2003 г. май — июнь *т. 58, вып. 3(351)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.9

ДВУМЕРИЗОВАННАЯ ЦЕПОЧКА ТОДЫ, КОММУТИРУЮЩИЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

Построены решения высших рангов уравнений двумеризованной цепочки Тоды. Конструкция этих решений основана на теории коммутирующих разностных операторов, построенной в первой части работы. Показано, что задача восстановления коэффициентов коммутирующих операторов может быть эффективно решена с помощью уравнений дискретной динамики параметров Тюрина, характеризующих стабильные голоморфные векторные расслоения над алгебраической кривой.

Библиография: 31 название.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена кругу проблем, связанных с задачей построения алгебро-геометрических решений высших рангов двумеризованной цепочки Тоды

$$\partial^2_{\xi\eta}\varphi_n = e^{\varphi_n-\varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n+1}-\varphi_n}. \tag{1.1}$$

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке гранта DMS-01-04621.
Работа второго автора выполнена при частичной поддержке гранта DMS-00-72700.

Ранее такие решения для уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$3u_{yy} = (4u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x \tag{1.2}$$

были построены в работе авторов [1]. Их конструкция, как и само понятие *ранга* решений, опирается на теорию коммутирующих одномерных дифференциальных операторов [2]. В современной математической физике эта теория появилась как побочный алгебраический аспект теории интегрирования нелинейных солитонных систем и спектральной теории периодических конечнозонных операторов [3]–[6].

Уравнение КП, как и любое другое солитонное уравнение, представляет собой лишь одно из уравнений соответствующей иерархии. Решения полной иерархии КП – это функция $u = u(t)$, зависящая от бесконечного набора времен $t = (t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t, t_4, \dots)$. Если алгебро-геометрические решения $(1+1)$-систем типа уравнения КдФ, начиная с работы [7], выделялись условием стационарности одного из потоков КдФ-иерархии, то для уравнения КП алгебро-геометрические решения уравнения КП выделяются условием стационарности относительно *двух* времен иерархии $\partial_{t_n} u = \partial_{t_m} u = 0$. Это условие эквивалентно существованию пары коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов

$$[L_n, L_m] = 0, \qquad L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \partial_x^i, \qquad L_m = \sum_{j=0}^{m} v_j \partial_x^j, \tag{1.3}$$

которые коммутируют со вспомогательными операторами Лакса $\partial_y - L_2$ и $\partial_t - L_3$ для уравнения КП, найденными впервые в [8], [9],

$$L_2 = \partial_x^2 + u, \qquad L_3 = \partial_x^3 + \frac{3}{2}\, u\partial_x + w. \tag{1.4}$$

Тем самым, пары коммутирующих обыкновенных скалярных линейных дифференциальных операторов определяют инвариантные пространства для всей иерархии КП. Рангом r пары называется число линейно-независимых совместных собственных функций, т.е. число решений уравнений

$$L_n \psi^i = E\psi^i, \qquad L_m \psi^i = w\, \psi^i, \qquad i = 1, \dots, r, \tag{1.5}$$

для тех пар комплексных чисел (E, w), для которых пространство решений не пусто. Ранг пары коммутирующих дифференциальных операторов является *общим делителем* их порядков.

Как чисто алгебраическая задача, проблема классификации коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов была поставлена еще в 20-х годах Бурхналом и Чаунди [10], [11], которые далеко продвинулись в решении для случая операторов взаимно-простых порядков (в котором ранг всегда равен 1). Эффективная классификация коммутирующих операторов ранга 1 была завершена в [4]. Бурхнал и Чаунди отмечали (см. [11]), что общая задача для ранга $r > 1$ представляется чрезвычайно трудной.

Первые шаги были сделаны в работах [12], [13]. Метод эффективной классификации коммутирующих дифференциальных операторов ранга $r > 1$ общего положения был создан авторами в работах [1], [2]. Коммутирующие пары ранга r зависят от $(r-1)$ *произвольной функции* одной переменной, гладкой алгебраической кривой Γ с *одной* отмеченной точкой P и набора параметров Тюрина (характеризующих оснащенное стабильное голоморфное расслоение). Мы называем такие конструкции *одноточечными.*

Для уравнений $2D$ цепочки Тоды условия, выделяющие алгебро-геометрические решения, могут быть сформулированы так же, как и в теории КП. При этом условие стационарности решений относительно двух потоков соответствующей иерархии эквивалентно существованию пары коммутирующих разностных операторов

$$L = \sum_{i=-N_-}^{N_+} u_i(n)T^i, \qquad A = \sum_{i=-M_-}^{M_+} v_i(n)T^i, \tag{1.6}$$

которые коммутируют с операторами Лакса

$$\mathscr{L}_1 = \partial_\xi - T - w(n), \qquad \mathscr{L}_2 = \partial_\eta - c(n)T^{-1}, \tag{1.7}$$

$$w(n) = \varphi_{n\xi}, \qquad c(n) = e^{\varphi_n - \varphi_{n+1}}, \tag{1.8}$$

для $2D$ цепочки Тоды. Здесь и далее T обозначает оператор сдвига по дискретной переменной, $Ty_n = y_{n+1}$.

Для разностных операторов вся, ставшая уже классической, теория пар коммутирующих операторов ранга $r = 1$ основывалась только на *двухточечных конструкциях* [14], [15]. Кольца таких операторов оказывались изоморфны кольцам $A(\Gamma, P^{\pm})$ мероморфных функций на алгебраической кривой Γ с полюсами в паре отмеченных точек $P^{\pm}$. Замечательна *почти градуированная* структура, имеющаяся в этих алгебрах. Связь этих алгебр с базисами типа Лорана–Фурье на римановых поверхностях была развита авторами в [16] для теории струн.

В полном объеме проблема классификации коммутирующих разностных операторов не решена до сих пор. Анализ этой проблемы, приведенный во втором параграфе настоящей работы, позволил авторам выделить ряд новых существенных моментов. Оказалось, что коммутирующие разностные операторы ранга $r = 1$ могут быть построены с помощью *многоточечных* конструкций. *A posteriori* этот факт не представляется удивительным. Для коммутирующих дифференциальных операторов с матричными коэффициентами возникновение многоточечных конструкций хорошо известно [4]. По-видимому, для разностных операторов не представляется возможным естественное выделение случая операторов со скалярными коэффициентами. Представляется разумным считать, что разностным аналогом коммутирующих линейных дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами являются пары коммутирующих разностных операторов, возникающих в рамках лишь *одно- и двухточечных* конструкций. Для авторов наиболее существенным аргументом в пользу такого предложения послужило то, что только в этих случаях соответствующие кольца коммутирующих разностных операторов остаются инвариантными относительно иерархии двумеризованной цепочки Тоды.

Следует подчеркнуть принципиальное различие этих двух случаев. Для двухточечной конструкции функциональные параметры не возникают и коэффициенты операторов могут быть вычислены через тэта-функции Римана. В одноточечном случае в конструкции коммутирующих операторов для рангов $l > 1$ возникают *функциональные параметры*. Коэффициенты соответствующих операторов зависят от произвольных l функций дискретной переменной, гладкой алгебраической кривой Γ с *одной* отмеченной точкой P и набора параметров Тюрина. Как и в непрерывном случае [2], задача восстановления совместных собственных функций таких операторов по алгебро-геометрическим спектральным данным сводится к задаче Римана на соответствующей алгебраической кривой и не может быть решена явно. Вместе с тем, как было замечено в [1], задача восстановления коэффициентов коммутирующих операторов в ряде случаев допускает явное решение. В основе такого решения лежат уравнения на параметры Тюрина, описывающие их зависимость от начальной точки нормировки. Отметим, что в недавней работе [17] была установлена связь непрерывных деформаций параметров Тюрина, описывающих решения высших рангов уравнения КП, с теорией систем Хитчина [18]. Исследование дискретной динамики параметров Тюрина позволило авторам найти явный вид коммутирующих операторов, возникающих в рамках одноточечной конструкции ранга два на эллиптической кривой. Кольцо таких операторов порождается парой операторов L и A порядков 4 и 6:

$$L = \sum_{i=-2}^{2} u_i(n)T^i, \qquad A = \sum_{i=-3}^{3} v_i(n)T^i.$$

Коэффициенты этих операторов зависят от двух произвольных функций γ_n и s_n. В простейшем примере явный вид оператора L дается следующими формулами:

$$L = L_2^2 - \wp(\gamma_n) - \wp(\gamma_{n-1}),$$

где L_2 – разностный оператор Шрёдингера

$$L_2 = T + v_n + c_n T^{-1}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} 4c_{n+1} &= (s_n^2 - 1)F(\gamma_{n+1}, \gamma_n)F(\gamma_{n-1}, \gamma_n), \\ 2v_{n+1} &= s_n F(\gamma_{n+1}, \gamma_n) - s_{n+1}F(\gamma_n, \gamma_{n+1}), \end{aligned}$$

где

$$F(u, v) = \zeta(u + v) - \zeta(u - v) - 2\zeta(v).$$

Здесь и далее $\wp(u) = \wp(u|\omega, \omega')$, $\zeta(u) = \zeta(u|\omega, \omega')$ – стандартные функции Вейерштрасса.

Эти формулы являются дискретными аналогами формул для дифференциального оператора L_4 порядка 4 и ранга 2, полученных авторами в [19]. В работе [20] был найден явный вид функционального параметра, входящего в формулы для L_4, который соответствует оператору Диксмье [12]. Коэффициенты этого оператора являются полиномиальными функциями непрерывной независимой переменной x. Представляется интересной задача построения дискретного аналога оператора Диксмье.

Конструкция алгебро-геометрических решений высших рангов для уравнений $2D$ цепочки Тоды, кратко изложенная в [21], [22], приводится в третьем параграфе работы. Она основана на построении векторных функций Бейкера–Ахиезера с помощью деформаций собственных функций коммутирующих разностных операторов. Эти деформации полностью определяются поведением функций Бейкера–Ахиезера в окрестности отмеченных точек, которая задается с помощью некоторых *затравочных* матричных функций. Вновь приходится отмечать принципиальные различия двухточечного и одноточечного случаев.

В двухточечном случае, в котором отсутствуют функциональные параметры при построении коммутирующих разностных операторов, функция Бейкера–Ахиезера определяется двумя затравочными функциями $\Psi_+(\xi,z)$, $\Psi_-(\eta,z)$, каждая из которых задается обыкновенным дифференциальным уравнением, коэффициенты которого содержат произвольные функции одной из непрерывных переменных (ξ или η соответственно). В одноточечном случае все наоборот. Произвольные функции дискретной переменной присутствуют в конструкции коммутирующих разностных операторов, но при этом нет произвола в определении затравочной функции $\Psi_0(n,\xi,\eta,z)$.

И в том и в другом случае построенные многопараметрические функции Бейкера–Ахиезера $\psi_n=(\psi_n^i)$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathscr{L}_1\psi_n=0, \qquad \mathscr{L}_2\psi_n=0, \tag{1.9}$$

где $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2$ – операторы вида (1.7). Совместность уравнений (1.9) эквивалентна (1.1). Кроме того, из (1.9) следует, что при каждом n функция Бейкера–Ахиезера, как функция переменных (ξ,η), удовлетворяет линейному уравнению Шрёдингера вида

$$\bigl(\partial^2_{\xi\eta}+v_n(\xi,\eta)\partial_\xi+u_n(\xi,\eta)\bigr)\psi_n=0. \tag{1.10}$$

Как следствие получаем, что наши конструкции приводят к построению широкого класса интегрируемых на одном уровне энергии операторов Шрёдингера в магнитном поле.

Обратная спектральная задача *на одном уровне энергии* для операторов Шрёдингера в магнитном поле была поставлена и решена в [23] для случая ранга 1. Конструкция интегрируемых на одном уровне энергии двумерных операторов Шрёдингера произвольного ранга была предложена в [19]. Соответствующие конструкции были *двухточечными*. Возможность построения интегрируемых операторов Шрёдингера в рамках одноточечных конструкций до настоящей работы не обсуждалась.

Следует подчеркнуть, что, по существу, задачи построения решений уравнений $2D$ цепочки Тоды и задача построения интегрируемых операторов Шрёдингера в магнитном поле эквивалентны. В современной теории интегрируемых систем уравнение (1.1) и его представление Лакса были впервые получены по схеме Захарова–Шабата как двумерный аналог одномерной цепочки Тоды [24]. Позднее выяснилось, что эти уравнения были хорошо известны в классической дифференциальной геометрии в эквивалентной форме цепочек преобразований Лапласа для двумерного уравнения Шрёдингера [25].

Рассмотрим произвольный двумерный оператор Шрёдингера L в магнитном поле:

$$2L = (\partial_{\bar z} + B)(\partial_z + A) + 2V, \tag{1.11}$$

где $\partial_z = \partial_x - i\partial_y$, $\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y$. Обычно функции $H = (B_z - A_{\bar z})/2$ и $U = -H - V$ называются *магнитным полем* и *потенциалом* соответственно. Для краткости в дальнейшем под потенциалом мы будем подразумевать функцию V. Оператор L определен с точностью до калибровочных преобразований $L \to e^{-f} L e^{f}$. Единственными инвариантами L являются потенциал V и магнитное поле H. *Преобразования Лапласа*, являющиеся двумерным аналогом преобразований Бэклунда–Дарбу, определяются следующим образом:

$$(\partial_{\bar z} + B)(\partial_z + A) + 2V \longmapsto \widetilde{V}(\partial_z + A)V^{-1}(\partial_{\bar z} + B) + 2V. \tag{1.12}$$

Потенциал $\widetilde{V}$ и магнитное поле $\widetilde{H}$ преобразованного оператора даются формулами

$$\widetilde{V} = V + \widetilde{H}, \qquad 2\widetilde{H} = 2H + \Delta \ln V. \tag{1.13}$$

Если функция ψ удовлетворяет уравнению $L\psi = 0$, то функция $\widetilde{\psi} = (\partial_z + A)\,\psi$ удовлетворяет уравнению $\widetilde{L}\,\widetilde{\psi} = 0$. Рассмотрим цепочку преобразований Лапласа

$$V_{n+1} = V_n + H_{n+1}, \qquad 2H_{n+1} = 2H_n + \Delta \ln V_n. \tag{1.14}$$

Замена $V_k = \ln(\varphi_n - \varphi_{k-1})$ переводит эту цепочку в уравнения $2D$ Тоды (1.1).

