2006 г. январь — февраль *т. 61, вып. 1 (367)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.9

Интегрируемые уравнения, теоремы сложения и проблема Римана–Шоттки

В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер

Классическая теорема Вейерштрасса утверждает, что среди аналитических функций алгебраической теоремой сложения обладают лишь эллиптические функции и их вырождения. Обзор посвящен далеко идущим обобщениям этого результата, мотивированным теорией интегрируемых систем.

Открытая авторами сильная форма теоремы сложения для тэта-функций якобиевых многообразий привела к новым подходам к известным задачам геометрии абелевых многообразий. Показано, что сильные формы теорем сложения естественно возникают в теории так называемых трилинейных функциональных уравнений. Обсуждаются различные аспекты предложенных подходов, сформулирован ряд открытых, актуальных проблем.

Библиография: 64 названия.

Содержание

§ 1. Введение

Проблема Римана–Шоттки вплоть до 1986 года оставалась одной их самых старых и знаменитых нерешенных проблем алгебраической геометрии. Кратко, проблема Римана–Шоттки – это задача описания якобианов алгебраических кривых среди всех главно-поляризованных абелевых многообразий, т.е. задача описания образа отображения

$$B\colon \mathscr{M}_g \longmapsto \mathscr{A}_g = \mathscr{H}_g / \operatorname{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

пространства модулей $\mathscr{M}_g$ гладких алгебраических кривых рода g в фактор верхней полуплоскости Зигеля $\mathscr{H}_g$ по некоторому естественному действию группы $\operatorname{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Верхней полуплоскостью Зигеля называется пространство симметрических g-мерных матриц с положительно определенной мнимой частью. Отображение (1.1) индуцировано соответствием, которое каждой гладкой алгебраической кривой Γ рода g с фиксированным базисом одномерных циклов (a_i, b_j), $1 \leqslant i, j \leqslant g$, с канонической матрицей пересечений $a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j = 0$, $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$ сопоставляет $(g \times g)$-матрицу b-периодов

$$B_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i \tag{1.2}$$

базиса нормированных голоморфных дифференциалов ω_i, который однозначно определяется условием $\oint_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$. Согласно теореме Торелли, отображение B является *вложением*. В конце семидесятых годов С. П. Новиковым была высказана гипотеза о том, что многообразия Якоби – это в точности главно-поляризованные абелевы многообразия, в чьих тэта-функциях интегрируется уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП). Точнее: каждая симметрическая $(g\times g)$-матрица с положительно определенной мнимой частью определяет тэта-функцию Римана

$$B \in \mathscr{H}_g \longmapsto \theta(z) = \theta(z \mid B), \qquad z = (z_1, \dots, z_g), \tag{1.3}$$

с помощью формулы

$$\theta(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(z,m)+\pi i(Bm,m)}, \qquad (z,m) = m_1 z_1 + \dots + m_g z_g. \tag{1.4}$$

Первый автор поддержан программой Президиума РАН “Современные проблемы нелинейной динамики”, грантом поддержки ведущих научных школ № 2185.2003.1 и грантом РФФИ № 02-01-0659; второй автор поддержан грантом NSF DMS-04-05519.

Эта функция является целой функцией переменных z_k, $k = 1, \dots, g$. Из (1.4) легко следует, что $\theta(z)$ обладает следующим свойством монодромии:

$$\theta(z + e_k) = \theta(z), \qquad \theta(z + B_k) = e^{-2\pi i z_k - \pi i B_{kk}}\theta(z), \tag{1.5}$$

где e_k – базисные векторы $\mathbb{C}^g$, а B_k – вектор, равный k-му столбцу матрицы B. Соотношения (1.5) означают, что θ является сечением канонического линейного расслоения $\mathscr{L}$ на абелевом многообразии $T^g = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g)$.

Гипотеза Новикова. *Симметрическая матрица B с положительно определенной мнимой частью является матрицей b-периодов базиса нормированных голоморфных дифференциалов на некоторой гладкой алгебраической кривой Γ тогда и только тогда, когда найдутся три g-мерных вектора U, V, W такие, что функция*

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln \theta(Ux + Vy + Wt + Z \mid B) \tag{1.6}$$

при любом $Z \in \mathbb{C}^g$ является решением уравнения КП

$$3u_{yy} = (4u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x. \tag{1.7}$$

Эта гипотеза была высказана С. П. Новиковым в рамках поставленной им *задачи эффективизации тэта-функциональных формул* теории конечнозонного интегрирования. Ее отправной точкой послужил следующий результат одного из авторов этой работы.

Теорема 1.1 (Кричевер [1]). *Если B является матрицей периодов базиса нормированных голоморфных дифференциалов на некоторой алгебраической кривой Γ, то функция $u(x, y, t)$, заданная формулой (1.6), удовлетворяет уравнению КП (1.7). При этом U, V, W являются векторами b-периодов нормированных мероморфных дифференциалов с полюсом в некоторой точке $P_0 \in \Gamma$ порядков* 2, 3, 4 *соответственно.*

Эта теорема является лишь частным примером общей алгебро-геометрической конструкции, которая набору алгебро-геометрических данных $\{\Gamma, P_\alpha, z_\alpha, S^{g+k-1}(\Gamma)\}$ сопоставляет решение некоторого солитонного уравнения. Здесь Γ – это неособая алгебраическая кривая рода g с отмеченными точками P_α, в окрестности которых фиксированы локальные координаты z_α, а $S^{g+k-1}(\Gamma)$ – симметрическая степень кривой. Эта конструкция была предложена одним из авторов (см. [1], [2]) и основывается на понятии функций Бейкера–Ахиезера, которые определяются своими аналитическими свойствами на соответствующей алгебраической кривой. Эти аналитические свойства, по существу, являются аксиоматизацией аналитических свойств блоховских функций конечнозонных операторов Шрёдингера, установленных в начальный период развития теории конечнозонного интегрирования уравнения Кортевега–де Фриза [3]–[6].

Первое продвижение в доказательстве гипотезы Новикова было получено Дубровиным. Прежде чем сформулировать полученный им результат, нам потребуется привести ряд стандартных результатов теории тэта-функций и соответствующих обозначений. В первую очередь это понятие тэта-функции с характеристикой, которая задается для любой пары вещественных чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ с помощью формулы, аналогичной (1.4):

$$\theta[\alpha, \beta](z \mid B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp\bigl(2\pi i(z + \beta, m + \alpha) + \pi i(B(m + \alpha), m + \alpha)\bigr). \tag{1.8}$$

Известно, что тэта-функции

$$\Theta[\varepsilon,0](z)=\theta[\varepsilon,0](2z\,|\,2B), \tag{1.9}$$

отвечающие всем полуцелым характеристикам ε, образуют базис в пространстве сечений расслоения $\mathscr{L}^2$, т.е. в пространстве тэта-функций веса 2, удовлетворяющих следующим свойствам монодромии:

$$\Theta(z+e_k)=\Theta(z), \qquad \Theta(z+B_k)=e^{-4\pi i z_k-2\pi i B_{kk}}\Theta(z). \tag{1.10}$$

Теорема 1.2 (Дубровин [7]). *Функция $u(x,y,t)$, заданная формулой (1.6), является решением уравнения КП тогда и только тогда, когда для любой полуцелой характеристики $\varepsilon\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$ имеет место равенство*

$$\partial_U^4\Theta[\varepsilon,0]-\partial_U\partial_W\Theta[\varepsilon,0]+\partial_V^2\Theta[\varepsilon,0]+c\,\Theta[\varepsilon,0]=0, \qquad c=\mathrm{const}. \tag{1.11}$$

Здесь $\Theta[\varepsilon,0]=\Theta[\varepsilon,0](0)$ – стандартное обозначение для так называемых тэта-констант. Аналогичным образом отсутствие аргумента у производной тэта-функции означает, что берется значение этой производной в нуле. Например, $\partial_U^4\Theta[\varepsilon,0]=\partial_U^4\Theta[\varepsilon,0](0)$, где ∂_U – производная в направлении вектора U.

Дубровиным было доказано также, что условия совместности уравнений (1.11) выделяют многообразие размерности $3g-3=\dim\mathscr{M}_g$. Тем самым было показано, что уравнение КП решает проблему Римана–Шоттки по крайней мере локально (по модулю возможных дополнительных компонент). Доказательство гипотезы Новикова было завершено Шиотой в 1986 году [8]. Подробный обзор работ по проблеме Римана–Шоттки и работ по теории алгебро-геометрического интегрирования нелинейных уравнений математической физики, приведших в конечном итоге к решению этой проблемы, приведен в [9].

Для того чтобы дать представление о той роли, которую сыграли новые идеи, привнесенные гипотезой Новикова в решение проблемы Римана–Шоттки, приведем краткое описание истории вопроса и результатов, полученных в рамках классических алгебро-геометрических подходов к ее решению (см. подробности в [9]).

При $g=2$ и 3 размерности пространств $\mathscr{M}_g$ и $\mathscr{A}_g$ совпадают, поэтому непосредственным следствием теоремы Торелли является утверждение о том, что в этом случае матрица $B\in\mathscr{H}_g$ общего положения является матрицей периодов римановой поверхности. Единственное ограничение дает теорема Мартенса, согласно которой многообразие Якоби римановой поверхности неразложимо, т.е. не представимо в виде прямого произведения абелевых многообразий положительной размерности. Это условие может быть эффективно описано на языке тэта-констант.

Нетривиальное тождество для матрицы периодов римановой поверхности рода 4 было получено Шоттки в 1888 году. Поскольку для $g=4$ пространство $\mathscr{M}_g$ имеет коразмерность 1, то соответствующее *соотношение Шоттки* давало, по крайней мере, локальное решение проблемы характеризации соответствующих многообразий Якоби. Доказательство того, что многообразие, выделяемое соотношением Шоттки, неприводимо, было получено Игусой лишь в 1981 году [10]. Обобщения этого соотношения на случай кривых произвольного рода были сформулированы в качестве гипотезы в 1909 году в совместной работе

Шоттки и Юнга [11] и доказаны в работе Фаркаша и Рауха [12]. Позднее Ван-Гееменом [13] было доказано, что соотношения Шоттки–Юнга дают локальное решение проблемы Римана–Шоттки. Известно, что эти соотношения заведомо не дают полного решения проблемы, поскольку выделяемое ими подмногообразие содержит дополнительные компоненты уже при $g = 5$ (Донаги [14]).

Среди других результатов, дающих локальное решение проблемы Римана–Шоттки, отметим теорему Андреотти–Майера [15], согласно которой условие того, что множество $\operatorname{Sing}\Theta$ особых точек тэта-дивизора имеет размерность не меньше $g-4$, выделяет подмногообразие размерности $3g-3$, одна из компонент которого совпадает с замыканием $\mathscr{M}_g$. Это подмногообразие приводимо уже при $g = 4$ (Бовиль [16]).

Необходимые и достаточные условия, характеризующие многообразия Якоби негиперэллиптических поверхностей, были получены Ли и Виртингером. Эти условия эквивалентны тому, что в окрестности некоторой своей неособой точки тэта-дивизор имеет два различных представления в виде сдвинутой суммы $g-1$ экземпляра поверхности C, вложенной в абелево многообразие, т.е.

$$\Theta = C + \cdots + C + \kappa. \tag{1.12}$$

Вопрос эффективного описания геометрических условий Ли–Виртингера в терминах уравнений далеко не тривиален и до сих пор не получил своего окончательного решения (см. обзор [17]).

Геометрической по своей исходной формулировке является и характеризация якобианов, предложенная Ганнингом [18], [19]. В основе этой характеризации лежит формула тройной секущей Фэя [20].

Рассмотрим отображение главно-поляризованного абелева многообразия X в комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^{2^g-1}$, задаваемое базисным набором (1.9) тэта-функций веса два

$$\phi_2(z) = \Theta[\varepsilon_1, 0](z) : \cdots : \Theta[\varepsilon_{2^g}, 0](z). \tag{1.13}$$

Эти функции четны, поэтому отображение ϕ_2 разлагается в композицию

$$X \xrightarrow{\pi} X/\sigma \xrightarrow{K} \mathbb{CP}^{2^g-1}, \tag{1.14}$$

где $\sigma(z) = -z$ – инволюция абелевого многообразия и π – проекция на фактор-пространство. Отображение K называется отображением Куммера, а его образ $K(X)$ называется многообразием Куммера. Известно, что отображение Куммера является вложением многообразия с особенностями. *N-секущей* многообразия Куммера называется $(N-2)$-мерная плоскость в $\mathbb{CP}^{2^g-1}$, пересекающая $K(X)$ в N точках. Существование N-секущей, проходящей через точки $K(A_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, эквивалентно условию линейной зависимости этих точек, т.е. условию того, что найдутся константы c_i такие, что $\sum_{i=0}^{N-1} c_i K(A_i) = 0$. Прямым следствием формулы тройной секущей Фэя является утверждение о том, что если X является якобианом алгебраической кривой Γ, то любые три различные точки Γ задают *однопараметрическое* семейство тройных секущих. В несколько огрубленной форме основной результат Ганнинга состоит в том, что наличие такого однопараметрического семейства тройных секущих является не только необходимым, но и достаточным условием того, что главно-поляризованное абелево многообразие является якобианом некоторой алгебраической кривой.

Задача описания геометрического критерия Ганнинга в терминах уравнений оказалась далеко не тривиальной и потребовала для своего решения ряда серьезных шагов. Первые из них были предприняты Велтерсом в работах [21], [22], отправной точкой которых, по-видимому, послужило замечание Мамфорда [23] о том, что предельный переход в формуле тройной секущей Фэя дает тэта-функциональную формулу (1.6) для алгебро-геометрических решений уравнения КП (теорема 1.1). Инфинитезимальным аналогом тройной секущей является точка перегиба многообразия Куммера, т.е. такая точка A, в которой существует прямая в $\mathbb{CP}^{2^g-1}$, содержащая образ формального 2-ростка некоторой кривой в X. По определению, последнее условие эквивалентно условию существования g-мерных векторов $U \neq 0$, V, для которых 2^g-мерные векторы $K(A)$, $\partial_U K(A)$, $(2\partial_V + \partial_U^2)K(A)$ линейно зависимы. Согласно [22], условие существования векторов U, V, для которых множество соответствующих точек перегиба содержит *формальный бесконечный* росток некоторой кривой в X, является характеристическим для якобианов.

Фундаментальный факт теории солитонных уравнений состоит в том, что с каждым из таких уравнений связана целая система совместных уравнений – так называемая иерархия уравнения. Алгебро-геометрические решения иерархии КП даются формулой

$$u(t_1, t_2, \dots) = 2\partial_x^2 \ln\theta\biggl(\sum_i U_i t_i + Z \mid B\biggr), \qquad t_1 = x, \quad t_2 = y, \quad t_3 = t. \quad (1.15)$$

Арбарелло и де Кончини [24], используя результаты Велтерса [22], доказали, что следствием теоремы Ганнинга является утверждение о том, что функция $u(t)$, $t = \{t_i\}$, вида (1.15) удовлетворяет первым $N = N(g) = [(\frac{3}{2})^g g!]$ уравнениям иерархии КП тогда и только тогда, когда матрица B является матрицей b-периодов некоторой алгебраической кривой. Отметим, что полученная в [24] оценка числа уравнений иерархии КП, необходимых для характеризации якобианов, заведомо завышена. Тривиальным следствием результатов одного из авторов о коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторах является утверждение о том, что достаточно взять первые $N = g + 1$ уравнений иерархии. Гипотеза Новикова состояла в том, что число уравнений *не зависит* от g и равно $N = 1$.

Ключевым шагом в доказательстве гипотезы Новикова, предложенным Шиотой, являлось доказательство утверждения о том, что если функция $u(x, y, t)$, заданная формулой (1.6), удовлетворяет уравнению КП, то найдутся векторы U_i такие, что функция $u(t)$, заданная формулой (1.15), является решением иерархии КП. Основная проблема, с которой столкнулся Шиота, состояла в том, что возможность такого продолжения решения уравнения КП до решения иерархии КП контролируется некоторым априори нетривиальным когомологическим препятствием. Достаточным условием тривиальности этого препятствия является условие того, что тэта-дивизор Θ не содержит комплексной прямой, параллельной вектору $U = U_1$. Доказательство последнего свойства явилось наиболее технически трудной частью работы Шиоты, значение которой было прояснено в работе [25].

Интерес к тематике, связанной с проблемой Римана–Шоттки, не угас и после доказательства гипотезы Новикова. В первую очередь это связано с рядом других проблем геометрии абелевых многообразий, среди которых отметим задачу характеризации главно-поляризованных абелевых многообразий, являющихся примианами двулистных накрытий алгебраических кривых, а также замечательную гипотезу Велтерса о том, что для характеризации якобианов достаточно существования *одной* тройной секущей. Простое сравнение гипотезы Велтерса с теоремой Ганнинга, которая требует существования однопараметрического семейства таких секущих, показывает, насколько сильным является ее утверждение. Отметим, что к настоящему времени доказано, что наличие тройной секущей выделяет среди главно-поляризованных абелевых многообразий подмногообразие, одна из компонент которого совпадает с многообразием якобианов [26]. Кроме того, известно, что при $g = 4, 5$ соответствующее подмногообразие неприводимо [27].

Целью настоящей работы является представление и анализ ряда новых подходов к задачам типа задачи Римана–Шоттки, связанных с интегрируемыми *функциональными* и *линейными* дифференциальными уравнениями. Мы начнем с предложенного авторами [28], [29] многомерного векторного аналога уравнения Коши.

Классическое функциональное уравнение Коши [30; гл. V, § 1, с. 98–105]

$$\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y), \tag{1.16}$$

возникающее в бесчисленном множестве задач (см., например, [31]), полностью характеризует экспоненту $\psi(x) = e^{kx}$, где k – параметр. Уравнение (1.16) является одним из примеров так называемых теорем сложения

$$F(f(x), f(y), f(x+y)) = 0. \tag{1.17}$$

До последнего времени число примеров теорем сложения было невелико. Так, согласно теореме Вейерштрасса, если F – полином от трех переменных, то в классе аналитических функций $f(x)$ теоремой сложения обладают лишь эллиптические функции (т.е. функции, связанные с алгебраическими кривыми рода $g = 1$) и их вырождения.

Векторной многомерной теоремой сложения естественно назвать уравнение вида

$$F(f(x), \phi(y), \psi(x+y)) = 0, \tag{1.18}$$

где $f(x) = \bigl(f_1(x), \dots, f_N(x)\bigr)$, $\phi(y) = (\phi_1(y), \dots, \phi_N(y))$, $\psi(z) = (\psi_1(z), \dots, \psi_N(z))$ – вектор-функции g-мерного аргумента $x = (x_1, \dots, x_g)$, $y = (y_1, \dots, y_g)$, $z = (z_1, \dots, z_g)$, а F – функция $3N$-переменных.

Следует отметить, что варианты таких теорем можно найти уже в классической работе Абеля [32], в которой рассматривается следующая задача: *определить три функции ϕ, f и ψ, удовлетворяющие уравнению*

$$\psi(\alpha(x,y)) = F(x, y, \phi(x), \phi'(x), \dots, f(y), f'(y), \dots), \tag{1.19}$$

где α и F – данные функции от соответствующего числа переменных. В частности, в [32] эта задача решена для уравнения

$$\psi(x+y) = \phi(x)f'(y) + f(y)\phi'(x). \tag{1.20}$$

Важные для современных приложений векторные теоремы сложения содержатся в работе Фробениуса и Штикельбергера [33], где, например, показано, что дзета-функция Вейерштрасса удовлетворяет функциональному уравнению

$$\big(\zeta(x) + \zeta(y) + \zeta(z)\big)^2 + \zeta'(x) + \zeta'(y) + \zeta'(z) = 0, \tag{1.21}$$

где $x + y + z = 0$.

Как уже отмечалось выше, концепция функций Бейкера–Ахиезера играет ключевую роль в алгебро-геометрической схеме интегрирования солитонных уравнений. Функции Бейкера–Ахиезера однозначно определяются своими аналитическими свойствами на вспомогательной алгебраической кривой. Эти свойства позволяют интерпретировать функции Бейкера–Ахиезера как аналог экспонент на алгебраических кривых. Отправной целью работ [28], [29] была попытка найти функциональные уравнения, *характеризующие* функции Бейкера–Ахиезера в той степени, в которой уравнение Коши характеризует обычную экспоненту. Как оказалось, функции Бейкера–Ахиезера удовлетворяют функциональному уравнению, являющемуся "векторным аналогом" уравнения Коши (1.16).

Уравнение Коши является в определенном смысле "жестким". Класс функций, определяемых им, практически не меняется, если ослабить (1.16) и рассмотреть уравнение

$$c(x + y)\psi(x)\psi(y) = 1,$$

решения которого даются формулами $\psi(x) = e^{k(x+x_0)}$, $c(x) = e^{-k(x+2x_0)}$. Векторным аналогом уравнения (1.16) мы называем функциональное уравнение

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k(x + y)\psi_k(x)\psi_k(y) = 1 \tag{1.22}$$

на вектор-функции $c(x) = \big(c_1(x), \dots, c_{N+1}(x)\big)$, $\psi(x) = \big(\psi_1(x), \dots, \psi_{N+1}(x)\big)$.

Важное замечание. В дальнейшем мы будем различать *сильную* и *слабую* формы функционального уравнения (1.22). Дело в том, что в предположении некоторой общности положения функции c_k, входящие в это уравнение, явно выражаются через функции ψ_k и их производные в виде отношений вполне определенных $(N + 1)$-мерных детерминантов. Поэтому в дальнейшем решением слабой формы уравнения (1.22) будет называться вектор-функция $\psi = \big(\psi_1, \dots, \psi_{N+1}\big)$, удовлетворяющая (1.22) для некоторого набора функций c_k. Решением сильной формы уравнения (1.22) будет называться набор функций c_k, ψ_k, в котором выражения для c_k явно не сводятся к общим детерминантным формулам.

В работе [28] было доказано, что функции Бейкера–Ахиезера, отвечающие алгебраическим кривым рода g, дают решения слабой формы уравнения (1.22) для $N = g$. Явные выражения этих функций через тэта-функции римановых поверхностей показывают, что соответствующие решения уравнения (1.22) с точностью до экспоненциального множителя имеют следующий специальный вид:

$$\psi_k(x) = \frac{\tau(x + A_k)}{\tau(x + A_0)}\,, \tag{1.23}$$

где $\tau(z)$ – функция векторного аргумента $z = (z_1, \dots, z_g)$, представляющая собой тэта-функцию алгебраической кривой; $A_k = (A_{k,1}, \dots, A_{k,g})$ – g-мерные векторы, $k = 0, 1, \dots, N+1$. В работе авторов [29] были предложены явные выражения для функций c_k в терминах тэта-функций, не сводящиеся к общим детерминантным формулам. Тем самым была установлена *сильная форма* теоремы сложения для тэта-функций алгебраических кривых.

Формула (1.23) позволяет ввести понятие *g-мерного функционального уравнения Коши ранга N* как векторной теоремы сложения следующего специального вида.

Определение. Функцию $\tau(z)$ векторного g-мерного аргумента z назовем решением уравнения Коши ранга N, если существуют g-мерные векторы A_0, $A_1, \dots, A_{N+1}$ и функции c_k такие, что имеет место уравнение

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k(x+y)\tau(x+A_k)\tau(y+A_k) = \tau(x+A_0)\tau(y+A_0). \tag{1.24}$$

Замечание-определение. В общем случае одна и та же функция $\tau(z)$ может быть решением функциональных уравнений Коши разных рангов (за счет специального выбора векторов A_k). Рангом такой функции $\tau(z)$ назовем минимальное N_* из возможных рангов N уравнений (1.24), которым она удовлетворяет.

Одним из результатов работ [28], [29] является утверждение о том, что *все* решения уравнения (1.22) для случая $N = 2$ даются функциями Бейкера–Ахиезера рода 2. Тем самым показано, что векторный аналог уравнения Коши (1.22) для $N = 2$ эквивалентен функциональному уравнению Коши ранга 2.

В связи с этим напомним вопрос, поставленный нами в [28]: *эквивалентны ли функциональные уравнения* (1.22) *и* (1.24) *для* $N > 2$?

Из классической теоремы сложения для тэта-функции $\tau = \theta(z \mid B)$, отвечающей общему абелеву многообразию размерности g (см. формулу (1.25) ниже), следует, что такие функции являются решениями функционального уравнения Коши (1.24) ранга $N \leqslant 2^g - 1$. Сопоставление этого факта с тем, что *в случае якобианов кривых ранг тэта-функций не превосходит* g, привело авторов к следующей гипотезе.

