ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

Année 1977-1978

SEMINAIRE SUR LES SINGULARITES DES SURFACES

(DEMAZURE - PINKHAM - TEISSIER)

COURBES PLANES AYANT UNE SEULE PLACE A L'INFINI

H. PINKHAM*

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau Cedex - France

"Laboratoire de Recherche Associé au C.N.R.S. No 169"

* supported by N.S.F. and the Sloan Foundation.

1. INTRODUCTION

Soient $\tilde{C}$ une courbe propre irréductible sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p quelconque, et P un point lisse de $\tilde{C}$. On appelle $C := \tilde{C} - P$ (ou $\tilde{C}$ qu'on peut reconstituer à partie de C) une courbe avec un seul point à l'infini. On appelle semi-groupe (de Weierstrass) de P le sous-monoïde Γ_P (ou Γ, s'il n'y a pas de confusion possible) des nombres naturels $\mathbb{N}$, défini comme suit :

$$\Gamma := \{\text{ordre de pôle en P des fonctions méromorphes sur } \tilde{C} \text{ n'ayant des pôles qu'en P}\}.$$

Si v_P est la valuation associée au point P et si A est l'anneau affine de C, on a bien sûr $\Gamma = \{-v_P(a) \mid a \in A\}$.

Les entiers naturels qui ne sont pas dans Γ s'appellent les lacunes de Γ. Ils sont en nombre fini égal à g, le genre (arithmétique) de $\tilde{C}$, comme on le voit facilement en appliquant Riemann-Roch.

Supposons de plus que C peut être plongé dans $\mathbb{A}^2_k$. Autrement dit, il existe x et $y \in A$ tels que $A = k[x,y]$. On appelle C une courbe plane avec une seule place à l'infini.

On se propose de répondre à la question suivante : déterminer les sous-monoïdes G de $\mathbb{N}$ tels qu'il existe une courbe plane $(\tilde{C},P)$ avec une seule place à l'infini de semi-groupe G. On appelle un tel G un semi-groupe (de Weierstrass) plan. On peut aussi se demander, étant donné un tel G, quels sont les genres géométriques possibles des $(\tilde{C},P)$ tels que $G = \Gamma$. (Comme on a vu plus haut le genre arithmétique de $\tilde{C}$ est donné par G.) Cette dernière question, due à Abhyankar (voir [8]) semble encore ouverte.

Remarquons à ce propos qu'on ne sait pas caractériser les G tels qu'il existe une courbe $(\tilde{C},P)$ lisse (on ne suppose plus C plane) avec $G = \Gamma_P$. Des résultats partiels sont donnés dans [7] § 13 et [4], III.

Si on demande seulement que C soit une intersection complète avec une seule place à l'infini, on a le critère suivant, conséquence facile du théorème de Murthy-Towber (ex-conjecture de Serre en dimension 3) :

Théorème (Sathaye [8]) : C est une intersection complète si et seulement si Γ est un semi-groupe symétrique.

En effet, par le théorème de Murthy-Towber le point P doit être le support d'un diviseur canonique ; par le théorème de Riemann-Roch on voit facilement que cela implique que Γ est symétrique.

Rappelons qu'on dit qu'un sous-monoïde H de $\mathbb{N}$ est symétrique s'il existe un entier c, appelé le conducteur, tel que si $a \in H$, alors $c-1-a \notin H$. c est alors évidemment 2 fois le nombre de lacunes, donc dans le cas de Γ, $c = 2g$. On dit aussi parfois que H est Gorenstein, puisque l'anneau "monomial" $k[t^a]$, $a \in H$, est Gorenstein $\Leftrightarrow$ H symétrique (voir [6] pour les résultats concernant ces anneaux).

Revenons à la question posée plus haut. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème I (Abhyankar-Moh [1]) : Soit $A = k[x,y]$ l'anneau affine d'une courbe ayant une seule place v à l'infini. Posons $n = -v(x)$, $m = -v(y)$ et supposons que $p = \mathrm{car.}\, k$ ne divise pas à la fois n et m. Alors, si Γ est le semi-groupe du point à l'infini, il existe un entier h, et une suite d'entiers $\delta_o,\dots,\delta_n \in \Gamma$ engendrant Γ tels que :

1. posons $d_i = \mathrm{p.g.c.d}(\delta_o,\dots,\delta_{i-1})$ pour $1 \le i \le h+1$ et $n_i = d_i/d_{i+1}$, $1 \le i \le h$. Alors $d_{h+1} = 1$ et $n_i > 1$ pour $2 \le i \le h$.

2. $n_i\delta_i$ appartient au sous-groupe engendré par $\delta_o,\dots,\delta_{i-1}$ pour $1 \le i \le h$.

3. $\delta_i < \delta_{i-1}\, n_{i-1}$ pour $i = 2,\dots,h$.

Ce théorème est à rapprocher du théorème plus connu :

Théorème II (Azevedo-Moh-Angermuller) : Soit A l'anneau local formel d'une branche de courbe plane sur k. Donc l'idéal maximal de A est engendré par 2 éléments x et y. Soit $\tilde{A} = k[[t]]$ la normalisation de A et v la valuation induite par $\tilde{A}$; $v(f) =$ ordre de f en t. Soit Γ le semi-groupe des valeurs de A, c'est-à-dire $\Gamma = \{v(a) \mid a \in A\}$.
Alors il existe un entier h et une suite croissante d'entiers $\delta_o,\dots,\delta_n \in \Gamma$ engendrant Γ de façon minimale tels que les conditions 1 et 2 du théorème I soient encore satisfaites et que :

3') $\delta_i > \delta_{i-1}\, n_{i-1}$ $i = 2,\dots,h$.

Dans le théorème II, aucune hypothèse n'est faite sur la caractéristique de k ; je ne sais pas si le théorème I est encore vrai lorsque p divise n et m. D'autre part dans II, h et les δ_i sont uniquement déterminés, ce qui n'est pas le cas dans I.

Les deux théorèmes reposent sur une base commune, qui est énoncée au paragraphe 2 (théorème III : nous reproduisons ici sans changement la démonstration d'Abhyankar [2], § 1 et 2). La méthode "classique" de terminer la démonstration du théorème II (il faut faire une restriction sur la caractéristique) est de passer par le développement de Puiseux de la branche : nous esquissons cette démonstration au paragraphe 3, puis nous donnons la démonstration d'Angermuller [3] valable en toute caractéristique.

