a_q – это полиномы от k, зависящие от n.

Теорема 1. *Для любого вектора η_0 и данных общего положения существует и единственна вектор-функция "Бейкера–Ахиезера" $\psi_n(P)$, $P \in \Gamma$, мероморфная на $\Gamma \setminus P_0$, с полюсами первого порядка в точках γ_s, где вычеты связаны соотношениями $(\mathrm{res}_{\gamma_s} \psi^{q+1}) = \alpha_{sq}(\mathrm{res}_{\gamma_s} \psi^1)$, $s = 1, \dots, lg$, $q = 1, \dots, l-1$. В окрестности точки $\infty = P_0$ вектор-функция ψ имеет асимптотику $\psi = \bigl[\eta_0 + \sum_{s \geqslant 1} \eta_{sn} k^{-s}\bigr]\Psi^{(0)}$, $\Psi_x^{(0)} = \chi^{(0)}\Psi^{(0)}$ или $\Psi_{n+1}^{(0)} = \chi_n^{(0)}\Psi_n^{(0)}$, $\Psi^{(0)}$ – это $l \times l$-матрица.*

Теорема 2. *Пусть матрица $\chi^{(0)}$ зависит от k так, что лишь одна из функций $a_{jn}(k)$ имеет вид $a_j = k - v_{j,n+1}^{(0)}$, а все остальные a_q не зависят от k при $q \neq j$. Тогда для любой функции $f(P) \in A(\Gamma, P_0)$ с полюсом порядка τ найдется единственный оператор L_f вида*

$$L_f = \sum_{-M}^{+N} u_{pn} T^p,$$

где $N = \tau(l-j+1)$, $M = \tau(j-1)$, $T\psi_n = \psi_{n+1}$, $M + N = \tau l$, такой, что вектор-функция Бейкера–Ахиезера ψ, построенная в теореме 1, где $\eta_0 = (\eta_0^q)$, $\eta_0^q = \delta^{qj}$, удовлетворяет уравнению

$$L_f \psi = f\psi.$$

Замечание. Для $j = 1$ это утверждение содержится в [1], [2] в непрерывном случае. Напомним, что (α, γ) – это "параметры Тюрина", характеризующие оснащенное голоморфное стабильное расслоение η, где $c_1(\det \eta) = lg$. Все известные ранее конструкции разностных коммутирующих операторов (ранга 1) требовали не менее двух "бесконечных" точек на кривой Γ; отметим, что симметричные операторы $M = N$ возможны лишь для четного ранга $l = 2j - 2$.

Следуя идее [1], рассмотрим многопараметрическую вектор-функцию Бейкера–Ахиезера. Она задается теми же, что и в теореме 1, данными $(\Gamma, P_0, \gamma_s, \alpha_{sj}, z = k^{-1})$, но для каждой новой переменной t_p задается дополнительно своя матрица $M^{(0p)}$, $p = 1, 2, \dots$. При этом "затравочная" матрица $\Psi_n^{(0)}$ определяется из уравнений $(t = (t_1, t_2, \dots))$:

$$\Psi_{n+1}^{(0)} = \chi_n^{(0)}\Psi_n^{(0)}, \qquad \Psi_{t_p}^{(0)} = M^{(0p)}\Psi^{(0)}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

где $\chi^{(0)}$ выбраны как в теореме 2.

Теорема 3. *Для любого $l \geqslant 2$ можно выбрать матрицы $M^{(0p)}$, $p = 1, 2, \dots$, так, что вектор-функция Бейкера–Ахиезера ψ определяют решения иерархий двумеризованной цепочки Тода при любых данных обратной задачи $(\Gamma, P_0, z = k^{-1}, \gamma_s, \alpha_{sq})$.* (Решение, определяемое функцией ψ, мы назовем *решением ранга l*.)