§ 2. Коммутирующие разностные операторы

2.1. Постановка задачи. Основной целью настоящего параграфа является построение эффективной классификации коммутирующих,

$$[L, A] = 0, \tag{2.1}$$

разностных операторов вида

$$L = \sum_{i=-N_-}^{N_+} u_i(n)T^i, \quad A = \sum_{i=-M_-}^{M_+} v_i(n)T^i, \quad N_\pm = r_\pm n_\pm, \quad M_\pm = r_\pm m_\pm \tag{2.2}$$

со скалярными коэффициентами, где $r_\pm$ – наибольшие общие делители старших и младших порядков операторов соответственно, т.е. числа $n_\pm$, $m_\pm$ отличны от нуля и взаимно просты:

$$(n_+, m_+) = (n_-, m_-) = 1. \tag{2.3}$$

Предположим, что старшие и младшие коэффициенты этих операторов отличны от нуля. Для краткости обозначим их через

$$u^\pm(n) = u_{\pm N_\pm}(n) \neq 0, \qquad v^\pm(n) = v_{\pm M_\pm}(n) \neq 0. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.1) инвариантно относительно калибровочных преобразований вида

$$L, A \longmapsto \widetilde{L} = gLg^{-1}, \widetilde{A} = gAg^{-1}, \qquad \widetilde{L} = \sum_{i=-N_-}^{N_+} g(n+i)g^{-1}(n)u_i(n)T^i, \tag{2.5}$$

где $g(n) \neq 0$ – произвольная необращающаяся в нуль функция дискретной переменной. Калибровочным преобразованием можно добиться того, что старший коэффициент оператора L равен тождественно 1:

$$u^+(n) = 1. \tag{2.6}$$

Эта нормировка, которая в дальнейшем будет предполагаться, оставляет частичную калибровочную свободу, т.е. она инвариантна относительно калибровочных преобразований, отвечающих функциям $g(n)$ таким, что $g(n+N_+) = g(n)$. Из уравнения (2.1) следует, что для старшего коэффициента оператора A имеет место равенство $v^+(n+N_+) = v^+(n)$. Следовательно, калибровочными преобразованиями можно добиться дополнительно выполнения условий

$$v^+(n+r_+) = v^+(n) = v^+_{\bar{n}}. \tag{2.7}$$

Здесь $\bar{n}$ обозначает вычет n по модулю r_+, т.е. $n \to \bar{n} = n \,(\operatorname{mod} r_+)$, $0 \leqslant \bar{n} < r_+ - 1$. Оставшаяся калибровочная свобода отвечает функциям $g(n)$ таким, что $g(n+r_+) = g(n)$.

Зафиксировав калибровочную свободу условиями (2.6), (2.7), мы получим, что младшие коэффициенты операторов имеют вид

$$u^-(n) = h^{-1}(n-N_-)h(n), \qquad v^-(n) = v^-_{\widetilde{n}} h^{-1}(n-M_-)h(n). \tag{2.8}$$

Здесь $\widetilde{n} = n \,(\operatorname{mod} r_-)$.

В случае $r_+ = r_- = r > 1$ уравнения коммутативности обладают дополнительной инвариантностью. А именно, для любого $0 \leqslant i < r$ по каждой функции y_n дискретной переменной n можно определить новую функцию Y_n, имеющую ненулевые значения только в точках соответствующей подрешетки:

$$Y_n = \begin{cases} 0, & n \neq i \,(\operatorname{mod} r), \\ y_{\bar{n}}, & n = r\bar{n} + i. \end{cases} \tag{2.9}$$

При этом соответствии любой оператор порядка N определяет оператор порядка rN. Если взять r пар коммутирующих операторов $[L_i, A_i] = 0$ (не обязательно различных), то их прямая сумма, как операторов, действующих на соответствующих подрешетках, будет удовлетворять условию невырожденности (2.4) и уравнению коммутативности (2.1).

Чтобы исключить указанную свободу, мы будем рассматривать коммутирующие пары *неразложимых* операторов, т.е. операторов, которые не приводятся к блочно-диагональному или блочно-жорданову виду при разложении решетки n на прямую сумму подрешеток вида $kr + i$, $0 \leqslant i < r - 1$. Для выполнения условия неразложимости достаточно потребовать, чтобы для любого $i = 1, \dots, r-1$ нашлось такое n_0, что

$$v_{rm_+-i}(n_0) \neq 0, \qquad v_{-rm_-+i}(n_0) \neq 0. \tag{2.10}$$

2.2. Спектральная кривая. Формальные бесконечности. Определение *аффинной* спектральной кривой в дискретном случае ничем не отличается от непрерывного варианта. Рассмотрим линейное пространство $\mathscr{L}(E)$ решений уравнения $Ly = Ey$, т.е.

$$y_{N_+} + \sum_{i=-N_-}^{N_+-1} u_i(n) y_{n+i} = E y_n. \tag{2.11}$$

Размерность этого пространства равна порядку линейного оператора L, $\dim \mathscr{L}(E) = N_+ + N_-$. Ограничение оператора A на $\mathscr{L}(E)$,

$$A(E) = A\big|_{\mathscr{L}(E)}, \tag{2.12}$$

является конечномерным линейным оператором. Спектральная кривая, параметризующая совместные собственные функции операторов L и A, определяется характеристическим уравнением

$$R(w, E) = \det(w - A(E)) = 0. \tag{2.13}$$

Матричные элементы оператора $A(E)$ в базисе c^i решений уравнения (2.11), заданных начальными условиями

$$c_n^i = \delta_n^i, \qquad i, n = -N_-, \ldots, N_+ - 1\,, \tag{2.14}$$

являются полиномиальными функциями переменной E. Следовательно, $R(w,E)$ является полиномом не только по переменной w, но и по переменной E.

Компактификация спектральной кривой. Построение собственных функций коммутирующих операторов в бесконечности $E \to \infty$ в дискретном случае, в целом повторяющее непрерывный случай, содержит ряд новых существенных моментов.

Обозначим через $\mathscr{L}_+$ линейное пространство решений уравнения

$$L\Phi = z^{-N_+}\Phi, \qquad \Phi = \{\Phi_n\}, \tag{2.15}$$

вида

$$\Phi_n(z) = z^{-n}\left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(n) z^s\right). \tag{2.16}$$

При этом мы предполагаем, что $\xi_0(n)$ не равно нулю по крайней мере для одного значения n.

Лемма 2.1. *Пространство $\mathscr{L}_+$, рассматриваемое как линейное пространство над полем k_+ лорановских рядов по переменной z, имеет размерность N_+. Оно порождено решениями Φ^i, $i = 0, \ldots, N_+ - 1$, однозначно определяемыми условиями*

$$\Phi_n^i(z) = z^{-n}\delta_{ni}, \qquad n, i = 0, \ldots, N_+ - 1. \tag{2.17}$$

Для доказательства леммы достаточно заметить, что подстановка ряда (2.16) в уравнение (2.15) приводит к системе реккурентных уравнений для определения коэффициентов разложения (2.16)

$$\begin{aligned} &\xi_0(n+N_+) = \xi_0(n), \\ &\xi_1(n+N_+) = \xi_1(n) - u_{n+N_+-1}(n)\xi_0(n+N_+-1), \ \dots . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Из этой системы следует, что Φ однозначно определяется начальными данными $\xi_s(i)$, $i=0,\dots,N_+-1$.

Пространство $\mathscr{L}_+$ инвариантно относительно действия оператора A. Следовательно,

$$A\Phi_n^i(z) = \sum_{j=0}^{N_+-1} A_{ij}(z)\Phi_n^j(z), \qquad A_{ij}(z) = \sum_{s=-M_+}^{\infty} A_{ij}^{(s)} z^s. \tag{2.19}$$

Старший коэффициент представляет собой матрицу

$$A_{ij}^{(M_+)} = v_i^+ \delta_{j,\, i+M_+\,(\mathrm{mod}\, N_+)}. \tag{2.20}$$

Замена $z \to \varepsilon z$, где $\varepsilon^{N_+} = 1$, определяет автоморфизм пространства $\mathscr{L}_+(z)$. Из этого вытекает, что коэффициенты характеристического полинома

$$\det(w - A_{ij}(z)) = w^{N_+} + \sum_{i=0}^{N_+-1} a_i(E) w^i, \qquad E = z^{-N_+}, \tag{2.21}$$

представляют собой ряды по переменной $E = z^{-N_+}$. Отсюда следует, что собственные значения этой матрицы являются лорановскими рядами по переменной z (а не по дробным степеням $z^{1/k}$, $k > 1$).

Предположим, что выполнены условия

$$v_i^+ \neq v_j^+, \qquad i \neq j, \tag{2.22}$$

где v_i^+ определены в (2.7). В этом случае матрица $A_{ij}(z)$ имеет единственный собственный вектор $\Psi_n^{(i)}(z)$, $i = 0,\dots,r_+-1$, вида (2.16)

$$\Psi_n^{(i)}(z) = z^{-n}\biggl(\delta_{i,\bar n} + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(n) z^s\biggr). \tag{2.23}$$

Старший член разложения является собственным вектором матрицы (2.20), отвечающим собственному значению v_i^+. Замена $z \to \varepsilon^{n_+} z$ умножает старший член на ε^{-in_+}. Следовательно, вектор $z^i \Psi_n^{(i)}(z)$ разлагается по степеням

$$z_0 = z^{r_+} = E^{1/n_+}. \tag{2.24}$$

Отсюда следует, что при $i > 0$ для всех $j = 0,\dots,r_+-1$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} &\Psi_{kr_++j}^{(i)}(z) = z^{-i} z_0^{-k}(O(z_0)), \qquad j < i, \\ &\Psi_{kr_++j}^{(i)}(z) = z^{-i} z_0^{-k}(O(1)), \qquad j \geqslant i. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Из условия неразложимости (2.10), в котором, не ограничивая общности, мы полагаем $n_0 = 0$, следует, что для $i > 0$ нулевая компонента собственного вектора имеет вид $\Psi_0^{(i)} = O(z^{r-i})$. Поэтому нормированные стандартным образом собственные векторы

$$\psi_n^{(i)} = \frac{\Psi_n^{(i)}(z)}{\Psi_0^{(i)}(z)}, \qquad \psi_0^{(i)} = 1, \tag{2.26}$$

для $i > 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\psi_{kr_+ + j}^{(i)}(z_0) = O(z_0^{-k-1}), \qquad i \leqslant j, \\ &\psi_{kr_+ + j}^{(i)}(z_0) = O(z_0^{-k}), \qquad\quad j < i. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Для $i = 0$ имеем:

$$\psi_{kr_+ + j}^{(0)}(z_0) = z_0^{-k}(1 + O(z_0)). \tag{2.28}$$

Таким образом, при выполнении условий (2.22) мы построили набор из N_+ формальных собственных векторов оператора $A(E)$ в окрестности бесконечности $E = \infty$. Аналогичным образом мы построим еще один набор из N_- формальных собственных функций в предположении

$$v_i^- \neq v_j^-, \qquad i \neq j, \tag{2.29}$$

где v_i^- определены равенством (2.8). Для этого рассмотрим линейное пространство $\mathscr{L}_-$ над полем лорановских рядов k_- по переменной z_-, порожденное решениями уравнения

$$L\Phi = z^{-N_-}\Phi \tag{2.30}$$

вида

$$\Phi_n^-(z) = z_-^n \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s^-(n) z_-^s\right). \tag{2.31}$$

При этом предполагается, что $\xi_0^-(n)$ не равно нулю по крайней мере для одного значения n.

Полностью повторяя предшествующие аргументы, получим, что характеристический полином оператора $A^-(z_-)$, индуцированного действием A в пространстве $\mathscr{L}_-$, имеет вид

$$\det\bigl(w - A^-(z_-)\bigr) = \prod_{i=0}^{r_-}\prod_{k=0}^{n_-}\bigl(w - \widehat{v}_i^-(z_{k,-})\bigr), \qquad z_{k,-} = \varepsilon_1^k z_-^r, \tag{2.32}$$

где $\varepsilon_1^{n_-} = 1$ и ряд $\widehat{v}_i^- = \widehat{v}_i^-(z_{0,-})$ имеет вид:

$$\widehat{v}_i^-(z_{0,-}) = v_i^- z_{0,-}^{-m_-}(1 + O(z_{0,-})). \tag{2.33}$$

Нормированная собственная функция оператора $A^-(z_-)$, соответствующая собственному значению $w = \widehat{v}_i^-(z_{0,-})$ при всех $i = 0, \dots, r-1$, имеет вид:

$$\begin{aligned} &\psi_{kr_- + j}^{(i)}(z_{0,-}) = O(z_{0,-}^{k}), \qquad i \geqslant j, \\ &\psi_{kr_- + j}^{(i)}(z_{0,-}) = O(z_{0,-}^{k+1}), \qquad i < j. \end{aligned} \tag{2.34}$$

В прямой сумме пространств $\mathscr{L}_+$ и $\mathscr{L}_-$ можно выбрать базис c_n^i, нормированный условиями

$$c_n^i = \delta_{i,n}, \qquad i,n = N_-, \dots, N_+ - 1. \tag{2.35}$$

В этом базисе оператор A имеет те же матричные элементы, что и при построении аффинной спектральной кривой. Следовательно, характеристическое уравнение (2.13) совпадает с произведением характеристических уравнений для $A(z)$ и $A^-(z_-)$, т.е.

$$\det\bigl(w - A(E)\bigr) = \left[\prod_{i=0}^{r_+} \prod_{k=0}^{n_+-1} \bigl(w - \widehat{v}_i(z_k)\bigr)\right]\left[\prod_{i=0}^{r_-} \prod_{k=0}^{n_--1} \bigl(w - \widehat{v}_i^-(z_{k,-})\bigr)\right], \tag{2.36}$$

где произведение в первой и второй группах сомножителей идет по всем корням из E^{-1} степени n_+ и n_- соответственно:

$$E = z_k^{-n_+} = z_{k,-}^{-n_-}. \tag{2.37}$$

Разложение (2.36) дает исчерпывающую информацию о компактификации спектральной кривой в том случае, когда для почти всех E оператор $A(E)$ имеет N различных собственных значений. Это случай коммутирующих операторов ранга 1, которому посвящен следующий пункт.

2.3. Коммутирующие операторы ранга 1. Условия (2.22) и (2.29) гарантируют, что собственные значения оператора $A(E)$, соответствующие различным сомножителям в первом и втором произведениях формулы (2.36), различны. Потребуем дополнительно, чтобы не совпадали между собой и сомножители в разных группах. Для этого достаточно выполнения одного из двух следующих условий:

$$\text{(i)}\ \ m_+n_- \neq m_-n_+, \qquad \text{(ii)}\ \ v_i^+ \neq v_j^-. \tag{2.38}$$

В этом случае из равенства (2.36) следует, что аффинная кривая, заданная уравнением (2.13), в окрестности бесконечности компактифицируется $l = r_+ + r_-$ точками $P_{i_\pm}^\pm$, $i_\pm = 0, \dots, r_\pm - 1$. В окрестности бесконечности, а значит, и при почти всех значениях E спектральная кривая Γ имеет $N = N_+ + N_-$ листов. Следовательно, каждой точке спектральной кривой отвечает единственная собственная функция ψ_n операторов L и A. Сформулируем основную теорему.

