

# Ce qu'il faut comprendre afin de distinguer les travaux d'Andrew Wiles des "déchets"

Michael Harris

*Exposé à la conférence «À l'ombre d'une lecture (L'Immanence des vérités - Alain Badiou), quelles hypothèses sur le contemporain » ?*

IRCAM, Festival Manifeste, 7-8 juin 2019

## AVANT-PROPOS

... Dans *L'Immanence des vérités* l'expression « *œuvres-en-vérité* » sert à distinguer les travaux qui représentent de véritables événements, ceux qui sont destinés à survivre, de ceux d'une existence passagère, et qui appartiennent à la catégorie des archives, ou bien des déchets. Chez nous, par contre, ce genre de distinction est suspect, parce qu'il a servi historiquement à justifier toutes les exclusions dont souffre encore la société américaine, et plus particulièrement le système universitaire, fortement hiérarchisé, et presque aussi élitiste (mais dans un autre style) que celui des grandes écoles françaises.

Évidemment cela n'empêche pas les universitaires américains de consacrer beaucoup d'énergie pour préserver les hiérarchies existantes, et je suis conscient que dans mon propre fonctionnement routinier en tant qu'universitaire américain je suis parfaitement complice dans cette opération de préservation du *statu quo*. On n'est pas à une contradiction près. Cela dit, mes collègues américains trouveraient de très mauvais goût que je m'adonne à la *célébration* de notre rôle dans ce système élitiste et hiérarchique, et je dois dire que je partagerais leur réaction.

C'est en partie pour cette raison, mais seulement en partie, que j'ai insisté plusieurs fois dans mon exposé sur le caractère *collectif* de la recherche *mathématique*. La vision des mathématiques comme la création d'une succession de grands hommes (presque toujours des hommes) est trop bien enracinée dans les narratifs dominants autour du sujet, et toute occasion est bonne pour remettre cette vision en question.

PROPOS: [Q]u'en est-il des œuvres **mathématiques** entendues comme « œuvres-en-vérité dotées de leur propre index » et non plus comme conditions pour telle ou telle philosophie ?

... le mot "vrai" n'est presque jamais utilisé dans ma vie professionnelle, et encore seulement pour boucher des trous syntaxique, comme quand on dit "Il est vrai que..." ou "la conclusion est une conséquence de la vérité de cette condition", des expressions vides de contenu métaphysique. Et quand je me demande ce que je comprends par le mot "vrai", au-delà des contingences de l'observation empirique, je constate que dans la tradition occidentale la vérité est ce qu'on obtient à la fin d'un raisonnement qui ressemble beaucoup à ce que font les mathématiciens.

Ce que les mathématiciens peuvent offrir à la philosophie, en revanche, c'est une pratique qui permet d'arriver à l'accord, basée sur un langage construit sans ambiguïté, ce qui présuppose (comme Wittgenstein a voulu croire) qu'il y a une communauté qui agit pour exclure toute utilisation illicite. Mais comme Deline a remarqué dans un exposé sur la théorie de types d'homotopie proposée par Voevodsky, c'est comme la Novlangue d'Orwell où l'idéal est de rendre impossible l'expression de pensées hérétiques. On retombe ainsi sur l'accord de la communauté, et donc cette pratique n'est nullement éternelle.

Si j'ai plus ou moins compris en quoi consiste l'index, c'est donc à chercher du côté de la communauté, ... Au lieu de poursuivre cette question, je propose de parler de choses que je comprends, en me basant sur les quelques lignes du livre *L'immanence des vérités* où l'on se demande si la solution par Wiles du théorème de Fermat mérite d'être considérée parmi les œuvres. Alors que cette solution est déjà effectivement reléguée aux archives, comme j'expliquerai tout à l'heure, je voudrais la sauver de la déchetterie.

Que dit M. Badiou à propos de Wiles? (p. 589) Que son théorème est un exemple de *travail rétroactif*: "il mesure en quelque sorte la puissance des moyens nouveaux quant à la solution de problèmes anciens". C'est opposé à la fois au *travail technique* (routinier, je dirais) et au *travail créatif*, qui "consiste d'inventer des perspectives, des concepts, des méthodes de démonstration". Seul un *travail créatif* peut être qualifié d'œuvre.