L'idée d'Abhyankar et Moh de la démonstration du théorème I (une version nettement plus lisible de leur démonstration se trouve dans [2] ; toutes les références que nous ferons seront à la version simplifiée) est la suivante : on compactifie $\mathbb{A}^2$ en $\mathbb{P}^2$ et on appelle C' la clôture de C dans $\mathbb{P}^2$. Par hypothèse $C' \setminus C$ consiste en un point Q, qui peut être singulier, mais unibranche. On peut donc appliquer le théorème II au complété formel de C' en Q. Il s'agit ensuite de traduire les renseignements locaux obtenus à l'infini en des renseignements globaux sur C. La très belle idée d'Abhyankar et de Moh pour effectuer ce passage consiste à utiliser des transformations de Tschirnhausen ; nous avons conservé cette idée, mais nous avons considérablement simplifié cette partie de la démonstration (même par rapport à [2]) : nous avons éliminé tous les développements de Puiseux et les pénibles "main lemmas 1,2" (7.17 et 7.18 de [2]) sont remplacés par des résultats plus faciles (voir le paragraphe 6).

Il serait encore mieux de démontrer le théorème I suivant le schéma de la démonstration d'Angermuller du théorème I, c'est-à-dire sans "passer par l'infini". Nous n'avons pas été capable de mener cette idée de démonstration à terme ; la difficulté essentielle est que les inégalités vont dans le mauvais sens, et la suite $\delta_o,\dots,\delta_n$ n'est pas nécessairement croissante.

Un résultat de Delorme [5] implique que tout semi-groupe Γ satisfaisant à la propriété 2 des théorèmes est d'intersection complète, i.e. que l'anneau $k[t^a]$, $a \in \Gamma$ est d'intersection complète ; comme cette propriété est strictement plus forte que celle d'être symétrique, on obtient des courbes affines d'intersection complète qui ne sont pas planes (une autre méthode pour obtenir de tels exemples est donnée par Sathaye [8]). D'autre part Sathaye donne un exemple de courbe C affine et lisse avec un seul point à l'infini tel que le semi-groupe à l'infini satisfait aux conditions nécessaires du théorème I, mais telle que C ne soit pas plane. Finalement il annonce sans démonstration le théorème d'existence suivant :

Théorème : Soit Γ un semi-groupe de $\mathbb{N}$ satisfaisant aux conditions du théorème I. Alors il existe une courbe plane C avec une seule place à l'infini, telle que Γ soit le semi-groupe à l'infini.

Ce résultat est en caractéristique 0 une conséquence facile d'un résultat de [7], et d'une construction de Teissier [9]. Nous le démontrons au paragraphe 7. Remarquons que le résultat annoncé par Sathaye est légèrement plus général : il suffit de supposer que la caractéristique du corps de base ne divise pas le p.g.c.d. de δ_0 et δ_1.

Notations : $\mathbb{N}$ désigne les nombres naturels ; le signe := indique une définition.

2. DEUX PROPOSITIONS (d'après [2], §1,2).

1. Soit $d_1 = d_2, \ldots, d_{h+1} = 1$ une suite décroissante d'entiers naturels telle que d_i divise d_{i-1} pour tout i. Posons $n_i = d_i/d_{i+1}$, $1 \leq i \leq h$ et

$$M = \{(a_1, \ldots, a_{h+1}) \in \mathbb{N}^{h+1} \mid a_i < n_i \text{ , } 1 \leq i \leq h\} .$$

Proposition 1 : Soient R un anneau et $G_i \in R[Y]$, $1 \leq i \leq h+1$, un polynôme unitaire de degré d_1/d_i. Pour tout $a \in M$, posons $G^a = \prod_i G_i^{a_i}$. Alors les $\{G^a\}_{a\in M}$ forment une base de $R[Y]$ en tant que R-module.

Lemme 1 : Tout entier naturel a plus petit que d_1 s'écrit de façon unique $a = \sum_{i=1}^{h} a_i \, d_1/d_i$.

<u>Lemme 2</u> : Soit $r_o,\dots,r_n$ une suite d'entiers telle que $r_o \neq 0$ et $d_i = \text{p.g.c.d.}(r_o,\dots,r_{i-1})$, $1 \le i \le h+1$. Alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$ la congruence $a \equiv \sum_{i=1}^{h} a_i r_i \bmod r_o$, avec $0 \le a_i < n_i$, $1 \le i \le h$ a une solution unique.

Démontrons d'abord le lemme 2, par récurrence sur h. Si $h=0$, on a $r_o = 1$ et il n'y a rien à démontrer. Puisque r_h et n_h sont premiers entre eux, on peut écrire $a = a_h r_h + a' n_h$ avec $0 \le a_h < r_h$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à a' par rapport à la suite $r_o/n_h, r_1/n_h,\dots,r_{h-1}/n_h$: on a une écriture unique $a' \equiv \sum_{i=1}^{h-1} a_i\, r_i/n_h$ modulo r_o/n_h, $0 \le a_i < n_i$. Il suffit alors de multiplier par n_h pour obtenir le résultat pour a.

L'existence d'une solution dans le lemme 1 est évidente ; l'unicité peut être démontrée soit directement, soit à partir du lemme 2 en posant $r_i = d_1/d_{h+1-i}$.

La proposition 1 est un corollaire immédiat du lemme 1 : en effet le lemme 1 implique que les degrés en Y des G^a, $a \in M$, sont tous distincts ; de plus tous les degrés sont atteints.

2. Supposons maintenant que R est soit k[X] (cas affine), soit k[[X]] (cas algébroïde), K son corps de fractions et que $\bar{v}$ est la valuation à l'infini de K si $K = k(X)$ ou la valuation à l'origine de K si $K = k((X))$. Supposons de plus que $\bar{v}$ n'a qu'une seule extension v à $K(Y)/(G_{h+1})$, où les G_i satisfont aux hypothèses de la proposition 1. Posons $r_o = v(x)$ et $r_i = v(g_i)$, $1 \le i \le h$. (Les lettres minuscules dénotent l'image dans $A = R[Y]/(G_{h+1})$ de l'élément de R[Y] noté par la majuscule correspondante.) Comme $\bar{v}$ n'a qu'une seule extension à $K(Y)/G_{h+1}$, on voit facilement que $|r_o| = d_1$.