Гипотеза (Бухштабер–Кричевер [28]). *Тэта-функция имеет ранг, не превосходящий g, тогда и только тогда, когда она построена по матрице b-периодов голоморфных дифференциалов на римановой поверхности рода g.*

Недавно эта гипотеза в предположении общности положения векторов A_k была доказана Грушевским [34], [35]. Прежде чем сформулировать основную идею его доказательства, представим стандартный в теории тэта-функций способ сведения определенных квадратичных соотношений для этих функций к условиям линейной зависимости соответствующих точек многообразия Куммера.

Тэта-функция $\theta(z \mid B)$, отвечающая общему абелеву многообразию размерности g, обладает классической теоремой сложения

$$\theta(z_1+z_2 \mid B)\,\theta(z_1-z_2 \mid B) = \sum_{\varepsilon} \theta[\varepsilon,0](2z_1 \mid 2B)\,\theta[\varepsilon,0](2z_2 \mid 2B), \quad \varepsilon \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g. \tag{1.25}$$

Слабая форма нашей теоремы сложения для этих функций имеет вид

$$\sum_{k=0}^{N+1} c_k(x+y)\theta(x+A_k)\theta(y+A_k)=0, \tag{1.26}$$

где $c_0(x)=-1$. Полагая $z_1+z_2=x+A_k$ и $z_1-z_2=y+A_k$, получаем, согласно (1.25),

$$\begin{aligned}&\theta(x+A_k\,|\,B)\,\theta(y+A_k\,|\,B)\\&\qquad=\sum_{\varepsilon}\theta[\varepsilon,0](x+y+2A_k\,|\,2B)\,\theta[\varepsilon,0](x-y\,|\,2B),\quad \varepsilon\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Сделав замену $x+y=2u$ и $x-y=2v$, подставим это выражение в (1.26) и, используя обозначение (1.9), получим

$$\sum_{\varepsilon}\biggl[\sum_{k=0}^{N+1} c_k(2u)\Theta[\varepsilon,0](u+A_k)\biggr]\Theta[\varepsilon,0](v)=0. \tag{1.28}$$

Набор функций $\Theta[\varepsilon,0](v)$, где ε пробегает $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$, является линейно независимым. Следовательно, из (1.28) вытекает, что $(N+2)$ точки A_k, $k=0,1,\dots,N+1$, должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{k=0}^{N+1} c_k(2u)K(u+A_k)=0 \tag{1.29}$$

для всех $u\in\mathbb{C}^g$, где K – отображение Куммера.

Приведенные выше аргументы устанавливают эквивалентность слабой формы (1.26) нашей теоремы сложения для тэта-функций якобианов с частным случаем более общего результата работы [19], см. следствие 2.1 ниже. Основная идея доказательства Грушевского нашей гипотезы заключалась в том, что в предположении некоторой невырожденности векторов A_i можно показать, что функции $c_i(2u)$ в уравнении (1.29) для $N=g$ корректно определены как глобальные мероморфные функции переменной $u\in\mathbb{C}^g$. В этом случае $(g-1)$ уравнений $c_i(2u)=0$, $i>2$, выделяют однопараметрическое семейство тройных секущих. Тем самым доказательство нашей гипотезы было сведено к теореме Ганнинга.

Подчеркнем, что необходимость дополнительных условий невырожденности на векторы A_i связана с тем, что эквивалентность сильной и слабой форм теорем сложения для тэта-функций далеко не тривиальна. Утверждение о том, что уравнение (1.29) при $N=g$ характеризует якобианы алгебраических кривых в предположениях общности положения, отличных от использованных в [35], было недавно получено в работе [36]. Отправной точкой этой работы, авторы которой, по-видимому, не были знакомы с нашей гипотезой, послужила очень интересная попытка построения аналога теории Кастельнуово (см. [37]) для абелевых многообразий.

Как уже говорилось выше, в работе авторов [29] были предложены явные выражения для функций c_k в терминах тэта-функций, не сводящиеся к детерминантным формулам. Эта *сильная форма* теоремы сложения имеет замечательно простой вид *кубических* соотношений для тэта-функций якобиевых многообразий.

Теорема 1.3. *Для любого набора* $(g+2)$ *попарно различных точек* $A_k \in \Gamma \subset J(\Gamma)$ *имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{g+1} h_k\, \theta(A_k + x)\theta(A_k + y)\theta(A_k + z)\big|_{x+y+z=R} = 0. \tag{1.30}$$

Константы h_k и постоянный вектор R в формуле (1.30) зависят от набора точек кривой и даются формулой (2.20). Особо простой вид они принимают в случае, когда A_k являются точками Вейерштрасса гиперэллиптических кривых. Это обстоятельство было замечено в [34] и использовано для решения известной задачи о характеризации гиперэллиптических якобианов.

В п. 2.4 мы рассматриваем теорему сложения для тэта-функций якобианов, отвечающую предельному случаю совпадающих точек A_k. Слабая форма такой теоремы сложения утверждает, что для любой точки $A \in \Gamma \subset J(\Gamma)$ выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{g+1} c_k(u)\mathscr{D}^{(k)}_{U_1,\dots,U_k} K(A_0 + u) = 0, \qquad u \in \mathbb{C}^g, \tag{1.31}$$

где векторы U_i определяются $(g+1)$-ростком кривой Γ в точке A_0, т.е. сравнением $A_0 - \sum_{s=1}^{g+1} \frac{1}{s} U_s z^s \in \Gamma \pmod{z^{g+2}} \subset J(\Gamma)$, а дифференциальные операторы $\mathscr{D}^{(k)}_{U_1,\dots,U_k}$ определяются равенством

$$\exp\biggl(-\sum_{s=1}^{g+1} \frac{z^s}{s}\partial_{U_s}\biggr) = \sum_{k=0}^{g+1} z^k \mathscr{D}^{(k)}_{U_1,\dots,U_k} + O(z^{g+2}). \tag{1.32}$$

Равенство (1.31) может рассматриваться как определение понятия $(g+2)$-*кратной точки уплощения.* Отметим, что при таком определении 3-кратные точки уплощения – это не что иное, как точки перегиба, определение которых было дано выше. В условиях общего положения, когда коэффициенты c_k могут быть с точностью до общего множителя однозначно восстановлены, уравнения $c_i(u) = 0$, $i > 1$, задают, по крайней мере, однопараметрическое семейство точек перегиба. Следовательно, в силу результатов Велтерса, в общем положении уравнение (1.31) является характеристическим для якобианов. Авторам представляется естественной

Гипотеза. *Уравнение* (1.31) *характеризует якобианы и без предположения общности положения.*

Доказательство равенства (1.31), приведенное в п. 2.4, в принципе позволяет получить формулы для коэффициентов c_k, т.е. установить сильную форму теоремы сложения. Однако соответствующие выражения будут чрезвычайно громоздки.

Задача. Найти эффективный вид сильной теоремы сложения (1.31).

Эта же самая задача является актуальной и для промежуточных теорем сложения, соответствующих предельным случаям равенства (1.29), когда сливается лишь часть точек A_k. Например, в случае слияния точек $A_0, \dots, A_g$

слабая форма соответствующей теоремы сложения утверждает, что для любой пары различных точек $A_0, A \in \Gamma \subset J(\Gamma)$ выполняется равенство:

$$K(A+u) = \sum_{k=0}^{g} c_k(u)\mathscr{D}^{(k)}_{U_1,\dots,U_k} K(A_0+u) = 0, \qquad u \in \mathbb{C}^g, \tag{1.33}$$

где векторы U_i определяются g-ростком Γ в точке A_0, т.е. условием $A_0 - \sum_{s=1}^{g} U_s \frac{z^s}{s} \in \Gamma \pmod{z^{g+1}} \subset J(\Gamma)$. Задача нахождения эффективного вида сильной формы равенства (1.33) вызывает особый интерес, поскольку она связана с теорией непрерывных аналогов так называемых базисов Кричевера–Новикова (КН).

КН-базисы были введены в работе [38] для решения задачи операторного квантования замкнутых бозонных струн. Они представляют собой аналоги базисов Лорана для случая алгебраических кривых произвольного рода с парой отмеченных точек. По существу, эти базисы $\psi_n(A)$, $A \in \Gamma$, представляют собой специальный случай функций Бейкера–Ахиезера дискретного аргумента $n \in \mathbb{Z}$. Как было замечено в [38], в этом случае дискретные функции Бейкера–Ахиезера ψ_n удовлетворяют замечательному соотношению

$$\psi_n(A)\psi_m(A) = \sum_{k=0}^{g} c^k_{n,m}\psi_{n+m+k}(A), \tag{1.34}$$

которое послужило основанием для введения понятий *почти градуированных* алгебр и модулей над ними.[1]

Понятие непрерывного аналога КН-базисов было введено в работе Гриневича и Новикова [39], в которой было доказано, что в частном случае соответствующие функции Бейкера–Ахиезера непрерывного аргумента $\psi(t_1, A)$ удовлетворяют уравнению

$$\psi(t_1, A)\psi(t_1', A) = \mathscr{L}\psi(t_1+t_1', A), \tag{1.35}$$

где $\mathscr{L}$ – дифференциальный оператор порядка g по переменной t_1, заменяющий собой разностный оператор в правой части (1.34).

Решение задачи явного эффективного восстановления коэффициентов оператора $\mathscr{L}$, эквивалентное задаче нахождения сильной формы теоремы сложения (1.33), приводится в третьем и четвертом параграфах обзора, посвященных в основном теоремам сложения, к которым привели *трилинейные уравнения*, введенные недавно одним из авторов этого обзора и Д. В. Лейкиным (см. [40], [41]).

Хорошо известна та роль, которую играют билинейные уравнения Хироты [42] в современной теории солитонных уравнений. Уравнения Хироты могут восприниматься как предельный случай слабой формы теоремы сложения (1.24). У авторов не вызывает сомнения, что трилинейные уравнения сыграют ту же самую роль в исследовании сильных форм теорем сложения вида (1.30) и их вырождений. Формализм теории трилинейных уравнений оказывается чрезвычайно полезным и при исследовании теорем сложения более

[1] Для краткости мы используем в (1.34) индексацию, отличающуюся сдвигом $n \to n - g/2$ от обозначений работы [38].

общего, чем (1.22), вида:

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k(x+y)\varphi_k(x)\psi_k(y) = 1. \tag{1.36}$$

Уравнение (1.36) это уравнение на три вектор-функции $c(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. В случае $N=0$ решение уравнения (1.36) опять дается при помощи экспонент. Случай $N=1$ детально разобран в работе [43]. Решение в классе аналитических функций выражается, как и прежде, в терминах функций Бейкера–Ахиезера рода 1. Явные решения этого уравнения для случая произвольного $N=g$ в терминах тэта-функций якобиевых многообразий были построены в [29].

Обратим внимание, что классическая форма теоремы сложения (1.17), где F – полином от трех переменных, очевидно, представляет собой частный случай уравнения (1.36). Есть много аргументов в пользу того, чтобы в качестве аналога знаменитой теоремы Вейерштрасса для уравнения (1.36) предложить следующее утверждение.

Гипотеза. *В классе аналитических функций на $\mathbb{C}^g$ каждое решение уравнения вида*

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k(x+y)\varphi_k(x)\psi_k(y) = \varphi_0(x)\psi_0(y) \tag{1.37}$$

с точностью до экспоненциальных множителей задается набором тэта-функций на абелевом многообразии.

Дополнительные условия типа зависимости N от g и предположения о виде функций $c_k(x)$, $k=1,\dots,N+1$, приводят, в частности, к условиям на абелевы многообразия, аналогичным тем, которые привели к характеризации якобианов. К важным уравнениям класса (1.36) приводит теорема сложения в форме

$$F(\mathbf{f}_1(x), \mathbf{f}_2(y), \mathbf{f}_3(x+y)) = 0, \tag{1.38}$$

где $\mathbf{f}_k(x)$, $x\in\mathbb{C}^g$, – вектор-функция, составленная из набора длины N частных производных функций f_k, $k=1,2,3$, и F – полином от $3N$ переменных.

Заключительный пятый параграф посвящен применению *интегрируемых линейных уравнений* в задачах, связанных с проблемой Римана–Шоттки. Уравнение КП (1.7) является условием совместности переопределенной системы вспомогательных линейных задач

$$(\partial_y - L)\,\psi = 0, \qquad (\partial_t - A)\,\psi = 0 \longmapsto [\partial_y - L, \partial_t - A] = 0, \tag{1.39}$$

где L и A являются дифференциальными операторами вида

$$L = -\partial_x^2 + u(x,y,t), \qquad A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}\,u\,\partial_x + w(x,y,t). \tag{1.40}$$

Эквивалентность нелинейного уравнения условию совместности переопределенной системы линейных задач может в известной степени восприниматься как определение солитонных уравнений. При этом роль одного из вспомогательных уравнений является выделенной при построении спектральных преобразований, линеаризующих соответствующее нелинейное уравнение. Первичность роли линейной задачи ярко проявилась в схеме построения эллиптических решений уравнения КП, предложенной в [44] и перенесенной позднее на ряд других солитонных уравнений в работах [45]–[47].

В недавней работе одного из авторов было показано, что характеризация якобианов с помощью уравнения КП содержит избыточную информацию и что задача Римана–Шоттки может быть решена с помощью лишь одной из вспомогательных линейных задач (1.40).

Теорема 1.4 (Кричевер [48]). *Симметрическая матрица B с положительно определенной мнимой частью является матрицей b-периодов базиса нормированных голоморфных дифференциалов на некоторой гладкой алгебраической кривой Γ тогда и только тогда, когда найдутся две константы p, E и три g-мерных вектора U, V, A такие, что линейное уравнение*

$$(\partial_y - \partial_x^2 + u(x,y))\psi = 0 \tag{1.41}$$

с потенциалом

$$u = 2\partial_x^2 \ln \theta(Ux + Vy + Z \mid B) \tag{1.42}$$

имеет решение вида

$$\psi = \frac{\theta(A + Ux + Vy + Z \mid B)}{\theta(Ux + Vy + Z \mid B)} \exp(px + Ey). \tag{1.43}$$

Используя теорему сложения (1.25), несложно показать, что уравнение (1.41), в котором u и ψ задаются формулами (1.42), (1.43), эквивалентно системе уравнений

$$\partial_y \Theta[\varepsilon,0](A/2) - \partial_x^2 \Theta[\varepsilon,0](A/2) - 2p\,\partial_x \Theta[\varepsilon,0](A/2) + (E - p^2)\Theta[\varepsilon,0](A/2) = 0, \tag{1.44}$$

которые должны быть выполнены для всех полуцелых характеристик ε.

Описание якобианов алгебраических кривых с помощью системы уравнений (1.44) сильнее, чем характеризация с помощью системы уравнений (1.11). В терминах отображения Куммера уравнения (1.44) эквивалентны условию, что соответствующее многообразие Куммера имеет точку перегиба. Это условие является частным случаем гипотезы Велтерса о тройной секущей [22].

Как представляется авторам, возможности изложенных в настоящем обзоре подходов к различным задачам геометрии абелевых многообразий еще далеко не исчерпаны. В подтверждение этого отметим недавнюю работу [49], в которой решена задача характеризации примианов с помощью интегрируемого анзаца для двумерного оператора Шрёдингера.

§ 2. Функции Бейкера–Ахиезера и теоремы сложения

Как уже отмечалось во введении, отправной точкой работ [28], [29], в которых были введены векторные аналоги (1.22), (1.24), (1.36) уравнения Коши, была попытка найти функциональные уравнения, характеризующие функции Бейкера–Ахиезера. Изложение результатов этих работ мы предварим формулировкой необходимых сведений о функциях Бейкера–Ахиезера.

2.1. Функции Бейкера–Ахиезера. Рассмотрим неособую алгебраическую кривую Γ рода g с отмеченными точками P_α и с фиксированными локальными координатами $k_\alpha^{-1}(Q)$ в окрестностях этих отмеченных точек, $k_\alpha^{-1}(P_\alpha)=0$, $\alpha=1,\dots,l$. Зафиксируем набор полиномов $\mathbf{q}=\{q_\alpha(k)\}$,

$$q_\alpha(k)=\sum_i t_{\alpha,i}k^i. \tag{2.1}$$

Как было показано в [1], [2], для любого набора точек $\gamma_1,\dots,\gamma_g$ общего положения существует единственная с точностью до пропорциональности функция $\psi(t,Q)$, $t=\{t_{\alpha,i}\}$, которая

(a) *мероморфна на* Γ *вне точек* P_α *и имеет не более чем простые полюсы в точках* γ_s (*если все они различныгт*);

(b) *в окрестности точки* P_α *имеет вид*

$$\psi(t,Q)=\exp\bigl(q_\alpha(k_\alpha)\bigr)\left(\sum_{s=0}^\infty \xi_{s,\alpha}(t)k^{-s}\right),\qquad k_\alpha=k_\alpha(Q). \tag{2.2}$$

Выбрав точку P_0, условимся нормировать ψ равенством

$$\psi(t,P_0)=1. \tag{2.3}$$

Следует подчеркнуть, что функция Бейкера–Ахиезера $\psi(t,Q)$ определяется своими аналитическими свойствами по переменной Q. От коэффициентов $t_{\alpha,i}$ полиномов q_α она зависит как от *внешних параметров*.

Существование функции Бейкера–Ахиезера доказывается предъявлением явной тэта-функциональной формулы [1]. Введем ряд необходимых обозначений. Прежде всего напомним, что фиксация базиса a_i, b_i циклов на Γ с канонической матрицей пересечений позволяет определить базис нормированных голоморфных дифференциалов ω_i, матрицу B их b-периодов и соответствующую тэта-функцию $\theta(z)=\theta(z\,|\,B)$. Базисные векторы e_k и векторы $B_k=\{B_{kj}\}$ порождают решетку в $\mathbb{C}^g$, фактор по которой является g-мерным тором $J(\Gamma)$, называемым якобианом кривой Γ. Отображением Абеля называется отображение $A\colon\Gamma\longmapsto J(\Gamma)$, задаваемое формулой

$$A_k(Q)=\int_{Q_0}^{Q}\omega_k. \tag{2.4}$$

Если определить вектор Z формулой

$$Z=\kappa-\sum_{s=1}^{g}A(\gamma_s), \tag{2.5}$$

где κ – вектор римановых констант, зависящих от выбора базисных циклов и начальной точки отображения Абеля Q_0, то функция $\theta(A(Q)+z)$, если она не равна тождественно нулю, имеет на Γ ровно g нулей, совпадающих с точками γ_s:

$$\theta(A(\gamma_s)+Z)=0. \tag{2.6}$$

Отметим, что сама функция $\theta(A(Q)+Z)$ многозначна на Γ, но ее нули определены корректно. Введем дифференциалы $d\Omega_\alpha$ такие, что дифференциал $d\Omega_{\alpha,i}$

голоморфен вне P_α, в которой он имеет полюс вида $d\Omega_\alpha = d(k_\alpha^i + O(k_\alpha^{-1}))$, и нормирован условием $\oint_{a_i} d\Omega_\alpha = 0$. Обозначим через $2\pi i U_{\alpha,i}$ вектор его b-периодов с координатами

$$2\pi i U_{\alpha,i,k} = \oint_{b_k} d\Omega_{\alpha,i}. \tag{2.7}$$

Используя трансляционные свойства тэта-функции, можно проверить, что функция $\psi(t,Q)$, заданная формулой

$$\psi(t,Q) = \Phi(x,Q) \exp\biggl(\sum_{\alpha,i} t_{\alpha,i} \int_{P_0}^{Q} d\Omega_{\alpha,i}\biggr), \tag{2.8}$$

где

$$\Phi(x,Q) = \frac{\theta(A(Q)+x+Z)\,\theta(A(P_0)+Z)}{\theta(A(Q)+Z)\,\theta(A(P_0)+x+Z)} \tag{2.9}$$

и

$$x = \sum_{\alpha,i} t_{\alpha,i} U_{\alpha,i}, \tag{2.10}$$

является *однозначной* функцией переменной Q на Γ. Из определения дифференциалов $d\Omega_{\alpha,i}$ вытекает, что эта функция имеет нужный вид существенной особенности в точках P_α, а из (2.6) следует, что вне этих точек ψ имеет полюсы в точках γ_s.

Единственность функции Бейкера–Ахиезера сводится к теореме Римана–Роха, согласно которой мероморфная функция на Γ, имеющая не более g полюсов общего положения, является константой. Действительно, предположим, что функция $\widetilde{\psi}$ имеет те же аналитические свойства, что и ψ. Тогда функция $\widetilde{\psi}\psi^{-1}$ является мероморфной функцией на Γ, число полюсов которой не превосходит g. Следовательно, она является константой, которая в силу условия нормировки (2.3) равна 1.

Приведем еще одно утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем и доказательство которого также сводится к теореме Римана–Роха. Для любого положительного дивизора $D = \sum n_i Q_i$ рассмотрим линейное пространство $L(\mathbf{q}, D)$ функций, имеющих вне точек P_α полюсы в точках Q_i кратности не выше n_i и имеющих в окрестности P_α вид (2.1). Как было доказано в [1], для дивизоров общего положения степени $d = \sum n_i \geqslant g$ размерность этого пространства равна $\dim L(\mathbf{q}, D) = d - g + 1$.

Функция $\Phi(x,Q)$, заданная формулой (2.9), относится к классу так называемых *факториальных* функций [50]. Она является многозначной функцией на Γ. Ее однозначную ветвь можно выделить, если провести на Γ разрезы вдоль a-циклов. В дальнейшем мы будем использовать обозначение Γ^* для Γ с подобными разрезами.

Лемма 2.1. *Для любого набора точек $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ общего положения формула* (2.9), *в которой вектор Z определен с помощью* (2.5), *задает единственную функцию $\Phi(x,Q)$, где $x = (x_1, \dots, x_g)$, $Q \in \Gamma$, такую, что*:

1) *Φ является однозначной мерморфной функцией Q на Γ^*, имеющей не более чем простые полюсы в точках γ_s (если все они различны)*;

2) *ее граничные значения* $\Phi_j^{\pm}(x,Q)$, $Q\in a_j$, *на различных берегах разрезов удовлетворяют соотношениям*

$$\Phi_j^{+}(x,Q)=e^{-2\pi i x_j}\Phi_j^{-}(x,Q), \qquad Q\in a_j; \tag{2.11}$$

3) Φ *нормирована условием*

$$\Phi(x,P_0)=1. \tag{2.12}$$

Как и в случае функций Бейкера–Ахиезера, для любого эффективного дивизора $D=\sum n_iQ_i$ можно ввести понятие ассоциированного линейного пространства $\mathscr{L}(x,D)$ как пространства мероморфных функций на Γ^*, имеющих полюсы в точках Q_i кратности не выше n_i и граничные значения которых на берегах разрезов удовлетворяют соотношениям (2.11). Из теоремы Римана–Роха следует, что для дивизоров общего положения степени $d=g$ размерность этого пространства равна

$$\dim\mathscr{L}(x,D)=d-g+1. \tag{2.13}$$

Согласно (2.13), для любого набора точек $\gamma_1,\dots,\gamma_g$ общего положения размерность пространства факториальных функций, имеющих не более чем двукратные полюсы в точках γ_s, равна $g+1$. Следующее утверждение можно воспринимать, как явное представление набора из g функций, которые вместе с функцией Φ задают базис в этом пространстве.

Лемма 2.2. *Для любого набора точек* $\gamma_1,\dots,\gamma_g$ *общего положения функция* $C_k(x,Q)$, *заданная формулой*

$$C_k(x,Q)=\frac{\theta(A(Q)+Z+A(\gamma_k)-A(P_0))\,\theta(A(Q)+x+Z-A(\gamma_k)+A(P_0))}{\theta^2(A(Q)+Z)\,\theta(A(P_0)+x+Z)\,\theta(2A(\gamma_k)-A(P_0)+Z)}, \tag{2.14}$$

где Z *определено в* (2.5), *является единственной функцией такой, что*:

1) C_k, *как функция переменной* $Q\in\Gamma^*$, *является мероморфной функцией с не более чем простыми полюсами в точках* γ_s, $s\neq k$, *и полюсом второго порядка вида*

$$C_k(x,Q)=\theta^{-2}(A(Q)+Z)+O(\theta^{-1}(A(Q)+Z)) \tag{2.15}$$

в точке γ_k;

2) *граничные значения* $C_{k,j}^{\pm}(x,Q)$, $Q\in a_j$, *функции* C_k *на различных берегах разрезов удовлетворяют уравнениям*

$$C_{k,j}^{+}(x,Q)=e^{-2\pi i x_j}C_{k,j}^{-}(x,Q), \qquad Q\in a_j; \tag{2.16}$$

3)

$$C_k(x,P_0)=0. \tag{2.17}$$

Единственность функции C_k, обладающей всеми перечисленными свойствами, является прямым следствием теоремы Римана–Роха. То, что функция C_k, заданная формулой (2.14), удовлетворяет этим свойствам, проверяется непосредственно. Действительно, функция $\theta(A(Q)+Z)$ равна нулю в точке γ_k, следовательно, равенство (2.14) означает, что C_k имеет в этой точке полюс второго порядка с нормированным старшим коэффициентом. Из равенства (2.5) следует, что первый сомножитель числителя обращается в нуль в точке P_0 и в точках

γ_s, $s \neq k$. Поскольку первый сомножитель знаменателя имеет полюс второго порядка во всех точках γ_s, то функция C_k имеет полюсы первого порядка в точках γ_s, $s \neq k$, и полюс второго порядка в точке γ_k. Разность аргументов тэта-функций, содержащих $A(Q)$, в числителе и знаменателе равна x. Это, в сочетании со соотношениями монодромии (1.10), влечет за собой (2.16).

