

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Ильина, И. М. Кричевер, Н. А. Некрасов, Двумерные периодические операторы Шредингера, интегрируемые на «собственном» уровне энергии, *Функц. анализ и его прил.*, 2019, том 53, выпуск 1, 31–48

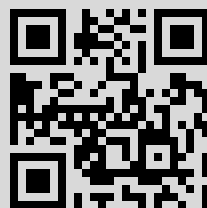
DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 138.86.44.163

9 июня 2022 г., 07:35:25



УДК 517.93

Двумерные периодические операторы Шрёдингера, интегрируемые на «собственном» уровне энергии*

© 2019. А. В. Ильина, И. М. Кричевер, Н. А. Некрасов

В первой части настоящей работы доказано, что ферми-кривая двумерного периодического оператора Шрёдингера с положительным потенциалом, точки которой параметризуют блоховские решения уравнения Шрёдингера на нулевом уровне энергии, является гладкой M -кривой. Кроме того, полосы блоховских решений расположены по одному на каждом из неподвижных овалов некоторой антиголоморфной инволюции. При деформации потенциала топологический тип устойчив до тех пор, пока при каком-то значении параметра деформации для соответствующего потенциала нулевой уровень энергии не становится собственным в пространстве (анти)периодических функций. Вторая часть работы посвящена построению таких потенциалов с помощью обобщения конструкции Новикова–Веселова.

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3626>

§1. Введение

Теория периодических двумерных операторов, интегрируемых на *одном уровне энергии*, восходит к работе [1], в которой была предложена алгебро-геометрическая конструкция интегрируемых двумерных операторов Шрёдингера в магнитном поле

$$\tilde{H} = (i\partial_x + A_1(x, y))^2 + (i\partial_y + A_2(x, y))^2 + u(x, y).$$

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем предполагать, что этот уровень нулевой, так как сдвигом потенциала $u \rightarrow u - E$ уравнение $\tilde{H}\psi = E\psi$ сводится к уравнению $\tilde{H}\psi = 0$.

Конструкция работы [1] основана на понятии *двухточечной* *двупараметрической* функции Бейкера–Ахиезера $\psi(x, y, p)$, определяемой по гладкой алгебраической кривой Γ рода g с двумя отмеченными точками P_{\pm} и эффективному неспециальному дивизору $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$. Функция Бейкера–Ахиезера и коэффициенты оператора \tilde{H} были явно выписаны в терминах тэта-функции Римана, ассоциированной с кривой Γ .

В работах [8], [9] Новиковым и Веселовым были найдены условия, выделяющие алгебро-геометрические данные $\{\Gamma, P_{\pm}, D\}$, которым отвечают *потенциальные* операторы

$$H = -\Delta + u(x, y), \quad \Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}, \quad (1.1)$$

т. е. операторы с $A_i \equiv 0$. Соответствующие кривые должны быть кривыми с голоморфной инволюцией $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$, имеющей только две неподвижные точки

*Исследование финансировалось в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100». Работа А. В. Ильиной была поддержана грантом РФФИ 18-01-00273а.

$P_{\pm} = \sigma(P_{\pm})$. Необходимо подчеркнуть, что последнее условие являлось ключевым не только для потенциальной редукции, но и для другого замечательного результата Новикова и Веселова: соответствующие функции Бейкера–Ахиезера были явно выражены через тэта-функции Прима.

Природа условий Новикова–Веселова была прояснена в работе [5], одним из основных результатов которой было конструктивное описание структуры *комплексной ферми-кривой* двумерного периодического оператора Шрёдингера, т. е. римановой поверхности Γ^{fermi} (далее Γ^f), точки $p \in \Gamma^f$ которой параметризуют решения уравнения

$$(-\Delta + u(x, y))\psi(x, y, p) = 0, \quad \Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}, \quad (1.2)$$

являющиеся собственными для операторов сдвига

$$\psi(x + 2\pi\ell_1, y, p) = w_1(p)\psi(x, y, p), \quad \psi(x, y + 2\pi\ell_2, p) = w_2(p)\psi(x, y, p). \quad (1.3)$$

Обычно подобные решения в спектральной теории периодических операторов называются решениями Блоха–Флоке, а множество пар $(w_1, w_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$ ненулевых комплексных чисел, для которых существует блоховское решение с соответствующими мультипликаторами Флоке, называется множеством Блоха–Флоке. Мы будем обозначать его через Γ^{BF} . Утверждение о том, что это множество задается аналитическим уравнением $R(w_1, w_2) = 0$, т. е. является аналитической комплексной кривой, было получено И. А. Таймановым как следствие теоремы Келдыша о резольвентах семейства вполне непрерывных операторов (см. детали и историю вопроса в [5], [10]). Ферми-кривая является частичной нормализацией кривой Блоха–Флоке, т. е. существует голоморфное отображение $\Gamma^f \rightarrow \Gamma^{BF}$, которое взаимно однозначно вне сингулярных точек кривой Γ^{BF} (и их прообразов на Γ^f). Для потенциалов общего положения кривая Γ^{BF} является гладкой и понятия ферми-кривой и спектральной кривой Блоха–Флоке совпадают.

Одной из целей настоящей работы является обобщение конструкции Новикова–Веселова на случай *собственного уровня энергии*, а именно, на случай, когда $E = 0$ является собственным значением оператора H в пространстве (анти)периодических функций. Особая роль собственного уровня состоит в том, что если кратность вырождения этого уровня нечетна, то соответствующая спектральная ферми-кривая обязательно является *сингулярной*.

Поясним последнее утверждение. Из самосопряженности оператора Шрёдингера следует, что если ψ есть блоховское решение уравнения (1.2) с мультипликаторами (w_1, w_2) , то существует двойственное блоховское решение ψ^σ того же уравнения с мультипликаторами (w_1^{-1}, w_2^{-1}) , т. е. ферми-кривая инвариантна относительно инволюции

$$\sigma: \Gamma^f \mapsto \Gamma^f, \quad (w_1, w_2) \mapsto (w_1^{-1}, w_2^{-1}). \quad (1.4)$$

Неподвижные точки этой инволюции существуют только в том случае, когда $E = 0$ является собственным уровнем (анти)периодической задачи для оператора H . Эти точки являются точками самопересечения ферми-кривой, т. е. ферми-кривая в этом случае является сингулярной.

Как известно, любая сингулярная кривая допускает нормализацию, т. е. отображение $\nu: \Gamma \rightarrow \Gamma^f$ гладкой кривой Γ на Γ^f , которое является взаимно однозначным вне сингулярных точек ферми-кривой Γ^f . Хотя понимание того, что

ферми-кривая сингулярна, важно для мотивировки конструкции, сама конструкция основана на описании аналитических свойств прообраза функции Бейкера–Ахиезера на нормализации спектральной кривой, т. е. на гладкой кривой Γ . Соответствующие кривые — это кривые с инволюцией, имеющей $n+1$ пар неподвижных точек $(P_{\pm}, p_{\pm}^1, \dots, p_{\pm}^n)$. Подчеркнем, что аналитические свойства вводимых нами функций Бейкера–Ахиезера на таких кривых для $n > 0$ совпадают с аналитическими свойствами функций, приводящих к так называемым «многосолитонным на фоне конечнозонных» решениям интегрируемых моделей (см., например, [3], [6]), выражение которых через зэта-функции Римана дается сложными детерминантными формулами. Как оказалось, их выражения через подходяще определенные зэта-функции Прима остается справедливым при любом n .