Faisons l'hypothèse essentielle :

$$(*) \qquad d_i = \text{p.g.c.d.}(r_o,\dots,r_{i-1}) \qquad 2 \le i \le h+1 \quad .$$

<u>Proposition 2</u> : Avec les hypothèses ci-dessus, $\Gamma = \{v(f), f \in A\}$ est engendré par $r_o, r_1,\dots,r_h$ et pour tout $i \ge 1$, $n_i r_i$ appartient au semi-groupe engendré par $r_o,\dots,r_{i-1}$.

(On rappelle que $A = R[Y]/(G_{h+1})$.)

<u>Démonstration</u> : Soit $\overline{M} = \{(a_1,\ldots,a_h) \in \mathbb{N}^h \mid a_i < n_i\}$. La proposition 1 montre que les $g^a = \prod g_i^{a_i}$, $a \in \overline{M}$, forment une base de $A = R[Y]/(G_{h+1})$ en tant que R-module.

Un élément quelconque f de A s'écrit donc

$$f = \sum_{a\in\overline{M}} c_a g^a \quad , \quad c_a \in R \quad .$$

Pour tout $c \in R$ on a $v(c) = a_o r_o$, $a_o \geq 0$. Donc la valuation de cg^a est $\sum_{i=0}^{h} a_i r_i$, $0 \leq a_o$, $0 \leq a_i < n_i$, $1 \leq i \leq h$. Mais les valuations des $c_a g^a$ sont toutes distinctes (lemme 2) ; donc il existe un $\bar{a} \in \overline{M}$ tel que $v(f) = v(c_{\bar{a}}\, g^{\bar{a}})$, et Γ est engendré par $r_o,\ldots,r_h$, ce qui démontre la première partie de la proposition.

Pour la dernière assertion, posons $f = g_e^{n_e}$. On a donc

$$v(g_e^{n_e}) = \sum_{i=0}^{h} a_i r_i \qquad 0\leq a_o,\ 0\leq a_i<n_i,\ 1\leq i\leq h \quad .$$

Or $v(g_e^{n_e}) = n_e r_e$. Soit e' le plus grand i tel que $a_i \neq 0$. Nous allons montrer que $e' < e$, ce qui terminera la démonstration. En effet, supposons que $e' \geq e$. Ecrivons :

$$n_e\, r_e - \sum_{i=0}^{e'-1} a_i\, r_i = a_{e'}\, r_{e'} \quad .$$

Le côté gauche est congru à 0 modulo $d_{e'}$ (puisque $e' \geq e$). D'autre part le p.g.c.d. de $r_{e'}$ et $d_{e'}$ est $d_{e'+1}$. Comme $d_{e'} = n_{e'} d_{e'+1}$, ceci implique que n_e' divise $a_{e'}$. Comme $0 \leq a_{e'} < n_{e'}$, on a $a_{e'} = 0$, contradiction.

On utilisera ce résultat sous la forme suivante :

<u>Théorème III</u> : Soient $R = k[X]$ (resp. $= k[[X]]$), K son corps de fractions, $\bar{v}$ la valuation à l'infini de R (resp. l'unique valuation de R), $F \in R[Y]$ un polynôme unitaire de degré $d > 0$ en Y. Supposons que $\bar{v}$ admette une seule extension v à $K[Y]/F$. Si on peut trouver une suite $G_i \in R[Y]$, $1 \leq i \leq h$, de polynômes unitaires en Y avec :

i) $v(g_i) = r_i$, où g_i est l'image de G_i dans $A = R[Y]/(F)$;

ii) $\deg_Y(G_i) = d/d_i$, où $d_i = \text{p.g.c.d.}(d,r-1,\ldots,r_{i-1})$, $1 \leq i \leq h$.

iii) $d_{h+1} := \text{p.g.c.d.}(d,r_1,\ldots,r_h) = 1$, alors $\Gamma := \{v(f) \mid f \in A\}$ est le

sous-semi-groupe engendré par $v(x) := r_o$ et $r_1, \dots, r_h$.
D'autre part, si $n_i := d_i / d_{i+1}$, $1 \leq i \leq h$, $n_i r_i$ appartient au sous-groupe engendré par $r_o, \dots, r_{i-1}$. (On peut donc supprimer les i pour lesquels $n_i = 1$.)

3. CAS ALGEBROIDE.

Soit A l'anneau formel d'une branche de courbe plane. On peut donc écrire $A = k[[X]][Y]/(F)$, F un polynôme unitaire en Y de degré d (en Y). Dire que A est l'anneau d'une branche veut précisément dire que la valuation $\bar{v}$ naturelle de $k[[X]]$ a une seule extension v à A. Nous ne supposons pas que x est un paramètre transversal de A (c'est-à-dire que v(x) est le plus petit élément non nul de $\Gamma := \{v(f) \mid f \in A\}$).

Nous voulons appliquer le théorème III. Je connais deux façons assez différentes de le faire, et je vais esquisser la première et donner la seconde.

Pour la première (la démonstration "classique"), il faut supposer que la caractéristique de k ne divise pas d. Alors on écrit un développement de Puiseux :

$$x = t^d$$

$$y = \sum_{i>0} a_i \, t^i \; .$$

On définit alors la <u>caractéristique</u> de A par rapport à (x,y) : c'est la suite $(\beta_o, \beta_1, \dots, \beta_h)$ des h+1 entiers suivants :

a) $\beta_o = d$;

b) β_1 est le plus petit entier β tel que $a_\beta \neq 0$;

c) $d_2 = \text{p.g.c.d.}(d, \beta_1)$;

d) supposons β_i et d_{i+1} définis. Si $d_{i+1} = 1$, on pose $h = i$ et on s'arrête ; autrement on définit β_{i+1} comme le plus petit entier β tel que $a_\beta \neq 0$ et $\beta \not\equiv 0 \ (d_{i+1})$.