Теорема 2.1. *Пусть пара нераспадающихся коммутирующих операторов удовлетворяет условиям* (2.22), (2.29), (2.38). *Тогда*

(1) *спектральная кривая* Γ, *заданная характеристическим уравнением* (2.13), *компактифицируется на бесконечности* $l = r_+ + r_-$ *точками* $P_{i_\pm}^\pm$, *в окрестности которых локальными координатами являются*

$$z_{k,\pm} = E^{-1/n_\pm};$$

(2) *совместная собственная функция пары коммутирующих операторов*

$$L\psi_n(Q) = E\psi_n(Q), \qquad A\psi_n(Q) = w\psi_n(Q), \qquad Q = (w,E) \in \Gamma,$$

нормированная условием $\psi_0 = 1$, является мероморфной функцией на Γ, дивизор полюсов которой $D = \{\gamma_s\}$ вне отмеченных точек $P_i^{\pm}$ не зависит от n. В окрестности отмеченных точек ψ_n имеет вид (2.27), (2.28), (2.34), *т.е. если представить n в виде $n = kr_+ + j_+ = k'r_- + j_-$, $0 \leqslant j_\pm < r_\pm$, то*

(2a) *ψ_n имеет полюсы порядка k в точках $P_0^+, P_{j_++1}^+, \dots, P_{r_+-1}^+$ и полюсы порядка $k+1$ в точках $P_1^+, \dots, P_{j_+}^+$;*

(2b) *ψ_n имеет нули порядка k' в точках $P_{j_-}^-, \dots, P_{r_--1}^-$ и нули порядка $k'+1$ в точках $P_0^-, \dots, P_{j_--1}^-$;*

(3) *в общем положении, когда спектральная кривая является гладкой и неприводимой, число полюсов γ_s (с учетом кратности) функции $\psi_n(Q)$ вне отмеченных точек равно роду g кривой Γ.*

Таким образом, мы построили отображение, сопоставляющее паре коммутирующих операторов, удовлетворяющих условиям теоремы, кривую Γ с l отмеченными точками $P_{i_\pm}^{\pm}$ и дивизор степени g:

$$[L, A] = 0 \mapsto \{\Gamma,\, P_{i_\pm}^{\pm},\, D = \{\gamma_s\}\}, \qquad 0 \leqslant i_\pm < r_\pm, \quad s = 1, \dots, g. \tag{2.39}$$

Покажем теперь, что эти алгебро-геометрические данные однозначно восстанавливают коммутирующие операторы.

Рассмотрим произвольную гладкую кривую Γ с $l = r_+ + r_-$ отмеченными точками $P_{i_\pm}^{\pm}$. Из теоремы Римана–Роха следует, что для любого неспециального дивизора $D = (\gamma_1, \dots, \gamma_g)$ существует единственная с точностью до пропорциональности функция $\psi_n(Q)$, дивизор полюсов которой вне отмеченных точек не превосходит D и которая в точках $P_i^{\pm}$ имеет полюсы и нули кратностей, предписанных пп. (2a), (2b) предшествующей теоремы.

Действительно, условия (2a), (2b) означают, что функция $\psi_n(Q)$ принадлежит пространству $\mathscr{L}(D_n)$ мероморфных функций, ассоциированных с дивизором D_n,

$$D_n = D + k \sum_{i_+=0}^{r_+-1} P_{i_+}^+ + \sum_{i_+=1}^{j_+} P_{i_+}^+ - k' \sum_{i_-=0}^{r_--1} P_{i_-}^- - \sum_{i_-=0}^{j_--1} P_{i_-}^-\,,$$

где $n = kr_+ + j_+ = k'r_- + j_-$. Степень этого дивизора равна g, поэтому в силу теоремы Римана–Роха пространство $\mathscr{L}(D_n)$ одномерно.

Обозначим через $\mathscr{A}(\Gamma, P_{i_\pm}^{\pm})$ кольцо мероморфных функций на Γ с полюсами в $P_{i_\pm}^{\pm}$.

Теорема 2.2. *Пусть $\psi(Q) = \{\psi_n(Q)\}$ – последовательность функций, соответствующая алгебро-геометрическим данным* (2.39). *Тогда для любой функции $f \in \mathscr{A}(\Gamma, P_i^{\pm})$ существует единственный разностный оператор L_f (с коэффициентами, не зависящими от Q) такой, что*

$$L_f \psi(Q) = f(Q)\psi(Q).$$

Если функция $f(Q)$ имеет полюсы порядка n_+ и n_- в точках $P_{i_\pm}^{\pm}$ соответственно, то оператор L_f имеет вид (2.2).

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из теоремы Римана–Роха. Действительно, если функция f имеет полюсы в точках $P_i^{\pm}$ порядков $n_{\pm}$, то функция $f(Q)\psi_n(Q)$ принадлежит линейному пространству:

$$f(Q)\psi_n(Q) \in \mathscr{L}\left(D_n + n_+ \sum_{i_+=0}^{r_+-1} P_{i_+}^+ + n_- \sum_{i_-=0}^{r_--1} P_{i_-}^-\right).$$

Размерность этого пространства равна $N_+ + N_- + 1$. Из определения ψ_n следует, что функции ψ_{n+i}, $-rn_- \leqslant i \leqslant rn_+$, образуют базис этого пространства. Коэффициенты $u_i(n)$ оператора L_f – это просто коэффициенты разложения $f\psi_n$ по базисным функциям ψ_{n+i}.

Стандартным образом функция $\psi_n(Q)$ может быть явно представлена с помощью тэта-функции Римана. Для простоты приведем эти формулы для случая $r = r_+ = r_-$. Прежде всего определим функции h_j, $j = 0, \ldots, r-1$:

$$h_j(Q) = \frac{f_j(Q)}{f_j(P_j^+)}; \qquad f_j(Q) = \frac{\theta(A(Q) + Z_j)}{\theta(A(Q) + Z_0)} \frac{\prod_{i=0}^{j-1} \theta(A(Q) + S_i^-)}{\prod_{i=1}^{j} \theta(A(Q) + S_i^+)}, \tag{2.40}$$

где

$$S_i^{\pm} = \mathscr{K} - A(P_i^{\pm}) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s), \quad i = 0, \ldots, r-1, \tag{2.41}$$

$$Z_j = Z_0 + \sum_{i=0}^{j-1} A(P_i^-) - \sum_{i=1}^{j} A(P_i^+), \quad Z_0 = \mathscr{K} - \sum_{s=1}^{g} A(\gamma_s). \tag{2.42}$$

Обозначим через $d\Omega^{(0)}$ единственный мероморфный дифференциал на Γ, имеющий простые полюсы в точках $P_j^{\pm}$ с вычетами ∓ 1 и нормированный условиями

$$\oint_{a_k^0} d\Omega^{(0)} = 0. \tag{2.43}$$

Координаты его вектора b_0-периодов $U^{(0)}$ равны

$$U_k^{(0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k^0} d\Omega^{(0)} = \sum_{j=0}^{r-1} \bigl(A(P_j^-) - A(P_j^+)\bigr). \tag{2.44}$$

Лемма 2.2. *Функции $\psi_n(Q)$ равны*

$$\psi_{rk+j} = h_j(Q) \frac{\theta(A(Q) + kU^{(0)} + Z_j)\theta(A(P_j^+) + Z_j)}{\theta(A(Q) + Z_j)\theta(A(P_j^+) + kU^{(0)} + Z_j)} \exp\left(k \int^Q d\Omega^0\right). \tag{2.45}$$

Доказательство формулы (2.45) сводится к простой проверке того, что определенная ею функция однозначна на Γ и обладает всеми необходимыми аналитическими свойствами.

Следствие 2.1. *Коэффициенты коммутирующих операторов ранга* 1 *являются квазипериодическими мероморфными функциями переменной* n.

2.4. Ранг >1. Случай разделенных бесконечностей. Из конструкции формальных совместных собственных функций операторов L и A следует, что при почти всех значениях E оператор $A(E)$ диагонализуем. Набор кратностей $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_k)$ собственных значений $A(E)$ мы будем называть векторным рангом коммутирующих операторов. В задаче о коммутирующих дифференциальных операторах со скалярными коэффициентами ранг всегда скалярен ($k=1$) и является делителем порядков операторов [2]. Появление векторных рангов в задаче о коммутирующих дифференциальных операторах с матричными коэффициентами было обнаружено в [26]. Для коммутирующих операторов векторного ранга μ характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(w-A(E))=\prod_{i=1}^{k} R_i^{\mu_i}(w,E). \tag{2.46}$$

Важно заметить, что условия (2.22), (2.29) на старшие коэффициенты коммутирующих операторов, которые гарантировали простоту собственных значений операторов $A(z)$, $A^-(z_-)$ в формальной окрестности бесконечности, не совместны со вспомогательными линейными задачами для уравнений $2D$ Тоды. Действительно, из уравнений

$$[L,\mathcal{L}_i]=[A,\mathcal{L}_i]=0, \tag{2.47}$$

где L, A и $\mathcal{L}_i$ имеют вид (1.6) и (1.7) соответственно, следует, что

$$\begin{aligned} u_{N_+}(n+1)&=u_{N_+}(n), \qquad u_{N_-}(n)c(n-N_-)=u_{N_+}(n-1)c(n),\\ v_{M_+}(n+1)&=v_{M_+}(n), \qquad v_{M_-}(n)c(n-N_-)=v_{M_+}(n-1)c(n). \end{aligned}$$

Последние равенства означают, что величины $v_i^{\pm}$, определенные равенствами (2.7), (2.8), удовлетворяют соотношениям

$$v_i^+=v^+, \qquad v_i^-=v^-. \tag{2.48}$$

В этом случае *a priori* нет никаких препятствий для возникновения кратных собственных значений у оператора $A(z)$ или у оператора $A^-(z_-)$ по отдельности.

Коммутирующие операторы, для которых собственные значения оператора $A(z)$ не совпадают с собственными значениями оператора $A^-(z_-)$, мы назовем операторами с *разделенными бесконечностями*. Для того, чтобы коммутирующие операторы имели разделенные бесконечности, достаточно потребовать выполнения одного из условий (2.38), т.е. одного из условий (i) $m_+n_-\neq m_-n_+$, (ii) $v^+\neq v^-$.

Назовем *типом* пары коммутирующих операторов с разделенными бесконечностями наборы $\mu_{i_\pm}^{\pm}$ кратностей *различных* собственных значений операторов $A(z)$, $A^-(z_-)$,

$$\sum_{i_\pm\in I_\pm}\mu_{i_\pm}^{\pm}=r_\pm. \tag{2.49}$$

Здесь $I_\pm$ – конечные наборы, параметризующие различные собственные значения операторов $A(z)$, $A^-(z_-)$. Различным собственным значениям этих операторов соответствуют различные "бесконечноудаленные" точки, которые компактифицируют компоненты Γ_i аффинной спектральной кривой, заданные уравнениями $R_i(w,E) = 0$. Простой подсчет степени дивизора совместных собственных функции (подробнее см. ниже доказательство п. (1) теоремы 2.3) показывает, что не существует компоненты Γ_i, которая компактифицировалась бы точками, отвечающими собственным значениям лишь одного из операторов $A(z)$ или $A^-(z_-)$. Из того, что кратность собственного значения $A(E)$ постоянна на каждой из компонент Γ_i, следует, что:

(i) *для каждого значения индекса $i_\pm$ найдется по крайней мере один индекс $j_\mp$ такой, что $\mu^\pm_{i_\pm} = \mu^\mp_{j_\mp}$.*

Авторам представляется правдоподобным, что нет никаких иных ограничений на типы коммутирующих операторов с разделенными бесконечностями, т.е. что для любого набора положительных целых чисел $\mu^\pm_{i_\pm}$, удовлетворяющих равенству (2.49) и сформулированному выше условию (i), найдутся коммутирующие операторы вида (2.2) с разделенными бесконечностями, имеющие этот набор в качестве своего типа.

Ниже мы доказываем это утверждение для типов вида (r,r). Этот тип отвечает коммутирующим операторам вида (2.2) с разделенными бесконечностями, которые имеют одинаковые наибольшие общие делители старших и младших коэффициентов, т.е. $r = r_+ = r_-$, и которые имеют максимально возможный скалярный ранг $\mu = r$.

Лемма 2.3. *Пусть коммутирующая пара неразложимых операторов вида (2.2), где $r = r_+ = r_-$, имеет ранг r. Тогда существует единственный лорановский ряд*

$$v^+(x) = v^+x^{-m_+} + O(x^{-m_++1}) \tag{2.50}$$

такой, что существует решение $\Psi(z)$ уравнений

$$L\Psi(z) = z^{-rn_+}\Psi(z), \qquad A\Psi(z) = v(z^r)\Psi(z) \tag{2.51}$$

вида

$$\Psi_n(z) = z^{-n}\biggl(1 + \sum_{s=1}^{\infty}\xi_s(n)z^s\biggr). \tag{2.52}$$

Пространство решений уравнений (2.51) в $\mathscr{L}(z)$ порождено рядами $\Psi(\varepsilon^k z)$, $\varepsilon^r = 1$.

Практически идентичное утверждение имеет место и для собственных значений и собственных векторов ограничения оператора A на пространство $\mathscr{L}(z_-)$.

Сохраним обозначение Γ для кривой, заданной уравнением $R(w,E) = 0$, где $R(w,E)$ – корень степени r из характеристического полинома

$$\det(w - A(E)) = R^r(w,E).$$

Из утверждения леммы и ее аналога для оператора $A^-(z_-)$ следует, что в окрестности бесконечности имеет место разложение

$$R(w,E)=\left[\prod_{k=0}^{n_+-1}\bigl(w-v^+(z_k)\bigr)\right]\left[\prod_{k=0}^{n_--1}\bigl(w-v^-(z_{k,-})\bigr)\right], \tag{2.53}$$

где произведение в первой и второй группах сомножителей идет по всем корням из E^{-1} степени n_+ и n_-.