Обобщенная конструкции Новикова–Веселова приводится в четвертом параграфе настоящей работы. Как будет показано ниже, она играет особую роль в спектральной теории двумерных периодических операторов Шрёдингера. Подчеркнем, что в полном объеме задача построения такой теории, несмотря на существенное продвижение в [5], остается *нерешенной*. В частности, остается открытым вопрос о доказательстве *необходимости* найденных ранее в работах [8], [5], [7] *достаточных* условий на спектральные данные, отвечающие неособым вещественным потенциалам. Эти условия зависят от топологического типа двух естественных коммутирующих антиголоморфных инволюций ферми-кривой Γ^f . Первая из них,

$$\tau: \Gamma^f \mapsto \Gamma^f, \quad (w_1, w_2) \mapsto (\bar{w}_1, \bar{w}_2), \quad (1.5)$$

есть простое следствие вещественности потенциала. Действительно, если ψ является блоховским решением уравнения Шрёдингера с вещественным потенциалом, то $\bar{\psi}$ также является блоховским решением того же уравнения. Так как точки ферми-поверхности параметризуют все блоховские решения, то найдется точка $\tau(p)$, такая, что $\bar{\psi}(x, y, p) = \psi(x, y, \tau(p))$. Точки неподвижных овалов антиинволюции τ параметризуют *вещественные блоховские решения* уравнения Шрёдингера.

Неподвижные точки второй антиголоморфной инволюции $\sigma\tau$ отвечают парам мультипликаторов, таким, что $|w_i| = 1$. При этом

$$\sigma\tau(p) = p \implies \psi(x, y, \sigma(p)) = \bar{\psi}(x, y, p). \quad (1.6)$$

Простое наблюдение, что антиинволюция $\sigma\tau$ ферми-кривой операторов Шрёдингера с *положительным* потенциалом не имеет неподвижных точек, явилось ключевым при доказательстве того, что такая ферми-кривая является M -кривой относительно антиинволюции τ и что точки дивизора полюсов блоховской функции, которые вместе с самой кривой однозначно определяют потенциал, расположены по одной на всех (кроме одного) неподвижных овалах антиинволюции τ . Подобное описание спектральных данных хорошо известно в теории одномерного оператора Шрёдингера [2].

Для общего вещественного потенциала число неподвижных овалов антиинволюции $\sigma\tau$ всегда *конечно*. При непрерывной деформации потенциала это число

может изменяться только тогда, когда ферми-кривая Γ^f становится сингулярной, точнее, когда при каком-то параметре деформации для соответствующего потенциала нулевой уровень энергии становится собственным. Это обстоятельство и объясняет особую роль, которую играют обобщенные потенциалы Новикова–Веселова.

§2. Необходимые сведения

Мы начнем с описания спектральной ферми-кривой и кривой Блоха–Флоке для простейшего случая «свободного» оператора Шрёдингера $H_0 = -\Delta$ на уровне $E \neq 0$. Блоховские решения уравнения (1.2) с $u = -E$ параметризуются ненулевым комплексным параметром $k \in \mathbb{C}^*$ и имеют вид

$$\psi(z, \bar{z}, k) = e^{kz - k^{-1} \frac{E}{4} \bar{z}}, \quad (2.1)$$

т. е. в данном случае Γ^f совпадает с \mathbb{C}^* . Соответствующие множители Флоке даются формулами

$$w_1(k) = e^{2\pi(k - k^{-1} \frac{E}{4})\ell_1}, \quad w_2(k) = e^{2\pi i(k + k^{-1} \frac{E}{4})\ell_2}, \quad (2.2)$$

которые определяют отображение

$$W: \mathbb{C}^* \mapsto (\mathbb{C}^*)^2, \quad k \mapsto (w_1(k), w_2(k)).$$

Образ отображения W и есть спектральная кривая Блоха–Флоке Γ_0^{BF} оператора $H_0 - E$. Голоморфная и антиголоморфная инволюции (1.4), (1.5) для рассматриваемого случая имеют вид

$$\sigma: k \mapsto -k, \quad \tau: k \mapsto -\frac{E}{4k}.$$

Единственные особенности кривой Γ_0^{BF} — это точки самопересечения, являющиеся образами пар «резонансных» точек k, k' , определяемых уравнениями $w_i(k) = w_i(k')$. Такие пары параметризуются целыми числами n, m и находятся из уравнений

$$k - \frac{E}{4k} - \left(k' - \frac{E}{4k'}\right) = \frac{in}{\ell_1}, \quad k + \frac{E}{4k} - \left(k' + \frac{E}{4k'}\right) = \frac{m}{\ell_2}. \quad (2.3)$$

Решая (2.3), получаем $k = k_{n,m}^\pm$ и $k' = k_{-n,-m}^\mp$, где

$$k_{n,m}^\pm := \frac{m\ell_1 + in\ell_2}{4\ell_1\ell_2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4E\ell_1^2\ell_2^2}{m^2\ell_1^2 + n^2\ell_2^2}} \right). \quad (2.4)$$

Координаты нодальных точек кривой Γ_0^{BF} равны

$$w_1(k_{n,m}^\pm) = \exp \left(\pi in \pm \frac{\pi m \ell_1}{\ell_2} \sqrt{1 - \frac{4E\ell_1^2\ell_2^2}{m^2\ell_1^2 + n^2\ell_2^2}} \right),$$

$$w_2(k_{n,m}^\pm) = \exp \left(\pi im \mp \frac{\pi n \ell_2}{\ell_1} \sqrt{1 - \frac{4E\ell_1^2\ell_2^2}{m^2\ell_1^2 + n^2\ell_2^2}} \right).$$

Значения E , для которых подкоренное выражения в этих формулах обращается в нуль, т. е.

$$E_{|n|,|m|} = \frac{m^2 \ell_1^2 + n^2 \ell_2^2}{4 \ell_1^2 \ell_2^2},$$

являются собственными значениями оператора $H_0 = -\Delta$ в пространстве (анти)периодических функций. В этом случае соответствующая кривая Блоха–Флоке помимо бесконечного числа простых точек самопересечения имеет одну *четырёхкратную* точку самопересечения. Доказательство существования ферми-кривой для общего периодического потенциала, предложенное в [5], конструктивно и основано на построении и исследовании сходимости рядов, задающих *формально блоховские решения*.

Для любого $k_0 \in C^*$ определим комплексные числа k_ν как решения уравнения $w_1(k) = w_{10} := w_1(k_0)$, где $w_1(k)$ дается формулой (2.2). Индексы ν , нумерующие k_ν , — это пары (n, \pm) , состоящие из целого числа и знака. Легко проверить, что

$$k_\nu = \frac{in}{2\ell_1} + \frac{1}{2} \left(k_0 - \frac{E}{4k_0} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{in}{\ell_1} + \left(k_0 - \frac{E}{4k_0} \right) \right)^2 + E}.$$

Введем обозначения $\psi_\nu := \psi(x, y, k_\nu)$ и $w_{2\nu} := w_2(k_\nu)$, где ψ и w_2 даются формулами (2.1) и (2.2) соответственно.

В предположении, что $w_{20} \neq w_{2\nu}$ для всех $\nu \neq 0$, определим формальные ряды

$$F(y, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} F_s(y, k_0), \quad (2.5)$$

$$\Psi(x, y, k_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s, \quad \varphi_s = \sum_{\nu} c_\nu^s(y) \psi_\nu(x, y), \quad (2.6)$$

рекуррентными формулами

$$F_s = r_0^{-1} \langle \psi_0^+ v \varphi_{s-1} \rangle_x, \quad (2.7)$$

$$c_0^0 = 1, \quad c_0^s = -r_0^{-1} \sum_{i=1}^s F_i \langle \psi_0^+ \varphi_{s-i} \rangle_x, \quad s \geq 1. \quad (2.8)$$

Для $\nu \neq 0$ положим $c_\nu^0 = 0$; при $s \geq 1$

$$c_\nu^s = \frac{w_{2\nu}}{r_\nu(w_{2\nu} - w_{20})} \int_y^{y+2\pi\ell_2} \left\langle \psi_\nu^+ \left(-v(x, y) \varphi_{s-1} + \sum_{i=1}^s 2F_i \varphi_{s-i, y} \right) \right\rangle_x + \frac{w_{2\nu}}{r_\nu(w_{2\nu} - w_{20})} \int_y^{y+2\pi\ell_2} \left\langle \psi_\nu^+ \left(F_{iy} \varphi_{s-i} + \sum_{l=1}^{s-i} F_l F_l \varphi_{s-i-l} \right) \right\rangle_x, \quad (2.9)$$

где

$$\psi_\nu^+ = \psi(x, y, -k_\nu), \quad r_\nu = r(k_\nu), \quad r(k) := 4\pi i \ell_1 \left(k + \frac{E}{4k} \right), \quad (2.10)$$

а выражение $\langle f \rangle_x$ для любой $2\pi\ell_1$ -периодической функции f переменной x означает ее среднее по периоду.