Posons alors $z_e = \sum_{0<i<\beta_e} a_i t^i$ et soit $g_e \in k((t^d))[Y]$ le polynôme minimal de z_e sur $k((t^d))$. Puisque le p.g.c.d. de tous les i tels que $a_i \neq 0$ et $i < \beta_e$ est d_e, g_e est de degré d/d_e en Y. Pour calculer la valuation r_e de g_e, on fait $Y = y(t)$ dans $g_e(Y)$ et on calcule le degré en t. Un calcul facile donne

$$r_e = (n_1-1)n_2 \dots n_{e-1}\beta_1 + (n_2-1)n_3 \dots n_{e-1}\beta_2 + \dots + (n_{e-1}-1)\beta_{e-1} + \beta_e$$

où $n_i = d_i/d_{i+1}$ comme avant, ce qui donne la formule de récurrence

(*) $$r_e = n_{e-1}\, r_{e-1} - \beta_{e-1} + \beta_e \qquad 2 \leq e \leq h \quad .$$

Il est clair que p.g.c.d.$(r_o,\dots,r_{e-1}) = d_e$ (on a posé $d := d_1 := r_o$), et $d_{n+1} = 1$; on peut donc appliquer le théorème III, ce qui donne immédiatement le théorème II, sauf l'assertion 3' , en faisant $\delta_i = r_i$. Pour 3' on utilise (*) ci-dessus : par définition des β, $\beta_{e-1} < \beta_e$ pour $2 \leq e \leq h$; donc

$$n_{e-1}\, r_{e-1} < r_e \quad . \qquad \text{c.q.f.d.}$$

La seconde démonstration du théorème II, due à Angermuller [3], ne requiert pas de restriction sur la caractéristique. Elle est un peu plus longue que la précédente, mais même en caractéristique 0 elle est agréable en ce qu'elle ne fait pas appel aux développements de Puiseux.

Faisons d'abord quelques rappels sur les sous-semi-groupes de $\mathbb{N}$. Soit G un tel semi-groupe et d un élément quelconque non nul de G. L'ensemble $A_d := \{\min(G \cap k + d\mathbb{N}) \mid k = 0,1,\dots,d-1\}$ a d éléments qu'on range en ordre croissant $0 = a_o < a_1 < \dots < a_{d-1}$. On appelle la suite $a_o,\dots,a_{d-1}$ <u>la suite d'Apéry</u> de G par rapport à d. On dira que la suite d'Apéry de G par rapport à d <u>croît fortement</u> si $a_i + a_j \leq a_{i+j}$ pour toutes les valeurs pour lesquelles les trois quantités sont définies.

D'autre part, étant donné un sous-semi-groupe G de $\mathbb{N}$ et $d \in G$, $d \neq 0$, on définit une suite $r_o,\dots,r_h$ comme suit :

i) $r_o = d$;

ii) r_1 est le plus petit élément non nul de G tel que r_1 n'est pas divisible par r_o. Posons $d_2 = $ p.g.c.d.(r_o,r_1) ;

iii) supposons que r_i et d_{i+1} sont définis. Si $d_{i+1} = 1$, on pose $h = i$ et on s'arrête. Sinon on définit r_{i+1} comme le plus petit élément non nul de G tel que r_{i+1} ne soit pas divisible par d_{i+1}. Définissons alors $d_{i+2} = $ p.g.c.d.(d_{i+1},r_{i+1}).

Posons $n_i = d/d_{i+1}$, $1 \leq i \leq h$.

Remarquons que $r_i \in A_d$, $1 \leq i \leq h$.

<u>Proposition 1</u> : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $a_o, \dots, a_{d-1}$ croît fortement ;

(2) pour $0 \leq s_i < n_i$, $1 \leq i \leq h$ on a

$$a_{\Sigma s_i \, d/d_i} = \sum_{i=1}^{h} s_i \, r_i \ .$$

De plus $r_{i+1} > n_i r_i$, $1 \leq i \leq h$.

(La condition 2 implique que les r_i engendrent G, puisque d et les a_i engendrent : utiliser le lemme 1 du § 2.)

Nous ne démontrerons que l'implication 1) ⇒ 2), la seule dont nous nous servirons ; pour 2) ⇒ 1) voir [3], Satz 2. Il suffit de démontrer le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : a) Soit e un entier $1 \leq e \leq h$. Si $r_k = a_{d/d_k}$, $1 \leq k \leq e$, alors

$$a_{\Sigma s_k \, d/d_k} = \sum_{k=1}^{e} s_k \, r_k \quad , \quad 0 \leq s_k < n_k \ .$$

b) $r_k = a_{d/d_k}$, pour $1 \leq k \leq h$.

<u>Preuve</u> : a). On procède par récurrence sur $m = \sum_{k=1}^{e} s_k \, d/d_k$; pour $m = 0$ le résultat est clair. Supposons l'assertion vérifiée pour tout entier $< m$. Par hypothèse (les a_i croissent fortement) on a

$$\Sigma s_k \, r_k = \Sigma s_k \, a_{d/d_k} \leq a_{\Sigma s_k \, d/d_k} = a_m \ .$$

Choisissons $s \leq m$ tel que $\Sigma s_k \, r_k \equiv a_s$ modulo d ; on a donc $a_s \leq \Sigma s_k \, r_k \leq a_m$, et il suffit de montrer que $s \geq m$. Par le lemme 1 du § 2 on peut écrire (puisque $s < d$)

$$s = \sum_{k=1}^{h} t_k \, d/d_k \ .$$

Supposons que $s < m$: alors $t_k = 0$ pour $k = e+1, \dots, h$: en effet si $\ell > e$

$$d/d_\ell \geq n_e \, d/d_e \geq \sum_{i=1}^{e} (n_i - 1) \, d/d_i \geq m \ .$$

Par l'hypothèse de récurrence $a_s = \Sigma t_k \, r_k$. Donc $\Sigma t_k \, r_k \equiv \Sigma s_k \, r_k$ modulo d, ce qui contredit le lemme 2 du § 2. Donc $s = m$, et on a gagné.

b). Par définition $r_1 = a_1$. Supposons l'assertion vérifiée pour tout $k \leq e < h$. L'égalité (obtenue par télescopage)

$$\sum_{k=1}^{e} (n_k - 1)\ d/d_k = d/d_{e+1} - 1$$

donne avec a) :

$$r_{e+1} > a_{d/d_{e+1}} - 1.$$

Supposons que $r_{e+1} > a_{d/d_{e+1}}$ et obtenons une contradiction. Par le lemme 2 du § 2, la congruence $a_{d/d_{e+1}} \equiv \sum_{k=1}^{h} s_k r_k$ modulo d, $0 \leq s_k < n_k$ a une solution unique. Soit f le plus grand k tel que $s_k \neq 0$. Alors $f \geq e+1$: sinon, par a) $\sum s_k r_k = a_{\sum s_k d/d_k}$ et $a_{d/d_{e+1}} \equiv a_{\sum s_k d/d_k}$ mod d, ce qui est une contradiction. Donc $f \geq e+1$; mais ceci implique que $a_{d/d_{e+1}}$ n'est pas divisible par d_{e+1}, ce qui est une contradiction puisque $r_{e+1} > a_{d/d_{e+1}}$. La démonstration du lemme, et donc aussi de la proposition 1, est terminée.