2.2. Сильная форма теоремы сложения для тэта-функций якобианов. Рассмотрим функцию $\Phi(x,Q)\Phi(y,Q)$. Из определения Φ следует, что это произведение принадлежит пространству $\mathscr{L}(x+y,D)$, где $D = 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_g$. В силу (2.13), размерность этого пространства равна $g+1$. Функции $\Phi(x+y,Q)$, $C_k(x+y,Q)$ линейно независимы. Следовательно, они образуют базис в пространстве $\mathscr{L}(x+y,D)$. Коэффициенты разложения $\Phi(x,Q)\Phi(y,Q)$ по этому базису находятся из сравнения полюсов второго порядка в точках γ_k и из условия нормировки (2.12). Эти простые соображения приводят к следующему, по существу, основному результату этого пункта.

Теорема 2.1. *Имеет место тождество*

$$\Phi(x,Q)\Phi(y,Q) = \Phi(x+y,Q) + \sum_{k=1}^{g} C_k(x+y,Q)\phi_k(x)\phi_k(y), \tag{2.18}$$

в котором функции Φ, C_k *определены формулами* (2.9) *и* (2.14) *соответственно, а функции* $\phi_k(x)$ *задаются формулой*

$$\phi_k(x) = \frac{\theta(A(\gamma_k)+x+Z)\theta(A(P_0)+Z)}{\theta(A(P_0)+x+Z)}\,. \tag{2.19}$$

В дальнейшем мы условимся отождествлять алгебраическую кривую Γ с ее образом, задаваемым отображением Абеля. Соответственно, точки P_0, γ_s, $Q \in \Gamma$ отождествляются с векторами: $A_0 = A(P_0)$, $A_s = A(\gamma_s)$, $s = 1,\dots,g$; $A_{g+1} = A(Q)$.

Прямая подстановка формул (2.9), (2.14), (2.19) в равенство (2.18) после приведения слагаемых к общему знаменателю и сокращения сомножителей приводит к следующему тождеству:

$$\begin{aligned}
&\theta(A_0+x+y+Z)\theta(A_{g+1}+x+Z)\theta(A_{g+1}+y+Z)\\
&\qquad= \sum_{k=0}^{g} \frac{\theta(A_{g+1}+x+y+Z-A_k+A_0)\theta(A_{g+1}+Z+A_k-A_0)}{\theta(2A_k+Z-A_0)}\\
&\qquad\qquad \times \theta(A_k+x+Z)\theta(A_k+y+Z).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Стандартное применение билинейной формулы сложения (1.25) (описанное во введении при выводе формулы (1.29)) доказывает, что (2.20) эквивалентно равенству

$$\sum_{k=0}^{g+1} (-1)^{\delta_{k,g+1}} \frac{\theta(A_{g+1}+2u-Z-A_k+A_0)\,\theta(A_{g+1}+Z+A_k-A_0)}{\theta(2A_k+Z-A_0)}\, K(A_k+u) = 0, \tag{2.21}$$

где $\delta_{k,g+1}$ – символ Кронекера, отличный от нуля только при $k = g+1$, а переменная u определяется равенством $2u = x+y+2Z$.

Формула (2.20) или эквивалентная ей формула (2.21) представляют собой сильную форму нашей теоремы сложения для тэта-функций якобиевых многообразий. Подчеркнем еще раз, что эти формулы справедливы для любого набора точек $A_i \in \Gamma \subset J(\Gamma)$, $i = 0, 1, \ldots, g+1$, и произвольного вектора $u \in \mathbb{C}^g$. Покажем, что легким следствием формулы (2.21) является формула тройной секущей Фэя и следующее более общее утверждение Ганнинга.

Следствие 2.1 (Ганнинг [19; теорема 2]). *Для любой неособой алгебраической кривой* Γ *рода* g, *для любого числа* $1 \leqslant m \leqslant g$ *и для любого набора* $(2m+1)$ *точек кривой, отождествленной с ее образом при отображении Абеля, т.е.* $A_0, \ldots, A_{m+1}, Q_1, \ldots, Q_m \in A(\Gamma) \subset J(\Gamma)$, *следующие* $(m+2)$ *точки* $K(A_i + u)$ *многообразия Куммера, где*

$$2u = \sum_{s=1}^{m} Q_s - \sum_{k=0}^{m+1} A_k, \tag{2.22}$$

лежат в m*-мерной плоскости.*

Прежде всего заметим, что если векторы Z и u заданы формулами (2.5) и (2.22), то, с учетом четности тэта-функции, первый сомножитель числителя в формуле(2.21) имеет вид $\theta(A_k + Z')$, где

$$Z' = \kappa - \sum_{s=1}^{m} Q_s - \sum_{k=m+2}^{g+1} A_k. \tag{2.23}$$

Из формул (2.5), (2.6), примененных к набору $Q_1, \ldots, Q_m, A_{m+2}, \ldots, A_{g+1}$, получаем, что $\theta(A_k + Z') = 0$, $k > m+1$. Последнее равенство означает, что если вектор u задан формулой (2.22), то в равенстве (2.21) отличны от нуля только первые $(m+2)$ слагаемых. Утверждение следствия доказано. Заметим, что при $m = g$ оно эквивалентно слабой форме (1.29) нашей теоремы сложения, а при $m = 1$ оно совпадает с формулой тройной секущей Фэя [20].

2.3. Задача Римана–Шоттки. Простые размерностные соображения, примененные к уравнению (1.29), доказывают, что эквивалентное ему уравнение (1.22) при $N = 2^g - 1$ справедливо для произвольного абелева многообразия. В полном объеме гипотеза о том, что уравнение (1.22) при $N = g$ характеризует якобианы алгебраических кривых, остается недоказанной. Принципиальную трудность составляют различные вырожденные ситуации. Например, уравнение (1.29) при $N = g$ не исключает возможности того, что точки $K(A_k + u)$ лежат в плоскости размерности $m < g$. В этом случае невозможно определить коэффициенты c_k линейной зависимости как однозначные функции переменной u. Аргументы работы [34], в которой была предпринята первая попытка доказательства гипотезы, оказались недостаточными для того, чтобы исключить подобное вырожденние. В [35] были приведены дополнительные условия, исключающие возможность вырождения и при выполнении которых остальной ход доказательства гипотезы остается неизменным.

Теорема 2.2 [34], [35]. *Предположим, что для неприводимого главно-поляризованного абелева многообразия* X *размерности* g *найдется набор* $(g+2)$ *попарно различных точек* $A_k \in X$ *таких, что для любого* $u \in X$ *векторы*

$K(A_k+u)$ линейно зависимы. Предположим также, что найдется пара индексов k и l таких, что векторы $K(A_k+v)$, где $2v=-(A_k+A_l)$, порождают линейное подпространство размерности, в точности равной $g+1$. Тогда X является якобианом некоторой неособой алгебраической кривой Γ, а точки A_k принадлежат образу Γ в $J(\Gamma)$ при отображении Абеля.

Уравнение (1.29) при заданных A_k и u представляет собой переопределенную систему линейных уравнений на коэффициенты c_k. В предположениях теоремы ранг этой системы при $u=v$ равен в точности $g+1$. Следовательно, существует набор характеристик $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_g$ таких, что $((g+1)\times(g+2))$-мерная матрица с матричными элементами $\{\Theta[\varepsilon_s](A_k+u)\}$ имеет ранг $g+1$ для всех u в малой окрестности вектора v. Это позволяет однозначно определить c_i для любого $u\in\mathbb{C}^g$ формулой $c_i(u)=(-1)^i\det\{\Theta[\varepsilon_s](A_k+u),\ k\neq i\}$.

Функции $c_i(u)$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, определяют отображение $c\colon\mathbb{C}^g\to\mathbb{CP}^{g+1}$. Нашей следующей целью будет доказательство того, что ранг дифференциала этого отображения в точке $u=v$ максимален. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что индексы k и l в формулировке теоремы равны 0 и 1. В этом случае из определения v и четности тэта-функций следует, что $K(A_0+v)=K(A_1+v)$. Значит, $c_i(v)=0$ для $i>1$, поскольку первые два столбца матрицы, детерминант которой определяет c_i, совпадают. В силу определения c_i имеем также $c_0(v)=c_1(v)\neq 0$.

Предположим, что ранг дифференциала dc в точке v не максимален. Это означает, что существует вектор $V\in\mathbb{C}^g$ такой, что производная отображения $c(u)$ в направлении вектора V в точке v равна нулю. Последнее утверждение с учетом того, что $c(u)$ есть точка проективного пространства, эквивалентно равенствам $\partial_V c_i\big|_{u=v}=\lambda c_i(v)$, где λ – некоторая константа, не зависящая от i. Дифференцируя равенство (1.29) с учетом вышесказанного и свойства нечетности производных тэта-функций, получим

$$\sum_{k=0}^{g+1}\lambda c_i(2u)\bigl(\lambda K(A_k+u)+\partial_V K(A_k+u)\bigr)\big|_{u=v}=2c_0\partial_V K(A_0+v)=0. \tag{2.24}$$

Так как отображение Куммера является вложением фактор-пространства $X/(z=-z)$, то из (2.24) следует, что вектор A_0+v должен быть точкой второго порядка в X. Это возможно лишь когда $A_0-A_1=0\in X$, что противоречит предположению теоремы о том, что все точки должны быть попарно различными.

Прямым следствием доказанной максимальности ранга dc является утверждение о том, что уравнения $c_i=0$, $i>2$, задают однопараметрическое семейство тройных секущих, что в силу теоремы Ганнинга является характеристическим свойством якобианов. Теорема доказана.

Как уже отмечалось во введении, в недавней работе [36] утверждение о том, что уравнение (1.29) с $N=g$ является характеристическим для якобианов, было доказано при дополнительных предположениях, отличных от тех, которые были сформулированы в [35]. А именно, оно было доказано в предположении, что точки A_k находятся в *тэта-общем положении*, что по определению означает, что для любого подмножества из $(g+1)$ точки $A_{i_0},A_{i_1},\dots,A_{i_g}$, найдется вектор z такой, что $\theta(A_{i_k}+z)=0$, $k=1,\dots,g$, и $\theta(A_{i_0}+z)\neq 0$.

2.4. Вырожденные случаи теорем сложения. В этом пункте мы представим теоремы сложения, к которым приводит рассмотрение специального вырожденного случая функции Бейкера–Ахиезера. А именно, рассмотрим функцию Бейкера–Ахиезера $\psi(t, A; A_0)$, которая, как функция точки кривой $A \in \Gamma \subset J(\Gamma)$, *голоморфна всюду кроме отмеченнной точки* A_0, в которой она имеет вид

$$\psi(t, A; A_0) = \left(\sum_{s=-g}^{\infty} \xi_s(t, A_0)\, z^s\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^{-i}\right), \tag{2.25}$$

где $z = z(A)$ – локальная координата в окрестности точки A_0.[2]

Тэта-функциональное выражение для $\psi(t, A; A_0)$ дается формулами, практически идентичными формулам (2.8)–(2.10), в которых вектор Z следует положить равным $Z_0 = \kappa - gA_0$. Сдвигом начала координат всегда можем добиться зануления вектора римановых констант $\kappa = 0$, что и будет предполагаться в дальнейшем. С учетом сказанного явная формула для $\psi(t, A; A_0)$ приобретет вид

$$\psi(t, A; A_0) = \Phi(x, A; A_0) \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j \Omega_j(A)\right), \tag{2.26}$$

где

$$\Phi(x, A; A_0) = \frac{\theta(A + x - gA_0)}{\theta(A - gA_0)\, \theta(x + (g-1)A(P_0))}, \qquad x = \sum_j t_j U_j, \tag{2.27}$$

а $\Omega_j(A)$ – нормированный абелев интеграл, голоморфный вне отмеченной точки A_0, в окрестности которой он имеет вид $\Omega_j = z^{-j} + O(1)$.

Классические билинейные соотношения Римана устанавливают связь b-периодов $2\pi i U_j$ дифференциала $d\Omega_j$ с коэффициентами разложения кривой $A(z) \in \Gamma \subset J(\Gamma)$ в окрестности точки A_0:

$$A(z) = A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} U_k z^k. \tag{2.28}$$

Теоремы сложения для тэта-функций якобианов, связанные с функцией $\psi(t, A; A_0)$, являются простым следствием следующего утверждения: *имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \psi(t, A; A_0)\psi(t', A; A_0) = v_0(t, t', A_0)\psi(t + t', A; A_0) \\ + \sum_{k=1}^{g} v_k(t, t', A_0)\partial_{t_k}\psi(t + t', A; A_0). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Доказательство этого утверждения, содержательная часть которого состоит в том, что коэффициенты v_k не зависят от A, стандартно. Произведение в левой части (2.29) является функцией Бейкера–Ахиезера, отвечающей параметрам $(t + t')$ и дивизору $D = 2gA_0$. Пространство таких функций имеет размерность

[2] Отметим, что обозначения этого пункта содержат явное указание на зависимость ψ от выбора отмеченной точки, в отличие от общего случая, в котором явное указание на зависимость функции Бейкера–Ахиезера от выбора отмеченных точек и дивизора полюсов было для краткости опущено.

$g+1$. Функции $\psi(t+t',A;A_0)$, $\partial_{t_k}\psi(t+t',A;A_0)$, $k=1,\dots,g$, линейно независимы, а значит, образуют базис в этом пространстве. Следовательно, произведение функций Бейкера–Ахиезера может быть разложено по этому базису. Коэффициенты разложения рекуррентно находятся из сравнения старших коэффициентов разложения правых и левых частей по параметру z.

Воспользуемся теперь явными тэта-функциональными формулами для ψ. Их подстановка в (2.29) приводит к эквивалентному равенству

$$\theta(A+x-gA_0)\,\theta(A+y-gA_0)=\theta(A+x+y-gA_0)\,\theta(A-gA_0) \\ \times\biggl(w_0(x,y,A_0)+\sum_{k=1}^{g}\bigl(\Omega_k(A)+\partial_{U_k}\ln\theta(A+x+y-gA_0)\bigr)w_k(x,y,A_0)\biggr). \tag{2.30}$$

Воспользовавшись теоремой сложения (1.25), так же, как и при выводе формулы (1.29), получим, что коэффициенты w_j в равенстве (2.30) имеют вид

$$w_j(x,y,A_0)=\sum_{\varepsilon}W_{j,\varepsilon}(u,A_0)\Theta[\varepsilon,0](v), \\ 2u=x+y-2gA_0,\qquad 2v=x-y, \tag{2.31}$$

а само равенство эквивалентно уравнению

$$K(A+u)=\theta(A+u+gA_0)\,\theta(A-gA_0) \\ \times\biggl(W_0(u,A_0)+\sum_{k=1}^{g}\bigl(\Omega_k(A)+\partial_{U_k}\ln\theta(A+u+gA_0)\bigr)W_k(u,A_0)\biggr), \tag{2.32}$$

в котором $W_j\in\mathbb{CP}^{2^g-1}$ – точки проективного пространства с однородными координатами $W_{j,\varepsilon}$.

Разлагая равнство (2.32) в окрестности A_0, получим, что вектор W_j является линейной комбинацией векторов $\mathscr{D}^{(k)}K(A_0+u)$, $k=0,1,\dots,g-j$, где операторы $\mathscr{D}^{(k)}=\mathscr{D}^{(k)}_{U_1,\dots,U_k}$ даются формулой (1.32). Если локальную координату в точке A_0 задать равенством $z^g=\theta(A-gA_0)$, то система уравнений, определяющих W_j, примет особо простой вид:

$$\mathscr{D}^{(j)}K(A_0+u)=\sum_{k=0}^{j}W_{g-k}\mathscr{D}^{(j-k)}\theta(u+(g+1)A_0),\qquad j=0,\dots,g. \tag{2.33}$$

Формулы (2.32), (2.33) представляют собой *сильную форму теоремы сложения* (1.33).

Замечание. Уравнение (2.32) эквивалентно исходному равенству (2.29), которое можно представить в еще одной форме. А именно, функции $\partial_{t_1}^k\psi(t+t',A;A_0)$, $k=0,1,\dots,g$, образуют базис в пространстве $L(t+t',2gA_0)$ соответствующих функций Бейкера–Ахиезера. Разлагая по этому базису левую часть (2.29), мы приходим к утверждению: *существует единственный дифференциальный оператор $\mathscr{L}=\sum_{i=0}^{g}\tilde v(t,t',A_0)\partial_{t_1}^i$ такой, что выполнено равенство*

$$\psi(t,A;A_0)\psi(t',A;A_0)=\mathscr{L}\psi(t+t',A;A_0). \tag{2.34}$$

Как уже говорилось во введении, соотношение (2.34) может рассматриваться как континуальный аналог почти градуированной структуры КН-базисов. К более детальному рассмотрению равенства (2.34) мы вернемся в следующем параграфе.

В заключение же этого параграфа мы приведем *сильную форму* равенства (1.33). Оно получается после приравнивания друг другу $(g+1)$-х коэффициентов раложений по z правых и левых частей равенства (2.32).

Теорема 2.3. *Для любой точки $A_0 \in \Gamma \subset J(\Gamma)$ имеет место равенство*

$$\mathscr{D}^{(g+1)}K(A_0+u) = \biggl(\sum_{k=0}^{g} W_{g-k}\mathscr{D}^{(g-k+1)}\theta(u+(g+1)A_0)\biggr) \\ + \theta(u+(g+1)A_0)\biggl(\sum_{k=1}^{g} W_k\bigl(d_k+\partial_{U_1}\partial_{U_k}\ln\theta(u+(g+1)A_0)\bigr)\biggr), \qquad (2.35)$$

в котором векторы $W_s = W_s(u, A_0)$ задаются уравнениями (2.33), *а константы $d_k = d_k(A_0)$ определяются разложением абелевых интегралов Ω_k в точке A_0*: $\Omega_k = z^{-k} + d_k z + O(z^2)$.

§ 3. Трилинейные уравнения

3.1. Определение полилинейного оператора. Сопоставление с формализмом Хироты. Пусть $t_1, \dots, t_{k-1}, z \in \mathbb{C}^g$ и L – линейный дифференциальный оператор по z с постоянными коэффициентами. Оператору L ставится в соответствие *k-линейный оператор* $L(f_1, \dots, f_k)$ по формуле

$$L(f_1,\dots,f_k)(t_1,\dots,t_{k-1}) = L\bigl[f_1(t_1+z)\cdots f_{k-1}(t_{k-1}+z)f_k(t_1+\dots+t_{k-1}-z)\bigr]\big|_{z=0}.$$

Уравнение вида $L(f_1, \dots, f_k) = 0$ называется *k-линейным уравнением.*

В случае $k = 2$ эта конструкция дает билинейные дифференциальные операторы, которые давно используются в теории абелевых функций и теории инвариантов [50], [51]. Открытый Хиротой [42] метод построения решений нелинейных эволюционных уравнений сделал такие билинейные операторы широко известными среди специалистов в теории интегрируемых систем под именем *операторов Хироты.* Билинейный формализм Хироты имеет естественное обобщение, за которым закрепилось название *мультилинейного формализма* (см. [52]). Пусть H – линейный дифференциальный оператор по $t_1, \dots, t_{k-1}$ с постоянными коэффициентами, тогда *k-линейный оператор Хироты* $H(f_1, \dots, f_k)$ записывается следующим образом:

$$H(f_1,\dots,f_k)(z) = H\biggl[\prod_{j=1}^{k} f_j\biggl(z+\sum_{m=1}^{k-1} t_m \exp\Bigl\{jm\frac{2\pi\imath}{k}\Bigr\}\biggr)\biggr]\bigg|_{t_1=\dots=t_{k-1}=0},$$

где $\imath^2 = -1$. В рамках этого подхода изучаются *нелинейные дифференциальные уравнения* в частных производных вида

$$H(f_1,\dots,f_k)(z) = 0,$$

которые естественно называть *k-линейными уравнениями Хироты.*

При $k \geqslant 3$ уравнение $L(f_1, \dots, f_k) = 0$ является *функциональным уравнением*. Исследование связи между нашими k-линейными функциональными уравнениями и k-линейными дифференциальными уравнениями Хироты – тема отдельного перспективного исследования.

В этом параграфе в центре нашего внимания будут билинейные (дифференциальные) уравнения и трилинейные (функциональные) уравнения.

3.2. Формализм билинейных и трилинейных операторов. Пусть $u, v, w \in \mathbb{C}^g$. Введем операторы

$$D_i = \frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{\partial}{\partial v_i} - \frac{\partial}{\partial w_i}, \qquad i = 1, \dots, g.$$

Для каждого набора неотрицательных целых чисел – мультииндекса $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ положим $D^\omega = D_1^{\omega_1} \cdots D_g^{\omega_g}$ и $\partial^\omega = \partial_1^{\omega_1} \cdots \partial_g^{\omega_g}$, где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial z_i}$. Зададим линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$\mathscr{D} = \sum_{|\omega| \geqslant 0} \alpha_\omega D^\omega \quad \text{и} \quad L = \sum_{|\omega| \geqslant 0} \alpha_\omega \partial^\omega,$$

где $|\omega| = \omega_1 + \dots + \omega_g$.

Имеют место следующие соотношения:

$$L(f_1, f_2)(u) = \mathscr{D}(f_1(u) f_2(w))\big|_{w=u},$$
$$L(f_1, f_2, f_3)(u, v) = \mathscr{D}(f_1(u) f_2(v) f_3(w))\big|_{w=u+v}.$$

В случаях, когда ясно, о какой тройке функций $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, идет речь, мы будем использовать сокращенное обозначение

$$B(\mathscr{D}) = \frac{\mathscr{D}(f_1(u) f_2(w))}{f_1(u) f_2(w)}\bigg|_{w=u}, \qquad Q(\mathscr{D}) = \frac{\mathscr{D}(f_1(u) f_2(v) f_3(w))}{f_1(u) f_2(v) f_3(w)}\bigg|_{w=u+v}.$$

В этих обозначениях имеют место формулы

$$B(\mathscr{D}) = \sum_{|\omega| \geqslant 0} \alpha_\omega B(D^\omega), \qquad Q(\mathscr{D}) = \sum_{|\omega| \geqslant 0} \alpha_\omega Q(D^\omega).$$

Трилинейное уравнение

$$\mathscr{D}(f_1(u) f_2(v) f_3(w))\big|_{w=u+v} = 0 \tag{3.1}$$

сводится к полиномиальному соотношению между логарифмическими производными функций $f_1(u)$, $f_2(v)$, $f_3(u+v)$ и, следовательно, представляет собой сильную форму функционального уравнения типа (1.36)

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k(x+y) \varphi_k(x) \psi_k(y) = 1.$$

Обратим внимание, что если целые функции $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, дают решение функционального уравнения (3.1) для данного оператора $\mathscr{D}$, то функции $e^{\beta_i z} f_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, где β_i – постоянные и $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$, также дают решение этого уравнения.

Пример 3.1. Пусть $g=1$. Положим $\rho_i(z)=(\log f_i(z))'$. Тогда

$$\begin{aligned}
&Q(D_1)=\rho_1(u)+\rho_2(v)-\rho_3(u+v),\\
&Q(D_1^2)=(\rho_1(u)+\rho_2(v)-\rho_3(u+v))^2+\rho_1'(u)+\rho_2'(v)+\rho_3'(u+v).
\end{aligned}$$

Общее решение функционального уравнения $Q(D_1)=0$ дается линейными функциями ρ_i, т.е. $f_i(z)=\exp(\alpha(z-\beta_i)^2+\gamma_i)$, где α, β_i и γ_i – постоянные, причем $\beta_3=\beta_1+\beta_2$.