Лемма 2.1. *Формула*

$$\tilde{\psi}(x, y, k_0) = \exp\left(\int_0^y F(y', k_0) dy'\right) \Psi(x, y, k_0) \Psi^{-1}(0, 0, k_0)$$

определяет формально блоховское решение уравнения

$$(-\partial_x^2 - \partial_y^2 + v(x, y) - E)\tilde{\psi} = 0, \quad (2.11)$$

$$\tilde{\psi}(x + 2\pi\ell_1, y, k_0) = w_{10}\tilde{\psi}(x, y, k_0), \quad \tilde{\psi}(x, y + 2\pi\ell_2, k_0) = \tilde{w}_{20}\tilde{\psi}(x, y, k_0),$$

где

$$\tilde{w}_{20} = w_{20} \exp\left(\int_0^{2\pi\ell_2} F(y', k_0) dy'\right).$$

Для описания структуры ферми-поверхности зафиксируем положительное число $h > 0$ и определим окрестности R_{nm}^\pm резонансных точек (2.4) так, чтобы для любого $k_0 \notin R_{nm}^\pm$ имело место неравенство

$$|w_{20}w_{2\nu}^{-1} - 1| > h, \quad \nu \neq 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что константа h выбрана так, что области R_{nm}^\pm не пересекаются.

Лемма 2.2 [5]. *Пусть $v(x, y)$ аналитически продолжима в некоторую окрестность вещественных значений переменных x, y . Тогда существует константа N_0 , такая, что для любого $k_0 \notin R_{nm}^\pm$, такого, что $|k_0| + |k_0^{-1}| > N_0$, ряды, задаваемые формулами (2.5)–(2.9), равномерно абсолютно сходятся и определяют блоховское решение $\tilde{\psi}(x, y, k_0)$ уравнения (2.11), аналитическое по k_0 и не обращающееся в нуль ни при каких x, y .*

Для построения формальных блоховских решений в резонансном случае (т. е. когда не выполнено условие $w_{20} \neq w_{2\nu}$) поступим следующим образом. Обозначим через I произвольное конечное подмножество индексов ν , такое, что

$$w_{2\alpha} \neq w_{2\nu}, \quad \alpha \in I, \nu \notin I.$$

Матричные аналоги предшествующих формул позволяют построить формальное квазиблоховское решение уравнения (2.11), т. е. набор решений $\hat{\psi}_\alpha(x, y, w_{10})$ уравнения Шрёдингера со следующими свойствами монодромии:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_\alpha(x + 2\pi\ell_1, y, w_{10}) &= w_{10}\hat{\psi}_\alpha(x, y, w_{10}), \\ \hat{\psi}_\alpha(x, y + 2\pi\ell_2, w_{10}) &= \sum_\beta T_\alpha^\beta(w_{10})\hat{\psi}_\beta(x, y, w_{10}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для краткости мы не приводим эти ряды полностью (см. [5]), поскольку для дальнейшего нам достаточно утверждения об их сходимости, а также явного вида только первых двух членов ряда для матрицы $T(w_{10})$:

$$(T_0)_\alpha^\beta = w_{2\beta}\delta_\alpha^\beta, \quad (T_1)_\alpha^\beta = \frac{w_{2\beta}}{r_\beta} \int_0^{2\pi\ell_2} \langle \psi_\beta^+ v \psi_\alpha \rangle_x dy'. \quad (2.13)$$

Для $k_0 \in R_{nm}^\pm$, такого, что $|k_0| + |k_0^{-1}| > N_0$, в качестве множества резонансных индексов выберем такую пару индексов: $\nu = 0$ и ν_0 , такое, что $k_{\nu_0} \in R_{-n, -m}^\mp$.

Как доказано в [5], формальные ряды, задающие квазиблоховские решения, равномерно и абсолютно сходятся и определяют функции $\hat{\psi}_\alpha(x, y, w_{10})$, голоморфные по переменной $w_{10} \in W_{n,m}^\pm$. Здесь $W_{n,m}^\pm$ — область комплексной плоскости, являющаяся образом окрестности $R_{n,m}^\pm$ при отображении, заданном функцией $w_1(k_0)$. Подчеркнем, что одновременно $W_{n,m}^\pm$ является образом при отображении, заданном функцией w_1 , и второй резонансной окрестности $R_{-n,-m}^\mp$.

Рассмотрим матрицу $T(w_{10})$ из равенств (2.12). Она голоморфно зависит от $w_{10} \in W_{n,m}^\pm$. В рассматриваемом случае это (2×2) -матрица и степень дивизора нулей дискриминанта ее характеристического уравнения

$$\det(\tilde{w}_2 \cdot \mathbb{I} - T(w_{10})) = 0 \quad (2.14)$$

равна 2. Иными словами, характеристическое уравнение (2.14) задает над областью W_{nm}^\pm двулистное накрытие $\Gamma_{n,m}^\pm$, имеющее внутри этой области две точки ветвления. Назовем резонансную точку k_{nm}^\pm отмеченной, если поверхность $\Gamma_{n,m}^\pm$ сингулярна, т. е. если дискриминант характеристического уравнения имеет один двукратный нуль.

Лемма 2.3. *Для неотмеченных резонансных точек k_{nm}^\pm блоховская функция $\tilde{\psi}(x, y, k_0)$ аналитически продолжается из нерезонансной области на риманову поверхность $\Gamma_{n,m}^\pm$ и имеет на ней один простой полюс. Для отмеченных резонансных точек блоховская функция $\tilde{\psi}(x, y, k_0)$ голоморфно продолжается из нерезонансной области в области $R_{n,m}^\pm, R_{-n,-m}^\mp$.*

Аналогичным образом описывается продолжение блоховских функций в «центральную область» R_0 , заданную неравенствами

$$2\pi\ell_1 \left| \operatorname{Re} \left(k_0 - \frac{E}{4k_0} \right) \right| < r, \quad 2\pi\ell_1 \left| \operatorname{Im} \left(k_0 - \frac{E}{4k_0} \right) \right| < N,$$

где N целое. Функция $w_1(k_0)$ представляет R_0 как $2N$ -листное накрытие области $W_0 \subset C^*$, заданной неравенствами $e^{-r} < |w_{10}| < e^r$. Для любого k_0 , такого, что $w_1(k_0) \in W_0$, в качестве набора отмеченных индексов I выберем те индексы, для которых $k_\alpha \in R_0$.