Revenons aux hypothèses du début du paragraphe, et posons $M_i = \sum_{k=0}^{i} k[[x]]y^k$. On a $k[[x]] = M_o \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{d-1} = A$. On prend pour G le semi-groupe Γ et pour d, v(x).

<u>Proposition 2</u> (Angermuller [3] Satz 3) : $\{a_i\} = v(M_{i-1} + y^i) \setminus v(M_{i-1})$, $1 \leq i < d-1$ et la suite a_i croît fortement.

<u>Preuve</u> : Puisque les $y^0, \ldots, y^{d-1}$ sont linéairement indépendants sur k[[x]], on voit facilement que $v(M_{i-1} + y^i) \not\subseteq v(M_i)$. Soit f_i un élément de $M_{i-1} + y^i$ tel que $v(f_i) \notin v(M_i)$, $1 \leq i \leq d-1$. Posons $f_o = 1$. Puisque $f_i f_j \in M_{i+j-1} + y^{i+j}$, on a $f_i f_j = f_{i+j} + m$, $m \in M_{i+j-1}$. On a, soit $m = 0$, soit $v(m) = v(f_i f_j)$. Donc

$$(*) \qquad v(f_{i+j}) \geq v(f_i) + v(f_j) \quad .$$

Supposons que pour $0 \leq i < j \leq d-1$, on ait $v(f_i) \equiv v(f_j)$ mod d. Alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $v(f_j) = v(f_i) + md$ et (*) implique que $m \geq 0$. Donc $v(f_j) = v(f_i) + v(x^m) = v(x^m f_i)$. Mais $x^m f_i \in M_{j+1}$, ce qui contredit la définition de f_j.

Donc les résidus des $v(f_i)$ mod d sont distincts. Montrons pour terminer que

$$(**)\qquad v(M_i \setminus \{0\}) = \bigcup_{k=0}^{i} (v(f_k) + d\mathbb{N}) .$$

C'est évident pour $i = 0$; supposons que nous l'avons démontré pour tout $i < e$. Prenons donc $m \in M_e$, $m \neq 0$. On peut l'écrire $m = m' + af_e$, $a \in k[[x]]$, $m' \in M_{e-1}$. Par l'hypothèse de récurrence $v(m') \neq v(af_e)$: calculer le résidu mod d des deux côtés. Donc $v(m) = \min(v(m'), v(af_e))$, ce qui donne le résultat voulu.

Ceci montre que $a_i = v(f_i)$, ce qui grâce à (*) termine la démonstration de la proposition.

On est maintenant en mesure d'appliquer le théorème III. On prend pour G_i l'unique relèvement de f_{d/d_i} dans $k[[X]][Y]$ de degré en Y $< d$. La proposition 2 montre que G_i est unitaire de degré d/d_i en Y. La proposition 1 montre que $v(g_i) = r_i$, ce qui permet d'appliquer le théorème II. La partie 2) de cette même proposition donne $r_{i+1} > n_i r_i$; on a ainsi démontré toutes les assertions du théorème II.

<u>Remarque</u> : La démonstration d'Angermuller permet d'obtenir le théorème II sans passer par le théorème III : en effet, la partie 2) de la proposition 1 montre que les r_i engendrent Γ. Il reste seulement à montrer que $n_i r_i$ appartient au semi-groupe engendré par $r_o, \dots, r_{i-1}$. Le lemme 2 du § 2 montre qu'on a une congruence

$$n_i\ r_i \equiv \sum_{j=1}^{h} s_j\ r_j \mod d \quad , \quad 0 \leq s_j < n_j \ .$$

Par le même argument que dans la démonstration de la proposition 2 du § 2 on voit qu'on peut prendre $s_j = 0$ pour $j \geq i$. On a donc

$$n_i\ r_i = a_o\ r_o + \sum_{j=1}^{i-1} s_j\ r_j \ ,$$

et il suffit de montrer que $a_o \geq 0$.

Mais $$\sum_{j=1}^{i-1} s_j\ r_j \leq \sum_{j=1}^{i-1} (n_j - 1) r_j \ .$$

Comme $n_j r_j < r_{j+1}$,

$$\sum_{j=1}^{i-1} (n_j - 1) r_j < \sum_{j=1}^{i-1} (r_{j+1} - r_j) = r_i - r_1 .$$

Donc
$$n_i \, r_i \leq a_o \, r_o + r_i - r_1$$

$$(n_i - 1) r_i + r_1 \leq a_o \, r_o$$

et comme $n_i \geq 1$, $\qquad a_o \geq 0$, $\qquad$ c.q.f.d.

On peut donc se passer du théorème III dans le cas algébroïde (essentiellement grâce aux inégalités $a_i + a_j \leq a_{i+j}$) ; malheureusement ce théorème semble essentiel dans le cas affine.

4. LE CAS AFFINE : REDUCTION DU PROBLEME.

Rappelons les hypothèses : $\tilde{C}$ est une courbe propre, irréductible, P un point lisse de $\tilde{C}$, et $C = \tilde{C} - P$. On note v la valuation associée au point P, et A l'anneau affine de C. On suppose que A est engendré sur le corps de base k, par deux éléments x et y tel que p := car. k ne divise pas le p.g.c.d. de v(x) et v(y).

Posons $v(x) = -m$, $v(y) = -n$. Il est évident que quitte à faire des changements de variables de la forme $x \mapsto x + P(y)$, $y \mapsto y$, on peut supposer que $n < m$, $n \nmid m$ et $p \nmid m$.

Ce choix de coordonnées X et Y sur $\mathbb{A}^2$ ayant été fait, compactifions $\mathbb{A}^2_k$ dans $\mathbb{P}^2_k$ de la façon habituelle, en prenant pour coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^2$: X_o, X_1, X_2, le $\mathbb{A}^2_k$ qu'on considère est l'ouvert $X_2 \neq 0$ et on a $X = \dfrac{X_o}{X_2}$, $Y = \dfrac{X_1}{X_2}$.