Каждой точке кривой Γ соответствует r-мерное пространство совместных собственных функций операторов L и A. Зафиксируем базис $\psi^i(Q)$ в этом пространстве условиями

$$\psi_n^i(Q)=\delta_{in}, \qquad i,n=0,\dots,r-1. \tag{2.54}$$

Для всех n компоненты $\psi_n^i(Q)$ являются мероморфными функциями. Вид этих функций в окрестности бесконечности можно найти, используя базисы, задаваемые рядами $\Psi^\pm(\varepsilon^k z_\pm)$. Как и в непрерывном случае [2], особенности вектор-функции $\psi_n(Q)=\{\psi_n^i(Q)\}$ в аффинной части спектральной кривой описываются матричными дивизорами.

В общем положении, когда полюсы ψ_n простые, соответствующий матричный дивизор $D=\{\gamma_s,\alpha_s\}$ – это набор несовпадающих точек γ_s и набор r-мерных векторов $\alpha_s=\{\alpha_s^i\}$, определенных с точностью до пропорциональности $\alpha_s\to\lambda\alpha_s$. Точки γ_s – это полюсы ψ_n^i, а параметры α_s определяют соотношения между вычетами

$$\alpha_s^i \operatorname{res}_{\gamma_s}\psi_n^j(Q)=\alpha_s^j \operatorname{res}_{\gamma_s}\psi_n^i(Q). \tag{2.55}$$

Данные (γ,α) были названы в [1], [2] *параметрами Тюрина*, так как, согласно [27], в общем случае они определяют стабильное оснащенное расслоение $\mathscr{E}$ над Γ ранга r и степени $c_1(\det\mathscr{E})=rg$.

Приведем окончательную формулировку теоремы.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть пара неразложимых коммутирующих операторов с разделенными бесконечностями удовлетворяет условию* (2.38) *и имеет ранг* $r=r_\pm$. *Тогда*

(1) *спектральная кривая* Γ, *заданная характеристическим уравнением* (2.53), *является неприводимой, компактифицируется на бесконечности двумя точками* $P^\pm$, *в окрестности которых локальными координатами являются* $z_\pm=E^{-1/n_\pm}$;

(2) *вектор-функция* $\psi(Q)$, *координатами которой являются совместные собственные функции*

$$L\psi_n^i(Q)=E\psi_n^i(Q), \qquad A\psi_n^i(Q)=w\psi_n^i(Q), \qquad Q=(w,E)\in\Gamma,$$

нормированные условиями (2.54), *является мероморфной вектор-функцией на* Γ, *матричный дивизор полюсов которой вне отмеченных точек* $P_i^\pm$ *не зависит от* n; *в общем положении, когда спектральная кривая является гладкой, степень дивизора полюсов* $D=\{\gamma_s,\alpha_s\}$ *равна* gr, *где* g – *род кривой* Γ;

(3a) *в окрестности точки P^+ функция $\psi^i_{kr+j}(Q)$ имеет вид*

$$\begin{aligned}
\psi^i_{kr+j} &= O(z_+^{-k}), \quad i<j,\\
\psi^i_{kr+i} &= z_+^{-k}(1+O(z_+)),\\
\psi^i_{kr+j} &= O(z_+^{-k+1}), \quad i>j;
\end{aligned} \tag{2.56}$$

(3b) *в окрестности точки P^- функция $\psi^i_{kr+j}(Q)$ имеет вид*

$$\begin{aligned}
\psi^i_{kr+j} &= O(z_-^{k+1}), \quad i<j,\\
\psi^i_{kr+j} &= O(z_-^{k}), \quad i\geqslant j.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Верно и обратное утверждение. Для любого набора общего положения точек γ_s и векторов $\alpha_s=(\alpha_s^i)$, $s=1,\dots,gr$, $i=0,\dots,r-1$, существует единственный набор функций $\psi^i_n(Q)$ таких, что:

(i) $\psi^i_n(Q)$ вне отмеченных точек $P^\pm$ имеет не более чем простые полюсы в точках γ_s (если они все различны); вычеты этих функций удовлетворяют соотношениям (2.55);

(ii) $\psi^i_n(Q)$ в окрестности отмеченных точек $P^\pm$ имеет вид, определяемый равенствами (2.56), (2.57).

Теорема 2.4. *Пусть $\psi^i(Q)=\{\psi^i_n(Q)\}$ – функции, определенные выше по набору данных $\{\Gamma,\,P^\pm,\,D=\{\gamma_s,\alpha_s\}\}$. Тогда для любой функции $f\in\mathscr{A}(\Gamma,P^\pm)$ существует единственный разностный оператор L_f (с коэффициентами, не зависящими от Q) такой, что*

$$L_f\psi^i(Q)=f(Q)\psi^i(Q).$$

Если функция $f(Q)$ имеет полюсы порядка n_+ и n_- в точках $P_i^\pm$ соответственно, то оператор L_f имеет вид (2.2), где $r=r_+=r_-$.

Пример. $r=2$, $g=1$. Не ограничивая общности, можно считать, что пара отмеченных точек на эллиптической кривой с периодами $(2\omega,2\omega')$ отождествлена с парой точек вида $\pm z_0$. Выберем векторы α_1,α_2 в виде $\alpha_s=(a_s,1)$.

Из (2.56), (2.57) следует, что ψ^1_{2n} может быть представлена в виде

$$\psi^1_{2n}(z)=A_n\frac{\sigma(z-z_0)\sigma(z-\gamma_1-\gamma_2-(2n-1)z_0)}{\sigma(z-\gamma_1)\sigma(z-\gamma_2)}\left[\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma(z-z_0)}\right]^n, \tag{2.58}$$

где $\sigma(z)=\sigma(z;2\omega,2\omega')$ – сигма-функция Вейерштрасса. Аналогичное выражение для ψ^0_{2n} имеет вид

$$\psi^0_{2n}(z)=\left(B_n\frac{\sigma(z-\gamma_1-2nz_0)}{\sigma(z-\gamma_1)}+C_n\frac{\sigma(z-\gamma_2-2nz_0)}{\sigma(z-\gamma_2)}\right)\left[\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma(z-z_0)}\right]^n. \tag{2.59}$$

Условия (2.56) на вычеты позволяют выразить параметры B_n, C_n через A_n:

$$B_n = a_1 A_n \frac{\sigma(\gamma_2 + (2n-1)z_0)\sigma(\gamma_1 - z_0)}{\sigma(\gamma_1 - \gamma_2)\sigma(2nz_0)}, \tag{2.60}$$

$$C_n = a_2 A_n \frac{\sigma(\gamma_1 + (2n-1)z_0)\sigma(\gamma_2 - z_0)}{\sigma(\gamma_2 - \gamma_1)\sigma(2nz_0)}. \tag{2.61}$$

В окрестности z_0 функция ψ^0_{2n} имеет вид $(z-z_0)^{-n}$. Это позволяет найти явное выражение для коэффициента A_n:

$$A_n = \frac{\sigma(2nz_0)\sigma(\gamma_1 - \gamma_2)}{(a_1 - a_2)\sigma^n(2z_0)\sigma((2n-1)z_0 + \gamma_2)\sigma((2n-1)z_0 + \gamma_1)}. \tag{2.62}$$

Аналогичным образом находится явный вид функций ψ^i_{2n+1}:

$$\psi^0_{2n+1}(z) = A'_n \frac{\sigma(z+z_0)\sigma(z - \gamma_1 - \gamma_2 - (2n+1)z_0)}{\sigma(z-\gamma_1)\sigma(z-\gamma_2)} \left[\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma(z-z_0)}\right]^n, \tag{2.63}$$

$$\psi^1_{2n+1}(z) = \left(B'_n \frac{\sigma(z-\gamma_1 - 2nz_0)}{\sigma(z-\gamma_1)} + C'_n \frac{\sigma(z-\gamma_2-2nz_0)}{\sigma(z-\gamma_2)}\right) \left[\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma(z-z_0)}\right]^n, \tag{2.64}$$

где

$$B'_n = a_1^{-1} A'_n \frac{\sigma(\gamma_2 + (2n+1)z_0)\sigma(\gamma_1 + z_0)}{\sigma(\gamma_1 - \gamma_2)\sigma(2nz_0)}, \tag{2.65}$$

$$C'_n = a_2^{-1} A'_n \frac{\sigma(\gamma_1 + (2n+1)z_0)\sigma(\gamma_2 + z_0)}{\sigma(\gamma_2 - \gamma_1)\sigma(2nz_0)}, \tag{2.66}$$

$$A'_n = \frac{\sigma(2nz_0)\sigma(\gamma_1 - \gamma_2)}{\sigma^n(2z_0)} (I'_n - I''_n)^{-1}, \tag{2.67}$$

$$I'_n = \frac{\sigma(\gamma_2 + (2n+1)z_0)\sigma(\gamma_1 + (2n-1)z_0)\sigma(\gamma_1 + z_0)}{a_1 \sigma(z_0 - \gamma_1)}, \tag{2.68}$$

$$I''_n = \frac{\sigma(\gamma_1 + (2n+1)z_0)\sigma(\gamma_2 + (2n-1)z_0)\sigma(\gamma_2 + z_0)}{a_2 \sigma(z_0 - \gamma_2)}. \tag{2.69}$$

Аналогичные выражения в терминах тэта-функций Римана могут быть выписаны и в общем случае.

Следствие 2.2. *Коэффициенты операторов L_f, определенных в силу предшествующей теоремы, являются квазипериодическими функциями переменной n.*

Замечание. Следует отметить, что функции $\psi^{(i)}_{2n}$ и $\psi^{(i)}_{2n+1}$ в континуальном пределе

$$z_0 \to 0, \quad n \to \infty, \quad nz_0 \to x,$$

сходятся к различным функциям непрерывной переменной x. По-видимому, это и объясняет то, что в задаче о коммутирующих дифференциальных операторах не известны естественные случаи отсутствия функциональных параметров.

2.5. Ранг > 1. Слившиеся бесконечности. Рассмотрим теперь случай коммутирующих операторов вида (2.2) максимально возможного ранга $l = r_+ + r_-$. В этом случае происходит слияние формальных собственных значений оператора A на двух бесконечностях $\mathscr{L}_\pm$. Необходимым условием возможности совпадения хотя бы одного собственного значения оператора $A(z)$ с одним из собственных значений оператора $A^-(z_-)$ являются равенства $m_+ = m_- = m$, $n_+ = n_- = n$, т.е. случай полностью или частично слившихся бесконечностей может возникнуть лишь в задаче о классификации коммутирующих операторов вида

$$L = \sum_{i=-Nr_-}^{Nr_+} u_i(n)T^i, \qquad A = \sum_{i=-Mr_-}^{Mr_+} v_i(n)T^i, \qquad (n,m) = 1. \tag{2.70}$$

Назовем *типом* коммутирующей пары операторов наборы пар $(\mu_i^+ \,|\, \mu_i^-)$, где индекс i пробегает множество I всех различных собственных значений $A(z)$ и $A^-(z_-)$, а $\mu_i^\pm$ – кратности соответствующего собственного значения для каждого из операторов по отдельности. Отметим, что определенный ранее тип операторов с разделенными бесконечностями может восприниматься как частный случай общего определения, в котором множество I есть объединение множеств $I_\pm$, которые параметризуют индексы $i_\pm$ в (2.49), а все пары имеют вид $(\mu_i^+ \,|\, 0)$ или $(0 \,|\, \mu_j^-)$.

Авторам представляется, что никаких ограничений на типы, состоящие из пар, в которых оба числа отличны от нуля, $\mu_i^\pm > 0$, не существует. Если же среди пар найдется пара вида $(\mu|\, 0)$, то, как и ранее, имеется лишь одно ограничение, а именно должна найтись и пара вида $(0|\, \mu)$. Полное решение задачи классификации коммутирующих разностных операторов потребует конструкции коммутирующих операторов различных типов. Мы оставляет эту проблему открытой и рассмотрим ниже задачу построения коммутирующих операторов лишь для типа, состоящего из одной пары $(r_+|\, r_-)$. Как уже было сказано выше, это случай операторов максимально возможного скалярного ранга $l = r_+ + r_-$.

Прямая спектральная задача. Из построения формальных собственных функций в окрестности бесконечностей следует, что необходимым условием возникновения максимального ранга l является выполнение условий $v_i^+ = v_j^- = v$, т.е. оба оператора имеют вид (2.70), а их старшие и младшие коэффициенты в калибровке $u_{Nr_+} = 1$ имеют вид

$$u_{-Nr_-} = h^{-1}(n - Nr_-)h(n), \qquad v_{Mr_+} = v, \qquad v_{-Mr_-} = vh^{-1}(n - Mr_-)h(n). \tag{2.71}$$

Как и ранее, сохраним обозначение Γ для кривой, заданной уравнением $R(w,E) = 0$, где $R(w,E)$ – корень степени l из характеристического полинома

$$\det(w - A(E)) = R^l(w,E).$$

В окрестности бесконечности имеет место разложение

$$R(w,E) = \left[\prod_{k=0}^{N-1} \big(w - v(z_k)\big)\right], \tag{2.72}$$

где произведение идет по всем корням из E^{-1} степени N. Значит, в случае максимального ранга спектральная кривая компактифицируется на бесконечности *одной* гладкой точкой и, как следствие, является неприводимой.

Каждой точке кривой Γ соответствует l-мерное пространство совместных собственных функций операторов L и A. Зафиксируем базис $\psi^i(Q)$ в этом пространстве условиями

$$\psi_n^i(Q) = \delta_{in}, \qquad -r_- \leqslant i, n < r_+. \tag{2.73}$$

Отметим, что выбор интервала значений параметров i, n, используемых при фиксации нормировки, принципиален для возможности замкнутого описания аналитических свойств совместных собственных функций в окрестности бесконечности.

Теорема 2.5. *В случае общего положения совместные собственные функции ψ_n^i пары коммутирующих операторов ранга l, нормированные условиями* (2.73), *удовлетворяют следующим свойствам.*

1^0. *В аффинной части спектральной кривой Γ функции ψ_n^i имеют gl не зависящих от n полюсов γ_s, в которых выполняются соотношения*

$$\alpha_s^j \operatorname{res}_{\gamma_s} \psi_n^i(Q) = \alpha_s^i \operatorname{res}_{\gamma_s} \psi_n^j(Q). \tag{2.74}$$

2^0. *В окрестности "бесконечноудаленной" точки P_0 вектор-строка $\psi_n = \{\psi_n^i\}$ имеет вид*

$$\psi_n = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(n) z^s\right) \Psi_0(n,z), \qquad z^{-n} = E. \tag{2.75}$$

Здесь $\xi_s(n) = \{\xi_s^i(n)\}$ – вектор-строки,

$$\xi_0^i = \delta_0^i; \tag{2.76}$$

$\Psi_0(n,z)$ – матрица Вронского $\Psi_0^{j\,i}(n,z) = \phi_{n+j}^i(z)$, $-r_- \leqslant i,j < r_+$, построенная по базису ϕ^i решений уравнения

$$\phi_{n+r_+} + \sum_{i=-r_-}^{r_+-1} f_i^0(n)\phi_{n+i} = z^{-1}\phi_n, \tag{2.77}$$

коэффициенты которого $f_i^0(n)$ являются полиномиальными функциями коэффициентов оператора L. Базисные решения ϕ^i нормированы условиями

$$\Psi_0(0,z) = 1. \tag{2.78}$$

Доказательство. Обозначим через $\Psi(n,Q)$, $Q \in \Gamma$, матрицу Вронского $\Psi^{j\,i}(n,Q) = \psi_{n+j}^i(Q)$, $-r_- \leqslant i,j < r_+$. В окрестности бесконечноудаленной точки P_0, где локальной координатой является $z = E^{-1/n}$, ее можно считать функцией переменной z, т.е. $\Psi(n,z)$. С ее помощью мы определим полиномы ϕ_n^i переменной z^{-1}, задавая их асимптотику при $z \to 0$.