Лемма 2.4. *В предположениях леммы 2.2 существуют константы c_1, c_2 , такие, что для $r > c_1, N > c_2$ ряды, определяющие квазиблоховские решения, равномерно и абсолютно сходятся. Блоховское решение уравнения Шрёдингера аналитически продолжается из нерезонансной области на риманову поверхность $\tilde{\Gamma}_0$, заданную над W_0 характеристическим уравнением (2.14) для соответствующей $(2N \times 2N)$ -матрицы монодромии. Продолжение блоховского решения на $\tilde{\Gamma}_0$ является мероморфной функцией с полюсами, не зависящими от (x, y) . Число этих полюсов не превосходит числа резонансных пар $k_{n,m}^\pm \in W_0$. В общем случае, когда $\tilde{\Gamma}_0$ неособа, их число равно роду поверхности $\tilde{\Gamma}_0$.*

Приведенные результаты позволяют описать глобально структуру Γ^f как поверхность, полученную из комплексной k_0 -плоскости «вклеивкой» $\tilde{\Gamma}_0$ вместо области R_0 и «вклеивкой» поверхностей Γ_{nm}^\pm для неотмеченных пар резонансных точек. Если число неотмеченных пар конечно, то Γ^f имеет конечный род и компактифицируется двумя отмеченными точками. Соответствующие потенциалы называются алгебро-геометрическими (или конечнозонными) на нулевом

уровне энергии. Согласно [5], такие потенциалы плотны в пространстве всех периодических потенциалов.

Замечание 2.5. Понятие «вклейки» означает следующее: функция w_1 позволяет отождествить границы «вырезанной» и вклеиваемой областей. Комплексная структура на объединении дополнения к вырезанной области и вклеиваемой области определяется тем, что голоморфные в этой структуре функции являются *непрерывными* на линии склейки.

§3. Ферми-кривые положительных потенциалов

Описанная в предыдущем параграфе конструкция позволяет рассматривать Γ^f как своеобразное возмущение ферми-поверхности оператора $H = -\Delta - E$ для любого E . В работе [5] значение E для определенности было выбрано равным 4. Вариация этого параметра позволяет более эффективно описать структуру поверхности Γ^f для операторов $H = -\Delta - E + v(x, y)$ в случае, когда периодическая функция v достаточно мала, т.е. $|v(x, y)| < \varepsilon$, а константа E не совпадает с собственными значениями оператора H_0 , т.е. $E \neq E_{|n|, |m|}$. Не ограничивая общности, можно считать, что среднее по тору возмущающего потенциала равно нулю: $\langle\langle v \rangle\rangle = 0$.

В этом случае коэффициенты рядов, определяющих формальные блоховские и квазиблоховские решения, мажорируются коэффициентами ряда геометрической прогрессии с показателем ε , что автоматически гарантирует их сходимость. Более того, ε можно выбрать так, что в построении Γ^f отсутствует «центральная» резонансная область, т.е. Γ^f получается вклейкой только римановых поверхностей $\Gamma_{n,m}^\pm$ для неотмеченных пар резонансных точек и, как следствие, Γ^f *гладкая*. Дальнейшую эффективизацию допускает описание Γ^f в случае $E < 0$, которое остается справедливым для положительных потенциалов. Ниже мы приводим соответствующее описание.

Рассмотрим функцию

$$p(k) := \frac{\ln w_1(k)}{2\pi\ell_1} = k - \frac{E}{4k}.$$

Риманова поверхность функции $k(p)$ двулистно накрывает комплексную p -плоскость с двумя точками ветвления $\pm p_0 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-E}$. Для $E < 0$ мы будем представлять ее склеенной из двух экземпляров p -плоскости с разрезом вдоль вещественной оси между точками ветвления $\pm p_0$. При склейке верхний (нижний) берег разреза на одном листе отождествляется с нижним (верхним) берегом разреза на втором листе. В такой реализации голоморфная инволюция σ отображает p в $-p$ на том же листе, а антиголоморфная инволюция τ отображает p в \bar{p} с перестановкой листов.

Назовем набор данных Π , состоящий из вещественного числа $p_0 > 0$ и пар комплексных чисел $\{p_s^j, j = 1, 2\}$, где s пробегает конечное или бесконечное подмножество пар целых чисел ($n \neq 0, m$), допустимым, если $p_{n,m}^1 = -p_{-n,-m}^2$, $p_{n,m}^2 = -p_{-n,-m}^1$,

$$\operatorname{Im} p_s^j = \frac{n}{2\ell_1}, \quad |p_s^j - p(k_{n,m}^\pm)| = o\left(\frac{1}{n^2 + m^2}\right) \quad (3.1)$$

и отрезки $[p_s^1, p_s^2]$, параллельные вещественной оси, не пересекаются. Отметим, что вторая часть условий (3.1) пуста, если набор индексов s конечен, а для бесконечного набора индексов эти условия означают, что соответствующие пары асимптотически локализованы в окрестности соответствующей резонансной точки.

Для каждого допустимого набора Π построим риманову поверхность $\Gamma(\Pi)$ из двух копий комплексной p -плоскости с разрезами между точками p_0 и $-p_0$ на обоих листах и вдоль отрезков $[p_s^1, p_s^2]$ на первом листе и отрезков $[\bar{p}_s^1, \bar{p}_s^2]$ на втором листе, отождествляя верхний (нижний) берег разреза между p_0 и $-p_0$ на первом листе с нижним (верхним) берегом разреза на втором листе и верхний (нижний) берег разреза $[p_s^1, p_s^2]$ на первом листе с нижним (верхним) берегом разреза $[\bar{p}_s^1, \bar{p}_s^2]$ на втором листе. После склейки каждому из разрезов соответствует нетривиальный цикл на поверхности $\Gamma(\Pi)$. Обозначим эти циклы через a_0 и a_s соответственно.

Теорема 3.1. *Для любого вещественного положительного периодического потенциала $u(x, y) > 0$, аналитически продолжимого в окрестность вещественных x, y , блоховские решения уравнения (1.2) параметризуются точками римановой поверхности $\Gamma(\Pi)$ для некоторого допустимого набора Π . Соответствующая функция $\check{\psi}$ мероморфна и имеет по одному простому полюсу на каждом из циклов a_s .*

Доказательство. Для $E < 0$ координаты всех точек самопересечения $w_i(k_{nm}^\pm)$ вещественны. Как уже говорилось выше, для достаточно малых ε множество резонансных индексов состоит из двух элементов, которые можно отождествить с (n, m, \pm) и $(-n, -m, \mp)$. Непосредственно проверяется, что имеют место равенства

$$\psi(k_{n,m}^\pm) = \overline{\psi(k_{-n,-m}^\mp)}, \quad \psi^+(k_{n,m}^\pm) = \overline{\psi(k_{-n,-m}^\pm)}, \quad r_{n,m}^\pm = \overline{r_{-n,-m}^\mp}, \quad (3.2)$$

где $r_{n,m}^\pm := r(k_{n,m}^\pm)$, а функция $r(k)$ определена равенством (2.10). Из формул (3.2) и (2.13) для $w_{10} = w_1(k_{n,m}^\pm)$ следует, что матрица монодромии имеет вид

$$T(w_1(k_{nm}^\pm)) = w_2(k_{nm}^\pm) \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \bar{\kappa} & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2), \quad (3.3)$$

где $\kappa = (r_{-n,-m}^\mp)^{-1} \langle \psi^+(k_{-n,-m}^\mp) v \psi(k_{n,m}^\pm) \rangle$, а при установлении того, что диагональные элементы равны единице, мы использовали тот факт, что среднее от v равняется нулю.

Из (3.3) следует, что собственные значений матрицы $T(w_1(k_{nm}^\pm))$ вещественны и различны в первом порядке по ε . Тогда, так как ферми-кривая инвариантна относительно τ , то они обязаны быть вещественными во всех порядках. Иными словами, в окрестности каждой неотмеченной пары резонансных точек возникает «запрещенная» зона — неподвижный овал антиинволюции τ . Так как дивизор полюсов блоховской функции инвариантен относительно τ , а в окрестности резонансной пары имеется только один полюс, то он лежит на соответствующем овале a_s . Теорема доказана для потенциалов вида $u = -E + v$ для $E < 0$ и достаточно малого возмущения v . \square

Переобозначение. До сих пор блоховские решения уравнения (1.2), построенные с помощью теории возмущений, обозначались через $\check{\psi}$. В дальнейшем мы

для краткости будем опускать знак волны, обозначая их через $\psi(x, y, p)$, $p \in \Gamma^f$. Аналогично, мы будем обозначать множители Флоке через $w_i(p)$.