"Parlera-t-on pour autant, en se basant sur ce seul tour de force, de l'œuvre de Wiles'? C'est douteux."

Mais les reportages sur ce que Wiles a réalisé ont tendance à ne pas reconnaître que ce qui importe aux arithméticiens n'est pas tant qu'il a démontré le théorème de Fermat, aussi impressionnant que cela puisse être, mais surtout qu'il l'a fait par la création des moyens pour démontrer un résultat beaucoup plus solide et actuel, à savoir la *modularité* des courbes elliptiques sur le corps rationnel. Je vais traiter 4 points, d'abord rapidement, puis un peu plus en profondeur.

1. Le plus simple : en fait, Wiles a bien inventé "des perspectives, des méthodes de démonstration", mais il n'insiste pas dessus parce que son éthique personnelle mathématique valorise surtout la solution des problèmes identifiables. Avant Fermat il avait fait (entre autres) la première contribution à la solution de la Conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer (avec Coates) et il avait résolu la Conjecture Principale d'Iwasawa (with Mazur). De plus, les spécialistes sont capable d'identifier les concepts sous-jacents à ces trois résultats majeurs qui font de lui le spécialiste le plus remarquable de sa génération de la théorie algébrique des nombres, et qui ont été assimilés par la communauté, même si personne ne les a codifiés en une "Théorie de Wiles."

2. Ces perspectives nouvelles ont depuis plus que 25 ans servi de base pour un des domaines les plus actifs et prestigieux de la théorie des nombres, où les méthodes de théorie algébrique des nombres sont utilisées pour établir une partie du *programme de Langlands*. Il y a eu de nombreuses conférences et groupes d'études consacrées rien qu'à des contributions spécifiques à ce domaine, et tous les spécialistes ont essayé de contribuer ; j'ai moi-même publié plusieurs travaux qui généralisent ces perspectives à d'autres types de problèmes.

3. Cependant, ce n'est pas seulement la preuve de Wiles qui est considérée aujourd'hui comme une archive (dans le sens de la profession, non pas celui du livre de Badiou), au sens que les travaux les plus récents dans cette direction ont énormément simplifié les arguments de Wiles et les ont rendus plus puissants. En effet, tout le domaine est en cours de reconceptualisation comme partie d'une perspective beaucoup plus large qui incorpore le *programme de Langlands géométrique*, dont la formulation actuelle nécessite le développement de techniques nouvelles, certaines consacrées notamment à surmonter les difficultés implicites dans les arguments en géométrie de dimension infinie. Le mot *infini* revient aussi dans le langage des *infini-catégories*, qui elles-mêmes ne sont que la première étape, enfin bien comprise grâce aux travaux de Jacob Lurie en particulier, d'une hiérarchie hypothétique infinie des infinis. A la fin — mais il n'y aura pas une fin, justement — même les problèmes résolus par Wiles et ses collègues sont destinés à être incorporés dans une perspective d'une telle généralité que les motivations contemporains seront vraisemblablement invisibles ou insignifiantes.

4. Cela renforce l'affirmation que le cadre convenable n'est pas le chercheur individuel mais plutôt la communauté — ou le chercheur *collectif*. Les innovations de Wiles ont un sens seulement comme des moments particulièrement remarquables dans une chaîne d'innovations avec beaucoup d'auteurs, certains très célèbres pour leurs nombreuses inventions, d'autres peut-être seulement connus pour une ou deux contributions qui sont néanmoins indispensables. L'insistance sur le rôle des individus exceptionnels — les grands hommes — cache l'effort collectif, qui, on peut soutenir, est le niveau auquel *l'absoluité* mérite d'être située.

1. Dans le cas de FLT, mais aussi en germe dans ses autres travaux, on peut dire que l'innovation principale de Wiles était qu'il avait trouvé un moyen de compter des ensembles d'objets qui sont intrinsèquement infinis. Le théorème qu'il a effectivement démontré, dans son papier avec Richard Taylor, est le suivant : toute courbe elliptique sur  $\mathbf{Q}$  est obtenue par la construction de Shimura à partir d'une forme modulaire. Nous savons que Shimura a défini une application *injective*

$$\{(certaines) \text{ formes modulaires}\} \Rightarrow \{\text{courbes elliptiques sur } \mathbf{Q}\}$$