Лемма 2.4. *В случае общего положения существуют и единственны функции $\phi_n^i(z)$, голоморфные на расширенной z-плоскости всюду кроме $z = 0$ и такие, что в окрестности $z = 0$ вектор-строка $\phi_n(z) = (\phi_n^i(z))$ имеет вид*

$$\phi_n(z) = r_n(z)\Psi(n, z), \tag{2.79}$$

где $r_n(z)$ – вектор-строка, голоморфная в окрестности $z = 0$, значение которой при $z = 0$ равно

$$r_n^i(0) = \delta_0^i. \tag{2.80}$$

Задача построения $\phi_n(z)$ – это стандартная задача Римана. Выбрав малую окрестность точки $z = 0$, мы определяем голоморфные вектор-функции ϕ_n и r_n соответственно вне и внутри этой окрестности такие, что на границе выполняется соотношение (2.79). Если приращение аргумента детерминанта матрицы переклейки при обходе контура равно нулю, то в общем положении задача Римана имеет единственное решение, если зафиксировать значение вектор-функции в какой-либо точке. Следовательно, для доказательства леммы достаточно доказать, что детерминант $\Psi(n, z)$ голоморфен в окрестности $z = 0$ и в общем положении не равен нулю при $z = 0$. Этот факт вытекает из важного для дальнейшего результата следующей леммы.

Лемма 2.5. *В окрестности бесконечноудаленной точки матричная функция*

$$\mathscr{X}(n, Q) = \Psi(n + 1, Q)\Psi^{-1}(n, Q) \tag{2.81}$$

имеет вид

$$\mathscr{X}(n, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \chi_{-r_-}(n, z) & \chi_{-r_-+1}(n, z) & \chi_{r_-+2}(n, z) & \dots & \chi_{r_+-1}(n, z) \end{pmatrix}, \tag{2.82}$$

$$\chi_i(n, z) = z^{-1}\delta_{i,0} - f_i(n, z), \tag{2.83}$$

где $f_i(n, z)$ – регулярные ряды по переменной z.

Доказательство. Матрица $\mathscr{X}(n, Q)$ не зависит от нормировки базисных функций ψ_n^i, поэтому для вычисления асимптотики $\mathscr{X}(0, Q)$ в окрестности бесконечности можно воспользоваться формальными решениями, построенными в п. 2.2. Из равенств (2.27), (2.34) следует, что матрица Вронского $\Psi_\infty(0, z)$, построенная по таким формальным решениям, имеет блочный вид

$$\Psi_\infty(0, z) = \begin{pmatrix} z^{-1}A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}, \tag{2.84}$$

где $A(z)$, $D(z)$ – квадратные матрицы размеров $(r_- \times r_-)$ и $(r_+ \times r_+)$ соответственно. Все матрицы A, B, C, D являются рядами по переменной z. Свободный член ряда $D(z)$ является нижнетреугольной матрицей с единицами на диагонали. Свободный член ряда $A(z)$ является верхнетреугольной матрицей. Отсюда следует, что обратная матрица имеет вид

$$\Psi_\infty^{-1}(0,z) = \begin{pmatrix} zA_1(z) & zB_1(z) \\ zC_1(z) & D_1(z) \end{pmatrix}. \tag{2.85}$$

При этом свободные члены регулярных рядов A_1, B_1, C_1, D_1 равны

$$\begin{aligned} A_1(0) &= A^{-1}(0), \qquad B_1(0) = -A^{-1}(0)B(0)D^{-1}(0), \\ D_1(0) &= D^{-1}(0), \qquad C_1(0) = -D^{-1}(0)C(0)A^{-1}(0). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Для формальных решений $\psi^i_{r_+}$ имеют вид $z^{-1}\delta^i_0 + f^i(z)$, где f^i регулярны. Следовательно, последняя строка матрицы $\mathscr{X}(0)$, равная $\psi_r\Psi_\infty^{-1}(0)$, имеет вид

$$\mathscr{X}^{r_+-1,i}(0) = z^{-1}\delta^i_0 + f^i(z). \tag{2.87}$$

В силу трансляционной инвариантности конструкции формальных решений индекс n может быть заменен на $n - n_0$. Этот сдвиг не меняет матрицу $\mathscr{X}(n)$. Следовательно, последняя строка матрицы $\mathscr{X}(n_0)$ для любого n_0 имеет ту же структуру, что и $\mathscr{X}(0)$. Лемма доказана.

Условия нормировки (2.73) эквивалентны тому, что $\Psi(0,z) \equiv 1$. Из (2.82) следует, что

$$\det \Psi(n,z) = \prod_{m=0}^{n-1} \det \mathscr{X}(m,z) = (-1)^n \prod_{m=0}^{n-1} f_{-r_-}(m,z),$$

а значит, он голоморфен в окрестности $z = 0$ и в общем положении отличен от нуля при $z = 0$. Это утверждение завершает доказательство леммы 2.4.

Заметим, что по определению построенные функции ϕ^i_n являются целыми функциями переменной z^{-1}. Из того, что матрица переклейки $\Psi(n,z)$ мероморфна в окрестности $z = 0$, следует, что ϕ^i_n в точке $z = 0$ имеют полюс конечного порядка и, значит, являются полиномами переменной z^{-1}.

Пусть $\Psi_0(n,z)$ – матрица Вронского функций $\phi^i_n(z)$, т.е. $\Psi^{j,\,i}(n,z) = \phi^i_{n+j}(z)$.

Лемма 2.6. *В окрестности точки $z = 0$ матричная функция Ψ_0 имеет вид*

$$\Psi_0(n,z) = R(n,z)\Psi(n,z), \tag{2.88}$$

где $R(n,z)$ – голоморфная в окрестности $z = 0$ матричная функция такая, что $R(n,0)$ имеет блочный вид

$$R(n,0) = \begin{pmatrix} R_- & 0 \\ 0 & R_+ \end{pmatrix}, \tag{2.89}$$

где R_+ – нижнетреугольная, а R_- – верхнетреугольная $(r_\pm \times r_\pm)$-матрицы с единицами на диагоналях.

Доказательство. Из определения ϕ_n следует, что j-я строка R_j матрицы R для $j > 0$ равна

$$R_j(n,z) = r_{n+j}(n,z) \prod_{i=0}^{j-1} \mathscr{X}(n+i,z). \tag{2.90}$$

Из равенств (2.80), (2.83) следует, что R_j регулярна. Более того, координаты $R_j^i(n,0)$ вектора $R_j(n,0)$ могут быть отличны от нуля лишь при $0 \leqslant i \leqslant j$. При этом $R_j^j(n,0) = 1$. Обратная матрица $\mathscr{X}^{-1}$ имеет вид

$$\mathscr{X}^{-1} = \chi_{-r_-}^{-1} \begin{pmatrix} \chi_{-r_-+1} & \chi_{-r_-+2} & \chi_{-r+3} & \cdots & \chi_{r_+-1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.91}$$

Повторяя предшествующие аргументы с заменой $\mathscr{X}$ на $\mathscr{X}^{-1}$, получим требуемое утверждение и для отрицательных значений индекса j. Утверждение леммы доказано.

По построению $\Psi(0,z) = 1$. Так как элементы матрицы Вронского Ψ_0 являются полиномами переменной z^{-1}, то из равенства (2.88) следует, что $\Psi_0(0,z)$ является постоянной матрицей, равной $R(0,0)$. Из этого индукцией по j легко доказывается, что $\Psi_0(0,z)$ удовлетворяет условиям нормировки (2.78), т.е. $\Psi_0(0,z) = 1$.

Докажем теперь, что функции ϕ_n^i удовлетворяют уравнению вида (2.77). Для этого рассмотрим матрицу

$$\Psi_0(n+1,z)\Psi_0^{-1}(n,z) = \mathscr{X}_0(n,z) = R(n+1,z)\mathscr{X}(n,z)R^{-1}(n,z). \tag{2.92}$$

Из (2.83) и вида $R(n,0)$ следует, что единственный элемент в последней строке $\mathscr{X}_0$, имеющий полюс при $z = 0$, – это $\mathscr{X}_0^{r_+-1,\,0}$. Коэффициент при сингулярном члене z^{-1} его разложения равен 1. Из того, что $\mathscr{X}_0$ регулярна при всех $z \neq 0$, следует, что она полиномиальная функция переменной z^{-1}. Следовательно, последняя строка $\mathscr{X}_0$ имеет требуемый вид.

Для завершения доказательства второго пункта теоремы достаточно обратить равенство (2.88). Имеем

$$\Psi = R^{-1}\Psi_0. \tag{2.93}$$

Это равенство для строки с индексом $j = 0$ дает требуемое равенство (2.75), в котором первый сомножитель – это тейлоровское разложение соответствующей строки матрицы $R^{-1}(n,z)$.

После того как найдена асимптотика ψ_n в окрестности бесконечноудаленной точки, доказательство первого утверждения теоремы, т.е. нахождение степени матричного дивизора полюсов, полностью повторяет ход доказательства аналогичного утверждения в непрерывном случае [2].

Доказанная теорема в общем случае сопоставляет паре коммутирующих операторов вида (2.70), имеющих максимально возможный ранг $l = r_+ + r_-$: неособую алгебраическую кривую Γ с отмеченной точкой P_0; набор параметров Тюрина степени gl и набор произвольных $l-1$ функций $f_i^0(n)$ дискретной переменной n,

$$L, A \mapsto \{\Gamma, (\gamma,\alpha), f_i^0(n)\}. \tag{2.94}$$

Обратная спектральная задача. Рассмотрим произвольную гладкую алгебраическую кривую Γ с фиксированным локальным параметром z в окрестности отмеченной точки P_0. Зададим произвольный набор функций $f_i^0(n)$, $r_- \leqslant i < r_+$, и обозначим через $\Psi_0(k)$ матрицу Вронского $\Psi_0^{j,\,i} = \phi_{n+j}^i$, $r_- \leqslant j < r_+$, построенную по решениям разностного уравнения

$$\sum_{i=r_-}^{r_+} f_i^0(n)\phi_{n+i} = z^{-1}\phi_n, \qquad f_{r_+}^0 = 1, \tag{2.95}$$

степени $l = r_+ + r_-$, нормированным условиями

$$\phi_n^i = \delta_0^i, \qquad r_- \leqslant i < r_+. \tag{2.96}$$

ТЕОРЕМА 2.6 [21]. *Для любого набора параметров Тюрина общего положения степени lg и ранга l, т.е. набора lg точек γ_s и набора проективных l-мерных векторов $\alpha_s = (\alpha_s^i)$, $r_- \leqslant i \leqslant r_+$, существует и единственна вектор-функция $\psi_n(Q)$, координаты которой вне точки P_0 имеют не более чем простые полюсы в точках γ_s. Их вычеты в этих точках удовлетворяют соотношениям* (2.74). *В окрестности точки P_0 вектор-строка ψ_n имеет вид*

$$\psi_n = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(n) z^s\right)\Psi_0(n,z), \qquad \xi_0^i = \delta_0^i. \tag{2.97}$$

Для любой мероморфной функции $f \in \mathscr{A}(\Gamma, P_0)$ на Γ, имеющей единственный полюс порядка N в точке P_0, существует единственный оператор L_f вида

$$L_f = \sum_{i=-Nr_-}^{Nr_+} u_i(n) T^i, \qquad u_{Nr_+} = 1, \tag{2.98}$$

такой, что

$$L_f \psi(Q) = f(Q)\psi(Q)\,. \tag{2.99}$$

Доказательство теоремы стандартно. Равенство (2.97) эквивалентно тому, что ψ является решением задачи Римана на Γ, в которой Ψ_0 является функцией переклейки в окрестности отмеченной точки. В общем положении существование и единственность решения этой задачи следует из результатов [28], [29] или просто из теоремы Римана–Роха для векторных расслоений (см. подробнее [2]). Эти же самые результаты позволяют доказать и второе утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2.7. *Любое коммутативное кольцо $\mathscr{A}$ операторов вида* (2.98) *максимально возможного ранга l изоморфно кольцу $\mathscr{A}(\Gamma, P_0)$ мероморфных функций на некоторой алгебраической кривой Γ с единственным полюсом в отмеченной точке P_0. В случае общего положения изоморфизм $\mathscr{A}(\Gamma, P_0) \cong \mathscr{A}$ задается равенством* (2.99), *в котором вектор-функция Бейкера–Ахиезера задается некоторым набором параметров Тюрина (γ, α).*

2.6. Дискретная динамика параметров Тюрина. Ниже мы выводим дискретные уравнения на параметры Тюрина для коммутирующих операторов со слившимися бесконечностями, имеющих максимально возможный ранг l. Согласно утверждению теоремы 2.6, в общем положении произвольная алгебраическая кривая Γ с отмеченной точкой P_0, набор параметров Тюрина (γ, α) и произвольные коэффициенты $f_i^0(n)$ разностного уравнения (2.95) определяют векторную функцию $\psi_n(Q)$. Пусть, как и ранее, $\Psi(n, Q)$ обозначает соответствующую матрицу Вронского. Матричная функция $\mathscr{X}(n, Q)$, заданная формулой (2.81), имеет асимптотику (2.82), (2.83). Обозначим через

$$f_i(n) = f_i(n, 0) \tag{2.100}$$

значения при $z = 0$ регулярных рядов $f_i(n, z)$ (2.83). Эти функции дискретной переменной n могут быть явно выражены через исходные переменные $f_i^0(n)$ и первые коэффициенты $\xi_1(n)$ разложения (2.97) для ψ_n. Соответствующие соотношения далеки от эффективных формул, поскольку, как уже отмечалось выше, выражения для $\xi_1(n)$ через исходные параметры $(\gamma_s, \alpha_s, f_i^0(n))$ требуют решения задачи Римана. Вместе с тем, как будет видно из дальнейшего, необходимости в получении явных формул для $f_i(n)$ нет, поскольку их можно выбрать в качестве независимых параметров, определяющих коэффициенты коммутирующих операторов.