Наш следующий шаг — доказательство того, что установленные свойства ферми-кривой и дивизора полюсов блоховской функции остаются устойчивыми при деформации потенциала u , оставляющей потенциал положительным. Инвариантность кривой Γ^f относительно σ и τ гарантирует, что описанная структура может измениться только: (i) при слиянии циклов a_s для различных s (в этот момент Γ^f будет иметь особенность); (ii) при возникновении на кривой Γ^f пары резонансных точек p, p' , в которых $w_i(p) = w_i(p')$, неподвижных относительно антиинволюции $\sigma\tau$, т. е. $|w_i(p)| = 1$.

Аргументы, идентичные тем, которые использовались при доказательстве теоремы 2.2 работы [5], доказывают, что периодичность потенциала (выражающаяся в том, что на Γ^f определены функции $w_i(p)$) является препятствием к слиянию циклов a_s . Препятствием к возникновению особенностей типа (ii) является положительность потенциала u .

Лемма 3.2. *Антиинволюция от ферми-кривой Γ^f положительного потенциала не имеет неподвижных точек.*

Доказательство. Предположим, что на кривой Γ^f существует неподвижная точка p , $\sigma\tau(p) = p$. Рассмотрим функцию $\psi = \psi(x, y, p)$. По определению она является блоховским решением уравнения (1.2). Умножим левую часть уравнения на двойственную блоховскую функцию ψ^σ и проинтегрируем по тору полуценную периодическую функцию переменных x, y (она периодична в силу того, что множители Флоке функции ψ^σ обратны множителям Флоке функции ψ). Интегрирование по частям дает равенство

$$\int_0^{2\pi\ell_1} \int_0^{2\pi\ell_2} (\partial_x \psi \partial_x \psi^\sigma + \partial_y \psi \partial_y \psi^\sigma + u \psi \psi^\sigma) dx dy = 0.$$

В силу (1.6) имеем $\psi^\sigma = \bar{\psi}$. Отсюда следует, что при $u > 0$ левая часть равенства строго положительна. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы, что одновременно завершает доказательство теоремы. \square

Замечание 3.3. Отметим, что простота описания ферми-кривой как кривой, построенной по некоторому допустимому набору, несколько обманчива. По построению функция p после разрезов и переклеек является многозначной функцией на $\Gamma(\Pi)$, но ее многозначность сводится к прибавлению целых кратных i/ℓ_1 ; поэтому функция $w_1(p) = \exp(2\pi\ell_1 p)$ корректно определена. Это означает, что кривые $\Gamma(\Pi)$ отвечают потенциалам, периодическим по переменной x . Условие периодичности по переменной y , эквивалентное существованию на $\Gamma(\Pi)$ второй функции w_2 , накладывает дополнительные уравнения на допустимые наборы. Несмотря на это, описание ферми-кривых в терминах допустимых наборов, как мы видели, оказывается достаточно эффективным для анализа возмущенных кривых.

§4. Обобщенная конструкция Новикова–Веселова

Цель настоящего параграфа заключается в построении конечнозонных на нулевом уровне энергии операторов Шрёдингера для случая, когда нулевой уровень является собственным.

Пусть Γ — гладкая кривая с инволюцией σ , имеющей $n + 1$ пар неподвижных точек $P_{\pm}, p_{\pm}^i, i = 1, \dots, n$. Кривая Γ является двулиственным накрытием факторкривой $\Gamma_0 := \Gamma/\sigma$, разветвленным в неподвижных точках. Если род кривой Γ_0 равен g_0 , то по формуле Римана–Гурвица род кривой Γ равен $g = 2g_0 + n$. В дальнейшем будет предполагаться, что в окрестности отмеченных точек P_{\pm} фиксированы локальные координаты k_{\pm}^{-1} , нечетные относительно инволюции: $k_{\pm}(p) = -k_{\pm}(\sigma(p))$.

Назовем дивизор $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+n}$ допустимым, если множество точек γ_s и γ_s^{σ} является множеством нулей мероморфного дифференциала $d\Omega$ с простыми полюсами в неподвижных точках, причем

$$\text{res}_{P_{\pm}} d\Omega = \pm 1, \quad \text{res}_{p_{\pm}^i} d\Omega = -\text{res}_{p_{\pm}^i} d\Omega. \quad (4.1)$$

Лемма 4.1. *Для допустимого дивизора D общего положения существует единственная функция Бейкера–Ахиезера $\psi(x, y, p), p \in \Gamma$, со следующими свойствами:*

- (i) ψ является мероморфной функцией на $\Gamma \setminus P_{\pm}$ с простыми полюсами в γ_s (если все точки дивизора D различны);
- (ii) в окрестности точек P_{\pm} функция ψ имеет вид

$$\psi = e^{k_{\pm}(x \pm iy)} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s^{\pm}(x, y) k_{\pm}^{-s} \right), \quad k_{\pm} = k_{\pm}(p); \quad (4.2)$$

- (iii) ее значения в точках p_{\pm}^i удовлетворяют уравнениям

$$\psi(x, y, p_{+}^i) = \psi(x, y, p_{-}^i); \quad (4.3)$$

- (iv) коэффициенты ξ_0^{\pm} в (4.2) равны

$$\xi_0^{+} = 1, \quad \xi_0^{-} = 1. \quad (4.4)$$

Доказательство. Согласно [4], размерность линейного пространства функций, удовлетворяющих первым двум условиям (i), (ii), равна $n + 1$. Следовательно, в общем положении n линейных уравнений из (iii) и нормировка коэффициента $\xi_0^{+} = 1$ однозначно определяют ψ . Доказательство того, что при этом автоматически выполняется второе из равенств (4.4), полностью повторяет аргументы из [8].

Рассмотрим дифференциал $d\Omega_1 = \psi\psi^{\sigma} d\Omega$, где $d\Omega$ — дифференциал, множество нулей которого является объединением дивизоров полюсов функций ψ и ψ^{σ} . В силу этого вне отмеченных точек P_{\pm} дифференциал $d\Omega_1$ имеет полюсы только в точках p_{\pm}^i . Из нечетности локальных координат k_{\pm}^{-1} относительно σ следует, что экспоненциальные особенности функций ψ и ψ^{σ} сокращаются в дифференциале $d\Omega_1$. Значит, последний является мероморфным дифференциалом на Γ . Сумма всех вычетов мероморфного дифференциала равна 0. Из (4.1), (4.3) следует, что сумма вычетов дифференциала $d\Omega_1$ в каждой паре точек p_{\pm}^i равна 0. Следовательно,

$$0 = \text{res}_{P_{+}} \psi\psi^{\sigma} d\Omega + \text{res}_{P_{-}} \psi\psi^{\sigma} d\Omega = 1 - (\xi_0^{-})^2.$$

Априори, ξ_0^{-} — мероморфная функция своих аргументов. Значит, она тождественно равна 1 или -1 . При $x = y = 0$ функция ψ равна 1 тождественно по p . Следовательно, $\xi_0^{-}(0, 0) = 1$, что в силу предыдущего влечет за собой (4.4). \square

Аналитические свойства функции ψ аналогичны тем, которые описывают так называемые «многосолитонные на фоне конечнозонных» решения КдФ [3], что позволяет выразить ее явно, но достаточно громоздко в форме определителей $(n \times n)$ -матриц, элементы которых выражаются через тэта-функции Римана. Нашим следующим шагом является доказательство того, что для произвольного n она допускает простое и явное выражение через подходяще определенные тэта-функции Прима.