Знаменитое частное решение (см. (1.21)) функционального уравнения $Q(D_1^2)=0$ было получено Фробениусом и Штикельбергером [33]. Это частное решение было применено к точно решаемым задачам квантовой механики [53], [54]. Общее аналитическое решение этого функционального уравнения описано в [55]. Функции f_i задают волновую функцию основного состояния для квантовой задачи трех тел. В случае общего положения решение представляет собой функции вида $\rho_i(z)=\zeta(z-\delta_i)-\beta_i$, т.е. $f_i(z)=e^{-\beta_i z+\gamma_i}\sigma(z-\delta_i)$, где $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ – функции Вейерштрасса и β_i, γ_i и δ_i – постоянные, причем $\beta_3=\beta_1+\beta_2$ и $\delta_3=\delta_1+\delta_2$. Отметим еще нормированное частное решение

$$f_i(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta}\exp\biggl(-\frac{(z-q_i)^2}{2\Delta^2}\biggr), \tag{3.2}$$

где q_i – постоянные и $\Delta=(q_1+q_2-q_3)/\sqrt{3}$.

Пусть $g=2$. Положим

$$\rho_i^{(j,k)}(z)=\frac{\partial^{j+k}\log f_i(z)}{\partial z_1^j\,\partial z_2^k}\,. \tag{3.3}$$

Тогда

$$Q(2D_2+D_1^3)=2r_{(0,1)}+r_{(3,0)}+3r_{(2,0)}r_{(1,0)}+r_{(1,0)}^3,$$

где $r_{(j,k)}=\rho_1^{(j,k)}(u)+\rho_2^{(j,k)}(v)+(-1)^{j+k}\rho_3^{(j,k)}(u+v)$.

Теорема 3.1 (Бухштабер, Лейкин [56]). *Сигма-функция рода 2 подчиняется трилинейному закону сложения*

$$[2D_2+D_1^3]\sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)\big|_{u+v+w=0}=0,$$

где $D_j=\partial_{u_j}+\partial_{v_j}+\partial_{w_j}$.

3.3. Конструкция производящих функций для билинейных и трилинейных операторов. Распространение приведенных выше результатов на случай высших родов опирается на следующую общую конструкцию.

Пусть ξ – координата в $\mathbb{C}$. Выберем гладкое отображение $\phi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}^g$, регулярное при $\xi=0$, и функции $G_i\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $i=1,2$, мероморфные в окрестности $\xi=0$. Образуем функции

$$\begin{aligned}
F_2(u,\xi)&=G_1(\xi)\frac{f_1(u+\phi(\xi))}{f_1(u)}\,\frac{f_2(u-\phi(\xi))}{f_2(u)}\,,\\
F_3(u,v,\xi)&=G_2(\xi)\frac{f_1(u+\phi(\xi))}{f_1(u)}\,\frac{f_2(v+\phi(\xi))}{f_2(v)}\,\frac{f_3(u+v-\phi(\xi))}{f_3(u+v)}\,.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Функции $F_2(u,\xi)$ и $F_3(u,v,\xi)$ являются производящими функциями билинейных и трилинейных операторов. Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{f_1(u+z)}{f_1(u)}\,\frac{f_2(u-z)}{f_2(u)} &= \sum_{|\omega|\geqslant 0}\frac{z^\omega}{\omega!}B(D^\omega),\\ \frac{f_1(u+z)}{f_1(u)}\,\frac{f_2(v+z)}{f_2(v)}\,\frac{f_3(u+v-z)}{f_3(u+v)} &= \sum_{|\omega|\geqslant 0}\frac{z^\omega}{\omega!}Q(D^\omega),\end{aligned}\qquad z\in\mathbb{C}^g.$$

Умножение на функцию $G_i(\xi)=\xi^{k_i}(1+O(\xi))$, $k_i\in\mathbb{Z}$, и подстановка $z=\phi(\xi)$ приводят к производящим функциям

$$F_2(u,\xi)=\xi^{k_1}\sum_{i\geqslant 0}\xi^i B(\mathscr{D}_i^{\mathrm{bi}}),\qquad F_3(u,v,\xi)=\xi^{k_2}\sum_{i\geqslant 0}\xi^i Q(\mathscr{D}_i^{\mathrm{tri}}).$$

С другой стороны, для *заданных* функций f_i, G_j и ϕ разложения $F_2(u,\xi)$ и $F_3(u,v,\xi)$ в ряды по степеням ξ можно вычислить непосредственно. Мы приходим к следующему результату.

Лемма 3.1 (Бухштабер, Лейкин [41]). *Если в разложении $F_2(u,\xi)=\sum[F_2]_i\xi^i$ для некоторого k коэффициент $[F_2]_k$ не зависит от переменной u, то целые функции $f_i(z)$, $i=1,2$, удовлетворяют* ***билинейному*** *дифференциальному уравнению $B(\mathscr{D}_{k-k_1}^{\mathrm{bi}}-[F_2]_k)=0$.*

Если в разложении $F_3(u,v,\xi)=\sum[F_3]_i\xi^i$ для некоторого k коэффициент $[F_3]_k$ не зависит от переменных u и v, то целые функции $f_i(z)$, $i=1,2,3$, удовлетворяют ***трилинейному*** *функциональному уравнению $Q(\mathscr{D}_{k-k_2}^{\mathrm{tri}}-[F_3]_k)=0$.*

Далее в этом параграфе мы покажем, как эта конструкция применяется для построения билинейных и трилинейных уравнений, которым удовлетворяют σ-функции плоских алгебраических кривых.

3.4. Необходимые сведения. Начнем с основных понятий.

Пусть V – представитель семейства плоских алгебраических кривых – (n,s)-кривых

$$V=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid f(x,y)=0\},\quad f(x,y)=y^n-x^s-\sum_{(n-j)(s-i)>ij}\lambda_{(n-j)(s-i)-ij}x^iy^j,$$

где n и s – взаимно простые натуральные числа, $s>n>1$. Рассмотрение только этого класса кривых не ограничивает общности, поскольку каждая плоская алгебраическая кривая имеет (n,s)-модель.

С кривой V связана *последовательность Вейерштрасса* $(w_1,w_2,\dots)$. Это упорядоченное по возрастанию множество натуральных чисел, не допускающих представление в виде $an+bs$ с неотрицательными целыми a и b. Положим $w(\xi)=\sum_i\xi^{w_i}$. Имеем

$$w(\xi)=\frac{1}{1-\xi}-\frac{1-\xi^{ns}}{(1-\xi^n)(1-\xi^s)}.$$

Род неособой (n,s)-кривой равен длине $g=w(1)=(n-1)(s-1)/2$ последовательности Вейерштрасса. Введем градуировку, полагая $\deg x=n$, $\deg y=s$

и $\deg \lambda_k = k$. Тогда $\deg f(x,y) = ns$. Пусть $m_k(x,y)$ – вектор, составленный из мономов $(x^i y^j)$ таких, что $0 \leqslant in + js < 2g + k$, где $i \geqslant 0$ и $0 \leqslant j < n$, упорядоченный по убыванию deg. Длина вектора $m_k(x,y)$ равна $g + k$.

Зададим вектор базисных голоморфных дифференциалов по формуле

$$dA(x,y) = m_0(x,y)\frac{dx}{f_y(x,y)}, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y), \qquad (x,y) \in V.$$

В качестве базисной точки $A_0 \in V$ выберем бесконечно удаленную точку на V. Отображение Абеля зададим по формуле

$$A(x,y) = \int_{A_0}^{(x,y)} dA(x,y).$$

Введем локальную параметризацию кривой V в окрестности точки A_0. Положим

$$\big(x(\xi), y(\xi)\big) = \big(\xi^{-n}, \xi^{-s}\rho(\xi)\big), \quad \text{где} \quad \rho(\xi) = 1 + \sum_{i>0} \rho_i(\lambda)\xi^i, \quad \rho_i(\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda].$$

Коэффициенты $\rho_i(\lambda)$ определяются из уравнения $f\big(x(\xi), y(\xi)\big) = 0$, т.е.

$$\rho(\xi)^n = 1 + \sum_{(n-j)(s-i)>ij} \rho(\xi)^j \xi^{(n-j)(s-i)-ij} \lambda_{(n-j)(s-i)-ij}.$$

Тогда в окрестности A_0 для отображения Абеля имеет место разложение

$$A\big(x(\xi), y(\xi)\big) = \left(-\frac{\xi^{w_1}}{w_1}(1 + a_1(\xi)), \ldots, -\frac{\xi^{w_g}}{w_g}(1 + a_g(\xi))\right)^t, \tag{3.5}$$

где $a_i(\xi)$ – ряды по положительным степеням ξ с коэффициентами из $\mathbb{Q}[\lambda]$.

Пусть W – универсальное абелево накрытие над V. Точками пространства W являются пары $((x,y); [\gamma])$, где $(x,y) \in V$ и γ – представитель класса эквивалентности путей, идущих из базисной точки в точку (x,y). Пути γ_1 и γ_2 принадлежат $[\gamma]$, если контур $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$ гомологичен нулю. Интегрирование вектора базисных голоморфных дифференциалов вдоль пути γ задает *однозначное* отображение $A\colon W \to \mathbb{C}^g$. По понятным причинам мы обозначили это отображение так же, как отображение Абеля.

Положим

$$\psi(x,y;[\gamma]) = \exp\left\{-\int_{[\gamma]} \big\langle A^*((x',y'),[\gamma']), dA(x',y')\big\rangle\right\}, \tag{3.6}$$

где путь γ' – это часть пути γ от базисной точки до точки (x',y'), $\langle a,b\rangle = \sum a_i b_i$ и $A^*((x,y),[\gamma])$ – отображение, двойственное отображению Абеля, заданное базисными интегралами второго рода с полюсами только в базисной точке, где имеет место разложение по локальному параметру

$$A^*\big(x(\xi), y(\xi)\big) = \big(\xi^{-w_1}(1 + a_1^*(\xi)), \ldots, \xi^{-w_g}(1 + a_g^*(\xi))\big)^t,$$

где $a_i^*(\xi)$ – ряды по положительным степеням ξ с коэффициентами из $\mathbb{Q}[\lambda]$.

Матрицы полупериодов η, η' и ω, ω' отображений A^* и A связаны тождеством Лежандра

$$\Omega J \Omega^t = \frac{\pi\imath}{2} J, \quad \text{где} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix}, \quad \imath^2 = -1. \tag{3.7}$$

Функция $\psi(x,y;[\gamma])$ – однозначная целая функция на W, имеющая изолированный нуль порядка $g = (n-1)(s-1)/2$ в базисной точке:

$$\psi\bigl(x(\xi), y(\xi); [\gamma]\bigr) = \xi^g \exp\{G(\xi,\lambda)\}, \tag{3.8}$$

где $G(\xi,\lambda)$ – целая функция такая, что $G(0,\lambda) = G(\xi,0) = 0$. В случае рода $g=1$ имеем $\psi(x,y;[\gamma]) = \sigma\bigl(-A(x,y;[\gamma])\bigr)$.

Функция $\psi(x,y;[\gamma])$ при прибавлении к контуру γ цикла $\chi = \sum_{j=1}^g (k_j a_j + k'_j b_j)$ (напомним, что через a_i и b_i обозначены базисные циклы, см. с. 26) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\psi(x,y;[\chi+\gamma])}{\psi(x,y;[\gamma])} = \exp\biggl\{-\biggl\langle A^*[\chi], A((x,y),[\gamma]) + \frac{1}{2}A[\chi]\biggr\rangle + \pi\imath((k+\ell)^t(k'+\ell') - \ell^t\ell')\biggr\}, \tag{3.9}$$

где $A[\chi]$ и $A^*[\chi]$ – периоды A и A^* при обходе цикла χ. Векторы ℓ и ℓ' определяются следующим образом. Сопоставим последовательности Вейерштрасса *разбиение Вейерштрасса* $(\pi_1,\dots,\pi_g)$ по формуле

$$\pi_k = w_{g-k+1} - (g-k), \qquad k = 1,\dots,g.$$

(В частности, $w_g = 2g-1$ и $\pi_1 = g$.) Тогда

$$\ell = (1,\dots,1) \quad \text{и} \quad \ell' = (\pi_1,\dots,\pi_g).$$

Сигма-функция – это целая функция на $\mathbb{C}^g$, обладающая следующим свойством:

$$\sigma(u + A[\chi]) = \sigma(u) \exp\biggl\{-\biggl\langle A^*[\chi], u + \frac{1}{2}A[\chi]\biggr\rangle + \pi\imath((k+\ell)^t(k'+\ell') - \ell^t\ell')\biggr\}. \tag{3.10}$$

Из теории рядов Фурье известно, что, ввиду (3.7), трансляционное свойство (3.10) определяет σ-функцию с точностью до постоянного по u множителя.

Следующая формула связывает функции σ и θ:

$$\sigma(u) = \Delta^{-1/8} \sqrt{\frac{\pi^g}{|\omega|}} \exp\biggl\{\frac{1}{2} u^T \eta \omega^{-1} u\biggr\} \theta[\varepsilon_R](\omega^{-1}u \,|\, \omega^{-1}\omega'), \tag{3.11}$$

где Δ – дискриминант кривой V и $\theta[\varepsilon_R]$ – тэта-функция с характеристикой (см. (1.8)) вектора римановых констант. Напомним, что дискриминант Δ кривой, заданной уравнением $f(x,y) = 0$, – это неприводимый полином от параметров λ_k, обращение которого в нуль означает, что на данной кривой имеются двойные точки, т.е. такие точки, в которых градиент функции $f(x,y)$ по (x,y) обращается в нуль.

Формула (3.11) показывает, что если, пользуясь методами теории рядов Фурье, характеризовать целую функцию ее поведением при сдвигах на периоды, то переход от σ к θ и обратно – линейное преобразование аргумента функции и умножение этой функции на экспоненту от квадратичной формы. Таким образом, теории функций σ и θ – это теории одного и того же объекта, но – в разных реализациях:

(θ) Фурье-разложение по z с использованием матрицы периодов B (см. (1.4));
(σ) степенные ряды с рациональными коэффициентами по u и λ – параметрам кривой.

Например, для функции Вейерштрасса $\sigma(u)$ кривой, заданной уравнением $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, имеет место разложение

$$\sigma(u) = u \sum_{i,j\geqslant 0} \frac{a_{i,j}}{(4i+6j+1)!}\left(\frac{g_2u^4}{2}\right)^i (2g_3u^6)^j$$

с *целыми* коэффициентами $a_{i,j}$, которые определяются из начальных условий

$$\{a_{0,0} = 1;\ a_{i,j} = 0,\ \min(i,j) < 0\}$$

с помощью рекурсии

$$a_{i,j} = 3(i+1)a_{i+1,j-1} + \frac{16}{3}(j+1)a_{i-2,j+1} - \frac{1}{3}(2i+3j-1)(4i+6j-1)a_{i-1,j}.$$

Ряд для сигма-функции рода 2 также задается линейной рекурсией [41]. Для кривой $y^2 = 4x^5 + \sum_{k=0}^{3}\lambda_k x^k$ начальный отрезок ряда σ-функции имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma(u) = u_1 - \frac{u_2^3}{3} - \left(\frac{u_1u_2^4}{48} + \frac{u_2^7}{5\,040}\right)\lambda_3 + \left(\frac{u_1^3}{24} - \frac{u_1^2u_2^3}{24} - \frac{u_1u_2^6}{360} + \frac{u_2^9}{22\,680}\right)\lambda_2 \\ + \left(-\frac{u_1^3u_2^2}{24} - \frac{u_1^2u_2^5}{120} - \frac{u_1u_2^8}{5\,040} + \frac{u_2^{11}}{99\,792}\right)\lambda_1 \\ + \left(-\frac{u_1^4u_2}{12} - \frac{u_1^3u_2^4}{72} - \frac{u_1^2u_2^7}{504} + \frac{u_1u_2^{10}}{22\,680} + \frac{u_2^{13}}{1\,389\,960}\right)\lambda_0 + \cdots .\end{aligned}$$

Теорема Римана об обращении в нуль – важное свойство, общее для σ-функций и θ-функций якобианов. Используя параметризацию (3.5) отображения Абеля, запишем следующее соотношение, вытекающее из теоремы Римана об обращении в нуль:

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{g} A(\xi_i)\right) = \frac{\det\big(A(\xi_1),\dots,A(\xi_g)\big)}{\mathrm{vand}(\xi_1,\dots,\xi_g)}\exp\{H(\xi_1,\dots,\xi_g)\},$$

где $A(\xi) = A\big(x(\xi), y(\xi)\big)$, $\mathrm{vand}(\xi_1,\dots,\xi_g)$ – определитель Вандермонда от переменных ξ_i и $H(\xi_1,\dots,\xi_g;\lambda)$ – целая функция от λ и ξ_i, симметрическая по ξ_i и такая, что $H(0,\dots,0;\lambda) = H(\xi_1,\dots,\xi_g;0) = 0$.

Еще десять лет назад основным инструментом приложения абелевых функций в задачах теории интегрируемых систем служила θ-функция. После работ [57], [58] начали развиваться методы, основанные на теории σ-функций. В настоящее время круг исследований в этом направлении уже достаточно широк (см. [41]).

3.5. Полиномы, задающие алгебраический закон сложения. Произвольный полином $\phi(x,y)$ задает на кривой V целую рациональную функцию. Нулем функции $\phi(x,y)$ на кривой V называется точка (ξ,η) такая, что

$$\{f(\xi,\eta) = 0, \phi(\xi,\eta) = 0\}.$$

Число нулей функции $\phi(x,y)$ называется ее порядком.

Дальнейшая конструкция опирается на следующий факт.

Пусть порядок целой рациональной функции $\phi(x,y)$ на кривой V равен $2g+k$, где $k \geqslant 0$. Тогда $\phi(x,y)$ полностью (с точностью до постоянного, т.е. не зависящего от (x,y), множителя) определяется любым набором из $g+k$ ее нулей.

Верно и обратное утверждение:

Любой набор из $g+k$ точек на кривой V, $k \geqslant 0$, реализуется как подмножество нулей целой рациональной функции $\phi(x,y)$ порядка $2g+k$ на кривой V, причем такая функция $\phi(x,y)$ единственна с точностью до постоянного множителя.

Этот факт следует из классической теоремы Вейерштрасса о пробелах. В частности, обычные полиномы одного переменного являются целыми рациональными функциями на кривой рода $g=0$ и полностью определяются всеми своими нулями.

Пусть X – g-я симметрическая степень кривой V, т.е. $\mathsf{X} = V^g/\Sigma_g$, где симметрическая группа Σ_g действует на прямом произведении перестановкой координат. Точка U пространства X представляет собой неупорядоченный набор g точек $(x_i,y_i) \in V$, который мы обозначим через $U = [(x_i,y_j)]$. Пусть $U' \in \mathsf{X}$, $U' = [(x_{g+i},y_{g+i})]$. Зададим целые рациональные функции $R^U_{2g}(x,y)$ и $R^{U,U'}_{3g}(x,y)$ порядков $2g$ и $3g$ по формулам

$$R^U_{2g}(x,y) = \frac{\det(m_1(x,y), m_1(x_1,y_1), \dots, m_1(x_g,y_g))}{\det((1,0,\dots,0)^t, m_1(x_1,y_1),\dots,m_1(x_g,y_g))}, \tag{3.12}$$

$$R^{U,U'}_{3g}(x,y) = \frac{\det(m_{g+1}(x,y), m_{g+1}(x_1,y_1), \dots, m_{g+1}(x_{2g},y_{2g}))}{\det((1,0,\dots,0)^t, m_{g+1}(x_1,y_1),\dots,m_{g+1}(x_{2g},y_{2g}))}, \tag{3.13}$$

где $m_k(x,y)$ – введенные в начале предыдущего пункта векторы размерности $g+k$. По построению R^U_{2g} полностью определяется заданием точки U, а $R^{U,U'}_{3g}$ полностью определяется заданием пары точек U и U'. Функции R^U_{2g} и $R^{U,U'}_{3g}$ задают закон сложения $U \star U'$ на X следующим образом: полный набор нулей целой рациональной функции на V считается эквивалентным нулю. Поэтому нулями R^U_{2g} на X являются точка U и обратная к ней точка $\overline{U}$; соответственно, нули $R^{U,U'}_{3g}$ – это точки U, U' и $\overline{U \star U'}$.

Согласно теореме Абеля, отображение Абеля $A\colon \mathsf{X} \to J(V)$, заданное формулой

$$A(U) = \sum_{i=1}^{g} A(x_i,y_i),$$

является гомоморфизмом относительно операции $\star$, т.е.

$$A(\overline{U}) = -A(U), \qquad A(U \star U') = A(U) + A(U').$$

В работе [41] показано, что полиномы $R^u_{2g}(x,y)$ и $R^{u,v}_{3g}(x,y)$ обладают представлением в виде (3.4), которое строится с помощью σ-функции, функции

$\psi(x,y;[\gamma])$ и отображения Абеля. А именно, имеют место формулы

$$R^u_{2g}(x,y) = \frac{\sigma(A((x,y);[\gamma]) - u)}{\psi(x,y;[\gamma])\,\sigma(u)}\,\frac{\sigma(A((x,y),[\gamma]) + u)}{\psi(x,y;[\gamma])\,\sigma(u)}\,,$$
$$R^{u,v}_{3g}(x,y) = \frac{\sigma(A((x,y),[\gamma]) - u)}{\psi(x,y;[\gamma])\,\sigma(u)}\,\frac{\sigma(A((x,y),[\gamma]) - v)}{\psi(x,y;[\gamma])\,\sigma(v)}\,\frac{\sigma(A((x,y),[\gamma]) + u + v)}{\psi(x,y;[\gamma])\,\sigma(u+v)}\,, \tag{3.14}$$

где u и v обозначают одновременно точки из X и их образы в $J(V)$ при отображении Абеля. Соотношения (3.14) выводятся из теоремы Римана об обращении в нуль и формул (3.10) и (3.9).

3.6. Трилинейные уравнения для σ-функций. Теперь мы готовы реализовать конструкцию из леммы 3.1. Сначала рассмотрим пример, в котором лемма 3.1 применяется непосредственно.

Пример 3.2. Пусть $g = 1$. В классической параметризации Вейерштрасса имеем $(x,y) = (\wp(\xi),\wp'(\xi))$. В этом случае можно взять $\psi(\xi) = \sigma(\xi)$. Тогда $\phi(\xi) = -\xi$ и $G_i(\xi) = \sigma(\xi)^{-(i+1)}$. Получаем на основе классических формул следующие равенства:

$$\wp(\xi) - \wp(u) = R^u_2(\wp(\xi),\wp'(\xi)) = F_2(u,\xi) = \frac{1}{\sigma(\xi)^2}\,\frac{\sigma(u+\xi)}{\sigma(u)}\,\frac{\sigma(u-\xi)}{\sigma(u)}\,,$$

где в левой части – четный ряд по ξ с постоянными по u коэффициентами при *всех четных* степенях ξ, кроме нулевой;

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \wp(\xi) & \wp'(\xi) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) \\ 1 & \wp(v)\end{vmatrix}} = R^{u,v}_3(\wp(\xi),\wp'(\xi)) = F_3(u,v,\xi)$$
$$= \frac{1}{\sigma(\xi)^3}\,\frac{\sigma(u-\xi)}{\sigma(u)}\,\frac{\sigma(v-\xi)}{\sigma(v)}\,\frac{\sigma(u+v+\xi)}{\sigma(u+v)}\,,$$

где в левой части – ряд по ξ с постоянными по u и v коэффициентами при *всех нечетных* степенях ξ. Коэффициент при ξ^{-1} равен нулю, что дает представление классического соотношения (1.21) в трилинейной форме $Q(D^2) = 0$.

Вернемся к обсуждению билинейных и трилинейных операторов, аннулирующих σ-функцию (n,s)-кривой V.

Рассмотрим топологическое линейное пространство $\mathscr{L}_{\mathscr{M}}$, топологический базис в котором образует множество мономов $\mathscr{M} = \{x^i y^j \mid i \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant j < n\}$, упорядоченное по убыванию $\deg(x^i y^j) = in + js$, и топологическое линейное пространство $\mathscr{L}_{\Xi}$, топологический базис в котором образует множество $\Xi = \{\xi^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, упорядоченное по возрастанию степени.

Локальная параметризация в окрестности базисной точки $(x,y) = (\xi^{-n}, \xi^{-s}\rho(\xi))$, где $\rho(\xi) = 1 + o(\xi)$, задает линейное непрерывное отображение $T\colon \mathscr{L}_{\mathscr{M}} \to \mathscr{L}_{\Xi}$ по формуле $T(x^i y^j) = \xi^{-(in+js)}\rho(\xi)^j$. Покажем, что это отображение – гомеоморфизм, т.е. существует непрерывное обратное отображение. Действительно, поскольку НОД$(n,s) = 1$, для $\delta \in \{0,1,\dots,n-1\}$

однозначно определены целое число $k(\delta)$ и $\ell(\delta)\in\{0,1,\dots,n-1\}$ такие, что $\delta=k(\delta)n+\ell(\delta)s$. Таким образом, для любого целого m в $\mathscr{M}$ есть один, и только один, моном $x^{i(m)}y^{j(m)}$ такой, что $i(m)n+j(m)s=m$, а именно, $i(m)=[m/n]+k(m-n[m/n])$ и $j(m)=\ell(m-n[m/n])$. Следовательно, матрица преобразования T – верхняя треугольная, с единицами на главной диагонали. Поэтому определено непрерывное обратное линейное отображение $T^{-1}\colon\mathscr{L}_\Xi\to\mathscr{L}_{\mathscr{M}}$, с нижней треугольной матрицей.