Для $n \neq 0$ обозначим через $\gamma_s(n)$ нули $\det \Psi(n, Q)$. В общем положении, когда они простые, их число равно gl. Обозначим через $\alpha_s(n)$ соответствующий левый нуль-вектор

$$\alpha_s(n)\Psi(n, \gamma_s(n)) = 0. \tag{2.101}$$

Для $n = 0$ определим

$$\gamma_s(0) = \gamma_s, \qquad \alpha_s(0) = \alpha_s. \tag{2.102}$$

Непосредственно из определения (2.81) следует:

Лемма 2.7. *Матричная функция $\mathscr{X}(n, Q)$ имеет простые полюсы в точках $\gamma_s(n)$. Для вычетов ее матричных элементов имеют место соотношения*

$$\alpha_s^j(n) \operatorname{res}_{\gamma_s(n)} \mathscr{X}^{m,i}(n, Q) = \alpha_s^i(n) \operatorname{res}_{\gamma_s(n)} \mathscr{X}^{m,j}(n, Q). \tag{2.103}$$

Точки $\gamma_s(n+1)$ являются нулями детерминанта матрицы $\mathscr{X}(n, Q)$, т.е.

$$\det \mathscr{X}(n, \gamma_s(n+1)) = 0. \tag{2.104}$$

Вектор $\alpha_s(n+1)$ является левым нуль-вектором матрицы $\mathscr{X}(n, \gamma_s(n+1))$,

$$\alpha_s(n+1)\mathscr{X}(n, \gamma_s(n+1)) = 0. \tag{2.105}$$

Простой подсчет размерностей с использованием теоремы Римана–Роха позволяет получить следующее утверждение.

Лемма 2.8. *Для любой гладкой алгебраической кривой Γ с фиксированной локальной координатой $k^{-1}(Q)$ в окрестности отмеченной точки P_0 и любого набора данных $(\gamma_s(n), \alpha_s(n), f_i(n))$ общего положения существует единственная мероморфная матричная функция $\mathcal{X}(n, Q)$, $Q \in \Gamma$, с не более чем простыми полюсами в точках P_0, γ_s и такая, что*:

(i) *разложение $\mathcal{X}(n, Q)$ в окрестности P_0 имеет вид* (2.82), (2.83), *в котором регулярные ряды $f_i(n, z)$ удовлетворяют соотношению* (2.100);

(ii) *вычеты $\mathcal{X}(n, Q)$ в точках γ_s удовлетворяют соотношениям* (2.103).

Равенства (2.104), (2.105) можно воспринимать как уравнения, определяющие параметры $(\gamma_s(n+1), \alpha_s(n+1))$ по заданной матричной функции $\mathcal{X}(n, Q)$. Так как последняя однозначно определяется по $(\gamma_s(n), \alpha_s(n), f_i(n))$, то мы приходим к выводу, что:

Следствие 2.3. *Параметры $f_i(n)$ и параметры Тюрина (γ, α), задающие начальные условия* (2.102) *соответствующей динамической системы, являются полным набором данных, параметризующих коммутирующие операторы, отвечающие фиксированной спектральной кривой.*

Пример. $g = 1, l = 2$. Рассмотрим пару коммутирующих операторов вида

$$L = \sum_{i=-2}^{2} u_i(n) T^i, \qquad A = \sum_{i=-3}^{3} v_i(n) T^i, \tag{2.106}$$

имеющих максимально возможный ранг $l = 2$. В этом случае спектральная кривая Γ является эллиптической кривой. Пусть $2\omega, 2\omega'$ – периоды этой кривой. Зафиксировав фундаментальную область, можно, не ограничивая общности, отождествить отмеченную точку P_0 с точкой $z = 0$.

Операторы L и A однозначно определяются параметрами Тюрина, а также параметрами $f_i(n)$, $i = -1, 0$, которые мы обозначим через

$$f_{-1} = c_{n+1}, \qquad f_0 = v_{n+1}. \tag{2.107}$$

Нашей целью является получение явных формул для коэффициентов коммутирующих операторов (2.106) с помощью уравнений, описывающих дискретную *динамику* параметров Тюрина. Для краткости введем обозначения

$$\gamma_n^1 = \gamma_1(n), \qquad \gamma_n^2 = \gamma_2(n). \tag{2.108}$$

Для векторов α_s^i, $i = -1, 0$, определенных с точностью до пропорциональности, мы выберем нормировку, при которой последняя координата $\alpha_s^0 = 1$, т.е. в рассматриваемом примере $\alpha_s(n)$ – это двумерные вектор-строки с координатами

$$\alpha_1(n) = (a_n^1, 1), \qquad \alpha_2(n) = (a_n^2, 1). \tag{2.109}$$

Согласно утверждению леммы 2.8, величины $\gamma_n^{1,2}$, $a_n^{1,2}$, c_{n+1}, v_{n+1} однозначно определяют матрицу $\mathcal{X}_n^{ji} = \mathcal{X}_n^{ji}(n, z)$, $i, j = -1, 0$. Найдем явный вид этой матрицы в терминах стандартных функций Вейерштрасса. По определению $\mathcal{X}_n$ имеет вид

$$\mathcal{X}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_n^1(z) & \chi_n^2(z) \end{pmatrix}. \tag{2.110}$$

Эллиптическая функция $\chi_n^1(z)$ имеет полюсы в точках $\gamma_n^{1,2}$ и равна $-c_{n+1}$ в точке $z=0$. Следовательно, *a priory* она может быть представлена в виде

$$\chi_n^1 = -c_{n+1} + A_1\big(\zeta(z-\gamma_n^1)+\zeta(\gamma_n^1)\big) + B_1\big(\zeta(z-\gamma_n^2)+\zeta(\gamma_n^2)\big), \tag{2.111}$$

где $\zeta(z)$ – стандартная дзета-функция Вейерштрасса.

Функция χ_n^2 в отмеченной точке $z=0$ имеет вид $\chi^2 = z^{-1} - v_{n+1} + O(z)$, т.е.

$$\chi_n^2 = -v_{n+1} + \zeta(z) + A_2\big(\zeta(z-\gamma_n^1)+\zeta(\gamma_n^1)\big) + B_2\big(\zeta(z-\gamma_n^2)+\zeta(\gamma_n^2)\big). \tag{2.112}$$

Из эллиптичности χ_n^i следуют равенства

$$A_1 + B_1 = 0, \qquad A_2 + B_2 = -1. \tag{2.113}$$

Кроме того, имеем

$$A_1 = a_n^1 A_2, \qquad B_1 = a_n^2 B_2. \tag{2.114}$$

Из (2.113), (2.114) следует

$$\chi_n^1 = -c_{n+1} + \frac{a_n^1 a_n^2}{a_n^1 - a_n^2}\big(\zeta(z-\gamma_n^1) - \zeta(z-\gamma_n^2) + \zeta(\gamma_n^1) - \zeta(\gamma_n^2)\big), \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned}\chi_n^2 = \zeta(z) - v_{n+1} &+ \frac{a_n^2}{a_n^1 - a_n^2}\big(\zeta(z-\gamma_n^1)+\zeta(\gamma_n^1)\big)\\ &+ \frac{a_n^1}{a_n^2 - a_n^1}\big(\zeta(z-\gamma_n^2)+\zeta(\gamma_n^2)\big).\end{aligned} \tag{2.116}$$

Согласно утверждению леммы 2.7 точки γ_{n+1}^s определяются из уравнения

$$\det \mathscr{X}_n(\gamma_{n+1}^s) = \chi^1(\gamma_{n+1}^s) = 0.$$

Отсюда

$$c_{n+1} = \frac{a_n^1 a_n^2}{a_n^1 - a_n^2}\big(\zeta(\gamma_{n+1}^s - \gamma_n^1) - \zeta(\gamma_{n+1}^s - \gamma_n^2) + \zeta(\gamma_n^1) - \zeta(\gamma_n^2)\big). \tag{2.117}$$

Отметим, что сумма $\gamma_n^1 + \gamma_n^2 = 2c$ не зависит от n, поскольку γ_n^s являются полюсами, а γ_{n+1}^s нулями эллиптической функции. Следовательно, мы всегда можем положить

$$\gamma_n^1 = \gamma_n + c, \qquad \gamma_n^2 = -\gamma_n + c, \qquad c = \mathrm{const}. \tag{2.118}$$

Учитывая это, перепишем

$$\chi_n^1 = \frac{a_n^1 a_n^2}{a_n^1 - a_n^2}\big[\zeta(z-\gamma_n-c) - \zeta(z+\gamma_n-c) - \zeta(\gamma_{n+1}-\gamma_n) - \zeta(\gamma_{n+1}+\gamma_n)\big], \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned}\chi_n^2 = -v_{n+1} + \zeta(z) &+ \frac{a_n^2}{a_n^1 - a_n^2}\big(\zeta(z-\gamma_n-c)+\zeta(\gamma_n+c)\big)\\ &+ \frac{a_n^1}{a_n^2 - a_n^1}\big(\zeta(z+\gamma_n-c)-\zeta(\gamma_n-c)\big).\end{aligned} \tag{2.120}$$

Если в качестве новых независимых данных выбрать функции дискретной переменной v_n и γ_n, то уравнение (2.117)

$$c_{n+1}=\frac{a_n^1a_n^2}{a_n^1-a_n^2}\big(\zeta(\gamma_{n+1}-\gamma_n)-\zeta(\gamma_{n+1}+\gamma_n)+\zeta(\gamma_n+c)+\zeta(\gamma_n-c)\big) \tag{2.121}$$

следует воспринимать просто как определение переменных c_{n+1}.

Из (2.105) следует, что

$$a_s(n+1)=-\chi_n^2(\gamma_s(n+1)). \tag{2.122}$$

Воспользовавшись формулой (2.120), получим рекуррентные выражения для параметров $a_{n+1}^{1,2}$:

$$a_{n+1}^1=v_{n+1}-\zeta(\gamma_{n+1}+c)-\frac{a_n^2}{a_n^1-a_n^2}\big(\zeta(\gamma_{n+1}-\gamma_n)+\zeta(\gamma_n+c)\big) \\ -\frac{a_n^1}{a_n^2-a_n^1}\big(\zeta(\gamma_{n+1}+\gamma_n)-\zeta(\gamma_n-c)\big), \tag{2.123}$$

$$a_{n+1}^2=v_{n+1}+\zeta(\gamma_{n+1}-c)+\frac{a_n^2}{a_n^1-a_n^2}\big(\zeta(\gamma_{n+1}+\gamma_n)-\zeta(\gamma_n+c)\big) \\ -\frac{a_n^1}{a_n^1-a_n^2}\big(\zeta(\gamma_{n+1}-\gamma_n)+\zeta(\gamma_n-c)\big). \tag{2.124}$$

Таким образом, мы показали, что произвольный набор функций γ_n, v_n и константа определяют матричную функцию $\mathscr{X}_n$, а значит, и коэффициенты коммутирующих операторов ранга 2, соответствующих эллиптической спектральной кривой. Каждый такой оператор соответствует функции на спектральной кривой, имеющей полюс в отмеченной точке $z=0$. Простейший такой оператор L_4 имеет порядок 4 и соответствует функции Вейерштрасса $\wp(z)=z^{-2}+O(z^2)$.

Для нахождения коэффициентов этого оператора надо взять вектор-функцию $\wp(z)\psi_n\Psi_n^{-1}$ и разложить ее по $\psi_{n+i}\Psi_n^{-1}$, $-1\leqslant i\leqslant 2$. Для этого достаточно у всех векторов взять лишь сингулярные члены разложения в окрестности $z=0$. Обозначим через $\widetilde{\psi}_m$ полиномы по переменной $k=z^{-1}$ такие, что $\psi_m\Psi_n^{-1}=\widetilde{\psi}_m+O(k^{-1})$. Тогда

$$\widetilde{\psi}_{n+2}=(-c_{n+1},k-v_{n+1}),\qquad \widetilde{\psi}_{n+1}=(0,1),\qquad \widetilde{\psi}_n=(1,0). \tag{2.125}$$

Для нахождения $\widetilde{\psi}_{n-1}$ воспользуемся тем, что $\Psi_{n-1}=\mathscr{X}_{n-1}^{-1}\Psi_n$,

$$\mathscr{X}_n^{-1}=\frac{1}{\chi_n^1}\begin{pmatrix}-\chi_n^2 & 1\\ \chi_n^1 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.126}$$

Обозначим через ξ_n^{ij} коэффициенты разложений

$$\chi_n^1=-c_{n+1}(1+\xi_n^{11}z+\xi_n^{12}z^2+\cdots), \tag{2.127}$$

$$\chi_n^2=k-v_{n+1}+\xi_n^{21}z+\cdots. \tag{2.128}$$

Тогда

$$\widetilde{\psi}_{n-1}=c_n^{-1}(k-v_n-\xi_{n-1}^{11},-1). \tag{2.129}$$

Аналогичным образом находится и $\widetilde{\psi}_{n-2}$.