Пример. Пусть $g = 1$, $l = 2$, $a_1 = -c^{(0)}_{n+1}$, $a_2 = k - v^{(0)}_{n+1}$, заданы данные $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2)$ и функция $f(P) = \lambda = k^2$ на Γ. Из вектора Бейкера–Ахиезера Ψ_n сделаем матрицу $\widehat{\Psi}_n$ со строками ψ_n, ψ_{n+1}. Мы имеем $\widehat{\Psi}_{n+1} = \chi_n \widehat{\Psi}_n$, где $\chi_n = (-c^{0,1}_{n+1}, k - v_{n+1}) + O(k^{-1})$. Полюсы χ_n лежат в точках γ_{sn}, где $\gamma_{s0} = \gamma_s$, $s = 1, 2$. Нули $(\det \chi_n)$ лежат в точках $\gamma_{s,n+1}$. При этом $\alpha_{sn} \operatorname{res}_{\gamma_{sn}} \chi^{i1} = \operatorname{res}_{\gamma_{sn}} \chi^{i2}$, $i = 1, 2$, $\alpha_{s,n+1} = -\chi^{22}(\gamma_{s,n+1})$. Величина $\gamma_{1n} + \gamma_{2n} = c$ не зависит от n. Операторы L_f эффективно вычисляются. Для $f = \lambda = -P(z)$ и $c = 0$ мы имеем симметризуемый оператор четвертого порядка

$$\begin{gathered}
\lambda\psi_n = L_\lambda \psi_n = [(L_2)^2 + u_n]\psi_n, \qquad L_2\psi_n = \psi_{n+1} + v_n\psi_n + c_n\psi_{n-1}, \\
u_n = -[\wp(\gamma_{n-1}) + \wp(\gamma_{n-2})] + b_{n-1} + b_{n-2}, \qquad \wp(z) = -\zeta'(z), \\
b_n = 2\wp'(\gamma_n)[\wp(\gamma_{n+1} + \gamma_n) - \wp(\gamma_{n+1} - \gamma_n)][\wp'(\gamma_{n+1} + \gamma_n) - \wp'(\gamma_{n+1} - \gamma_n)]^{-1}, \\
c_n = (\alpha_{1n} - \alpha_{2n})^{-1}[\zeta(\gamma_{n+1} - \gamma_n) - \zeta(\gamma_{n+1} + \gamma_n) + 2\zeta(\gamma_n)].
\end{gathered}$$

Здесь $\gamma_n = \gamma_{1n}$ и v_n – произвольные функции, α_{1n} и α_{2n} определяются из соотношения:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,n+1} &= -v_{n+1} + \zeta(\gamma_{n+1}) + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1n} - \alpha_{2n}}\zeta(\gamma_{n+1} - \gamma_n) + \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n} - \alpha_{2n}}\zeta(\gamma_{n+1} + \gamma_n), \\
\alpha_{2,n+1} &= -v_{n+1} - \zeta(\gamma_{n+1}) - \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1n} - \alpha_{2n}}\zeta(\gamma_{n+1} - \gamma_n) - \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n} - \alpha_{2n}}\zeta(\gamma_{n+1} + \gamma_n).
\end{aligned}$$

Рассмотрим временну́ю динамику, где $t = t_1$, $M^{(01)} = \chi^{(0)}_n + \operatorname{diag}(v^{(0)}_n, v^{(0)}_{n+1})$. Для матрицы Бейкера–Ахиезера $\widehat{\Psi}_n(t)$ имеем $\widehat{\Psi}_{nt} = M_n \widehat{\Psi}_n$, где $M_n = \chi_n + \operatorname{diag}(v_n, v_{n+1}) + O(k^{-1})$. Из совместности переменных n и t получаем нелинейную систему для $(c_n(t), v_n(t))$:

$$\begin{gathered}
\dot{c}_{n+1} = c_{n+1}(v_{n+1} - v_m), \qquad \dot{v}_{n+1} = c_{n+2} - c_{n+1} + \varkappa_{n+1} - \varkappa_n, \\
\chi^{22}_n = k - v_n + \varkappa_n k^{-1} + O(k^{-2}).
\end{gathered}$$

Эта система является дискретизацией так называемого “уравнения Кричевера–Новикова” из [1]. Коэффициент $\varkappa_n$ можно вычислить явно, используя динамику параметров Тюрина. В следующей заметке мы рассмотрим двух (и более) точечные конструкции ранга $l - 1$. Там появляется ряд новых феноменов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Кричевер И. М., Новиков С. П. // УМН. 1980. Т. 35. №6. С. 47–68. [**2**] Кричевер И. М. // Функц. анализ и прил. 1978. Т. 12. №3. С. 20–31.

University of Maryland at College Park

Принято редколлегией
19.01.2000