На Γ можно выбрать базис a - и b -циклов с канонической матрицей пересечений: $a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j = 0$, $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$, в котором действие инволюции σ выглядит следующим образом:

$$\sigma(a_i) = a_{i+g_0}, \quad \sigma(b_i) = b_{i+g_0}, \quad i = 1, \dots, g_0, \quad (4.5)$$

и

$$\sigma(a_i) = -a_i, \quad \sigma(b_i) = -b_i, \quad i = 2g_0 + 1, \dots, 2g_0 + n. \quad (4.6)$$

Пусть $d\omega_i$ — нормированный базис голоморфных дифференциалов на Γ (т. е. $\oint_{a_j} d\omega_i = \delta_{ij}$). Введем нечетные относительно σ дифференциалы Прима:

$$\begin{aligned} du_i &= d\omega_i - d\omega_{i+g_0}, & i &= 1, \dots, g_0, \\ du_i &= 2d\omega_i, & i &= g_0 + 1, \dots, g_0 + n. \end{aligned}$$

Обозначим через Π матрицу их b -периодов, $\Pi_{i,j} = \oint_{b_i} du_j$, которая определяет соответствующую тэта-функцию Прима

$$\theta(z|\Pi) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^{g+n}} e^{2\pi i(z,m) + \pi i(m,\Pi m)}.$$

Обозначим через $A(p)$ (зависящий от выбора пути) вектор с координатами $A_i(p) = \int_{P_+}^p du_i$, а через $\Omega_{\pm}(p)$ абелевы интегралы, т. е. $\Omega_{\pm} = \int_{P_+}^p d\Omega_{\pm}$, где $d\Omega_{+}$ ($d\Omega_{-}$) — нормированный на нулевые a -периоды мероморфный дифференциал, имеющий полюс только в P_{+} (P_{-}), вида $d\Omega_{\pm} = dk_{\pm}(1 + O(k_{\pm}^{-2}))$. Следует оговориться, что определение интеграла Ω_{+} нуждается в уточнении, поскольку $d\Omega_{+}$ имеет полюс в точке P_{+} . Под интегралом от точки P_{+} подразумевается выбор ветви $\Omega_{+} = k_{+} + O(k_{+}^{-1})$ в окрестности точки P_{+} , а затем аналитическое продолжении вдоль пути. В дальнейшем подразумевается, что пути в определении вектора $A(p)$ и интеграла $\Omega_{\pm}(p)$ совпадают.

Лемма 4.2. *Функция Бейкера–Ахиезера из леммы 4.1 имеет вид*

$$\psi(x, y, p) = \frac{\theta(A(p) + zU_{+} + \bar{z}U_{-} + Z|\Pi)\theta(Z|\Pi)}{\theta(zU_{+} + \bar{z}U_{-} + Z|\Pi)\theta(A(p) + Z|\Pi)} e^{z\Omega_{+}(p) + \bar{z}\Omega_{-}(p)}, \quad (4.7)$$

где координаты векторов U_{+} , U_{-} даются формулой

$$U_{\pm}^j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} d\Omega_{\pm}.$$

При этом

$$Z = - \sum_s A(\gamma_s) + \mathcal{K}, \quad (4.8)$$

где \mathcal{K} — постоянный вектор.

Доказательство. Из свойств монодромии тэта-функции и определения векторов U_{\pm} следует, что функция ψ , заданная формулой в правой части равенства (4.7), является однозначной функцией от $p \in \Gamma$. Легко видеть, что она имеет нужную экспоненциальную особенность в отмеченных точках P_{\pm} . Вне этих точек ψ мероморфна. Докажем, что ее значения в парах точек p_{\pm}^i , $i = 1, \dots, n$, совпадают.

Из нечетности дифференциалов $\sigma^*(d\Omega_{\pm}) = -d\Omega_{\pm}$ следует равенство

$$\Omega_{\pm}(p_{+}^i) - \Omega_{\pm}(p_{-}^i) = \int_{p_{-}^i}^{p_{+}^i} d\Omega_{\pm} = \frac{1}{2} \oint_{a_{2g_0+i}} d\Omega_{\pm} = 0. \quad (4.9)$$

Аналогично, из нечетности дифференциалов Прима следуют равенства

$$\int_{p_{-}^i}^{p_{+}^i} du_j = \frac{1}{2} \int_{a_{2g_0+i}} du_j = 0, \quad j = 1, \dots, g_0, \quad (4.10)$$

$$\int_{p_{-}^i}^{p_{+}^i} du_{g_0+j} = \frac{1}{2} \int_{a_{2g_0+i}} du_{g_0+j} = \delta_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Значит, координаты вектора $A(p_{+}^i) - A(p_{-}^i)$ целочисленны. Поскольку тэта-функция периодична относительно сдвигов аргумента на такие векторы, то из (4.9) следует равенство (4.3).

Аналогично проверяются и равенства (4.4). Первое из них есть следствие определения функции ψ формулой (4.7). Для доказательства второго рассмотрим нечетный цикл a_0 , проекция которого на Γ_0 есть путь, соединяющий точки P_{\pm} . Легко видеть, что он гомологичен циклу

$$a_0 = - \sum_{i=1}^n a_{2g_0+i} \in H_1(\Gamma; \mathbb{Z}).$$

Из этого и равенств (4.10) следует, что координаты вектора $A(P_{-})$ целочисленны, что доказывает второе из равенств (4.4).

Дивизор полюсов $D = D(Z)$ функции ψ , заданной формулой (4.7), — это корректно определенный дивизор нулей многозначной функции $\theta(A(p) + Z|\Pi)$. Стандартным образом доказывается, что степень этого дивизора нулей равна $g+n$. Также стандартно доказывается равенство (4.8), связывающее вектор Z и преобразование Абеля–Прима дивизора $D(Z)$. Для завершения доказательства леммы остается лишь доказать следующую лемму.

Лемма 4.3. *Для произвольного вектора Z (общего положения) дивизор $D(Z)$ нулей (многозначной) функции $\theta(A(p) + Z|\Pi)$ является допустимым, т. е. дивизор $D + D^{\sigma}$ — это дивизор нулей мероморфного дифференциала $d\Omega$ с простыми полюсами в неподвижных точках инволюции σ , вычеты которого в этих точках удовлетворяют равенствам (4.1).*

Мы вернемся к доказательству последнего утверждения после доказательства основного результата этого параграфа:

Теорема 4.4. *Функция Бейкера–Ахиезера ψ , заданная формулой (4.7), где вектор Z — произвольный вектор общего положения, удовлетворяет уравнению (1.2) с потенциалом*

$$u(x, y) = -2\Delta \ln \theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|\Pi) + E, \quad E := 4 \frac{d\Omega_-}{d(k_+^{-1})}(P_+). \quad (4.11)$$

Если для некоторых целочисленных векторов N_1, N_2 и M_1, M_2 имеют место равенства

$$2\pi\ell_1(U_+ + U_-) = N^a + \Pi N^b, \quad 2\pi i\ell_2(U_+ - U_-) = M^a + \Pi M^b, \quad (4.12)$$

то функция $u(x, y)$ является $(2\pi\ell_1, 2\pi\ell_2)$ -периодической, а функции $\psi_i := \psi(x, y, p_i^\pm)$ являются собственными для H в пространстве (анти)периодических функций.