После прямых, но достаточно громоздких вычислений получаем, что оператор L_4 равен

$$L_4 = L_2^2 - (\xi_{n-1}^{11} + \xi_{n-2}^{11})T + c_n(\xi_{n-1}^{11} + \xi_{n-2}^{11})T^{-1} + u_n, \tag{2.130}$$

где L_2 – разностный оператор Шрёдингера,

$$L_2 = T + v_n + c_n T^{-1}, \tag{2.131}$$

а функция u_n определяется формулой

$$u_n = v_n(\xi_{n-1}^{11} - \xi_{n-2}^{11}) + \xi_{n-1}^{12} + \xi_{n-2}^{12} - (\xi_{n-2}^{11})^2 - (\xi_{n-1}^{21} + \xi_{n-2}^{21}). \tag{2.132}$$

Симметричный случай. Пусть константа c в (2.118) равна нулю, $c = 0$. Тогда χ_n^1 является четной функцией переменной z. Следовательно, $\xi_n^{11} = 0$. Из (2.119) следует, что

$$\xi_n^{12} = -\frac{a_n^1 a_n^2}{(a_n^1 - a_n^2)} \frac{\wp'(\gamma_n)}{c_{n+1}}. \tag{2.133}$$

Воспользовавшись формулой (2.121), получим

$$\xi_n^{12} = \frac{\wp'(\gamma_n)}{\zeta(\gamma_{n+1} + \gamma_n) - \zeta(\gamma_{n+1} - \gamma_n) - 2\zeta(\gamma_n)} = \wp(\gamma_n) - \wp(\gamma_{n+1}). \tag{2.134}$$

(Для получения последнего равенства можно воспользоваться формулами сложения для дзета-функции Вейерштрасса, а можно и проверить ее непосредственно, сравнивая полюсы и вычеты обеих частей равенства.) Из (2.120) следует, что

$$\xi_n^{21} = \wp(\gamma_n). \tag{2.135}$$

Подставляя последние две формулы в (2.132), получим, что оператор L_4 в симметричном случае равен

$$L_4 = L_2^2 - \wp(\gamma_n) - \wp(\gamma_{n-1}). \tag{2.136}$$

В симметричном случае существенно упрощаются и формулы для коэффициентов оператора Шрёдингера L_2, определенного в (2.131). Обозначим через $F(u, v)$ эллиптическую функцию

$$F(u, v) = \zeta(u + v) - \zeta(u - v) - 2\zeta(v) = \frac{\wp'(v)}{\wp(v) - \wp(u)}. \tag{2.137}$$

Тогда формулы (2.121)–(2.124) для симметричного случая $c = 0$ могут быть представлены в виде

$$c_{n+1} = -\frac{a_n^1 a_n^2}{a_n^1 - a_n^2} F(\gamma_{n+1}, \gamma_n), \tag{2.138}$$

$$a_{n+1}^1 = v_{n+1} + \frac{1}{2}\left(F(\gamma_n, \gamma_{n+1}) + \frac{a_n^1 + a_n^2}{a_n^1 - a_n^2} F(\gamma_{n+1}, \gamma_n)\right), \tag{2.139}$$

$$a_{n+1}^2 = v_{n+1} - \frac{1}{2}\left(F(\gamma_n, \gamma_{n+1}) - \frac{a_n^1 + a_n^2}{a_n^1 - a_n^2} F(\gamma_{n+1}, \gamma_n)\right). \tag{2.140}$$

Последние два равенства эквивалентны равенствам

$$a_{n+1}^1 - a_{n+1}^2 = F(\gamma_n, \gamma_{n+1}), \tag{2.141}$$

$$a_{n+1}^1 + a_{n+1}^2 = 2v_{n+1} + \frac{a_n^1 + a_n^2}{a_n^1 - a_n^2} F(\gamma_{n+1}, \gamma_n). \tag{2.142}$$

Обозначим через s_n выражение

$$s_n = -\frac{a_n^1 + a_n^2}{a_n^1 - a_n^2}\,. \tag{2.143}$$

Тогда

$$a_n^1 + a_n^2 = -s_n F(\gamma_{n-1}, \gamma_n), \qquad \frac{a_n^1 a_n^2}{a_n^1 - a_n^2} = -\frac{1}{4}(s_n^2 - 1) F(\gamma_{n-1}, \gamma_n) \tag{2.144}$$

и равенства (2.138), (2.142) могут быть представлены в виде

$$4c_{n+1} = (s_n^2 - 1) F(\gamma_{n+1}, \gamma_n) F(\gamma_{n-1}, \gamma_n), \tag{2.145}$$

$$2v_{n+1} = s_n F(\gamma_{n+1}, \gamma_n) - s_{n+1} F(\gamma_n, \gamma_{n+1}). \tag{2.146}$$

Последнее равенство показывает, что в симметрическом случае в качестве независимых переменных можно выбрать γ_n, s_n. После этого формулы (2.113), (2.136), (2.145), (2.146) дают замкнутые явные выражения для коэффициентов оператора L_4, которые и были приведены выше во введении. Аналогично могут быть явно найдены и коэффициенты второго коммутирующего оператора A_6.

§ 3. Решения высших рангов $2D$ цепочки Тоды

Ключевым элементом алгебро-геометрических конструкций решений нелинейных уравнений является построение *многопараметрических* функций Бейкера–Ахиезера. Эти функции, как скалярные, так и векторные, определяются своими аналитическими свойствами на соответствующей алгебраической кривой. Ниже мы определяем многопараметрические векторные функции Бейкера–Ахиезера, являющиеся деформациями собственных функций коммутирующих операторов произвольного ранга. Эти конструкции различаются для случаев коммутирующих операторов с разделенными бесконечностями и операторов со слившимися бесконечностями.

3.1. Разделенные бесконечности. Как уже неоднократно отмечалось выше, коммутирующие операторы с разделенными бесконечностями однозначно определяются своими алгебро-геометрическими спектральными данными: спектральной кривой с отмеченными точками и параметрами Тюрина. Никаких функциональных параметров в их конструкции нет. Функциональные параметры появляются в конструкции соответствующих решений $2D$ цепочки Тоды. Следует подчеркнуть, что эти функциональные параметры, в отличие от конструкции коммутирующих операторов со слившимися бесконечностями, являются функциями не дискретной, а непрерывной переменной. Они определяют *затравочные* функции $\Psi_\pm(t^\pm, z)$, каждая из которых зависит от соответствующей половины времен иерархии уравнения $2D$ Тоды и является целой функцией переменной z^{-1}.

Зафиксируем две произвольные целые функции $\Psi_\pm(z)$ переменной z^{-1} такие, что приращение аргумента $\ln\det\Psi_\pm$ при обходе начала координат равно нулю,

$$\oint_{|z|=\varepsilon} d(\ln\det\Psi_\pm)=0. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Для любой гладкой алгебраической кривой* Γ *с фиксированными локальными координатами* $z_\pm$ *в окрестностях двух отмеченных точек* $P_\pm$ *и любого набора параметров Тюрина степени* rg *и ранга* r *общего положения существует единственная вектор-функция* $\psi_n(Q)$ *такая, что*:

(i) *ее координаты* ψ_n^i, $i=0,\dots,r-1$, *вне отмеченных точек* $P^\pm$ *имеют не более чем простые полюсы в точках* γ_s, *где имеют место соотношения* (2.55);

(ii) ψ_n *в окрестности отмеченных точек* $P^\pm$ *имеет вид*

$$\psi_{kr+j}=z_\pm^{\mp k}R_\pm(kr+j,z_\pm)\Psi_\pm(z_\pm), \tag{3.2}$$

где $R_\pm(n,z)$ – *голоморфные в окрестности нуля вектор-строки, значения координат которых в точке* $z=0$ *удовлетворяют условиям нормировки*

$$R_-^i(kr+j,0)=0,\quad i\leqslant j,\qquad R_+^i(kr+j,0)=\begin{cases}0, & i>j,\\ 1, & i=j.\end{cases} \tag{3.3}$$

Доказательство леммы сводится к простому подсчету размерности пространства решений задачи Римана, которая эквивалентна условиям (3.2).

Если функции $\Psi_\pm=\Psi_\pm(t^\pm,z)$ зависят от некоторых независимых переменных $t^\pm=(t_j^\pm)$, то определенные выше векторные функции Бейкера–Ахиезера ψ_n являются функциями полного набора переменных, $\psi_n=\psi_n(t^+,t^-,Q)$. Зададим теперь зависимость затравочных функций $\Psi_\pm$ от переменных $t^\pm$ таким образом, чтобы соответствующие функции Бейкера–Ахиезера приводили к решениям иерархии уравнения $2D$ Тоды.

Если ограничиться построением решений собственно уравнений $2D$ Тоды (1.1), то такая зависимость от $t_1^+=\xi$, $t_1^-=\eta$ задается обыкновенными дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых и есть произвольные функциональные параметры.

Для любого набора произвольных функций $a_i(t_1^+)$, $y_i(t_1^-)$ определим затравочные функции $\Psi_\pm$ с помощью уравнений

$$\partial_{t_1^\pm}\Psi_\pm=M_\pm^{0,1}\Psi_\pm,\qquad \Psi_\pm(0,z)=1, \tag{3.4}$$

в которых матрицы $M_\pm^{0,1}(t_1^\pm,z)$ имеют вид

$$M_+^{0,1}=\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_1 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ z^{-1} & 0 & 0 & \dots & a_{r-1}\end{pmatrix},\qquad M_-^{0,1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_0z^{-1}\\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & b_{r-1} & 0\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где

$$b_i=e^{y_i-y_{i-1}},\qquad y_{-1}=y_{r-1}. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Вектор-функция Бейкера–Ахиезера ψ_n, соответствующая произвольному набору данных $\{\Gamma, P_\pm, z_\pm, (\gamma,\alpha), a_i, y_i\}$ общего положения, удовлетворяет уравнениям*

$$\partial_{t_1^+}\psi_n = \psi_{n+1} + v_n\psi_n, \qquad \partial_{t_1^-}\psi_n = c_n\psi_{n-1}, \tag{3.7}$$

коэффициенты которых равны

$$v_n = \partial_{t_1^+}\varphi_n, \qquad c_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}},$$

где

$$\varphi_{kr+i} = y_i(t_1^-) + \ln R_-^i(kr+i, 0, t_1^+, t_1^-). \tag{3.8}$$

Для любой функции $f \in \mathscr{A}(\Gamma, P^\pm)$, имеющей полюсы порядка n_+ и n_- в точках $P_i^\pm$ соответственно, существует единственный разностный оператор L_f вида (2.2) с зависящими от t_1^+, t_1^- коэффициентами такой, что $L_f\psi^i = f\psi^i$.

Условие совместности уравнений (3.7) эквивалентно уравнениям $2D$ Тоды (1.1).

Следствие 3.1. *Функции φ_n, заданные формулой (3.7), в которой второе слагаемое определяется значением в нуле регулярного сомножителя R_- разложения (3.2), являются решениями уравнений $2D$ Тоды.*

Доказательство теоремы стандартно и сводится к проверке того, что функции, заданные формулами правых и левых частей равенств (3.7), имеют одинаковые аналитические свойства на Γ. Это доказательство в малой степени использует специальный вид (3.5) матриц $M_\pm^{0,1}$. Утверждения теоремы и следствия остаются полностью в силе, если заменить $M_\pm^{0,1}$ на матрицы вида

$$\widetilde{M}_\pm^{0,1} = M_\pm^{0,1} + m_\pm(t_1^\pm), \tag{3.9}$$

где матричные элементы $m_\pm^{ij}$ не зависят от z и удовлетворяют условиям

$$m_+^{ij} = 0, \quad i < j, \qquad m_-^{ij} = 0, \quad i \geqslant j. \tag{3.10}$$

Расширение класса затравочных функций не приводит к расширению класса построенных решений уравнений $2D$-цепочки Тоды. Действительно, разложение (3.2) и условия (3.3) инвариантны относительно преобразований

$$\widetilde{\Psi}_\pm = g_\pm\Psi_\pm, \qquad \widetilde{R}_\pm = R_\pm g_\pm^{-1}, \tag{3.11}$$

где $g_+(t_1^+)$ – нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, а $g_-(t_1^-)$ – верхнетреугольная матрица. Следовательно, эти преобразования не меняют соответствующую функцию Бейкера–Ахиезера. Преобразования (3.11) приводят к калибровочным преобразованиям матриц

$$\widetilde{M}_\pm^{0,1} \mapsto g_\pm^{-1}\partial_{t_1^\pm}g_\pm - g_\pm^{-1}\widetilde{M}_\pm^{0,1}g_\pm, \tag{3.12}$$

которыми всегда можно добиться равенств $m_\pm = 0$.

Для построения решений полной иерархии уравнений $2D$-цепочки Тоды достаточно задать зависимость затравочных функций $\Psi_\pm$ от всех времен $t_p^\pm$ иерархии с помощью дифференциальных уравнений

$$\partial_{t_p^\pm}\Psi_\pm = M_\pm^{0,\,p}\,\Psi_\pm, \qquad \Psi_\pm(0,z) = 1, \tag{3.13}$$

где матрицы $M_\pm^{0,i}(t^\pm, z)$ полиномиально зависят от переменной z^{-1}. Условия совместности уравнений (3.13) для каждой из половин времен t_p^+ или t_p^- калибровочно эквивалентны одной из r-редукций иерархии КП. Поскольку нашей основной целью является построение решений уравнений (1.1), то мы оставим вне рамок настоящей работы явное описание структуры матриц $M_\pm^{0,p}$, $p > 1$, и дальнейший анализ возникающей вспомогательной солитонной системы.

3.2. Одноточечный случай. Как и в случае разделенных бесконечностей, зависимость одноточечной многопараметрической функции Бейкера–Ахиезера от переменных $t_p^\pm$ полностью определяется зависимостью от этих переменных затравочной функции $\Psi_0(n,t,z)$. Зависимость от каждой из таких переменных определяется линейным уравнением

$$\partial_{t_p^\pm}\Psi_0(n,t,z) = M_\pm^{0,p}(n,t,z)\Psi_0(n,t,z), \tag{3.14}$$

в котором матрица $M_\pm^{0,i}(n,t,z)$ полиномиально зависит от переменной z^{-1}. Существенным отличием одноточечной ситуации от случая разделенных бесконечностей является то, что уже для построения решений собственно уравнений $2D$ цепочки Тоды матрицы $M_\pm^{0,1}$ должны удовлетворять условиям совместности уравнений (3.14) для $p = 1$ и разностного уравнения

$$\Psi_0(n+1,t,z) = \mathscr{X}_0(n,t,z)\Psi_0(n,z), \tag{3.15}$$

которое является следствием определения Ψ_0 как матрицы Вронского решений уравнений (2.95). Последнее означает, что матрица $\mathscr{X}_0 = (\mathscr{X}_0^{ij})$, $r_- \leqslant i,j < r_+ - 1$, имеет вид

$$\mathscr{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \chi^0_{-r_-} & \chi^0_{-r_-+1} & \chi^0_{-r_-+2} & \cdots & \chi^0_{r_+-1} \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

где

$$\chi_i^0 = z^{-1}\delta_{i,0} - f_i^0(n,t). \tag{3.17}$$

Рассмотрим матричные функции $M_\pm^{0,1}$ вида

$$M_+^{0,1} = \mathscr{X}_0 + A(n,t), \qquad M_-^{0,1} = B(n,t)\mathscr{X}_0^{-1}, \tag{3.18}$$

где A и B – диагональные матрицы вида

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{diag}\{a(n-r_-,t),\dots,a(n+r_+-1,t)\}, \\ B &= \operatorname{diag}\{b(n-r_-,t),\dots,b(n+r_+-1,t)\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Тогда условия совместности уравнений (3.14) для $p = 1$ и уравнения (3.15) эквивалентны условиям совместности линейной системы

$$\partial_{t_1^+}\phi_n = \phi_{n+1} + a(n,t)\phi_n, \qquad \partial_{t_1^-}\phi_n = b(n,t)\phi_{n-1}$$

и уравнения (2.95). Следовательно, если обозначить через $y_n(t)$ такие функции, что $b(n,t) = e^{y_n - y_{n-1}}$, то условия совместности уравнений (3.14), (3.15) эквивалентны редукции уравнений $2D$ цепочки Тоды для y_n на стационарные точки некоторой линейной комбинации потоков иерархии, отвечающих временам $t^-_{r_-}, \dots, t^+_{r_+}$.