Обозначим через $\mathscr{M}_-$ (соответственно $\mathscr{M}_+$) подмножество $\mathscr{M}$, составленное из мономов, содержащих x в отрицательной (соответственно неотрицательной) степени, и обозначим через π_- (соответственно π_+) каноническую проекцию $\mathscr{L}_{\mathscr{M}}$ на $\mathscr{L}_{\mathscr{M}_-}$ (соответственно на $\mathscr{L}_{\mathscr{M}_+}$). Моном наибольшего веса в $\mathscr{M}_-$ – это $y^{n-1}x^{-1}$.

Итак, разложим правые части соотношений (3.14) в ряды по степеням локального параметра ξ, т.е. по базису Ξ. Мы получаем производящие функции

$$
\begin{aligned}
F_2(\xi)&=\frac{\exp\{\langle A(\xi),\partial_z\rangle-2G(\xi,\lambda)\}\sigma(z+u)\sigma(z-u)}{\xi^{2g}\sigma(u)^2}\bigg|_{z=0}\\
&=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\xi^iB(\mathscr{D}_i^{\mathrm{bi}}),\\
F_3(\xi)&=\frac{\exp\{\langle A(\xi),\partial_z\rangle-3G(\xi,\lambda)\}\sigma(z-u)\sigma(z-v)\sigma(z+v+u)}{\xi^{3g}\sigma(u)\sigma(v)\sigma(v+u)}\bigg|_{z=0}\\
&=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\xi^iQ(\mathscr{D}_i^{\mathrm{tri}}),
\end{aligned}
$$

где $A(\xi)=A\bigl(x(\xi),y(\xi)\bigr)$, см. (3.5), функция $G(\xi,\lambda)$ та же, что и в (3.8), и $\partial_z=(\partial_{z_1},\dots,\partial_{z_g})^t$. Функцию $F_2(\xi)$ удобно записать в виде $F_2(\xi)=\langle B(\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}),\Xi\rangle$, где $\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}=(\mathscr{D}_i^{\mathrm{bi}})^t$, $i\in\mathbb{Z}$. Применим преобразование T^{-1} и перейдем к базису $\mathscr{M}$. Получаем

$$
R^u_{2g}(x,y)=\langle B(\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}),T^{-1}\mathscr{M}\rangle=\langle (T^{-1})^tB(\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}),\mathscr{M}\rangle,
$$

откуда, поскольку $R^{(u)}_{2g}(x,y)$ – полином, следует

$$
R^{(u)}_{2g}(x,y)=\langle(\pi_+\circ T^{-1})^tB(\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}),\mathscr{M}_+\rangle,\qquad \langle(\pi_-\circ T^{-1})^tB(\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}),\mathscr{M}_-\rangle=0.
$$

Таким образом, с одной стороны, *σ-функция удовлетворяет системе билинейных уравнений* $\pi_-\circ(T^{-1})^tB(\mathscr{D}^{\mathrm{bi}})=0$ и, с другой стороны, *коэффициенты полинома* $R^{(u)}_{2g}(x,y)$ *являются значениями билинейных операторов* $\pi_+\circ(T^{-1})^tB(\mathscr{D}^{\mathrm{bi}})$.

Представив $F_3(\xi)$ в виде $F_3(\xi)=\langle Q(\mathscr{D}^{\mathrm{tri}}),\Xi\rangle$, где $\mathscr{D}^{\mathrm{tri}}=(\mathscr{D}_i^{\mathrm{tri}})^t$, $i\in\mathbb{Z}$, и выполнив переход к базису $\mathscr{M}$, мы получим, с одной стороны, *систему трилинейных уравнений* $\pi_-\circ(T^{-1})^tQ(\mathscr{D}^{\mathrm{tri}})=0$, *решением которой является σ-функция*, и, с другой стороны, *набор трилинейных операторов* $\pi_+\circ(T^{-1})^tQ(\mathscr{D}^{\mathrm{tri}})$, *значениями которых определяются коэффициенты полинома* $R^{(u,v)}_{3g}(x,y)$.

В [41] намеченная программа выполнена полностью для семейств гиперэллиптических кривых, т.е. при $(n,s)=(2,2g+1)$. Приведем полученный в [41] список трилинейных уравнений на гиперэллиптическую σ-функцию. Для кривой

$$
V=\biggl\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid y^2=x^{2g+1}+\sum_{i=2}^{2g+1}\lambda_{2i}x^{2g-i+1}\biggr\}
$$

нетрудно записать производящую функцию операторов $\mathscr{D}_s^{\mathrm{tri}}$ в явном виде (далее речь пойдет только о трилинейных операторах, поэтому значок $^{\mathrm{tri}}$, указывающий на "трилинейность", мы опустим). Имеем

$$\sum_{s\geqslant 0}\xi^s\mathscr{D}_s=\exp\Bigg\{\sum_{q=0}^{g-1}\int_0^{\xi}\Bigg(-D_{q+1} + \sum_{p=q+1}^{2g-q}3(p-q)\,\lambda_{2(p+q+1)}\int_0^{\xi'}\frac{(\xi'')^{2p}\,d\xi''}{\rho(\xi'')}\Bigg)\frac{(\xi')^{2q}\,d\xi'}{\rho(\xi')}\Bigg\},$$

где $\rho^2=1+\Lambda(\xi^2)$ и $\Lambda(t)=\lambda_4t^2+\lambda_6t^3+\dots+\lambda_{4g+2}t^{2g+1}$. В частности,

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}_0=1,\\
&\mathscr{D}_1=-D_1,\\
&\mathscr{D}_2=\frac{1}{2}D_1^2,\\
&\mathscr{D}_3=-\frac{1}{6}(D_1^3+2D_2),\\
&\mathscr{D}_4=\frac{1}{24}(D_1^4+8D_2D_1+6\lambda_4),\\
&\mathscr{D}_5=-\frac{1}{120}(D_1^5+20D_2D_1^2+24D_3+18\lambda_4D_1),\\
&\mathscr{D}_6=\frac{1}{720}(D_1^6+40D_2D_1^3+144D_3D_1+40D_3^2+18\lambda_4D_1^2+144\lambda_6)\quad\text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Для операторов $\mathscr{D}_s$ и полиномов $p_{2q}(\lambda)$, заданных производящей функцией

$$\sum_{s\geqslant 0}p_{2s}(\lambda)x^{-s}=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\Lambda(x^{-1})^k\right),$$

имеют место следующие уравнения, которым удовлетворяет гиперэллиптическая σ-функция рода g:

(а) при $g=2k$

$$\begin{aligned}
Q\Bigg(\sum_{q=0}^{s}p_{2q}(\lambda)\mathscr{D}_{2(s-q)+1}\Bigg)&=0, &\qquad s&\geqslant k;\\
Q(\mathscr{D}_{2s})&=0, &\qquad s&\geqslant 3k+1;
\end{aligned}$$

(б) при $g=2k+1$

$$\begin{aligned}
Q(\mathscr{D}_{2s+1})&=0, &\qquad s&\geqslant 3k+2;\\
Q\Bigg(\sum_{q=0}^{s}p_{2q}(\lambda)\mathscr{D}_{2(s-q)}\Bigg)&=0, &\qquad s&\geqslant k+1.
\end{aligned}$$

Приведем операторы наименьшего веса, для которых гиперэллиптическая σ-функция удовлетворяет уравнению $Q(\mathscr{D})=0$, для малых значений g:

$$
\begin{aligned}
&g=1, \quad \mathscr{D}=D_1^2;\\
&g=2, \quad \mathscr{D}=D_1^3+2D_2;\\
&g=3, \quad \mathscr{D}=D_1^4+8D_2D_1-6\lambda_4;\\
&g=4, \quad \mathscr{D}=D_1^5+20D_2D_1^2+24D_3-42\lambda_4D_1;\\
&g=5, \quad \mathscr{D}=D_1^6+40D_2D_1^3+144D_3D_1+40D_2^2-162\lambda_4D_1^2-216\lambda_6.
\end{aligned}
$$

Зафиксируем разложение функции $R_{3g}^{(u,v)}(x,y)$ по мономам из множества $\mathscr{M}_+$ в виде

$$
R_{3g}^{(u,v)}(x,y)=y^1\biggl(\sum_{i=0}^{[g+1/2]}h_{g+1-2i}x^i\biggr)+y^0\biggl(\sum_{i=0}^{[3g/2]}h_{3g-2i}x^i\biggr).
$$

Тогда коэффициенты $h_i(u,v)$, где $i\in\{0,1,\dots,g-1,g,g+2,\dots,3g-2,3g\}$, имеют следующий вид:

(а) при $g=2k$

$$
\begin{aligned}
h_{2s+1}(u,v)&=Q\biggl(\sum_{q=0}^{s}p_{2q}(\lambda)\mathscr{D}_{2(s-q)+1}\biggr), &\qquad 0\leqslant s<k;\\
h_{2s}(u,v)&=Q(\mathscr{D}_{2s}), &\qquad 0\leqslant s<3k+1;
\end{aligned}
$$

(б) при $g=2k+1$

$$
\begin{aligned}
h_{2s+1}(u,v)&=Q(\mathscr{D}_{2s+1}), &\qquad 0\leqslant s<3k+2;\\
h_{2s}(u,v)&=Q\biggl(\sum_{q=0}^{s}p_{2q}(\lambda)\mathscr{D}_{2(s-q)}\biggr), &\qquad 0\leqslant s<k+1.
\end{aligned}
$$

Разложение функции $R_{2g}^{(u)}$ по мономам из множества $\mathscr{M}_+$ в гиперэллиптическом случае имеет очень простой вид:

$$
R_{2g}^{(u)}(x,y)=\sum_{i=0}^{g}b_{2(g-i)}(u)x^i.
$$

Коэффициенты $b_i(u)$, $i\in\{0,2,\dots,2g\}$, выражаются через билинейные операторы $\mathscr{B}_i$, порожденные производящей функцией

$$
\sum_{s\geqslant 0}\xi^s\mathscr{B}_s=\exp\biggl\{\sum_{q=0}^{g-1}\int_0^{\xi}\biggl(-D_{q+1}
+\sum_{p=q+1}^{2g-q}2(p-q)\,\lambda_{2(p+q+1)}\int_0^{\xi'}\frac{(\xi'')^{2p}d\xi''}{\rho(\xi'')}\biggr)\frac{(\xi')^{2q}\,d\xi'}{\rho(\xi')}\biggr\},
$$

следующим образом:

$$
b_{2s}(u)=B(\mathscr{B}_{2s}), \qquad 0\leqslant s\leqslant g.
$$

Операторы нечетных порядков $\mathscr{B}_{2s+1}$ тождественно равны нулю для всех $s > 0$. Гиперэллиптическая σ-функция рода g удовлетворяет системе билинейных уравнений $\{B(\mathscr{B}_{2s}) = 0 \mid i > g\}$.

Замечание 3.1. Операторы $\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}_{2s+1}$ при $s > 0$ тождественно равны нулю для всех кривых. Поэтому и в общем случае σ-функция рода g удовлетворяет системе билинейных уравнений $\{B(\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}_{2s}) = 0 \mid s > g\}$. Кроме того, для коэффициентов $\{b_i(u)\}$ разложения функции $R^{(u)}_{2g}(x,y)$ по $\mathscr{M}_+$ индекс i, указывающий значение градуировки коэффициента, принимает значения в множестве $I = \{0, w_1+1, \dots, w_g+1\}$, где w_i – элементы последовательности Вейерштрасса. Из соображений, связанных с решением задачи обращения Якоби в терминах σ-функции, следует, что

$$b_0(u) = 1 \quad \text{и} \quad b_{w_i+1}(u) = -\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_i} \log \sigma(u) = \frac{1}{2} B(D_1 D_i), \quad 0 < i \leqslant g.$$

Следовательно, систему билинейных уравнений $\{B(\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}_{2s}) = 0 \mid s > g\}$ порядка $> 2g$ можно дополнить билинейными уравнениями порядка $< 2g$ на σ-функцию

$$\{B(2\mathscr{D}^{\mathrm{bi}}_{2s} - D_1 D_s) = 0 \mid 0 < s \leqslant g\}.$$

В общем случае для выполнения вычислений в явном виде необходимо найти разложения в ряды в окрестности бесконечно удаленной точки на V для отображения Абеля (3.5) и для логарифма функции $\psi(x,y;[\gamma])$, см. (3.8), а также найти матрицу перехода T. Из соображений градуировки мы приходим к следующему результату (см. [40], [41]).

Теорема 3.2. *Рассмотрим плоскую кривую*

$$V = \biggl\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^n - x^s - \sum_{(n-j)(s-i) > ij} \lambda_{(n-j)(s-i)-ij} x^i y^j = 0\biggr\},$$

где НОД$\,(n,s) = 1$.

Линейный дифференциальный оператор $\mathscr{D}$ наименьшего порядка, для которого решением трилинейного функционального уравнения $Q(\mathscr{D}) = 0$ является σ-функция, ассоциированная с V, имеет порядок $g+1$ по переменной u_1. Этот оператор однороден, $\deg \mathscr{D} = g+1$ относительно градуировки $\deg x = n$, $\deg y = s$, $\deg \lambda_k = k$.

3.7. Трилинейный аналог слабой формы теоремы сложения. Рассмотрим функциональное уравнение следующего вида:

$$f_1(u+z) f_2(v+z) f_3(u+v-z) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(u,v) \psi_k(z), \tag{3.15}$$

где для данного N искомыми являются все функции: f_i, φ_j, ψ_j, $i = 1,2,3$, $j = 1, \dots, N$.

Имеет место следующий общий результат.

Лемма 3.2. *Пусть набор гладких функций f_i, φ_j, ψ_j, $i = 1,2,3$, $j = 1, \dots, N$, дает решение уравнения* (3.15). *Тогда для любого набора I, $\#I > N$, попарно различных мультииндексов существует нетривиальный линейный оператор $\mathscr{D} = \sum_{\omega \in I} \alpha_\omega D^\omega$ такой, что функции f_1, f_2 и f_3 являются решением уравнения $Q(\mathscr{D}) = 0$.*

Из этой леммы непосредственно вытекает

Следствие 3.1. *Тэта-функции g-мерных абелевых многообразий всегда обладают трилинейными теоремами сложения.*

Доказательство. Действительно, $\theta(u+z)\theta(v+z)\theta(u+v-z)$ как функция $z \in \mathbb{C}^g$ является целой квазипериодической функцией порядка три. Как известно, такие функции образуют линейное пространство размерности $N = 3^g$. Выбрав в этом пространстве базис $(\psi_1(z), \dots, \psi_{3^g}(z))$, мы получим решение функционального уравнения (3.15) в θ-функциях.

§ 4. Непрерывный базис Кричевера–Новикова

Специальный вырожденный случай функции Бейкера–Ахиезера, см. п. 2.4, – базисная КН-функция с параметром $u \in \mathbb{C}^g$, реализуется в терминах σ-функции в виде

$$\Psi\bigl(u,(x,y)\bigr) = \frac{\sigma(A(x,y;[\gamma]) - u)}{\psi(x,y;[\gamma])\,\sigma(u)} \exp\bigl\{-\langle A^*(x,y;[\gamma]), u\rangle\bigr\}, \tag{4.1}$$

где $\psi(x,y;[\gamma])$ – функция, заданная формулой (3.6) и $A^*(x,y;[\gamma])$, как и выше, – вектор базисных абелевых интегралов второго рода с полюсами в базисной точке $\infty \in V$. Функция Ψ является однозначной на $\mathbb{C}^g \times V$. Как функция на V она имеет g нулей $A^{-1}(u) \in \mathsf{X}$ и единственную существенно особую точку $\infty \in V$, в которой ведет себя так: $\Psi \sim \xi^{-g}\exp\{p(\xi^{-1})\}(1+O(\xi))$, где p – полином степени не выше $2g-1$. Например, в гиперэллиптическом случае в этой особой точке имеет место следующее разложение по локальному параметру ξ:

$$\Psi\bigl(u,(x(\xi),y(\xi))\bigr) = \xi^{-g}\exp\left\{-\rho(\xi)\left(\sum_{i=1}^{g} u_i\xi^{-2i+1}\right)\right\}\bigl(1+O(\xi)\bigr), \tag{4.2}$$

где $\rho(\xi)^2 = 1 + \sum_{i>1}\lambda_{2i}\xi^{2i}$. Таким образом (см. п. 2.4), функция Ψ представляет собой вырождение функции Бейкера–Ахиезера, соответствующее слиянию существенно особой точки и g полюсов в базисной точке $\infty \in V$. Эти свойства функции Ψ делают ее чрезвычайно удобным инструментом.

Напомним, см. п. 2.4, что существует единственный линейный оператор

$$\mathscr{L} = \sum_{i=0}^{g} a_i(u,v)\partial_{v_1}^i$$

такой, что имеет место тождество

$$\Psi\bigl(u,(x,y)\bigr)\Psi\bigl(v,(x,y)\bigr) = \mathscr{L}\Psi\bigl(u+v,(x,y)\bigr).$$

В этом параграфе мы опишем применение техники трилинейных и билинейных операторов из § 3 к задаче вычисления коэффициентов оператора $\mathscr{L}$. Основой для этого служит трилинейная сильная форма теоремы сложения.

4.1. Трилинейная сильная форма теоремы сложения. Пусть $k > 1$ и $R_{kg}^{(t_1,\dots,t_{k-1})}(x, y)$ – целая рациональная функция порядка kg на V, имеющая $k-1$ заданных нулей в точках $A^{-1}(t_i) \in \mathsf{X}$, $i = 1,\dots,k-1$ (ср. случаи $k = 2,3$ в предыдущем параграфе). Тогда с помощью функции Ψ мы получаем факторизацию

$$R_{kg}^{(t_1,\dots,t_{k-1})}(x,y) = \left(\prod_{i=1}^{k} \Psi\big(t_i,(x,y)\big)\right)\Bigg|_{t_k=-\sum\limits_{j=1}^{k-1} t_j}. \tag{4.3}$$

Из (4.3) непосредственно вытекает следующий результат, который связывает умножение в непрерывном КН-базисе с алгебраическим законом сложения на X (см. п. 3.5).

Лемма 4.1. *Имеет место тождество*

$$\Psi\big(u,(x,y)\big)\Psi\big(v,(x,y)\big) = \frac{R_{3g}^{(u,v)}(x,y)}{R_{2g}^{(u+v)}(x,y)}\,\Psi\big(u+v,(x,y)\big), \qquad u,v \in \mathbb{C}^g.$$

Введем семейство функций на V с параметром $w \in \mathbb{C}^g$

$$G_k^{(w)}(x,y) = \frac{\partial_{w_1}^k \Psi(w,(x,y))}{\Psi(w,(x,y))}, \qquad k = 0,1,2,\dots .$$

Функция $G_k^{(w)}(x,y)$ – рациональная функция на V с $g+k$ полюсами $\{k\,\infty, A^{-1}(w)\}$. Коэффициенты функции $G_k^{(w)}(x,y)$ являются абелевыми функциями на якобиане кривой V. По определению имеем

$$G_0^{(w)}(x,y) = 1, \quad G_1^{(w)}(x,y) = -\big(\zeta_1(A(x,y;[\gamma]) - w) + \zeta_1(w) + \langle A^*(x,y;[\gamma]), \mathsf{e}_1\rangle\big).$$

Обратим внимание, что формула для $G_1^{(w)}(x,y)$ задает абелеву функцию от w и однозначную функцию от (x,y), т.е. функцию, не зависящую от контура γ, потому что для отображений A и A^* взят один и тот же контур.

Для $k > 0$ из определения вытекает рекуррентная формула

$$G_{k+1}^{(w)}(x,y) = \big(\partial_{w_1} + G_1^{(w)}(x,y)\big)\,G_k^{(w)}(x,y), \tag{4.4}$$

из которой следует явное выражение

$$G_k^{(w)}(x,y) = (\partial_{w_1} + G_1^{(w)}(x,y))^k\,1, \qquad k = 0,1,\dots,g.$$

По теореме Римана–Роха набор функций $\{G_0^{(w)}(x,y),\dots,G_\ell^{(w)}(x,y)\}$ является базисом линейного пространства функций, у которых множества полюсов с учетом кратностей являются подмножеством $\{\ell\,\infty, A^{-1}(w)\}$.

Поскольку коэффициенты полиномов $R_{2g}^{(u)}(x,y)$ и $R_{3g}^{(u,v)}(x,y)$ получены в виде билинейных и трилинейных операторов, мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Коэффициенты линейного оператора*

$$\mathscr{L} = \sum_{i=0}^{g} a_i(u,v)\partial_{v_1}^i,$$

определяемого уравнением (*ср.* (1.35))

$$\Psi\big(u,(x,y)\big)\Psi\big(v,(x,y)\big) = \mathscr{L}\Psi\big(u+v,(x,y)\big),$$

связаны с билинейными и трилинейными операторами следующей формулой:

$$R_{3g}^{(u,v)}(x,y) = \sum_{k=0}^{g} a_k(u,v) S_k^{(u+v)}(x,y), \tag{4.5}$$

где

$$S_k^{(w)}(x,y) = \Psi(-w,(x,y))\partial_{w_1}^k \Psi(w,(x,y)) = R_{2g}^{(w)}(x,y) G_k^{(w)}(x,y). \tag{4.6}$$

Формула (4.5) представляет собой *трилинейную сильную форму теоремы сложения*.

Замечание 4.1. Согласно формуле (4.6), функции $S_k^{(w)}(x,y)$, $k=0,1,2,\dots$, являются целыми рациональными функциями на V и, кроме того, все они обращаются в нуль в $A^{-1}(-u-v) \in \mathsf{X}$. Таким образом, так как $R_{3g}^{(u,v)}(x,y)$ также обращается в нуль в $A^{-1}(-u-v) \in \mathsf{X}$, среди $(2g+1)$ уравнений, вытекающих из (4.5), имеется ровно g уравнений, имеющих простой геометрический смысл – они выражают тот факт, что *правая и левая часть* (4.5) *обращаются в нуль одновременно и независимо от значений коэффициентов* $a_i(u,v)$, *когда* $(x,y) \in A^{-1}(-u-v)$. Поэтому в конструкции теоремы 4.1 для определения значений $(g+1)$ коэффициентов $a_i(u,v)$ существенно только $g+1$ уравнение, а оставшиеся g уравнений – это *уравнения совместности*.

Обратим внимание на аналогию между функцией $S_k^{(w)}(x,y)$, заданной формулой (4.6), и обычным символом дифференциального оператора $\partial_{w_1}^k$, который определяется формулой $\operatorname{symb}(\partial_{w_1}^k) = e^{-w_1 x}\partial_{w_1}^k e^{w_1 x}$. Уместно назвать функцию $S_k^{(w)}(x,y)$ *символом оператора* $\partial_{w_1}^k$ *на кривой* V. Это определение, очевидно, распространяется на произвольный линейный оператор L по формуле $\operatorname{symb}_V L = \Psi(-w,(x,y))L\Psi(w,(x,y))$. Таким образом, трилинейная сильная форма теоремы сложения (4.5) выражает тот факт, что *символ оператора* $\mathscr{L}$ *на кривой* V *равен* $R_{3g}^{(u,v)}(x,y)$.

Если задана модель кривой V, можно получить явные формулы для $G_k^{(w)}(x,y)$ в виде рациональных функций по x и y. В следующем пункте мы дадим приложение трилинейной сильной формы теоремы сложения в гиперэллиптическом случае. Этот случай полезно рассмотреть отдельно, так как он дает возможность продемонстрировать основные этапы приложения этой теоремы, не затемненные техническими деталями общего случая.

4.2. Гиперэллиптический случай. Положим

$$\wp_{i_1,\dots,i_k}(w) = -\frac{\partial}{\partial w_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial w_{i_k}} \log\sigma(w).$$

В гиперэллиптическом случае формула (3.12) принимает вид

$$R_{2g}^{(w)}(x,y) = x^g - \sum_{i=0}^{g-1} \wp_{1,g-i}(w) x^i. \tag{4.7}$$

Из формулы (3.13) следует разложение

$$R_{3g}^{(u,v)}(x,y) = yr_1(x) + x^g r_2(x) + r_3(x),$$

где

$$r_1(x) = \sum_{i=0}^{l} h_{g-2i-1}(u,v)x^i,$$
$$r_2(x) = \sum_{i=0}^{g-l-1} h_{g-2i}(u,v)x^i,$$
$$r_3(x) = \sum_{i=0}^{g-1} h_{3g-2i}(u,v)x^i,$$

здесь $l = \left[\frac{g-1}{2}\right]$ и $h_0 = 1$.