Pour terminer la démonstration, Wiles doit montrer que cette application est *surjective* (complètement démontré par Breuil-Conrad-Diamond-Taylor en raffinant la méthode de Wiles, mais le cas particulier démontré par Wiles suffit pour Fermat). Une méthode classique pour conclure est de compter les deux ensembles et de montrer qu'ils ont la même cardinalité. Malheureusement ce genre d'argument (comme Dedekind avait remarqué) est précisément ce qui ne marche pas pour les ensembles infinis; André Weil a fait l'observation — que Serge Lang avait qualifié de "stupide" — que les deux ensembles ont la même cardinalité (dénombrable). Wiles a inventé une procédure pour compter des ensembles *finis* qui interviennent dans la situation et il a inventé les concepts qui lui ont permis de montrer que cela suffit. Ce que personne n'avait compris avant lui, c'est qu'il était possible d'utiliser cette information finie (comptage des ensembles finis), plus une autre type d'information finie (propriétés des anneaux noethériens) pour résoudre un problème de comptage infini. Pour utiliser le langage de *L'immanence des vérités* (ou pour l'abuser? vous me direz) ceci est un exemple paradigmatique de rendre l'infini actuel (dénombrable) des courbes elliptiques *immanent* à l'intérieur du système de la théorie algébrique des nombres.

Lesquels, alors, sont les "perspectives, concepts, méthodes de démonstration" de Wiles? Ici on voit le premier obstacle pour comprendre comment distinguer une oeuvre d'un déchet en théorie des nombres — si on ne participe pas au monde de théorie des nombres, comment peut-on faire un jugement bien informé? Une liste sur internet mentionne 96 conférences en théorie des nombres, dans le monde, qui ont eu lieu en 2018, et je sais que c'est incomplet parce que j'ai moi-même assisté à deux qui ne sont pas sur la liste.

- [Integrality of the L-function of a modular form](#), December 17-18, 2018, IISER Tirupati, Tirupati, India
- [On the Lang-Vojta conjecture](#), December 17-18, 2018, IISER Tirupati, Tirupati, India
- [University of Singapore, Singapore](#)
- [Number Theory and Function Fields at the Crumath](#), 14-15 meeting December 17-18, 2018, Workshop December 18-20, 2018, University of Derby, UK
- [Conference on number theory](#), December 10-14, 2018, Kerala School of Mathematics, Kozhikode, Kerala, India
- [Number theory in quantum automata theory](#), October 09, 2018, Antwerp, Belgium
- [Palmetto Number Theory Series \(PANTS\) XXI](#), December 8-9, 2018, University of South Carolina, Columbia, SCA, USA
- [NYU-ECNY](#), November 30 - December 1, 2018, Center for Mathematical Sciences, Lund University, Sölvegatan 10A, Lund, Sweden
- [2018 Fall School on Algebraic Curves and Arithmetic](#) (ICC-2018), November 19-21, 2018, Autumn School, November 17-28, 2018, Osaka, Japan
- [South Asia Conference: A Mathematical Celebration of Robert P. Langlands](#), November 14-16, 2018, University of Minnesota in Minneapolis, MN, USA
- [Arithmetic and L-functions](#), November 12-16, 2018, Besançon, France
- [Young Researchers in Arithmetic Number Theory](#), November 8-9, 2018, University of Sheffield, Sheffield, UK
- [New Developments in the Theory of Modular Forms and Function Fields](#), November 5-9, 2018, Centro de Ricerca Matemática Emílio de Giorgi, Pisa, Italy
- [Pan and Conference in Number Theory](#), November 2-4, 2018, IUC, Chicago, USA
- [Baker Memorial Conference](#), October 18, 2018, Isaac Newton Institute, Cambridge, UK
- [Conference on Arithmetic, Algebraic and Related Problems II](#), October 15-17, 2018, Purdue University Northwest, Westville-Hammond, Indiana, USA
- [Mathematics Symposium in celebration of the centenary of his election as FRS](#), October 15-16, 2018, The Royal Society, London, 4-9 Carlton House Terrace, London, UK
- [International conference on Class Groups of Number Fields and Related Topics-2018](#), October 8-11, 2018, Harish-Chandra Research Institute, Allahabad, India
- [The Ontario-Maine Number Theory Conference](#), October 6-7, 2018, Laval University, Quebec city, Canada
- [Integrality Conference 2018](#), October 1-6, 2018, Augusta, Georgia, USA
- [9th International Conference on Uniform Distribution Theory \(UDT-2018\)](#), October 1-5, 2018, CRM, Montreal, France
- [Eisenstein Number Theory Day](#), September 29, 2018, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA
- [The Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Special Transcendents](#), September 24-28, 2018, Dragomanovo National Pedagogical University, Kiev, Ukraine
- [Number Theory From Lister \(NTDL06\)](#), September 24-26, 2018, Cauburn campus of the University of New South Wales, ACT.