Soit F(X,Y) le polynôme unitaire définissant la courbe C. Son polynôme homogène de plus haut degré est réduit à Y^m. Soit $\overline{C}$ la clôture de C dans le $\mathbb{P}^2$ considéré plus haut. $\overline{C}$ rencontre la droite à l'infini $X_2 = 0$ en un seul point Q, le point $X_1 = 0$. Il se peut que $\overline{C}$ soit singulier en ce point ; de toute façon il est unibranche puisque $\tilde{C}$ est la résolution de $\overline{C}$ en ce point.

Pour couvrir $\overline{C}$ il suffit de prendre la seconde carte $X_o \neq 0$; posons $U = \dfrac{X_2}{X_o}$, $W = \dfrac{X_1}{X_o}$. Oubliant les coordonnées homogènes, on a $X = \dfrac{1}{U}$, $Y = \dfrac{W}{U}$. Soit $H \in k[U,W]$ le polynôme définissant $\overline{C}$ dans l'ouvert

$X_o \neq 0$, soit :

$$H(U,W) = U^m F\left(\frac{1}{U}, \frac{W}{U}\right) .$$

Soit $G(U,W) \in k[U][W]$ un polynôme en N à coefficients dans $k[U]$, unitaire et de degré d. Posons $\sigma(G) \in k(X)[Y]$ le polynôme unitaire en Y, de degré d défini par

$$\sigma(G) = X^d\, G\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right) .$$

Remarque : Si G était de degré total d, σ serait simplement le changement de carte ordinaire pour les sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$.

Nous avons vu que $H(U,W) = 0$ définit une branche algébrique. Par les résultats du paragraphe précédent nous pouvons lui appliquer le théorème III du § 2 (on pose $X = U$, $Y = W$) : il existe donc une suite de polynômes unitaires $G_1, \dots, G_h, G_{h+1} = H$ dans $k[[U]][W]$ avec les propriétés suivantes :

i) $v(g_i) = r_i$ où v est la valuation de la branche et g_i est l'image de G_i dans $B = k[[U]][W]/(H)$.

Posons $d_i := \text{p.g.c.d.}(m, r_1, \dots, r_{i-1})$ $1 \leq i \leq h$. Alors

ii) le degré en W de G_i est d_1/d_i , $1 \leq i \leq h$;

iii) $d_{h+1} = 1$.

Il est clair qu'en tronquant G_i en une puissance suffisamment grande en U on peut supposer que $G_i \in k[U,W]$ sans affecter i), ii) ou iii).

Considérons les éléments $F_i(X,Y) = \sigma(G_i)$. $F_i \in k(X)[Y]$, et on a

(*)

i) $v(f_i) = r_i - \frac{m^2}{d_i} := s_i$, $1 \leq i \leq h$, où f_i est l'image de F_i dans $k(X)[Y]/(F)$;

ii) le degré en Y de F_i est d_1/d_i , $1 \leq i \leq h$;

iii) $d_{h+1} = 1$.

Comme il est clair que $d_i = \text{p.g.c.d.}(m, s_1, \dots, s_{i-1})$, on voit que l'on serait en mesure d'utiliser le théorème III (cas affine) si l'on savait que les F_i sont dans $k[X,Y]$, et pas seulement dans $k(X)[Y]$. Le reste de la démonstration consiste donc à montrer qu'on peut transformer les F_i en nouveaux F_i unitaires en Y, de même degré et même valuation, mais dans $k[X][Y]$. On applique alors le théorème III qui donne immédiatement toutes les assertions du théorème I sauf 3 , en posant $\delta_i = -s_i$. Mais au paragraphe précédent on a vu que

$$n_i \, r_i < r_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq h-1 \ .$$

Puisque $s_i = r_i - \frac{m^2}{d_i}$,

$$n_i \, s_i = n_i \, r_i - \frac{n_i m^2}{d_i} < r_{i+1} - \frac{m^2}{d_{i+1}} = s_{i+1}$$

et comme $\delta_i = -s_i$, on a $n_i \delta_i > \delta_{i+1}$, c.q.f.d.

Remarque : Dire que $F_i \in k[X,Y]$ revient à dire qu'on peut choisir $G_i \in k[U,W]$ de degré total d_1/d_i , et pas seulement de degré d_1/d_i en W. Ceci n'est vrai que si l'on suppose que la caractéristique de k ne divise pas m. En effet, prenons la branche, en caractéristique 3, paramétrée par $U = s^9$, $W = s^3 + s^8$. Donc $m = 9$; l'équation de la branche est $H(U,W) = W^9 - U^3 - U^8$.

Alors $h = 3$ et on peut prendre

$$G_1(U,W) = W \quad , \quad G_2 = W^3 - U^2W^2 - U \quad ,$$

et donc $v(g_1) = 3$, $v(g_2) = 29$. Un calcul facile montre qu'il n'existe aucun polynôme en U et W de degré total ≤ 3 de valuation 29. Donc la méthode de démonstration s'effondre pour la courbe $F = \sigma(H) = Y^9 - X^6 - X$. Cet exemple provient de [2], 9.12, où l'on fabrique de tels exemples en toute caractéristique.

5. TRANSFORMATIONS DE TSCHIRNHAUSEN (D'APRES ABHYANKAR).

On résume rapidement le paragraphe 3 de [2]. Soient R un anneau, $G \in R[Y]$ un polynôme unitaire de degré e, F un polynôme unitaire de degré n divisible par e. Posons $d = n/e$. Ecrivons la division de F par G :

$$F = G^d + \sum_{i=0}^{d-1} C_i \, G_i \quad ,$$

où $C_i \in R[Y]$ satisfait

$$\deg C_i < e = \deg G \ . \tag{1}$$

Abhyankar appelle C_{d-1} le <u>coefficient de Tschirnhausen</u> de G par rapport à F. On le notera $C_F(G)$ lorsqu'on voudra exhiber la dépendance sur F et G.