Зафиксируем какое-либо решение y_n этой редукции и обозначим $\Psi_0(n, t_1^+, t_1^-, z)$ соответствующее решение вспомогательной линейной системы (3.14), (3.15). Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.2 [21]. *Для любой гладкой алгебраической кривой* Γ *рода* g *с фиксированным локальным параметром* z *в окрестности отмеченной точки* P_0 *и для любого набора параметров Тюрина* (γ, α) *общего положения степени* lg *и ранга* l *существует и единственна вектор-функция* $\psi_n(t_1^+, t_1^-, Q)$, *координаты которой вне точки* P_0 *имеют не более чем простые полюсы в точках* γ_s. *Их вычеты в этих точках удовлетворяют соотношениям* (2.74). *В окрестности точки* P_0 *вектор-строка* ψ_n *имеет вид*

$$\psi_n = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(n, t_1^+, t_1^-) z^s\right) \Psi_0(n, t_1^+, t_1^-, z), \qquad \xi_0^i = \delta_0^i. \tag{3.20}$$

Эта функция удовлетворяет уравнениям

$$\partial_{t_1^+}\psi_n = \psi_{n+1} + (\partial_{t_1^+}\varphi_n)\psi_n, \qquad \partial_{t_1^-}\psi_n = (e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}})\psi_{n-1}, \tag{3.21}$$

где φ_n *даются формулой*

$$\varphi_n = y_n(t_1^+, t_1^-) + \ln\bigl(1 + \xi_1^{(-1)}(n, t_1^+, t_1^-)\bigr), \tag{3.22}$$

в которой $\xi_1^{(-1)}$ *– это координата с индексом* $i = -1$ *вектора* ξ_1 *в разложении* (3.20).

Пример. В случае ранга $l = 2$, $r_\pm = 1$ затравочная функция Ψ_0 определяется по любому решению одномерной цепочки Тоды

$$\ddot{y}_n = e^{y_n - y_{n-1}} - e^{y_{n+1} - y_n} \tag{3.23}$$

и имеет вид

$$\Psi_0 = \Phi(n, t, z) e^{x z^{-1}}, \qquad x = t_1^+ + t_1^-, \quad t = t_1^+ - t_1^-, \tag{3.24}$$

где Φ – матрица Вронского решений вспомогательной линейной системы для (3.23).

3.3. Деформации параметров Тюрина. Задача восстановления векторной функции Бейкера–Ахиезера по ее данным сводится к решению линейной задачи Римана, в которой затравочная функция Ψ_0 задает функцию переклейки в окрестности выделенной точки P_0. Как уже отмечалось выше, в общем случае она не может быть решена явно. Вместе с тем, в ряде случаев для соответствующих решений двумеризованной цепочки можно получить более явные выражения, используя уравнения деформации параметров Тюрина.

Обозначим через $\Psi(n,t,Q)$ матрицу Вронского, строками которой являются вектор-функции Бейкера–Ахиезера $\psi_{n+j}(t,Q)$. Как и ранее, деформацию параметров Тюрина определим следующим образом. В общем положении $\det\Psi(n,t,Q)$ имеет gl простых нулей $\gamma_s(n,t)$. Обозначим через $\alpha_s(n,t)$ соответствующий левый нуль-вектор

$$\alpha_s(n,t)\Psi(n,t,\gamma_s(n,t))=0. \tag{3.25}$$

Разностные уравнения, описывающие динамику параметров Тюрина по дискретной переменной n, были получены выше в п. 2.5. Уравнения для непрерывных деформаций параметров Тюрина следуют из предшествующих результатов авторов [21].

Рассмотрим логарифмическую производную Ψ по любому из времен иерархии

$$\partial_{t_p^{\pm}}\Psi=M_{\pm}^{p}\Psi. \tag{3.26}$$

Эта логарифмическая производная $M_{\pm}^{p}$ является мероморфной функцией на Γ и вне отмеченной точки имеет простые полюсы в точках $\gamma_s=\gamma_s(n,t)$. Ее лорановское разложение в окрестности γ_s имеет вид

$$M=\frac{m_s\alpha_s}{z-z(\gamma_s)}+\mu_s+O(z-z(\gamma_s)), \tag{3.27}$$

где m_s – некоторый вектор-столбец. (Для краткости формул здесь и ниже мы опускаем индексы $p,\pm$.) Первые два коэффициента этого разложения задают правые части уравнений деформации по переменной $t=t_{\pm}^{p}$

$$\partial_t\, z(\gamma_s)=-\operatorname{Tr}(m_s\alpha_s)=-(\alpha_s m_s),\qquad \partial_t\alpha_s=-\alpha_s\mu_s+\kappa_s\alpha_s. \tag{3.28}$$

Здесь κ_s – некоторая константа. Ее наличие в правой части уравнения отражает то, что векторы α_s определены с точностью до пропорциональности. Уравнения (3.28) корректно определяют динамику на пространстве параметров Тюрина, которое является симметрической степенью $S^{gl}(\Gamma\times CP^{l-1})$.

Условия совместности

$$\partial_t\mathscr{X}_n=M_{n+1}\mathscr{X}_n-\mathscr{X}_nM_n \tag{3.29}$$

линейных задач

$$\Psi_{n+1}=\mathscr{X}_n\Psi_n,\qquad \partial_t\Psi_n=M_n\Psi_n \tag{3.30}$$

задают корректно определенную систему нелинейных уравнений на параметры, входящие в *сингулярные коэффициенты* разложения матриц $\mathscr{X}_n$ и M_n в окрестности выделенной точки. Здесь и далее $\Psi_n=\Psi(n,t,Q)$, $\mathscr{X}_n=\mathscr{X}(n,t,Q)$, $M_n=M(n,t,Q)$.

Дискретный аналог уравнения Кричевера–Новикова. Рассмотрим в качестве иллюстрирующего примера нелинейные уравнения, возникающие в случае ранга $l = 2$ и рода $g = 1$. Напомним, что в этом случае коэффициенты линейной системы, определяющие затравочную функцию Φ в (3.24), имели вид

$$\mathscr{X}_n^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_{n+1}^0 & k - v_{n+1}^0 \end{pmatrix}, \qquad M_n^0 = \begin{pmatrix} -k + 2v_n^0 & 2 \\ -2c_{n+1}^0 & k \end{pmatrix}, \qquad k = z^{-1}. \tag{3.31}$$

Уравнения Лакса для этой системы приводят к уравнениям одномерной цепочки Тоды.

Главные части "одетых" матриц $\mathscr{X}_n$ (см. (2.110)) и M_n имеют тот же самый вид, но с другими функциями c_n, v_n. В частности, матрица M_n в окрестности $z = 0$ имеет вид

$$M_n = \begin{pmatrix} 2v_n - k & 2 \\ -2c_{n+1} & k \end{pmatrix} + m_n k^{-1} + O(k^{-2}), \qquad k = z^{-1}. \tag{3.32}$$

Уравнения (3.29) приводят к системе

$$\dot{c}_{n+1} = 2c_{n+1}(v_{n+1} - v_n), \qquad \dot{v}_{n+1} = 2(c_{n+2} - c_{n+1}) + m_n^{22} - m_{n+1}^{22}. \tag{3.33}$$

Дополнительные члены m_n^{ij} в этой системе явно выражаются через c_n, v_n и параметры Тюрина γ_n^s, a_n^s. Нашей целью является получить замкнутую систему уравнений, используя уравнения для параметров Тюрина.

Для простоты мы рассмотрим *симметричный случай*, для которого в формулах примера п. 2.5 следует положить константу c в (2.118) равной нулю, $c = 0$. Из определения M_n следует, что

$$M_n^{21} = -c_{n+1} + \mathscr{X}_n^{21}, \qquad M_n^{22} = v_{n+1} + \mathscr{X}_n^{22}. \tag{3.34}$$

Значит,

$$m_n^{22} = \xi_n^{21} = \wp(\gamma_n). \tag{3.35}$$

Подстановка этой формулы в (3.33) приводит к уравнению

$$\dot{v}_{n+1} = 2(c_{n+2} - c_{n+1}) + \wp(\gamma_n) - \wp(\gamma_{n+1}). \tag{3.36}$$

Из (3.28) следует равенство

$$\dot{\gamma}_n = -\operatorname{res}_{\gamma_n} M_n = -\frac{a_n^1 + a_n^2}{a_n^1 - a_n^2}, \tag{3.37}$$

которое позволяет отождествить $\dot{\gamma}_n$ с переменными s_n, определенными в (2.143). После этого отождествления равенства (2.145), (2.146) приобретут вид

$$4c_{n+1} = (\dot{\gamma}_n^2 - 1)F(\gamma_{n+1}, \gamma_n)F(\gamma_{n-1}, \gamma_n), \tag{3.38}$$

$$2v_{n+1} = \dot{\gamma}_n F(\gamma_{n+1}, \gamma_n) - \dot{\gamma}_{n+1} F(\gamma_n, \gamma_{n+1}). \tag{3.39}$$

Приведем два тождества, которые будут использованы ниже:

$$\partial_u \ln F(u, v) = -F(v, u), \tag{3.40}$$

$$\partial_v \ln F(u, v) = -F(u, v) + 2\zeta(2v) - 4\zeta(v), \tag{3.41}$$

где эллиптическая функция $F(u,v)$ определена формулой (2.137). Оба тождества проверяются непосредственно сравнением особенностей правых и левых частей. Подставляя (3.38), (3.39) в первое из равенств (3.33), получим с помощью (3.40), (3.41)

$$\ddot{\gamma}_n = (\dot{\gamma}_n^2 - 1)\big(V(\gamma_n, \gamma_{n+1}) + V(\gamma_n, \gamma_{n+1})\big), \tag{3.42}$$

где

$$V(u,v) = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - \zeta(2u). \tag{3.43}$$

Используя те же соотношения, можно непосредственно проверить, что подстановка (3.38), (3.39) в равенство (3.36) приводит к той же системе (3.42).

Система (3.42) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = \sum_n \big[\ln\big(\operatorname{sh}^{-2}(p_n/2)\big) + \ln\big(\wp(x_n - x_{n-1}) - \wp(x_n + x_{n-1})\big)\big]. \tag{3.44}$$

Она была получена одним из автором в работе [30] как решение обратной задачи восстановления интегрируемой системы по заданному семейству спектральных кривых. Подобная задача естественна в теории Виттена–Зайберга, в которой такие семейства параметризуют модули физически неэквивалентных вакуумных состояний в суперсимметрических калибровочных моделях.

Система (3.42), названная в [30] эллиптическим аналогом цепочки Тоды, после замены переменных совпадает с одним из уравнений, полученных в [31] в рамках задачи классификации интегрируемых цепочек. В [30] система (3.42) была отождествлена с полюсной системой, описывающей эллиптические по переменной x решения двумеризованной цепочки Тоды. Появление этой же системы в теории решений ранга два двумеризованной цепочки Тоды оказалось для авторов этой работы полной неожиданностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева–Петвиашвили // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №4. С. 41–52.

[2] И. М. Кричевер. Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №3. С. 20–31.

[3] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. №1. С. 55–136.

[4] И. М. Кричевер. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 183–208.

[5] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Интегрируемые системы // Динамические системы-4. Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 179–279.

[6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

[7] С. П. Новиков. Периодическая задача Кортевега–де Фриза // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8. №3. С. 54–66.

[8] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8. №3. С. 43–53.

[9] В. С. Дрюма. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега–де Фриза // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. №12. С. 219–225.
[10] J. L. Burchnall, T. W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators. I // Proc. London Math. Soc. 1922. V. 21. P. 420–440.
[11] J. L. Burchnall, T. W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators. II // Proc. Roy. Soc. London. 1928. V. 118. P. 557–583.
[12] Ж. Диксмье. Об алгебрах Вейля // Математика. Сб. переводов. 1969. Т. 13. №4. С. 27–40.
[13] В. Г. Дринфельд. О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11. №1. С. 11–31.
[14] И. М. Кричевер. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения // УМН. 1978. Т. 33. №4. С. 215–216.
[15] D. Mumford. An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg–de Vries equation and related nonlinear equations // Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977). Tokyo: Kinokuniya Book Store, 1978. P. 115–153.
[16] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. №2. С. 46–63.
[17] I. Krichever. Vector bundles and Lax equations on algebraic curves // Comm. Math. Phys. 2002. V. 229. №2. P. 229–269.
[18] N. Hitchin. Stable bundles and integrable systems // Duke Math. J. 1987. V. 54. №1. P. 91–114.
[19] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // УМН. 1980. Т. 35. №6. С. 47–68.
[20] П. Г. Гриневич. Рациональные решения уравнений коммутативности дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16. №1. С. 19–24.
[21] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения и скалярные разностные операторы. Одноточечные конструкции // УМН. 2000. Т. 55. №1. С. 187–188.
[22] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения и скалярные разностные операторы. Двухточечные конструкции // УМН. 2000. Т. 55. №3. С. 181–182.
[23] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. №1. С. 15–18.
[24] А. В. Михайлов. Интегрируемость двумерного обобщения цепочки Тода // ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 443–448.
[25] G. Tsiseika. Géométrie différentielle projective des reseaux. Paris–Budapest, 1924.
[26] П. Г. Гриневич. Векторный ранг коммутирующих матричных дифференциальных операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. №3. С. 458–478.
[27] А. Н. Тюрин. Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. №3. С. 657–688.
[28] Ю. Л. Родин. Краевая задача Римана для дифференциалов на Римановых поверхностях // Ученые записки Пермск. ун-та. 1960. №2. С. 83–85.
[29] W. Koppelman. Singular integral equations, boundary value problem and the Riemann–Roch theorem // J. Math. Mech. 1961. V. 10. №2. P. 247–277.
[30] I. Krichever. Elliptic analog of the Toda lattice // Internat. Math. Res. Notices. 2000. №8. P. 383–412.
[31] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат. Обобщенные преобразования Лежандра // ТМФ. 1997. Т. 112. №2. С. 179–194.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау,
Институт теоретической и экспериментальной физики,
Columbia University, New York;
University of Maryland, College Park,
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау

Поступила в редакцию
15.04.2003