Имеют место формулы

$$G_1^{(w)}(x,y) = \frac{1}{2}\,\frac{2y + \sum_{i=0}^{g-1} \wp_{1,1,g-i}(w)x^i}{x^g - \sum_{i=0}^{g-1} \wp_{1,g-i}(w)x^i}\,, \quad G_2^{(w)}(x,y) = x + 2\wp_{1,1}(w).$$

Положим

$$G_k^{(w)}(x,y) = C_k^{(w)}(x,y) + B_k^{(w)}(x,y)G_1^{(w)}(x,y). \tag{4.8}$$

Общая рекуррентная формула (4.4) приводит к такой рекурсии для коэффициентов $C_k^{(w)}(x,y)$ и $B_k^{(w)}(x,y)$:

$$\begin{gathered} C_{k+1}^{(w)}(x,y) = \partial_{w_1} C_k^{(w)}(x,y) + G_2^{(w)}(x,y)B_k^{(w)}(x,y), \\ B_{k+1}(w) = \partial_{w_1} B_k^{(w)}(x,y) + C_k^{(w)}(x,y) \end{gathered} \tag{4.9}$$

с начальными данными $(C_0^{(w)}(x,y), B_0^{(w)}(x,y)) = (1,0)$. Поскольку $G_2^{(w)}(x,y) = x + 2\wp_{1,1}(w)$ – линейная функция от x, из этой рекурсии следует, что $C_k^{(w)}(x,y)$ и $B_k^{(w)}(x,y)$ являются полиномами от x.

Опишем теперь полиномы $S_k^{(w)}(x,y) = R_{2g}^{(w)}(x,y)G_k^{(w)}(x,y)$. Имеем:

$$S_0^{(w)}(x,y) = R_{2g}^{(w)}(x,y) = x^g - \sum_{i=0}^{g-1} \wp_{1,g-i}(w)x^i,$$
$$S_1^{(w)}(x,y) = y + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{g-1} \wp_{1,1,g-i}(w)x^i.$$

Используя рекурсию (4.8), получаем, что полиномы $S_k^{(w)}(x,y)$ для $k > 1$ задаются рекуррентной формулой

$$S_k^{(w)}(x,y) = C_k(w)S_0^{(w)}(x,y) + B_k(w)S_1^{(w)}(x,y),$$

где $C_k(w)$ и $B_k(w)$ задаются рекурсией (4.9).

Таким образом, мы получили эффективные формулы для всех $S_k^{(w)}(x,y)$. Из этих формул следует, что

$$S_{2s}^{(w)}(x,y) = x^{g+s} + \widetilde{S}_{2s}^{(w)}(x,y) \quad \text{и} \quad S_{2s+1}^{(w)}(x,y) = yx^s + \widetilde{S}_{2s+1}^{(w)}(x,y),$$

где полином $\widetilde{S}_k^{(w)}(x,y)$ составлен из мономов $x^iy^j \in \mathscr{M}$, имеющих градуировку, меньшую, чем $2g+k$, с коэффициентами, зависящими только от w.

Суммируя предыдущие выкладки, мы получаем, что в гиперэллиптическом случае формула (4.5) принимает следующий вид:

$$y\biggl(\sum_{i=0}^{l}(h_{g-2i-1}-a_{2i+1})x^i\biggr) + x^g\biggl(\sum_{i=0}^{g-l-1}(h_{g-2i}-a_{2i})x^i\biggr) + \sum_{i=0}^{g-1}h_{3g-2i}x^i = \sum_{k=0}^{g}a_k(u,v)\widetilde{S}_k^{(u+v)}(x,y). \tag{4.10}$$

Формула (4.10) соответствует системе из $(2g+1)$ уравнений, получаемых приравниванием коэффициентов при мономах

$$1, x, \dots, x^{2g-1-l}, y, yx, \dots, yx^l,$$

где $l = \bigl[\frac{g-1}{2}\bigr]$, у полиномов левой и правой частей этой формулы.

Заметим, что $(g+1)$ уравнений, соответствующих мономам

$$x^g, \dots, x^{2g-1-l}, y, yx, \dots, yx^l,$$

задают $a_k(u,v)$ в виде функций от $h_i(u,v)$, а оставшиеся g уравнений, соответствующие мономам $1, x, \dots, x^{g-1}$, задают соотношения между h_i, представляющие собой уравнения совместности в виде трилинейных функциональных уравнений на гиперэллиптическую σ-функцию $\sigma(u)$.

Пример 4.1 $(g=1,\ l=0)$. В этом примере

$$L = a_0(u,v) + a_1(u,v)\partial_{w_1},$$
$$S_0^{(w)}(x,y) = x - \wp_{1,1}(w),$$
$$S_1^{(w)}(x,y) = y + \frac{1}{2}\,\wp_{1,1,1}(w).$$

Получаем формулу

$$y(h_0-a_1) + x(h_1-a_0) + h_3 = -a_0(u,v)\wp_{1,1}(u+v) + \frac{1}{2}\,a_1(u,v)\wp_{1,1,1}(u+v).$$

Следовательно,

$$a_1 = h_0 = 1, \qquad a_0 = h_1,$$
$$h_3 = -a_0(u,v)\wp_{1,1}(u+v) + \frac{1}{2}\,\wp_{1,1,1}(u+v),$$
$$h_3 + h_1\wp_{1,1}(u+v) = \frac{1}{2}\,\wp_{1,1,1}(u+v).$$

Пользуясь результатами работы [41], приведенными в предыдущем параграфе, получаем из первых двух равенств (ср. [39])

$$a_1 = Q(1) = 1, \quad a_0(u,v) = Q(-D_1) = \zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v),$$

где $\zeta = (\log\sigma)'$ – функция Вейерштрасса. Третье равенство приводит к условию совместности:

$$Q(D_1^3) + \wp(u+v)Q(6D_1) + 3\wp'(u+v) = 0,$$

которое в развернутой форме имеет вид тождества

$$\begin{aligned}(\zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v))\bigl\{(\zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v))^2 + 3(\wp(u+v) - \wp(u) - \wp(v))\bigr\}\\ + 2\wp'(u+v) + \wp'(u) + \wp'(v) = 0,\end{aligned}$$

легко проверяемого в этом классическом случае с помощью известных теорем сложения для эллиптических функций.

Рекурсия (4.9) дает:

$$\begin{aligned}\{B_k^{(u+v)}(x,y)\} &= \{0, 1, 0, G_2, \dots\},\\ \{C_k^{(u+v)}(x,y)\} &= \{1, 0, G_2, \partial_{w_1}G_2, \dots\}.\end{aligned}$$

Пример 4.2 $(g=2,\ l=0)$. В этом примере

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= a_0(u,v) + a_1(u,v)\partial_{w_1} + a_2(u,v)\partial_{w_1}^2,\\ S_0^{(w)}(x,y) &= x^2 - \wp_{1,1}(w)x - \wp_{1,2}(w),\\ S_1^{(w)}(x,y) &= y + \frac{1}{2}\,(\wp_{1,1,1}(w)x + \wp_{1,1,2}(w)),\\ S_2^{(w)}(x,y) &= C_2(w)S_0^{(w)}(x,y) + B_2(w)S_1^{(w)}(x,y) = (x + 2\wp_{1,1}(w))S_0^{(w)}(x,y).\end{aligned}$$

В этом случае

$$R_6^{(u,v)}(x,y) = h_0(u,v)x^3 + h_1(u,v)y + h_2(u,v)x^2 + h_4(u,v)x^2 + h_6(u,v).$$

Коэффициенты $h_k(u,v)$, $k\in\{0,1,2,4,6\}$, функции $R_6^{(u,v)}(x,y)$, согласно изложенной в предыдущем параграфе конструкции, имеют вид $Q(\mathscr{D})$ для соответствующих им линейных дифференциальных операторов $\mathscr{D}$. А именно,

$$\begin{aligned}h_0(u,v) = Q(1) = 1, \quad h_1(u,v) &= -Q(D_1), \quad h_2(u,v) = \frac{1}{2}Q(D_1^2),\\ h_4(u,v) &= \frac{1}{24}Q(D_1^4 + 8D_2D_1 + 6\lambda_4),\\ h_6(u,v) &= \frac{1}{720}Q(D_1^6 + 40D_2D_1^3 + 18\lambda_4D_1^2 + 144\lambda_6).\end{aligned}$$

Выполним вычисления согласно (4.5).

Уравнения, соответствующие мономам x^2, x^3, y, дают

$$a_2(u,v) = 1, \quad a_1(u,v) = h_1(u,v), \quad a_0(u,v) = h_2(u,v) - \wp_{1,1}(u+v).$$

Итак, окончательно получаем, что при $g = 2$ оператор $\mathscr{L}$ задается следующими коэффициентами:

$$a_2(u,v) = 1,$$
$$a_1(u,v) = \zeta_1(u+v) - \zeta_1(u) - \zeta_1(v),$$
$$a_0(u,v) = \frac{1}{2}\bigl\{\bigl(\zeta_1(u+v) - \zeta_1(u), -\zeta_1(v)\bigr)^2 - 3\wp_{1,1}(u+v) - \wp_{1,1}(u) - \wp_{1,1}(v)\bigr\},$$

где $\zeta_1(w) = \partial_{w_1}\sigma(w)$.

Соотношения между $\{h_i\}$ – условия совместности – задаются уравнениями, соответствующими мономам x и 1:

$$h_4(u,v) + h_2(u,v)\wp_{1,1}(u+v) - h_1(u,v)\wp_{1,1,1}(u+v) + \wp_{1,1}^2(u+v) + \wp_{1,2}(u+v) = 0,$$
$$h_6(u,v) + h_2(u,v)\wp_{1,2}(u+v) - h_1(u,v)\wp_{1,1,2}(u+v) + \wp_{1,1}(u+v)\wp_{1,2}(u+v) = 0,$$

и, как легко проверить непосредственно, выполнение этих уравнений обеспечивает, как мы указывали выше (см. замечание 4.1), одновременное обращение в нуль правой и левой частей (4.5), когда точка (x,y) является совместным нулем функций $S_0^{(u+v)}(x,y)$ и $S_1^{(u+v)}(x,y)$.

В общем случае вычисления вполне аналогичны проведенным в примерах. Отметим, что для (n,s)-кривой при $n > 2$ функция $\Psi(w,(x,y))$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению вида

$$\biggl\{\partial_{w_1}^n - \sum_{i=0}^{n-1} b_i(w)\partial_{w_1}^i\biggr\}\Psi(w,(x,y)) = x\Psi(w,(x,y)). \tag{4.11}$$

Приведем соответствующие аналоги рекурсии (4.9) и формулы (4.8) для вычисления функций $G_k^{(w)}(x,y)$. Положим

$$G_k^{(w)}(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} C_{j,k}^{(w)}(x,y)G_j^{(w)}(x,y), \tag{4.12}$$

тогда из общей рекуррентной формулы (4.4) и формулы (4.11) следует рекурсия

$$\begin{gathered} C_{0,k+1}^{(w)}(x,y) = \partial_{w_1}C_{0,k}^{(w)}(x,y) + \bigl(x + b_0(w)\bigr)C_{n-1,k}^{(w)}(x,y), \\ C_{i,k+1}(w)(x,y) = \partial_{w_1}C_{i,k}^{(w)}(x,y) + C_{i-1,k}^{(w)}(x,y) + b_i(w), \quad i = 1,\dots,n-1, \end{gathered} \tag{4.13}$$

с начальными данными $(C_{0,0}^{(w)}(x,y), C_{1,0}^{(w)}(x,y), \dots, C_{n-1,0}^{(w)}(x,y)) = (1,0,\dots,0)$. Рекурсия (4.13), аналогично рекурсии (4.9), порождает полиномы $C_{i,k}^{(w)}(x,y)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, только от переменной x. Таким образом, в этом случае для явного вычисления коэффициентов оператора $\mathscr{L}$ на основе теоремы 4.1 необходимо знать, помимо функций $R_{2g}^{(u)}(x,y)$ и $R_{3g}^{(u,v)}(x,y)$, также и явный вид функций $G_i^{(w)}(x,y)$ и $b_i(w)$ для $0 \leqslant i < n$.

4.3. Алгебры, ассоциированные с непрерывными базисами Кричевера–Новикова. Запишем соотношение (4.6) в виде

$$\Psi(u,P)\Psi(v,P) = \mathscr{L}\Psi(u+v,P) = \sum_{k=0}^{g} a_k(u,v)\partial^k\Psi(u+v,P), \tag{4.14}$$

где $P=(x,y)\in V$ и $\partial=\partial/\partial v_1$. Без ограничения общности можно считать, что $a_g(u,v)=1$.

Для фиксированной точки P положим

$$\Psi(u,P)=\Psi_{(0,u)} \quad \text{и} \quad \Psi_{(k,u)}=\partial^k\Psi_{(0,u)}. \tag{4.15}$$

Как видно из полученных формул для $a_k(u,v)$, коэффициенты оператора $\mathscr{L}$ представляют собой результат подстановки $w=u+v$ в соответствующие функции $\widehat{a}_k(u,v,w)$. Далее будет удобно подчеркнуть это, записав

$$a_k(u,v)=C_{(0,u),(0,v)}^{(k,u+v)}. \tag{4.16}$$

Тогда (4.14) примет вид

$$\Psi_{(0,u)}\Psi_{(0,v)}=\sum_{k=0}^{g}C_{(0,u),(0,v)}^{(k,u+v)}\Psi_{(k,u+v)}. \tag{4.17}$$

Применяя оператор $\partial_{u_1}^i\partial_{v_1}^j$ к (4.17), мы получаем формулу

$$\Psi_{(i,u)}\Psi_{(j,v)}=\sum_{k=0}^{g+i+j}C_{(i,u),(j,v)}^{(k,u+v)}\Psi_{(k,u+v)}, \tag{4.18}$$

где $C_{(i,u),(j,v)}^{(k,u+v)}$, ввиду линейной независимости функций $\Psi_{(k,u)}$, $k=0,1,2,\ldots$, однозначно определены набором функций $a_k(u,v)$ и их частных производных по u_1 и v_1.

Имеют место рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned}
&C_{(i+1,u),(j,v)}^{(0,u+v)}=\partial_{u_1}C_{(i,u),(j,v)}^{(0,u+v)};\\
&C_{(i+1,u),(j,v)}^{(k,u+v)}=\partial_{u_1}C_{(i,u),(j,v)}^{(k,u+v)}+C_{(i,u),(j,v)}^{(k-1,u+v)}, \quad k=1,2,\ldots;\\
&C_{(i,u),(j+1,v)}^{(0,u+v)}=\partial_{v_1}C_{(i,u),(j,v)}^{(0,u+v)};\\
&C_{(i,u),(j+1,v)}^{(k,u+v)}=\partial_{v_1}C_{(i,u),(j,v)}^{(k,u+v)}+C_{(i,u),(j,v)}^{(k-1,u+v)}, \quad k=1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

Заметим, что $C_{(i,u),(j,v)}^{(g+i+j,u+v)}=1$ для всех $i\geqslant 0$, $j\geqslant 0$. Таким образом, (4.18) описывает закон умножения в непрерывном КН-базисе коммутативной ассоциативной алгебры над полем мероморфных функций на якобиане кривой V. Это и есть *алгебра, ассоциированная с непрерывным КН-базисом на кривой* V.

Уравнения ассоциативности умножения в этой алгебре представляют собой систему функциональных уравнений

$$\sum_{\ell=0}^{Q_1(m)}C_{(j,v),(k,w)}^{(\ell,v+w)}C_{(i,u),(\ell,v+w)}^{(m,u+v+w)}=\sum_{\ell=0}^{Q_2(m)}C_{(i,u),(j,v)}^{(\ell,u+v)}C_{(\ell,u+v),(k,w)}^{(m,u+v+w)}, \quad 0\leqslant m\leqslant Q, \tag{4.19}$$

где $Q=2g+i+j+k$, $Q_1(m)=\min(Q-m,g+j+k)$ и $Q_2(m)=\min(Q-m,g+i+j)$, и следовательно, систему функционально-дифференциальных уравнений на функции $a_k(u,v)$.

Согласно работе [59], эта система, в обозначениях

$$L^w_{u,v} = \mathscr{L} = \sum_{k=1}^{g} a_k(u,v)\partial^k_{w_1},$$

эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$L^v_{u,v}L^v_{u+v,w} - L^v_{v,w}L^v_{u,v+w} = 0. \tag{4.20}$$

Положим $A^j_{i,k}(u,v,w) = a_i(u,v)\partial^j_{v_1}a_k(u+v,w) - a_i(v,w)\partial^j_{v_1}a_k(u,v+w)$.

Следствие 4.1. *Операторное уравнение* (4.20) *представляет собой систему функциональных уравнений* $\{K_i = 0 \mid 0 \leqslant i < 2g\}$ *относительно функций* $a_0(u,v),\dots,a_{g-1}(u,v)$, *где*

$$K_i = \sum_{j=\max(0,i-g)}^{\min(g,i)} \sum_{k=j}^{g} \binom{k}{j} A^{k-j}_{k,i-j}(u,v,w). \tag{4.21}$$

Например, при $g=1$ мы получаем уравнения $K_1 = 0$ и $K_0 = 0$, где

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1(a_0(u,v)) = a_0(u,v) - a_0(v,w) + a_0(u+v,w) - a_0(u,v+w)\\ K_0 &= K_0(a_0(u,v)) = a_0(u,v)a_0(u+v,w) - a_0(v,w)a_0(u,v+w)\\ &\qquad\qquad + \partial_v a_0(u+v,w) - \partial_v a_0(u,v+w). \end{aligned}$$

Пусть δ_1 и δ_2 – дифференциалы в стандартном коцепном комплексе функций, а именно:

$$\begin{aligned} (\delta_1 a)(u,v) &= a(u) + a(v) - a(u+v), \quad \text{где} \quad a = a(u),\\ (\delta_2 a)(u,v,w) &= -a(u+v,w) + a(v,w) + a(u,v+w) - a(u,v), \quad \text{где} \quad a = a(u,v). \end{aligned}$$

Заметим, что $K_1(a_0(u,v)) = (\delta_2 a)(u,v,w)$. Следовательно, уравнение $K_1 = 0$ – это в точности уравнение коцикла $(\delta_2 a_0)(u,v,w) = 0$. Так как двумерные когомологии рассматриваемого комплекса равны нулю, то мы получаем, что существует единственная функция $h(u)$ такая, что $(\delta_1 h)(u,v) = a_0(u,v)$. Таким образом, общее решение $a_0(u,v)$ уравнения $K_1 = 0$ имеет вид

$$a_0(u,v) = h(u) + h(v) - h(u+v).$$

Несложная выкладка дает

$$K_0((\delta_1 h)(u,v)) = \delta_2[(\delta_1 h)(u,v)h(u+v) + \partial_{v_1}h(u+v) - h(u)h(v)].$$

Следовательно, согласно уравнению $K_0 = 0$, существует единственная функция $\eta(u)$ такая, что

$$(\delta_1\eta)(u,v) = [(\delta_1 h)(u,v)h(u+v) + \partial_{v_1}h(u+v) - h(u)h(v)].$$

Таким образом, мы получаем функциональное уравнение на функцию $h(u)$, общим решением которого является функция Вейерштрасса $\zeta(u)$.

В работе одного из авторов и Д. В. Лейкина (см. [59]) описана общая схема построения коммутативной ассоциативной алгебры с базисом $\{E_{(i,u)}\}$ на основе линейного дифференциального оператора $L_{u,v}^w = \sum_{k=1}^g a_k(u,v)D_w^k$. Приведенные выше выкладки непосредственно показывают, что при $D_w = \partial_{w_1}$ и $g = 1$ любая такая алгебра совпадает с алгеброй, ассоциированной с непрерывным КН-базисом на эллиптической кривой.

Вернемся к общему случаю при $D_w = \partial_{w_1}$ (см. [59]). Уравнения $K_{g+j} = 0$, где $0 \leqslant j < g$, можно переписать в виде

$$(\delta_2 a_j)(u,v,w) = \sum_{k=0}^{g-j-1} \sum_{\ell=0,\, k+\ell>0}^{g-j-k} \binom{j+k+\ell}{j+k} A^{\ell}_{j+k+\ell,g-k}(u,v,w). \tag{4.22}$$

Следовательно, $(\delta_2 a_{g-1})(u,v,w) = 0$ для всех $g \geqslant 1$, и поэтому существует единственная функция $h_1(u)$ такая, что $a_{g-1}(u,v) = \delta_1 h_1(u)$.

Теорема 4.2. *Пусть $h_1(u),\dots,h_g(u)$ – дифференцируемые функции, $u \in \mathbb{C}^g$. Тогда рекуррентные формулы*

$$\begin{aligned} a_{g-k}(u,v) = (\delta_1 h_k)(u,v) + \sum_{\ell=1}^{k-1} h_\ell(u)h_{k-\ell}(v) \\ - \sum_{\ell=0}^{k-1}\sum_{m=1}^{k-\ell-1} \binom{g-\ell}{k-\ell-m} a_{g-\ell}(u,v) D_v^{(k-\ell-m)} h_m(u+v) \end{aligned} \tag{4.23}$$

при $k = 1,\dots,g$ дают общее решение системы $\{K_{g+j} = 0 \mid 0 \leqslant j < g\}$.

Функция $\Psi(u,P)$, как вырожденная функция Бейкера–Ахиезера (см. (4.1)), полностью характеризуется своим поведением в единственной особой точке (см. (4.2))

$$\Psi(u,P) \sim \xi^{-g} \exp\{p(u,\xi^{-1})\}\biggl(1 + \sum_{i>0} \eta_i(u)\xi^i\biggr), \tag{4.24}$$

где $p(u,t) = \sum_{j=1}^g u_j \chi_j(t)$ – функция, линейная по u, и полином по t степени не выше $(2g-1)$. При этом важно, что $\chi_1(t) = t$. Непосредственные вычисления показывают, что функции $\eta_j(u)$ и коэффициенты $a_k(u,v)$, $k = 0,1,\dots,g-1$, оператора $\mathscr{L}$ такого, что

$$\Psi(\xi,u)\Psi(\xi,v) = \mathscr{L}\Psi(\xi,u+v),$$

связаны системой соотношений $\{B_s = 0 \mid s = 1,2,\dots\}$, где

$$B_s = \biggl(\sum_{j=q(s)}^{g} \sum_{k=j}^{g} \binom{k}{j} a_k(u,v) D_v^{k-j} \eta_{s+j-g}(u+v)\biggr) - \sum_{\ell=0}^{s} \eta_\ell(u)\eta_{s-\ell}(v),$$

$q(s) = \max(0, g-s)$.

Теорема 4.3 (см. [59]). *Взяв в качестве функций $h_i(u)$ из теоремы 4.2 функции $\eta_i(u)$, $i = 1,\dots,g$, из разложения (4.24), мы получаем, что система уравнений $\mathscr{B}_{\mathrm{I}} = \{B_s = 0 \mid s \leqslant g\}$ переходит в рекуррентную систему (4.23), задающую коэффициенты $a_k(u,v)$ оператора $\mathscr{L}$.*

Система $\mathscr{B}_{\mathrm{II}} = \{B_s = 0 \mid s > g\}$ переходит в систему уравнений $\{(\delta_1 \eta_{g+m})(u,v) = F_m,\ m = 1, 2, \dots\}$, где

$$F_m = \left(\sum_{j=0}^{g-1} \sum_{k=j}^{g} \binom{k}{j} a_k(u,v) D_v^{k-j} \eta_{m+j}(u+v) \right) - \sum_{\ell=1}^{g+m-1} \eta_\ell(u) \eta_{g+m-\ell}(v).$$

Так как $\delta_2 \delta_1 = 0$, то мы приходим к уравнениям $\{\delta_2 F_m = 0\}$ совместности системы $\mathscr{B}_{\mathrm{II}}$ в виде рекуррентных функционально-дифференциальных уравнений на $\eta_1, \dots, \eta_g$.

Завершает описание умножения в алгебрах, ассоциированных с непрерывным КН-базисом, следующий результат.

Теорема 4.4 (см. [59]). *С учетом утверждений теорем 4.2 и 4.3 система уравнений*

$$\widetilde{K} = \{K_j = 0 \mid j = 0, \dots, g-1\}$$

обеспечивает выполнение условий совместности системы $\mathscr{B}_{\mathrm{II}} = \{B_s = 0 \mid s > g\}$.