Доказательство. Как было доказано выше, для произвольного вектора Z функция ψ удовлетворяет условиям, определяющим функцию Бейкера–Ахиезера для некоторого дивизора $D(Z)$. Стандартные в теории конечнозонного интегрирования аргументы, основанные лишь на единственности функции Бейкера–Ахиезера, доказывают (1.2) с потенциалом $u = 4\partial_z \xi_1^+$, где ξ_1^+ — это коэффициент разложения (4.2) функции ψ в точке P_+ . В окрестности этой точки имеют место равенства

$$A(p) = -2U_+k_+^{-1} + O(k_+^{-2}), \quad \Omega_-(p) = Ek_+^{-1} + O(k_+^{-2}), \quad (4.13)$$

первое из которых есть следствие билинейных соотношений Римана. Подстановка (4.13) в (4.7) дает формулу (4.11). В общем случае она задает мероморфную квазипериодическую функцию переменных (x, y) . Для сопоставления с результатами предыдущего параграфа рассмотрим дифференциалы

$$dp_1 := d\Omega_+ + d\Omega_- - \sum_{j=0}^{g_0+n} i\nu_j^b du_j, \quad (4.14)$$

$$dp_2 := i(d\Omega_+ - d\Omega_-) - \sum_{j=0}^{g_0+n} i\mu_j^b du_j \quad (4.15)$$

где ν_j^b, μ_j^b — координаты вещественных векторов, входящих в разложения

$$2\pi(U_+ + U_-) = \nu^a + \Pi\nu^b, \quad 2\pi i(U_+ - U_-) = \mu^a + \Pi\mu^b$$

Периоды этих дифференциалов по базисным циклам $a_j, b_j \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ имеют вид

$$\oint_{a_j} dp_1 = -i\nu_j^b, \quad \oint_{b_j} dp_1 = i\nu_j^a, \quad \oint_{a_j} dp_2 = -i\mu_j^b, \quad \oint_{b_j} dp_2 = i\mu_j^a.$$

Отсюда следует, что если выполнены равенства (4.12), то функции

$$w_j(p) = \exp\left(2\pi\ell_j \int^p dp_j\right), \quad (4.16)$$

являются однозначно определенными функциями на кривой Γ . Вне отмеченных точек P_\pm они голоморфны, а в отмеченных точках имеют экспоненциальную особенность. Более того, заметим, что в силу (4.9) имеют место равенства $w_j(p_+^i) = w_j(p_-^i)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда из единственности функции

Бейкера–Ахиезера следуют равенства (1.3), означающие, что функция Бейкера–Ахиезера является блоховским решением уравнения (1.2). Заметим также, что из четности относительно σ дифференциалов $d\Omega_{\pm}$ вытекает, что $w_j(\sigma(p)) = w_j^{-1}(p)$. Так как точки p_{\pm}^i неподвижны относительно σ , то $w_j^2(p_{\pm}^i) = 1$, что завершает доказательство теоремы. \square

Вернемся теперь к доказательству леммы 4.3. Поскольку сама лемма не использовалась при доказательстве основной теоремы этого параграфа, мы приведем лишь его краткое изложение.

Как было доказано выше, функция ψ , заданная формулой (4.7), удовлетворяет уравнению Шрёдингера. Аргументы, идентичные тем, которые использовались при доказательстве леммы 2.3 в [5], приводят к равенству

$$d\Omega := \frac{2i dp_1}{\langle \psi_y \psi^\sigma - \psi \psi_y^\sigma \rangle_x} = \frac{-2i dp_2}{\langle \psi_x \psi^\sigma - \psi \psi_x^\sigma \rangle_y},$$

где, как и выше, символы $\langle \cdot \rangle_x$, $\langle \cdot \rangle_y$ обозначают среднее по переменным x и y соответственно, а dp_1 , dp_2 — дифференциалы, определяемые формулами (4.14).

Дифференциал $d\Omega$ мероморфен на Γ . Его нули — это полюсы функций ψ и ψ^σ , он имеет полюсы в неподвижных точках инволюции σ . Тот факт, что его вычеты равны ± 1 в точках P_{\pm} , следует из определения функции Бейкера–Ахиезера. Доказательство того, что его вычеты в остальных точках ветвления удовлетворяют условиям (4.1), требует дополнительных аргументов.

Докажем эти равенства для кривых, отвечающих периодическим потенциалам. На таких кривых равенство (4.16) корректно определяет функцию $w_1(p)$. Зафиксируем комплексное число w_{10} и рассмотрим точки кривой Γ , для которых выполнены равенства $w_1(p_\nu) = w_{10}$. Введем обозначения $\psi_\nu = \psi(x, y, p_\nu)$, $\psi_\nu^+ = \psi(x, y, \sigma(p))$. Доказательство того, что для любой периодической функции $f(x)$ ряды в следующей формуле сходятся и равны самой функции f :

$$f = \sum_{\nu} r_{\nu}^{-1} \langle \psi_{\nu}^{+} f \rangle_x \partial_y \psi_{\nu} = - \sum_{\nu} r_{\nu}^{-1} \langle \partial_y \psi_{\nu}^{+} f \rangle_x \psi_{\nu}, \quad (4.17)$$

где $r_{\nu} := \langle \partial_y \psi_{\nu} \psi_{\nu}^{\sigma} - \psi_{\nu} \partial_y \psi_{\nu}^{\sigma} \rangle_x$, совпадает с доказательством леммы 2.4 в [5]. Строго говоря, это равенство (4.17) справедливо при $w_{10}^2 \neq 1$, так как в противном случае, часть точек p_{ν} совпадает с точками ветвления p_{\pm}^i , в которых соответствующее выражение r_{ν} равно 0. Заметим, что левая часть равенства (4.17) не зависит от выбора w_{10} . Поэтому, устремляя w_{10}^2 к 1, мы получаем, что сингулярные члены ряда в (4.17) для $w_{10}^2 = 1$ должны сократиться. Используя произвольность функции f , получим, что сокращение имеет место для каждой пары, отвечающей точке ветвления. Последнее в точности эквивалентно равенствам (4.1). Лемма 4.3 доказана.

Замечание 4.5. Размерность пространства кривых Γ , которым отвечают периодические операторы Шрёдингера с фиксированными периодами, равна $g_0 - 1$. Действительно, кривая Γ определяется факторкривой Γ_0 и набором из $2n + 2$ точек на ней. Условия на периоды дифференциалов, сформулированные в утверждении теоремы, эквивалентны при фиксированных N^a, M^a, N^b, M^b набору из $2(g_0 + n)$ уравнений. По определению дифференциалы зависят от кривой и выбора локальных координат в отмеченных точках. На самом деле они зависят только от первого джета (лидирующего члена) локальной координаты.

Линейное преобразование двумерного пространства таких джетов приводит к линейному преобразованию двух периодов потенциала. Поэтому искомая размерность равна $3g_0 - 3 + 2n + 2 - 2(g_0 + n) = g_0 - 1$

Как уже отмечалось выше, в общем случае потенциалы оператора Шрёдингера, задаваемые формулой (4.11), являются мероморфными функциями своих аргументов. Необходимым и достаточным условием вещественности потенциала при вещественных значениях его аргумента является существование на Γ антиголоморфной инволюции τ , коммутирующей с σ , т.е. $\sigma\tau = \tau\sigma$, что эквивалентно вещественности факторкривой Γ_0 , а также выполнение следующих условий на параметры, определяющие функцию Бейкера–Ахиезера:

$$\tau(P_+) = P_-, \quad \tau^*(k_+) = \bar{k}_-, \quad \tau(p_+^i + p_-^i) = (p_+^i + p_-^i), \quad \tau(D) = D.$$

Отметим, что третье из приведенных выше условий означает, что для каждого i имеет место одно из двух условий $\tau(p_\pm^i) = p_\pm^i$ или $\tau(p_\pm^i) = p_\mp^i$.