<u>Supposons que</u> d <u>est inversible dans</u> R. La transformation de Tschirnhausen de G par rapport à F, noté $\tau_F(G)$ est

$$\tau_F(G) = G + d^{-1} C_F(G) \quad .$$

<u>Remarque</u> : $\tau_F(G)$ est unitaire de degré e. D'autre part, comme il est clair que $C_{d-1} G^{d-1}$ est le terme de plus haut degré de $\sum_{i=0}^{d-1} C_i G_i$, on a

$$(2) \qquad c := \deg C_F(G) = \deg(F - G^d) - (d-1)e \quad .$$

<u>Lemme</u> : i) si $C_F(G) = 0$, $C_F(\tau_F(G)) = 0$ (évident) ;
ii) si $C_F(G) \neq 0$, $\deg C_F(\tau_F(G)) < \deg C_F(G)$.

<u>Démonstration du ii)</u> : Posons $H = \tau_F(G)$. On a

$$H^d = G^d + C_F(G)G^{d-1} + K \quad ,$$

où K consiste en les autres termes de l'expansion du binôme $G + d^{-1}C_F(G)$. Donc, puisque $c := \deg C_F(G)$,

$$(3) \qquad \deg K \leq 2c + (d-2)e < c + (d-1)e \quad , \quad \text{d'après (1)} \quad .$$

Mais $F - H^d = F - G^d - C_F(G)G^{d-1} - K = \sum_{i=0}^{d-2} C_i G_i - K$. On a :

$$(4) \qquad \deg \left(\sum_{i=0}^{d-2} C_i G^i\right) < (d-1)e \quad , \quad \text{d'après (1),}$$

$$\text{donc} \qquad \deg(F - H^d) < c + (d-1)e \quad \text{par (3) et (4).}$$

D'après la remarque précédent le lemme, $\deg(C_F(\tau_F(G))) = \deg(F - H^d)$, et on a donc gagné.

<u>Corollaire</u> : Si on itère la transformation de Tschirnhausen $j \geq e$ fois, ce qu'on note $(\tau_F)^j(G)$, alors $C_F((\tau_F)^j(G)) = 0$.

Proposition : Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\deg(F - G^d) < n - e = (d-1)e$;

ii) $C_F(G) = 0$.

i) $\Rightarrow$ ii) par l'égalité (2) ; ii) $\Rightarrow$ i) par l'inégalité (4).

Définition : Soient $F \in R[Y]$ un polynôme unitaire de degré n, d un entier positif divisant n. Un élément $G \in R[Y]$ de degré $e = n/d$ est une racine approchée d-ième de F (par rapport à Y) si G satisfait aux conditions de la proposition.

Théorème : Soient $F \in R[Y]$ unitaire de degré n, d un entier positif divisant n et inversible dans R. Alors il existe une unique racine approchée d-ième de F par rapport à Y.

Preuve : L'existence est claire par le corollaire. Pour l'unicité supposons que G et H sont tous deux des racines approchées d-ièmes de F. Alors

$$\left.\begin{array}{l}\deg(F - G^d) < n - e \\ \deg(F - H^d) < n - e\end{array}\right\} \Longrightarrow \deg(G^d - H^d) < n - e \quad .$$

Mais $$G^d - H^d = (G - H)\Big(\sum_{i+j=d-1} G^i H^j\Big) \quad ,$$

et comme G et H sont unitaires de degré e, et d est divisible dans R, $\sum_{i+j=d-1} G^i H^j$ est le degré $(d-1)e = n-e$. On a donc nécessairement $G = H$.

Corollaire : Soit $i : R \hookrightarrow S$ une inclusion d'anneaux, $F \in R[Y]$ unitaire de degré n. Soit d un entier positif divisant n et inversible dans R. Si $G \in S(Y)$ est la racine approchée d-ième de F considérée comme élément de $S[Y]$, alors $G \in R[Y]$.

Evident par l'unicité de G et le fait que la définition ne fait pas intervenir l'anneau des coefficients.

Exercice : Soient H, G et F des polynômes unitaires de $R[Y]$ de degrés c, cd et cde respectivement, où c, d, e sont des entiers positifs tels que de soit inversible dans R. Alors si H est la racine approchée d-ième de G, et G la racine approchée e-ième de F, H est la racine approchée de-ième de F.

Généralisation facile du théorème.

6. LE CAS AFFINE : FIN DE LA DEMONSTRATION.

Reprenons les notations du § 4 : $F(X,Y) \in k[X,Y]$ est l'équation d'une courbe affine avec une place à l'infini ; F est de degré total m. D'autre part nous avons trouvé des $F_i \in k(X)[Y]$, $1 \leq i \leq h$ avec

i) $v(f_i) = s_i$, $1 \leq i \leq h$;

ii) le degré en Y de F_i est m/d_i, où $d_i = \text{p.g.c.d.}(m, s_1, \ldots, s_{i-1})$.

Au § 4 nous avons vu que $n_i s_i < s_{i+1}$, où $n_i = d_i/d_{i+1}$. Nous voulons montrer que nous pouvons remplacer les F_i par une suite d'éléments de $k[X,Y]$ ayant les mêmes deux propriétés. On le fait par récurrence descendante sur i. $F = F_{h+1} \in k[X,Y]$ par hypothèse, ce qui permet de commencer la récurrence.

Supposons donc que $F_{e+1} \in k[X,Y]$. Divisons F_{e+1} par F_e :

$$(*) \qquad F_{e+1} = F_e^{n_e} + \sum_{i=0}^{n_e - 1} C_i F_e^i ,$$

$C_i \in k(X)[Y]$ de degré $< m/d_e$ en Y. La proposition 1 du § 2 montre que tout $C \in k(X)[Y]$ de degré $< m/d_e$ s'écrit :

$$C = \sum_{a \in N_e} C_a F^a \quad , \quad C_a \in k(X) \quad ,$$

où $N_e = \{(a_1, \ldots, a_{e-1}) \in \mathbb{N}^{e-1} \mid a_i < n_i\}$ et $F^a = \prod_i F_i^{a_i}$, $a \in N_e$, et donc par la proposition 2 du § 2, $v(c) \equiv 0 \ (d_e)$.