- [Australia](#)
- [Conference on even partitions in cryptography and number theory](#), September 17-21, 2018, UC Irvine, California, USA
- [10th meeting of the Palmetto Number Theory Series \(PANTS\)](#), September 15-16, 2018, Wake Forest University, Winston-Salem, NC, USA
- [10th IMA Conference on Theoretical and Computational Discrete Mathematics](#), September 14-15, 2018, The Enterprise Centre, University of Derby, UK
- [Arithmetic Geometry: Logic and Logic](#), September 10-14, 2018, Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Japan
- [Arithmetic Theory](#), September 10-13, 2018, University of Manchester, UK
- [International Conference on Number Theory dedicated to the 70th birthday of Professor Antonia Linnik and Evgenii Marichev](#), September 9-11, 2018, Palanga, Lithuania
- [Workshop in arithmetic, logic, and logic](#), September 5-7, 2018, Technical University Darmstadt, Darmstadt, Germany
- [Conference on Elementary and analytic number theory](#), September 3-7, 2018, Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany
- [Stacks, Conjectures, Zeta-functions theory and related topics](#), September 5-8, 2018, University of Exeter
- [Workshop on Modular measures and special values of L-functions](#), August 27-31, 2018, Centre for Symmetry and Deformation, University of Copenhagen, Denmark
- [Arithmetic Geometry, Number Theory, and Computation](#), August 20-24, 2018, MIT, Cambridge, MA, USA
- [International school in Algebraic Theory](#), August 13-17, 2018, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
- [Arithmetic of curves](#), August 13-17, 2018, Bakerella Hall, Heywood, UK
- [CMLLMS Research School: New Trends in Analytic Number Theory 2018](#), August 13-17, 2018, University of Exeter, Exeter, UK
- [2018 ICM satellite conference in Number Theory, Automorphic Forms, Galois Representations and L-functions](#), July 25-27, 2018, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil
- [ANES XIII](#), July 16-20, 2018, University of Wisconsin, Madison, USA
- [ANES 13 satellite school \(Arithmetic, Groups and Analysis\)](#), July 9-20, 2018, Academia Nacional de Ciencias, Córdoba, Argentina
- [Bolyai Institute and Eötvös Science School Workshop on Automorphic Forms and Related Topics](#), July 9-14, 2018, Summer School, July 16-20, 2018 (Workshop), Bolyai Institute in Budapest, Hungary
- [Elementary Theory and Applications: Groups, Metrics and Arithmetic](#), July 6-12, 2018, Imperial College London, UK
- [15th Meeting of the Canadian Number Theory Association \(CNTA XV\)](#), July 9-13, 2018, Université Laval, Québec city, Canada
- [Workshop on Galois representations](#), July 9-12, 2018 at the University of Heidelberg, Germany
- [Summer School in Galois representations and computational approaches to Galois representations](#), July 3-7, 2018, University of Luxembourg, Esch-sur-Alzette, Luxembourg