Вещественность потенциала, построенного по данным, удовлетворяющим описанным условиям, следует из равенства

$$\bar{\psi}(\tau(p)) = \psi(p),$$

для доказательства которого достаточно проверить, что аналитические свойства на Γ функций, стоящих в обеих частях равенства, совпадают.

Ниже мы приведем два типа достаточных условий, которые гарантируют, что соответствующие потенциалы оператора Шрёдингера являются неособыми. Первый из них — это прямое обобщение достаточных условий, предложенных в работе [8].

Как известно, число неподвижных овалов произвольной антиголоморфной инволюции гладкой кривой рода g не превосходит $g + 1$. Кривые, для которых оно равно $g + 1$, называются M -кривыми.

Теорема 4.6. *Предположим, что Γ является M -кривой с неподвижными овалами a_0, a_1, \dots, a_g , на которые голоморфная инволюция действует, как в (4.5), (4.6). Предположим также, что $p_\pm^i \in a_{2g_0+i}$. Тогда если точки γ_s допустимого дивизора D степени $g + n$ лежат по одной на каждом из овалов $a_1 \dots, a_{2g_0}$ и по одной в каждом из сегментов a_{2g_0+i} , на которые этот овал разбивается парой точек p_\pm^i , то соответствующий потенциал является вещественным и неособым.*

Доказательство стандартно. Как видно из формулы (4.7), полюсы потенциала соответствуют значениям (x, y) , при которых один из нулей функции ψ совпадает с отмеченной точкой P_+ . Это невозможно, поскольку при всех (x, y) на каждом из циклов a_1, \dots, a_{2g_0} и на каждом из сегментов циклов a_{2g_0+i} имеется по крайней мере по одному нулю, а всего нулей $g + n = 2g_0 + 2n$. Тот факт, что на каждом из перечисленных циклов и сегментов имеется по крайней мере один нуль, следует из того, что сумма чисел нулей и полюсов периодической функции на периоде всегда четна, а на каждом цикле или сегменте (на концах которого значения функций ψ равны) имеется по условию один полюс. \square

Второй тип условий, гарантирующий неособость потенциала, аналогичен условиям неособости решений уравнения КР-I (см. [6]).

Теорема 4.7. *Предположим, что антиинволюция σ имеет разделяющий тип, т.е. что дополнение к ее неподвижным овалам a_1, \dots, a_k состоит из*

двух несвязных областей Γ^\pm , $\sigma\tau(\Gamma^+) = \Gamma^-$. Если при этом $p_\pm^i \in \Gamma^\pm$, а дифференциал $d\Omega$, определяющий допустимый дивизор D , положителен на a_s относительно ориентации, индуцированной областью Γ^+ , и, кроме того, если $\text{res}_{p_+^i} d\Omega < 0$, то соответствующий потенциал оператора Шрёдингера является вещественным и неособым.

Доказательство. Обозначим через

$$\phi(x, y, p) := \theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|\Pi)\psi(x, y, p)$$

ненормированную функцию Бейкера–Ахизера. Она имеет те же аналитические свойства, что и ψ , кроме условия нормировки (4.4). По уже доказанному первый сомножитель в произведении, определяющем ϕ , веществен. Следовательно, для функции ϕ имеет место равенство $\phi(x, y, \tau(p)) = \bar{\phi}(x, y, p)$. Циклы a_s , объединение которых является границей области Γ^+ , неподвижны относительно $\sigma\tau$. Значит, если обозначить через $d\hat{\Omega}$ дифференциал $d\hat{\Omega} = \phi\phi^\sigma d\Omega$, то

$$\oint_{\partial\Gamma^+} d\hat{\Omega} - \sum_{i=1}^n \text{res}_{p_+^i} d\hat{\Omega} = \oint_{\partial\Gamma^+} |\phi|^2 d\Omega - \sum_{i=1}^n c_i |\phi(x, y, p_+^i)|^2 > 0 \quad (4.18)$$

при любых значениях x, y . Предположим, что потенциал имеет особенность в точке (x_0, y_0) . Тогда $\phi(x_0, y_0, P_+) = 0$. Значит, дифференциал $d\hat{\Omega}(x_0, y_0, p)$ не имеет полюса в P_+ , т. е. в области Γ^+ он имеет полюсы только в точках p_+^i . Следовательно, левая часть равенства (4.18) равна нулю при $x = x_0, y = y_0$. Противоречие. \square

В заключение в качестве примера мы представим интегрируемые операторы Шрёдингера связанные с гиперэллиптическими кривыми, которые представляют собой частный случай кривых, рассматриваемых в рамках обобщенной конструкции Новикова–Веселова. В этом случае факторкривая Γ_0 рациональна. Без ограничения общности можно считать, что гиперэллиптическая кривая Γ с $n + 1$ парами точек ветвления задана уравнением

$$Y^2 = X \prod_{i=1}^n (X - p_+^i)(X - p_-^i).$$

Точки ветвления $X = 0, \infty$ мы отождествим с отмеченными точками P_+ и P_- соответственно. В качестве базисных a -циклов выберем прообразы разрезов между точками p_\pm^i . Обозначим через B соответствующую матрицу b -периодов нормированных голоморфных дифференциалов. Тогда определенная ранее матрица Прима равна $\Pi = 2B$.

Значения функции ψ из леммы 4.2 в точках p_\pm^j равняются

$$\psi_j(x, y) := \frac{\theta(B_j + zU_+ + \bar{z}U_- + Z|2B)\theta(Z|2B)}{\theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|2B)\theta(B_j + Z|2B)} e^{zU_+^j + \bar{z}U_-^j}. \quad (4.19)$$

Следствие 4.8. Функции ψ_i , определенные формулой (4.19), удовлетворяют уравнению Шрёдингера (1.2) с потенциалом

$$u(z, \bar{z}) = -2\Delta \ln \theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|2B) + E, \quad E = 4 \frac{d\Omega_-}{d(k_+^{-1})}(P_+).$$

Приведенные выше достаточные условия вещественности и неособости этого потенциала относятся к двум типам вещественных гиперэллиптических кривых. Первый из них соответствует вещественным точкам ветвления, $p_{\pm}^i = \bar{p}_{\pm}^i$, а второй — случаю $p_{\pm}^i = \bar{p}_{\mp}^i$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности*, Докл. АН СССР, **229**:1 (1976), 15–18.
- [2] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия*, УМН, **31**:1(187) (1976), 55–136.
- [3] И. М. Кричевер, *Потенциалы с нулевым коэффициентом отражения на фоне конечнозонных*, Функц. анализ и его прил., **9**:2 (1975), 77–78.
- [4] И. М. Кричевер, *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии*, Функц. анализ и его прил., **11**:1 (1977), 15–31.
- [5] И. М. Кричевер, *Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения*, УМН, **44**:2(266) (1989), 121–184.
- [6] И. М. Кричевер, *Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шрёдингера. Нестационарная модель Пауэрса*, Функц. анализ и его прил., **20**:3 (1986), 42–54.
- [7] С. М. Натанзон, *Несингулярные конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера и примитивы вещественных кривых*, Функц. анализ и его прил., **22**:1 (1988), 79–80.
- [8] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения*, Докл. АН СССР, **279**:1 (1984), 20–24.
- [9] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы*, Докл. АН СССР, **279**:4 (1984), 784–788.
- [10] И. А. Тайманов, *Двумерный оператор Дирака и теория поверхностей*, УМН, **61**:1(367) (2006), 85–164.

Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
 Национальный исследовательский университет
 «Высшая школа экономики», Москва, Россия
 e-mail: ekrez@yandex.ru

Поступила в редакцию
 16 октября 2018 г.

Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
 Columbia University, New York, USA
 Национальный исследовательский университет
 «Высшая школа экономики», Москва, Россия
 e-mail: krichev@math.columbia.edu

Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
 Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook, USA
 e-mail: nikitastring@gmail.com