Donc $v(c_i f_e^i) \equiv i s_e \bmod d_e$. Comme $\text{p.g.c.d.}(s_e, d_e) = d_{e+1}$ et $n_e = d_e/d_{e+1}$, les valuations $v(c_i f_e^i)$, $0 \leq i < n_i$, sont toutes distinctes. D'autre part $v(f_e^{n_e}) = n_e s_e \equiv 0 \ (d_e)$. Mais $v(f_{e+1}) = s_{e+1} > n_e s_e$, comme on a vu au § 4, d'où l'on voit que du côté droit de (*) la valuation la plus basse doit être atteinte par deux termes au moins. La congruence modulo d_e montre que ces deux termes ne peuvent être que $F_e^{n_e}$ et C_o. Donc

$$v(c_{n_e - 1} f_e^{n_e - 1}) = v(c_{n_e - 1}) + (n_e - 1)s_e > v(f_e^{n_e}) = n_e s_e$$

ce qui implique que

$$v(c_{n_e-1}) > s_e \quad .$$

Remplaçons F_e par la transformation de Tschirnhausen $\tau_{F_{e+1}}(F_e) = F_e + n_e^{-1} + n_e^{-1} C_{n_e-1}$. (On utilise ici l'hypothèse que la caractéristique p ne divise pas m.) Il est clair que $\tau_{F_{e+1}}(F_e)$ a le même degré en Y que F_e, et nous venons de voir qu'elle a la même valuation, donc i) et ii) sont encore vérifiés pour $\tau_{F_{e+1}}(F_e)$. Les résultats du paragraphe précédent montrent alors que nous pouvons supposer que F_e est la racine approchée de F_{e+1} : il suffit d'itérer $\tau_{F_{e+1}}$ un nombre suffisant de fois. Le corollaire du théorème du § 5 montre que $F_e \in k[X][Y]$, puisque par hypothèse de récurrence $F_{e+1} \in k[X][Y]$. Ceci termine la démonstration.

Remarque : L'exercice du § 5 montre que les nouveaux F_i sont les racines approchées de $F = F_{n+1}$, et donc sont uniquement déterminées.

7. LE THEOREME D'EXISTENCE.

Nous allons démontrer le théorème suivant, déjà énoncé dans l'introduction. Nous supposons le corps de base de caractéristique 0.

Théorème : Soit Γ un semi-groupe de $\mathbb{N}$ tel qu'il existe une suite d'entiers $\delta_o, \ldots, \delta_h$ engendrant Γ et satisfaisant aux conditions 1, 2 et 3 du théorème I de l'introduction. Alors il existe une courbe C lisse et plane avec une seule place à l'infini telle que Γ soit son semi-groupe à l'infini.

Considérons l'anneau gradué $B := k[t^a]$, $a \in \Gamma$. On peut engendrer B par les éléments $X_i = t^{\delta_i}$, $0 \leq i \leq h$ (en général les X_i ne forment pas un système minimal de générateurs). La condition 2 implique que B est d'intersection complète, d'après [5] ; de plus si $n_i \, \delta_i = \sum_{i=0}^{i-1} \alpha_{ij} \, \delta_j$, $1 \leq i \leq h$, α_{ij} positifs, les équations de B s'écrivent

$$F_i := X_i^{n_i} - \prod_{j=0}^{i-1} X_j^{\alpha_{ij}} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq h \quad .$$

Ces équations sont homogènes pour la graduation qui affecte X_i du poids δ_i. Le poids de F_i est $n_i\delta_i$. Déformons B au-dessus de $k[t,s]$ de façon que les équations de la déformation soient :

$$F_i + tX_{i+1} = 0 \qquad 1 \leq i \leq h-1$$

et

$$F_h + s = 0 \ .$$

Pour $t \neq 0$ ces équations définissant une hypersurface dans $\mathbb{A}^2_k$, car on peut successivement éliminer $X_2, X_3, \ldots, X_h$. L'équation de la courbe devient alors

$$F_h(X_o, X_1, X_2(X_o, X_1), X_3(X_o, X_1), \ldots, X_h(X_o, X_1)) + s = 0 \ .$$

Pour s générique cette courbe est lisse.

D'autre part la condition (3) $n_i\delta_i > \delta_{i+1}$ implique que cette déformation est dans la partie <u>négative</u> de la déformation verselle de la courbe monomiale Spec B (voir [7], § 13). Donc cette démonstration s'étend par homogénéisation en une déformation de courbes propres donnée par les équations "projectives" :

$$F_i + tX_{i+1}\, X_{h+1}^{n_i\delta_i - \delta_{i+1}} = 0$$

$$F_h + s\, X_{h+1}^{\delta_h\delta_n} = 0 \ .$$

(On donne à X_{h+1} le poids 1.)

D'après le théorème 13.10 de [7] la fibre générique de cette déformation est une courbe propre et lisse $\tilde{C}$ avec un point P qui a pour semi-groupe Γ. Par construction $\tilde{C} \setminus P$ est une courbe affine <u>plane</u> avec un seul point à l'infini, ce qui termine la démonstration.

L'idée de cette construction provient de l'appendice de Teissier à [9] : de façon analogue il donne l'équation d'une branche plane à semi-groupe donné.

***

REFERENCES

[1] Abhyankar, S.S., Moh, T.T. : Newton-Puiseux expansion and generalised Tschirnhausen transformation, J. reine angew. Math., 260, 47-83 and 261, 29-54 (1973).

[2] Abhyankar, S.S. : Lectures on expansion techniques in algebraic geometry, Tata Institute of Fundamental Research (Bombay (1977).

[3] Angermuller, G. : Die Wertehalbgruppe einer ebenen irreduziblen algebroiden Kurve, Math. Zeit. 153, 267-282 (1977).

[4] Buchweitz, R.O. : Über Deformationen monomialer Kurvensingularitäten und Weierstrasspunkte auf Riemannschen Flächen, Dissertation, Technischen Universität Hannover (1976).

[5] Delorme, C. : Sous-monoïdes d'intersection complète de $\mathbb{N}$, Ann. Scient. E.N.S., 4ème série 9, 145-154 (1976).

[6] Herzog, J., Kunz, E. : Die Wertehalbgruppe eines lokalen Rings der Dimension 1, Ber. Heidelberger Akad. Wiss. 1971, II. Abh. (1971).

[7] Pinkham, H.C. : Deformations of algebraic varieties with $\mathbb{G}_m$ action, Astérisque 20 (1974), Société Mathématique de France.

[8] Sathaye, A. : On planar curves, Amer. J. Math. 99, 1105-1135 (1977).

[9] Zariski, O. : Les problème des modules pour les branches planes, avec un appendice de B. Teissier, Cours au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (1973), Palaiseau.