§ 5. Интегрируемые линейные задачи и их приложения

В этом параграфе излагаются основные идеи нового подхода к решению задач типа Римана–Шоттки, предложенного в недавней работе одного из авторов [48]. Этот подход основан на использовании интегрируемых линейных задач. Следует оговориться, что мы не вкладываем в понятие интегрируемой линейной задачи никакого более или менее строгого смысла. В рамках настоящего обзора под этим понятием будут подразумеваться линейные уравнения, решения которых даются явными тэта-функциональными формулами.

5.1. Бесконечномерный аналог системы Калоджеро–Мозера. Как уже отмечалось во введении, непосредственным следствием теоремы сложения (1.25) для тэта-функций является эквивалентность интегрируемой линейной задачи (1.41)–(1.43) и уравнений (1.44), означающих, что точка $K(A/2)$ является точкой перегиба многообразия Куммера.

Совсем не очевидна эквивалентность утверждения теоремы 1.4 другой формулировке, характеризующей якобиевы многообразия в терминах некоторого бесконечномерного аналога системы Калоджеро–Мозера.

Рассмотрим целую функцию $\tau(x,y)$ комплексной переменной x, гладко зависящую от параметра y. Предположим, что она удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{res}_x \bigl(\partial_y^2 \ln \tau + 2(\partial_x^2 \ln \tau)^2 \bigr) = 0, \tag{5.1}$$

которое означает, что мероморфная функция переменной x, заданная левой частью (5.1), не имеет *вычетов*. Если $x_i(y)$ является простым нулем τ, т.е. $\tau(x_i(y), y) = 0, \partial_x \tau(x_i(y), y) \neq 0$, то из (5.1) следует

$$\ddot{x}_i = 2 w_i, \tag{5.2}$$

где “точки” обозначают производные по переменной y, а w_i – третий коэффициент лорановского разложения функции $u(x,y) = -2\partial_x^2 \tau(x,y)$ в точке x_i, т.е.

$$u(x,y) = \frac{2}{(x - x_i(y))^2} + v_i(y) + w_i(y)(x - x_i(y)) + \cdots. \tag{5.3}$$

Формально, если представить τ в виде бесконечного произведения

$$\tau(x,y) = c(y)\prod_i (x - x_i(y)), \tag{5.4}$$

то уравнение (5.1) окажется эквивалентным бесконечной системе уравнений

$$\ddot{x}_i = -4\sum_{j\neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3}\,, \tag{5.5}$$

которая в тех случаях, когда τ является рациональным, тригонометрическим или эллиптическим полиномом, сопадает с уравнениями движения рациональной, тригонометрической или эллиптической системы Калоджеро–Мозера соответственно.

Уравнения (5.2) для нулей функции $\tau = \theta(Ux+Vy+Z)$ были впервые выведены в работе [60] как прямое следствие предположений теоремы 1.4. Разлагая функцию θ в окрестности точек ее дивизора $z \in \Theta$ таких, что $\theta(z) = 0$, легко получить, что уравнение (5.1) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned}[]&[(\partial_2\theta)^2 - (\partial_1^2\theta)^2]\partial_1^2\theta + 2[\partial_1^2\theta\,\partial_1^3\theta \\ &\quad - \partial_2\theta\,\partial_1\partial_2\theta]\partial_1\theta + [\partial_2^2\theta - \partial_1^4\theta](\partial_1\theta)^2 = 0 \pmod{\theta},\end{aligned} \tag{5.6}$$

которое должно выполняться во всех точках дивизора Θ. Здесь и далее ∂_1 и ∂_2 – постоянные векторные поля на $\mathbb{C}^g$, соответствующие векторам U и V.

Теорема 5.1. *Неразложимое главно-поляризованное абелево многообразие (X,θ) является якобиевым многообразием гладкой алгебраической кривой рода g тогда и только тогда, когда найдутся g-мерные векторы $U \neq 0$, V такие, что на дивизоре Θ будет выполнятся уравнение* (5.6).

Основная идея доказательства теоремы 1.4 состоит в доказательстве того, что линейная задача (1.41)–(1.43) допускает введение *спектрального* параметра. Точнее, доказательство того, что в предположениях теоремы у уравнения (1.41) имеется формальное волновое решение, т.е. решение вида

$$\psi(x,y,k) = e^{kx+(k^2+b)y}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty}\xi_s(x,y)\,k^{-s}\right). \tag{5.7}$$

Попытка прямого построения формального волнового решения, коэффициенты которого имеют вид

$$\xi_s = \frac{\tau_s(Ux+Vy+Z)}{\theta(Ux+Vy+Z)}\,, \tag{5.8}$$

где $\tau_s(Z)$ – голоморфная функция переменной $Z \in \mathbb{C}^g$, приводит к проблемам, аналогичным проблемам, с которыми столкнулся Шиота при построении τ-функции иерархии КП.

Подстановка ряда (5.7) в уравнение (1.41) дает рекуррентную систему уравнений для коэффициентов ξ_s волновой функциии. Утверждения следующих двух лемм показывают, что уравнения (5.2) являются необходимым и достаточным условием *локальной* разрешимости этих уравнений в классе мероморфных функций.

Лемма 5.1 [60]. *Пусть $\tau(x,y)$ является голоморфной функцией переменной $x \in D \subset \mathbb{C}$, гладко зависящей от переменной y. Предположим, что нули τ просты:*

$$\tau(x_i(y),y)=0, \qquad \tau_x(x_i(y),y)\neq 0. \tag{5.9}$$

Тогда если уравнение (1.41) с потенциалом $u=-2\partial_x^2\ln\tau(x,y)$ имеет мероморфное решение $\psi_0(x,y)$, то выполнены уравнения (5.2).

Рассмотрим лорановские разложения ψ_0 и u в окрестности одного из нулей x_i функции τ:

$$u=\frac{2}{(x-x_i)^2}+v_i+w_i(x-x_i)+\cdots, \tag{5.10}$$

$$\psi_0=\frac{\alpha_i}{x-x_i}+\beta_i+\gamma_i(x-x_i)+\delta_i(x-x_i)^2+\cdots. \tag{5.11}$$

(Все коэффициенты являются гладкими функциями переменной y.) Подстановка рядов (5.10), (5.11) в (1.41) дает цепочку уравнений, первые три из которых имеют вид

$$\alpha_i\dot{x}_i+2\beta_i=0, \tag{5.12}$$

$$\dot{\alpha}_i+\alpha_i v_i+2\gamma_i=0, \tag{5.13}$$

$$\dot{\beta}_i+v_i\beta_i-\gamma_i\dot{x}_i+\alpha_i w_i=0. \tag{5.14}$$

Дифференцируя по y первое из этих уравнений и используя два других, мы получаем (5.2).

Лемма 5.2. *Предположим, что для нулей функции $\tau(x,y)$ выполнены уравнения (5.2). Тогда существует мероморфное волновое решение уравнения (1.41), имеющее лишь простые полюсы в точках x_i.*

Доказательство. Подстановка (5.7) в (1.41) дает систему уравнений

$$2\xi'_{s+1}=\partial_y\xi_s+u\xi_s-\xi''_s. \tag{5.15}$$

Докажем по индукции, что в предположениях леммы эта система имеет мероморфные решения с простыми полюсами в точках x_i.

Разложим ξ_s в окрестности x_i:

$$\xi_s=\frac{r_s}{x-x_i}+r_{s0}+r_{s1}(x-x_i) \tag{5.16}$$

(для краткости мы опускаем индекс i в обозначениях для коэффициентов этого разложения). Предположим, что ξ_s известно и уравнение (5.15) имеет мероморфное решение. Это означает, что правая часть (5.15) имеет нулевой вычет в точке $x=x_i$:

$$\operatorname{res}_{x_i}(\partial_y\xi_s+u\xi_s-\xi''_s)=\dot{r}_s+v_ir_s+2r_{s1}=0. \tag{5.17}$$

Нам надо показать, что вычет следующего уравнения равен нулю. Из (5.15) следует, что коэффициенты разложения для ξ_{s+1} равны

$$r_{s+1}=-\dot{x}_ir_s-2r_{s0}, \tag{5.18}$$

$$2r_{s+1,1}=\dot{r}_{s0}-r_{s1}+w_ir_s+v_ir_{s0}. \tag{5.19}$$

Значит,

$$\dot r_{s+1} + v_i r_{s+1} + 2r_{s+1,1} = -r_s(\ddot x_i - 2w_i) - \dot x_i(\dot r_s - v_i r_s s + 2r_{s1}) = 0, \tag{5.20}$$

и лемма доказана.

Локальная разрешимость уравнений (5.15) не влечет за собой автоматически их глобальную разрешимость, т.е. существование волновой функции с коэффициентами ξ_s вида (5.8). Аргументы, полностью идентичные тем, которые были использованы в [8] при построении τ-функции иерархии КП, показывают, что существование глобальной волновой функции контролируется когомологическим препятствием, являющимся элементом $H^1(\mathbb{C}^g \setminus \Sigma, M)$, где Σ – это ∂_1-инвариантное подмножество Θ, а M – это пучок ∂_1-инвариантных мероморфных фунций, голоморфных вне Θ.

5.2. λ-периодические волновые решения. В отличие от [8] мы не будем прямо доказывать, что множество Σ пусто. Оказывается, что для построения алгебраической кривой, которая впоследствии окажется именно той кривой, якобиан которой изоморфен X, достаточно глобального существования ξ_s вдоль определенных аффинных гиперплоскостей $\mathbb{C}^g$.

Обозначим через $Y_U = \langle Ux \rangle$ замыкание группы Ux в X. Сдвигая Y_U, если необходимо, мы можем предполагать без потери общности, что Y_U не содержится в плохом подмножестве, $Y_U \notin \Sigma$. Тогда $Y_U + Vy \notin \Sigma$ для достаточно малых y. Рассмотрим ограничение тэта-функции на аффинное подпространство $\mathbb{C}^d + Vy$, где $\mathbb{C}^d = \pi^{-1}(Y_U)$, а $\pi\colon \mathbb{C}^g \to X = \mathbb{C}^g/\Lambda$ – универсальное накрытие X:

$$\tau(z, y) = \theta(z + Vy), \qquad z \in \mathbb{C}^d. \tag{5.21}$$

Функция $u(z, y) = -2\partial_1^2 \ln \tau$ периодична относительно решетки $\Lambda_U = \Lambda \cap \mathbb{C}^d$ и при фиксированном y имеет полюс второго порядка вдоль дивизора $\Theta^U(y) = (\Theta - Vy) \cap \mathbb{C}^d$.

Лемма 5.3. *Зафиксируем вектор λ решетки $\Lambda_U = \Lambda \cap \mathbb{C}^d \subset \mathbb{C}^g$ и предположим, что для $\tau(Ux + z, y)$ выполнены уравнения* (5.1). *Тогда*:

(i) *у уравнения* (1.41) *с потенциалом $u(Ux + z, y)$ существует волновое решение вида $\psi = e^{kx+k^2y}\phi(Ux + z, y, k)$ такое, что коэффициенты $\xi_s(z, y)$ формального ряда*

$$\phi(z, y, k) = e^{by}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(z, y)\, k^{-s}\right) \tag{5.22}$$

являются λ-периодическими мероморфными функциями переменной $z \in \mathbb{C}^d$ с простым полюсом вдоль дивизора $\Theta^U(y)$,

$$\xi_s(z + \lambda, y) = \xi_s(z, y) = \frac{\tau_s(z, y)}{\tau(z, y)}\,; \tag{5.23}$$

(ii) *ряд $\phi(z, y, k)$ единственен с точностью до множителя $\rho(z, k)$, который ∂_1-инвариантен и голоморфен по переменной z,*

$$\phi_1(z, y, k) = \phi(z, y, k)\rho(z, k), \qquad \partial_1\rho = 0. \tag{5.24}$$

Доказательство. Функции $\xi_s(z)$ определяются уравнениями

$$2\partial_1\xi_{s+1} = \partial_y\xi_s + (u+b)\xi_s - \partial_1^2\xi_s. \tag{5.25}$$

Частное решение первого из этих уравнений $2\partial_1\xi_1 = u+b$ дается формулой

$$2\xi_1^0 = -2\partial_1 \ln\tau + (l,z)\,b, \tag{5.26}$$

где (l,z) – линейная форма на $\mathbb{C}^d$, заданная скалярным произведением z с вектором $l \in \mathbb{C}^d$ таким, что $(l,U)=1$. По определению $\lambda \in Y_U$. Следовательно, $(l,\lambda)\neq 0$. Условие периодичности для ξ_1^0 определяет константу b:

$$b = (l,\lambda)^{-1}(2\partial_1\ln\tau(z+\lambda,y) - 2\partial_1\ln\tau(z,y)), \tag{5.27}$$

которая зависит лишь от выбора вектора λ. Добавление константы к потенциалу не влияет на результат предшествующей леммы. Поэтому уравнения (5.2) достаточны для локальной разрешимости уравнений (5.25) в любой области, где $\tau(z+Ux,y)$ имеет простые нули, т.е. вне множества $\Theta_1^U(y) = (\Theta_1 - Vy)\cap\mathbb{C}^d$, где $\Theta_1 = \Theta\cap\partial_1\Theta$. Это множество не содержит ∂_1-инвариантной линии, поскольку любая такая линия плотна в Y_U. Следовательно, пучок ∂_1-инвариантных мероморфных функций на $\mathbb{C}^d\setminus\Theta_1^U(y)$ с полюсами вдоль $\Theta^U(y)$ совпадает с пучком голоморфных ∂_1-инвариантных функций. Это влечет тривиальность группы $H^1(C^d\setminus\Theta_1^U(y), M_0)$ и существование глобальных мероморфных решений ξ_s^0 уравнений (5.25) с простыми полюсами вдоль дивизора $\Theta^U(y)$ (см. подробнее [8], [25]). Если частное решение ξ_s^0 выбрано, то общее глобальное мероморфное решение дается формулой $\xi_s = \xi_s^0 + c_s$, где константа интегрирования $c_s(z,y)$ является голоморфной ∂_1-инвариантной функцией переменной z. Покажем, что условие λ-периодичности фиксирует зависимость этой константы интегрирования от переменной y.

Доказательство мы проведем по индукции. Предположим, что λ-периодическое решение ξ_{s-1} известно и удовлетворяет условию, что существует периодическое решение ξ_s^0 следующего уравнения. Обозначим через ξ_{s+1}^* решение уравнения (5.25) для фиксированного ξ_s^0. Как легко убедиться, функция

$$\xi_{s+1}^0(z,y) = \xi_{s+1}^*(z,y) + c_s(z,y)\,\xi_1^0(z,y) + \frac{(l,z)}{2}\partial_y c_s(z,y) \tag{5.28}$$

является решением (5.25) для $\xi_s = \xi_s^0 + c_s$. Выбор λ-периодической ∂_1-инвариантной функции $c_s(z,y)$ не влияет на периодичность ξ_s, но влияет на периодичность ξ_{s+1}^0. Для того чтобы ξ_{s+1}^0 была периодична, необходимо, чтобы функция $c_s(z,y)$ удовлетворяла линейному дифференциальному уравнению

$$\partial_y c_s(z,y) = 2(l,\lambda)^{-1}(\xi_{s+1}^*(z+\lambda,y) - \xi_{s+1}^*(z,y)). \tag{5.29}$$

Это уравнение и начальные условия $c_s(z) = c_s(z,0)$ однозначно определяют $c_s(x,y)$. Шаг индукции завершен. Мы показали, что отношение двух периодических формальных рядов ϕ_1 и ϕ не зависит от y. Это влечет равенство (5.24), в котором $\rho(z,k)$ определяется обеими частями равенства при $y=0$.

5.3. Спектральная кривая. Нашей следующей целью будет доказать, что λ-периодические волновые решения уравнения (1.41), (1.42) являются совместными собственными функциями коммутирующих операторов, и отождествить X с якобианом соответствующей спектральной кривой.

Заметим, что простой сдвиг $z \to z + Z$, позволяет определить λ-периодические волновые решения с мероморфными коэффициентами вдоль аффинных подпространств $Z + \mathbb{C}^d$, $Z \notin \Sigma$. Эти λ-периодические решения связаны друг с другом посредством ∂_1-инвариантных множителей. Следовательно, выбирая в окрестности любой точки $Z \notin \Sigma$ гиперплоскость, ортогональную вектору U, и фиксируя начальные условия на этой гиперплостности при $y = 0$, мы определим коэффициенты ряда $\phi(z + Z, y, k)$ как *локальные* мероморфные функции переменной Z и как *глобальные* мероморфные функции переменной z.

Лемма 5.4. *В предположениях теоремы 5.1 существует единственный псевдодифференциальный оператор*

$$\mathscr{L}(Z, \partial_x) = \partial_x + \sum_{s=1}^{\infty} w_s(Z)\partial_x^{-s} \tag{5.30}$$

такой, что

$$\mathscr{L}(Ux + Vy + Z, \partial_x)\, \psi = k\, \psi\,, \tag{5.31}$$

где $\psi = e^{kx+k^2y}\phi(Ux + Z, y, k)$ *является λ-периодическим решением уравнения* (1.41). *Коэффициенты $w_s(Z)$ этого оператора являются мероморфными функциями на абелевом многообразии X, голоморфными вне дивизора Θ.*

Доказательство. Построение $\mathscr{L}$ стандартно в теории КП. Сначала мы определим $\mathscr{L}$ как псевдодифференциальный оператор с коэффициентами $w_s(Z, y)$, зависящими от Z и y.

Рассмотрим λ-периодическое волновое решение ψ. Подстановка (5.22) в (5.31) дает систему уравнений, однозначно определяющих $w_s(Z, y)$ в виде дифференциальных полиномов от коэффициентов $\xi_s(Z, y)$ разложения ψ. Коэффициенты ψ являются локальными мероморфными функциями переменной Z. Поскольку λ-периодические волновые решения связаны друг с другом с помощью ∂_1-инвариантных множителей, то неоднозначность ψ не сказывается на коэффициентах $\mathscr{L}$. Следовательно, последние корректно определены, как *глобальные мероморфные функции* на $\mathbb{C}^g \setminus \Sigma$. Коразмерность сингулярного локуса не меньше 2. Следовательно, в силу теоремы Гартогса $w_s(Z, y)$ допускают продолжение до глобальных мероморфных функций на $\mathbb{C}^g$.

Из трансляционной инвариантности u следует, что для любой константы s ряды $\phi(Vs + Z, y - s, k)$ и $\phi(Z, y, k)$ отвечают λ-периодическим решениям одного и того же уравнения. Значит, они отличаются на ∂_1-инвариантный сомножитель. Отсюда $w_s(Z, y) = w_s(Vy + Z)$.

В силу тех же соображений

$$\partial_1\big(\phi_1(Z + \lambda', y, k)\phi^{-1}(Z, y, k)\big) = 0. \tag{5.32}$$

Значит, w_s периодичны по отношению к решетке Λ и, следовательно, являются мероморфными функциями на X. Лемма 5.4 доказана.

Как обычно, обозначим через $\mathscr{L}^m_+$ дифференциальную часть оператора $\mathscr{L}^m$. По определению старший коэффициент F_m интегральной части $\mathscr{L}^m_- = \mathscr{L}^m - \mathscr{L}^m_+ = F_m\partial^{-1} + O(\partial^{-2})$ называется вычетом $\mathscr{L}^m$:

$$F_m = \operatorname{res}_\partial \mathscr{L}^m. \tag{5.33}$$

Из конструкции $\mathscr{L}$ следует, что $[\partial_y - \partial_x^2 + u, \mathscr{L}^n] = 0$. Значит,

$$[\partial_y - \partial_x^2 + u, \mathscr{L}_+^m] = -[\partial_y - \partial_x^2 + u, \mathscr{L}_-^m] = 2\partial_x F_m. \tag{5.34}$$

Функции F_m являются дифференциальными полиномами от коэффициентов w_s оператора $\mathscr{L}$. Следовательно, они являются мероморфными функциями на X.

Лемма 5.5. *Абелевы функции F_m имеют на Θ полюс порядка не выше второго.*

Доказательство. Воспользуемся еще одной стандартой конструкцией теории КП. Любое волновое решение определяет единственный псевдодифференциальный оператор Φ такой, что

$$\psi = \Phi e^{kx+k^2y}, \qquad \Phi = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(Ux + Z, y)\partial_x^{-s}. \tag{5.35}$$

Коэффициенты Φ являются дифференциальными полиномами от коэффициентов ξ_s волнового решения. Следовательно, если ψ – то же волновое решение, что в утверждении леммы 5.3, то коэффициенты $\varphi_s(z + Z, y)$ соответствующего оператора Φ являются глобальными мероморфными функциями переменной $z \in \mathbb{C}^d$ и локальными мероморфными функциями переменной $Z \notin \Sigma$. Отметим, что $\mathscr{L} = \Phi(\partial_x)\,\Phi^{-1}$.

Определим двойственную волновую функцию с помощью левого действия оператора Φ^{-1}: $\psi^+ = e^{-kx-k^2y}\Phi^{-1}$. Напомним, что левое действие псевдодифференциального оператора является формально сопряженным к правому действию, т.е. задается равенством $(f\partial_x) = -\partial_x f$. Если ψ является формальным волновым решением уравнения (1.41), то ψ^+ является решением сопряженного уравнения

$$(-\partial_y - \partial_x^2 + u)\psi^+ = 0. \tag{5.36}$$

Как и ранее, доказывается, что коэффициенты ξ_s^+ двойственного решения имеют простые полюсы в полюсах u. Следовательно, ψ^+ имеет вид

$$\psi^+ = e^{-kx-k^2y}\phi^+(Ux + Z, y, k),$$

где коэффициенты $\xi_s^+(z + Z, y)$ формального ряда

$$\phi^+(z + Z, y, k) = e^{-by}\biggl(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^+(z + Z, y)\,k^{-s}\biggr) \tag{5.37}$$

являются λ-периодическими мероморфными функциями переменной $z \in \mathbb{C}^d$ с простыми полюсами на $\Theta^U(y)$.

Неоднозначность в определении ψ не влияет на произведение

$$\psi^+\psi = (e^{-kx-k^2y}\Phi^{-1})(\Phi e^{kx+k^2y}). \tag{5.38}$$

Следовательно, коэффициенты J_s этого произведения

$$\psi^+\psi = \phi^+(Z, y, k)\phi(Z, y, k) = 1 + \sum_{s=2}^{\infty} J_s(Z, y)k^{-s} \tag{5.39}$$

являются *глобальными мероморфными функциями* переменной Z. Более того, из трансляционной инвариантности u следует, что они имеют вид $J_s(Z,y) = J_s(Z+Vy)$. Каждый из сомножителей имеет простой полюс на $\Theta - Vy$. Значит, $J_s(Z)$ является мероморфной функцией на X с полюсом второго порядка на Θ.

Из определения $\mathscr{L}$ следует:

$$\operatorname{res}_k(\psi^+(\mathscr{L}^n\psi)) = \operatorname{res}_k(\psi^+k^n\psi) = J_{n+1}. \tag{5.40}$$

С другой стороны, используя равенство

$$\operatorname{res}_k(e^{-kx}\mathscr{D}_1)(\mathscr{D}_2e^{kx}) = \operatorname{res}_\partial(\mathscr{D}_2\mathscr{D}_1), \tag{5.41}$$

справедливое для любых псевдодифференциальных операторов, мы получим

$$\operatorname{res}_k(\psi^+\mathscr{L}^n\psi) = \operatorname{res}_k(e^{-kx}\Phi^{-1})(\mathscr{L}^n\Phi e^{kx}) = \operatorname{res}_\partial \mathscr{L}^n = F_n. \tag{5.42}$$

Отсюда $F_n = J_{n+1}$. Лемма 5.5 доказана.

Обозначим через $\widehat{\mathbf{F}}$ линейное пространство, порожденное функциями $\{F_m, m = 0,1,2,\dots\}$, где мы формально полагаем $F_0 = 1$. В силу доказанного, оно является подпространством 2^g-мерного пространства абелевых функций с полюсом не выше второго порядка на Θ. Следовательно, для всех кроме $\widehat{g} = \dim\widehat{\mathbf{F}}$ положительных чисел n найдутся константы $c_{i,n}$ такие, что

$$F_n(Z) + \sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n}F_i(Z) = 0. \tag{5.43}$$

Множество I целых чисел, для которых таких констант не существует, будет называться последовательностью пробелов.

Лемма 5.6. *Пусть $\mathscr{L}$ является псевдодифференциальным оператором, построенным по λ-периодическим волновым функциям ψ. Тогда для операторов*

$$L_n = \mathscr{L}_+^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n}\mathscr{L}_+^{n-i} = 0, \qquad n \notin I, \tag{5.44}$$

выполняются равенства

$$L_n\,\psi = a_n(k)\,\psi, \qquad a_n(k) = k^n + \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}k^{n-s}, \tag{5.45}$$

в которых $a_{s,n}$ являются константами.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из (5.34) следует равенство

$$[\partial_y - \partial_x^2 + u, L_n] = 0. \tag{5.46}$$

Значит, если ψ является λ-периодическим волновым решением уравнения (1.41), то $L_n\psi$ является тоже λ-периодическим волновым решением. Отсюда $L_n\psi = a_n(Z,k)\psi$, где a – ∂_1-инвариантный ряд. Неоднозначность в определении ψ не влияет на a_n. Следовательно, коэффициенты a_n являются корректно определенными *глобальными* мероморфными функциями на $\mathbb{C}^g \setminus \Sigma$. Из ∂_1-инвариантности a_n следует, что a_n как функция Z голоморфна вне Σ. Значит, она допускает голоморфное продолжение на $\mathbb{C}^g$. Из (5.32) следует, что a_n периодична относительно решетки периодов Λ. Значит, a_n не зависит от Z. Отметим, что $a_{s,n} = c_{s,n}$, $s \leqslant n$. Лемма 5.6 доказана.

Оператор L_m может рассматриваться как $Z \notin \Sigma$-параметрическое семейство обыкновенных дифференциальных операторов L_m^Z, коэффициенты которых имеют вид

$$L_m^Z = \partial_x^n + \sum_{i=1}^{m} u_{i,m}(Ux+Z)\,\partial_x^{m-i}, \qquad m \notin I. \tag{5.47}$$

Следствие 5.1. *Операторы L_m^Z коммутируют друг с другом*:

$$[L_n^Z, L_m^Z] = 0, \qquad Z \notin \Sigma. \tag{5.48}$$

Из (5.45) следует, что $[L_n^Z, L_m^Z]\psi = 0$. Коммутатор является обыкновенным дифференциальным оператором, поэтому последнее равенство влечет за собой (5.48).

Лемма 5.7. *Существует неприводимая алгебраическая кривая Γ такая, что для любого $Z \notin \Sigma$ коммутативное кольцо $\mathscr{A}^Z$, порожденное операторами L_n^Z, изоморфно кольцу $A(\Gamma, P_0)$ мероморфных функций на Γ с единственным полюсом в гладкой точке P_0. Соответствие $Z \to \mathscr{A}^Z$ определяет голоморфное вложение $X \setminus \Sigma$ в пространство $\overline{\mathrm{Pic}}(\Gamma)$ пучков Φ без кручения*, *ранга* 1 *на* Γ

$$j\colon X \setminus \Sigma \longmapsto \overline{\mathrm{Pic}}(\Gamma). \tag{5.49}$$

Доказательство. Фундаментальное утверждение теории коммутирующих дифференциальных операторов [1], [2], [61], [62], [23] состоит в том, что существует естественное соответствие

$$\mathscr{A} \longleftrightarrow \{\Gamma, P_0, [k^{-1}]_1, \Phi\} \tag{5.50}$$

между коммутативными кольцами $\mathscr{A}$ обыкновенных линейных дифференциальных операторов, содержащих пару операторов взаимно простых порядков, *регулярных* в окрестности $x = 0$, и наборами алгебро-геометрических данных $\{\Gamma, P_0, [k^{-1}]_1, \Phi\}$, где Γ – алгебраическая кривая с фиксированным первым ростком $[k^{-1}]_1$ локальной координаты k^{-1} в окрестности гладкой точки $P_0 \in \Gamma$ и Φ – пучок ранга 1 на Γ без кручения и такой, что

$$H^0(\Gamma, \Phi) = H^1(\Gamma, \Phi) = 0. \tag{5.51}$$

Соответствие становится взаимно однозначным, если коммутативные кольца $\mathscr{A}$ рассматривать с точностью до сопряжения $\mathscr{A}' = g(x)\mathscr{A}g^{-1}(x)$.

Алгебраическая кривая Γ называется спектральной кривой кольца $\mathscr{A}$. Кольцо $\mathscr{A}$ изоморфно кольцу $A(\Gamma, P_0)$ мероморфных функций на Γ с единственным полюсом в отмеченной точке P_0. Изоморфизм определяется равенством

$$L_a\psi_0 = a\psi_0, \qquad L_a \in \mathscr{A}, \quad a \in A(\Gamma, P_0). \tag{5.52}$$

Здесь ψ_0 – совместная собственная функция коммутирующих операторов. При $x = 0$ она является сечением пучка $\Phi \otimes \mathscr{O}(-P_0)$.

Важное замечание. Соответствие (5.50) зависит от выбора начальной точки $x_0 = 0$. Спектральная кривая и пучок Φ определяются значениями коэффициентов образующих кольца $\mathscr{A}$ и конечного числа их производных в начальной точке. Отметим, что зависимость спектральной кривой от начальной точки тривиальна, а зависимость пучка нет, $\Phi = \Phi_{x_0}$.

Используя сдвиг начальной точки, можно показать, что соответствие (5.50) можно расширить на случай коммутативных колец операторов, коэффициенты которых являются *мероморфными* функциями переменной x. Кольца операторов, имеющих полюс в точке $x = 0$, соответствуют пучкам, для которых нарушается условие (5.51).

Рассмотрим спектральную кривую Γ^Z, соответствующую кольцу $\mathscr{A}^Z$. В силу сделанного выше замечания, она корректно определена для $Z \notin \Sigma$. Собственные значения $a_n(k)$ операторов L_n^Z, определенные в (5.45), совпадают с лорановскими разложениями в окрестности P_0 мероморфных функций $a_n \in A(\Gamma^Z, P_0)$. Они не зависят от Z. Следовательно, спектральная кривая тоже не зависит от Z, т.е. $\Gamma = \Gamma^Z$. Первое утверждение леммы доказано.

Из построения соответствия (5.50) следует, что если коэффициенты операторов кольца $\mathscr{A}$ голоморфно зависят от параметров, то соответствующие алгебро-геометрические спектральные данные также зависят голоморфно от этих параметров. Из этого следует, что j голоморфно вне дивизора Θ. Используя сдвиг начальной точки и то, что Φ_{x_0} голоморфно зависит от x_0, мы получим, что j голоморфно продолжается на $\Theta \setminus \Sigma$. Лемма доказана.

Нашей следующей целью является доказательство существования глобальной волновой функции.

Лемма 5.8. *В предположениях теоремы 5.1 существует совместная собственная функция соответствующих коммутирующих операторов L_n^Z, имеющая вид $\psi = e^{kx}\phi(Ux + Z, k)$, в котором коэффициенты формального ряда*

$$\phi(Z,k) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(Z)\, k^{-s} \tag{5.53}$$

являются глобальными мероморфными функциями переменной Z с простыми полюсами на Θ.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай гладкой спектральной кривой. В этом случае, согласно [1], [2], совместная собственная функция коммутирующих операторов, нормированная условием $\psi_0\big|_{x=0} = 1$, может быть явно выражена в терминах тэта-функции

$$\widehat{\psi}_0 = \frac{\widehat{\theta}(\widehat{A}(P) + \widehat{U}x + \widehat{Z})\,\widehat{\theta}(\widehat{Z})}{\widehat{\theta}(\widehat{U}x + \widehat{Z})\,\widehat{\theta}(\widehat{A}(P) + \widehat{Z})}\, e^{x\,\Omega(P)}. \tag{5.54}$$

Здесь $\widehat{\theta}(\widehat{Z})$ – тэта-функция Римана, построенная по матрице периодов нормированных голоморфных дифференциалов на Γ; $\widehat{A}\colon \Gamma \to J(\Gamma)$ – отображение Абеля; Ω – абелев интеграл, соответствующий нормированному абелеву дифференциалу $d\Omega$ с единственным полюсом вида dk в точке P_0, и $2\pi i\widehat{U}$ – вектор его b-периодов.

Замечание. Подчеркнем еще раз, что формула (5.54) получена не в результате решения каких бы то ни было дифференциальных уравнений. Она есть следствие аналитических свойств функции Бейкера–Ахиезера на спектральной кривой, приведенных выше в начале § 2.

Последние сомножители в числителе и знаменателе формулы (5.54) не зависят от x. Следовательно, ненормированная функция Бейкера–Ахиезера

$$\widehat{\psi}_{BA} = \frac{\widehat{\theta}(\widehat{A}(P) + \widehat{U}x + \widehat{Z})}{\widehat{\theta}(\widehat{U}x + \widehat{Z})}\, e^{x\,\Omega(P)} \tag{5.55}$$

также является собственной функцией коммутирующих операторов. В окрестности P_0 функция $\widehat{\psi}_{BA}$ имеет вид

$$\widehat{\psi}_{BA} = e^{kx}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\tau_s(\widehat{Z} + \widehat{U}x)}{\widehat{\theta}(\widehat{U}x + \widehat{Z})}\, k^{-s}\right), \qquad k = \Omega, \tag{5.56}$$

где $\tau_s(\widehat{Z})$ являются голоморфными функциями.

Согласно утверждению леммы 5.7, имеется голоморфное вложение $\widehat{Z} = j(Z)$ дополнения $X \setminus \Sigma$ в $J(\Gamma)$. Рассмотрим функцию $\psi = j^*\widehat{\psi}_{BA}$. Она корректно определена вне Σ. Если $Z \notin \Theta$, то $j(Z) \notin \widehat{\Theta}$. Следовательно, коэффициенты ψ регулярны вне Θ. Сингулярный локус имеет коразмерность не меньше двух. Следовательно, в силу теоремы Гартогса ψ может быть продолжена на все X.

Доказательство леммы в случае сингулярной спектральной кривой практически не отличается от только что рассмотренного случая гладкой кривой. Достаточно заменить формулу (5.55) на ее обобщение, даваемое теорией τ-функций Сато (см. детали в [63]). А именно, набор алгебро-геометрических спектральных данных в (5.50) определяет точку грассманиана Сато и, как следствие, соответствующую τ-функцию: $\tau(t; \mathscr{F})$. Последняя является голоморфной функцией переменных $t = (t_1, t_2, \dots)$ и сечением линейного расслоения на $\overline{\mathrm{Pic}}(\Gamma)$. Переменная x отождествляется с первым временем иерархии КП $x = t_1$. Из формулы для функции Бейкера–Ахиезера, отвечающей точке грассманиана [63], следует, что функция $\widehat{\psi}_{BA}$,

$$\widehat{\psi}_{BA} = \frac{\tau(x - k, -\frac{1}{2}k^2, -\frac{1}{3}k^3, \dots; \mathscr{F})}{\tau(x, 0, 0, \dots; \mathscr{F})} e^{kx}, \tag{5.57}$$

является совместной собственной функцией коммутирующих операторов. Продолжение доказательство идентично гладкому случаю.

Лемма 5.9. *Линейное пространство $\widehat{\mathbf{F}}$, порожденное абелевыми функциями $\{F_0 = 1,\ F_m = \mathrm{res}_\partial \mathscr{L}^m\}$, является подпространством пространства $\mathbf{H}$ абелевых функций, порожденных F_0 и функциями $H_i = \partial_1\partial_{z_i} \ln\theta(Z)$.*

Доказательство. Напомним, что F_n являются абелевыми функциями с полюсом не выше второго порядка на Θ. Значит, априорная оценка размерности порожденного ими пространства равна $\widehat{g} = \dim \widehat{\mathbf{F}} \leqslant 2^g$. Для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что $F_n = \partial_1 Q_n$, где Q_n является мероморфной функцией с полюсом на Θ. Действительно, если Q_n существует, то для любого вектора λ решетки периодов имеет место равенство $Q_n(Z + \lambda) = Q_n(Z) + c_{n,\lambda}$. Следовательно, найдутся константа q_n и два g-мерных вектора l_n, l'_n такие, что $Q_n = q_n + (l_n, Z) + (l'_n, h(Z))$, $Q_n = q_n + (l_n, Z) + (l'_n, h(Z))$, где $h(Z)$ – вектор с координатами $h_i = \partial_{z_i} \ln\theta$. Последнее равенство означает, что $F_n = (l_n, U) + (l'_n, H(Z))$.

Рассмотрим глобальную волновую функцию $\psi(x, Z, k)$, существование которой было доказано выше. Коэффициенты $\varphi_s(Z)$ соответствующего волнового оператора Φ (5.35) являются глобальными мероморфными функциями с полюсами вдоль Θ.

Левое и правое действие операторов формально сопряжены. Значит, для любых двух псевдодифференциальных операторов имеет место равенство $(e^{-kx}\mathscr{D}_1)(\mathscr{D}_2 e^{kx}) = e^{-kx}(\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2 e^{kx}) + \partial_x(e^{-kx}(\mathscr{D}_3 e^{kx}))$. Коэффициенты оператора $\mathscr{D}_3$ являются дифференциальными полиномами от коэффициентов операторов $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$. Значит, из равенств (5.38)–(5.42) следует, что

$$\psi^+\psi = 1 + \sum_{s=2}^{\infty} F_{s-1}k^{-s} = 1 + \partial_x\left(\sum_{s=2}^{\infty} Q_s k^{-s}\right). \tag{5.58}$$

Коэффициенты Q являются дифференциальными полиномами от коэффициентов φ_s волнового оператора. Значит, они являются глобальными мероморфными функциями с полюсами вдоль Θ. Лемма 5.9 доказана.

Для завершения доказательства теоремы мы воспользуемся еще одним фактом теории КП: потоки КП-иерархии определяют деформации коммутативных колец $\mathscr{A}$ обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Для фиксированной спектральной кривой Γ орбиты потоков КП-иерархии изоморфны обобщенному якобиану кривой $J(\Gamma) = \mathrm{Pic}^0(\Gamma)$, который по определению является группой классов эквивалентности дивизоров степени нуль (см. подробнее в [1], [2], [8], [63]).

КП-иерархия в форме Сато – это система уравнений для псевдодифференциального оператора $\mathscr{L}$

$$\partial_{t_n}\mathscr{L} = [\mathscr{L}^n_+, \mathscr{L}]. \tag{5.59}$$

Если $\mathscr{L}$ определен с помощью λ-периодического волнового решения уравнения (1.41), то уравнения (5.59) эквивалентны уравнениям

$$\partial_{t_n} u = \partial_x F_n. \tag{5.60}$$

Первые два времени иерархии отождествляются с переменными $t_1 = x$, $t_2 = y$.

Уравнения (5.60) отождествляют пространство $\widehat{\mathbf{F}}_1$, порожденное функциями $\partial_1 F_n$, с касательным пространством к орбите КП-иерархии в точке $\mathscr{A}^Z$. В силу утверждения предшествующей леммы это пространство является подпространством касательного пространства X. Следовательно, для любого $Z \notin \Sigma$ деформации кольца $\mathscr{A}^Z$ под действием потоков КП-иерархии принадлежат X, т.е. определено голоморфное вложение:

$$i_Z\colon J(\Gamma) \longmapsto X. \tag{5.61}$$

Из (5.61) следует, что $J(\Gamma)$ *компактен.*

Обощенный якобиан алгебраической кривой компактен тогда и только тогда, когда кривая является *гладкой* [64]. На гладкой алгебраической кривой любой пучок ранга 1 без кручения является линейным расслоением, т.е. $\overline{\mathrm{Pic}}(\Gamma) = J(\Gamma)$. В этом случае из (5.49) следует, что i_Z является изоморфизмом. Отметим, что для якобиана гладкой алгебраической кривой сингулярный локус Σ пуст [8], т.е. вложение j в (5.49) определено всюду и является обратным для i_Z. Теорема 5.1, а значит, и 1.4 доказана.

Список литературы

[1] И. М. Кричевер, “Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:1 (1977), 15–31.

[2] И. М. Кричевер, “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений”, *УМН*, **32**:6 (1977), 183–208.

[3] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31**:1 (1976), 55–136.

[4] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, “Об операторах Хилла с конечным числом лакун”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:1 (1975), 69–70.

[5] H. P. McKean, P. van Moerbeke, “The spectrum of Hill's equation”, *Invent. Math.*, **30**:3 (1975), 217–274.

[6] P. D. Lax, “Periodic solutions of the KDV equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28** (1975), 141–188.

[7] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36**:2 (1981), 11–80.

[8] T. Shiota, “Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations”, *Invent. Math.*, **83**:2 (1986), 333–382.

[9] И. А. Тайманов, “Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения”, *УМН*, **52**:1 (1997), 149–224.

[10] J. Igusa, “On the irreducibility of Schottky's divisor”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **28**:3 (1981, 1982), 531–545.

[11] F. Schottky, H. Jung, “Neue Sätze über Symmetralfunktionen und die Abel'schen Funktionen der Riemann'schen Theorie”, *Akad. Wiss. Berlin Phys. Math. Kl.*, 1909, 282–297.

[12] H. M. Farkas, H. E. Rauch, “Period relations of Schottky type on Riemann surfaces”, *Ann. of Math.* (2), **92** (1970), 434–461.

[13] B. van Geemen, “Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves”, *Invent. Math.*, **78**:2 (1984), 329–349.

[14] R. Donagi, “Big Schottky”, *Invent. Math.*, **89**:3 (1987), 569–599.

[15] A. Andreotti, A. L. Mayer, “On period relations for abelian integrals on algebraic curves”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **21** (1967), 189–238.

[16] A. Beauville, “Prym varieties and the Schottky problem”, *Invent. Math.*, **41**:2 (1977), 149–196.

[17] J. Little, “Translation manifolds and the Schottky problem”, *Theta functions–Bowdoin* 1987, *Part* 1 (*Brunswick*, *ME*, 1987), Proc. Sympos. Pure Math., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, 517–529.

[18] R. C. Gunning, “Some curves in abelian varieties”, *Invent. Math.*, **66**:3 (1982), 377–389.

[19] R. C. Gunning, “Some identities for abelian integrals”, *Amer. J. Math.*, **108**:1 (1986), 39–74.

[20] J. D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Lecture Notes in Math., **352**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[21] G. E. Welters, “On flexes of the Kummer variety (note on a theorem of R. C. Gunning)”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **45**:4 (1983), 501–520.

[22] G. E. Welters, “A criterion for Jacobi varieties”, *Ann. of Math.* (2), **120**:3 (1984), 497–504.

[23] D. Mumford, “An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation Korteweg–de Vries equation and related nonlinear equations”, *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry* (*Kyoto*, 1977), Kinokuniya Book Store, Kyoto, 1978, 115–153.

[24] E. Arbarello, C. De Concini, "On a set of equations characterizing Riemann matrices", *Ann. of Math.* (2), **120**:1 (1984), 119–140.

[25] E. Arbarello, C. De Concini, "Another proof of a conjecture of S. P. Novikov on periods of abelian integrals on Riemann surfaces", *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 163–178.

[26] A. Beauville, O. Debarre, "Une relation entre deux approches du problème de Schottky", *Invent. Math.*, **86**:1 (1986), 195–207.

[27] O. Debarre, "The trisecant conjecture for Pryms", *Theta functions–Bowdoin* 1987, *Part* 1 (*Brunswick, ME*, 1987), Proc. Sympos. Pure Math., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, 621–626.

[28] В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер, "Векторные теоремы сложения и функции Бейкера–Ахиезера", *ТМФ*, **94**:2 (1993), 200–212.

[29] V. Buchstaber, I. Krichever, "Multidimensional vector addition theorems and the Riemann theta functions", *Internat. Math. Res. Notices*, 1996, № 10, 505–513.

[30] A.-L. Cauchy, "Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique", *Gallica-Math*, Œuvres complètes sér. 2, **3**; `http://math-doc.ujf-grenoble.fr/GALLICA`.

[31] Я. Ацел, Ж. Домбр, *Функциональные уравнения с несколькими переменными и их применение в математике, теории информации, а также в науках о природе и обществе*, Физматлит, М., 2003.

[32] N. H. Abel, "Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables", *Magazin for Naturvidenskaberne*, *Cristiania*, **1**:1 (1823); *Œuvres complètes*, **1**, 1881, 1–10; `http://math-doc.ujf-grenoble.fr/GALLICA`.

[33] G. Frobenius, L. Stickelberger, "Über die Additon und Multiplication der elliptischen Funtionen", *J. Reine Angew. Math.*, **88** (1880), 146–184.

[34] S. Grushevsky, "Cubic equations for the hyperelliptic locus", *Asian J. Math.*, **8**:1 (2004), 161–172.

[35] S. Grushevsky, "Erratum to: 'Cubic equations for the hyperelliptic locus'", *Asian J. Math.*, **9**:2 (2005), 273.

[36] G. Pareschi, M. Popa, "Castelnuovo theory and the geometric Schottky problem", `http://arXiv.org/math.AG/0407370`.

[37] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Grundlehren Math. Wiss., **267**, Springer-Verlag, 1985.

[38] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, "Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов", *Функц. анализ и его прил.*, **21**:2 (1987), 46–63.

[39] P. G. Grinevich, S. P. Novikov, "Topological charge of the real periodic finite-gap sine-Gordon solutions", *Comm. Pure Appl. Math.*, **56**:7 (2003), 956–978; `http://arXiv.org/math-ph/0111039`.

[40] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, "Трилинейные функциональные уравнения", *УМН*, **60**:2 (2005), 151–152.

[41] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, "Законы сложения на якобианах плоских алгебраических кривых", *Труды МИАН*, **251** (2005), 1–72.

[42] R. Hirota, *The direct method in soliton theory*, Cambridge Tracts in Math., **155**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[43] H. W. Braden, V. M. Buchstaber, "The general analytic solution of a functional equation of addition type", *SIAM J. Math. Anal.*, **28**:4 (1997), 903–923.

[44] И. М. Кричевер, "Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц", *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 45–54.

[45] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon, "Spin generalization of the Calogero–Moser system and the matrix KP equation", *Amer. Math. Transl. Ser.* 2, **170** (1995), 83–119.

[46] I. Krichever, “Elliptic solutions to difference nonlinear equations and nested Bethe ansatz equations”, *Calogero–Moser–Sutherland models* (*Montréal*, *QC*, 1997), CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 2000, 249–271.

[47] И. М. Кричевер, А. В. Забродин, “Спиновое обобщение модели Рейсенарса–Шнайдера, неабалева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина”, *УМН*, **50**:6 (1995), 3–56.

[48] I. Krichever, “Integrable linear equations and the Riemann–Schottky problem”, `http://arXiv.org/math.AG/0504192`.

[49] I. Krichever, “A characterization of Prym varieties”, `http://arXiv.org/math.AG/0506238`.

[50] H. F. Baker, *Abel’s theorem and the allied theory including the theory of the theta functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1897.

[51] P. J. Olver, *Classical invariant theory*, London Math. Soc. Stud. Texts, **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[52] B. Grammaticos, A. Ramani, J. Hietarinta, “Multilinear operators: the natural extension of Hirota’s bilinear formalism”, *Phys. Lett. A*, **190**:1 (1994), 65–70.

[53] F. Calogero, “Exactly solvable one-dimensional many-body problems”, *Lett. Nuovo Cimento* (2), **13**:11 (1975), 411–416.

[54] F. Calogero, “On a functional equation connected with integrable many-body problems”, *Lett. Nuovo Cimento* (2), **16**:3 (1976), 77–80.

[55] V. M. Buchstaber, A. M. Perelomov, “On the functional equation related to the quantum three-body problem”, *Contemporary mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **175**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 15–34.

[56] V. M. Buchstaber, D. V. Leykin, “Hyperelliptic addition law”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:Suppl. 1 (2005), 106–123.

[57] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, “Hyperelliptic Kleinian functions and applications”, *Solitons*, *geometry*, *and topology*: *on the crossroad*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, eds. V. M. Buchstaber and S. P. Novikov, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 1–33.

[58] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, “Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications”, *Rev. Math. Math. Phys.*, **10**:2 (1997), 3–120.

[59] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Функциональные уравнения, определяющие умножение в непрерывном базисе Кричевера–Новикова”, *УМН*, **61**:1 (2006), 171–172.

[60] E. Arbarello, G. Marini, I. Krichever, “Characterizing Jacobians via flexes of the Kummer variety”, `http://arXiv.org/math.AG/0502138`.

[61] J. L. Burchnall, T. W. Chaundy, “Commutative ordinary differential operators. I”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **21** (1923), 420–440.

[62] J. L. Burchnall, T. W. Chaundy, “Commutative ordinary differential operators. II”, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **118** (1928), 557–583.

[63] G. Segal, G. Wilson, “Loop groups and equations of KdV type”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **61** (1985), 5–65.

[64] P. Deligne, D. Mumford, “The irreducibility of the space of curves of given genus”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **36** (1969), 75–109.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
Математический институт им. В. А. Стеклова;
School of Mathematics, University of Manchester
E-mail: `buchstab@mi.ras.ru`

Поступила в редакцию
20.12.2005

И. М. Кричевер (I. M. Krichever)
Columbia University;
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
E-mail: `krichev@math.columbia.edu`