- *Integrable Number Theory Seminar*, December 17-18, 2018, IISER, Trirupur, Trirupur, India
- *On the Langlands Program, Endgame and Beyond*, December 17, 2018, Institute for Math Sciences (IMS), National University of Singapore, Singapore
- *Number Theory and Function Fields at the Crossroads*, LMS meeting December 17, 2018, Workshop December 18-20, 2018, University of Exeter, UK
- *Conference on Number Theory*, December 10-14, 2018, Kerala School of Mathematics, Kuthiade, Kerala, India
- *Number theory in Flanders: Autumn meeting*, December 10, 2018, Aarwerp, Belgium
- *Palena Number Theory Society (PANTS) XXI*, December 9-8, 2018, University of South Carolina, Columbia, SCA, USA
- *N° Days IV*, November 30 - December 1, 2018, Centre for Mathematical Sciences, Lund University, Solvegatan 18A, Lund, Sweden
- *2018 workshop on elliptic curves and modular forms* (ECMF 2018), November 19-21, 2018, Atsumi School, November 17-18, 2018, Osaka, Japan
- *Math Abel Conference: A Mathematical Celebration of Robert P. Langlands*, November 14-16, 2018, University of Minnesota in Minneapolis, MN, USA
- *Advances and Frontiers*, November 12-16, 2018, Besancon, France
- *Young Researchers in Arithmetic Number Theory*, November 9-8, 2018, University of Sheffield, Sheffield, UK
- *New Developments in the Theory of Modular Forms over Function Fields*, November 5-9, 2018, Centro de Pesquisa Matematica Emlio De Gomp, Rio, Italy
- *Paris-Annals Conference in Number Theory*, November 2-4, 2018, ICR, Chicago, USA
- *Baker Memorial Conference*, October 18, 2018, Isaac Newton Institute, Cambridge, UK
- *Conference on Diophantine Equations and Related Problems II*, October 15-17, 2018, Purdue University Northwest, Westville/Hammond Indiana, USA
- *Seminars in Mathematics in celebration of the centenary of his election as FRS*, October 15-16, 2018, The Royal Society, London, 6-9 Carlton House Terrace, London, UK
- *International Conference on Class Groups of Number Fields and Related Topics 2018*, October 8-11, 2018, Harish-Chandra Research Institute, Allahabad, India
- *The Quebec/Maine Number Theory Conference*, October 6-7, 2018, Laval University, Quebec city, Canada
- *Integers Conference 2018*, October 5-6, 2018, Augusta, Georgia, USA
- *6th International Conference on Uniform Distribution Theory (UDT 2018)*, October 1-5, 2018, CRM, Marseille, France
- *From Riemann Zeta to Dirichlet L*, September 29, 2018, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA
- *The 5th International Conference on Analytic Number Theory and Special Functions*, September 24-28, 2018, Dogusdemir National Pedagogical University, Kiev, Ukraine
- *Number Theory - Japan Link* (NTJL16), September 24-26, 2018, Caberns campus of the University of New South Wales, ACT
- *Combinatorial Seminar School in Number Theory*, May 28-June 3, 2018, University of Connecticut at Storrs, USA
- *Shimura varieties and hyperbolicity of moduli spaces*, May 28-June 1, 2018, UQAM, Montreal, Canada
- *UNC Summer School in Computational Number Theory: Algorithms for Estimation of L-Function Zeros*, May 28-June 1, 2018, University of North Carolina Greensboro, USA
- *XV International conference on Algebra, Number Theory and Discrete Geometry and applications*, dedicated to the centenary of the birth of Nikhita Mukhopadhyay, May 28-31, 2018, Loyd Talley, Tula State Pedagogical University, Tula, Russia
- *Conference on Modular Forms and Related Topics*, May 28-31, 2018, American University of Beirut, Beirut, Lebanon
- *Summation 2018*, May 22-25, 2018, Paris, France
- *Emil Artin International School in Mathematics for Students: A WAMS school on the mathematics of Artin's conjecture*, May 21-25, 2018, Yerevan State University, Yerevan, Armenia
- *Conference: Discontinuous Geometry*, May 21-25, 2018, CRM, Luminy, Marseille, France
- *Integrable Number Theory XX*, May 19-20, 2018, Socio Matho Village, Turkey
- *Disability in Number Theory: Les mathématiques au service des personnes handicapées*, May 14 - June 8, 2018, CRM Montreal, Canada
- *Georgia Number Institute*, May 14-17, 2018, The University of Georgia, Athens GA, USA
- *International workshop on elliptic curves, modular forms and L-functions/functionality*, May 10-11, 2018, Bilecik, Turkey
- *Finite and L-functions of Motivic*, April 29, 2018, Simons Foundation
- *Eight Annual United Number Theory Conference*, April 28-29, 2018, Buffalo, New York State, USA
- *The 10th anniversary of the Boston Number Theory Colloquium*, Universitat Rovira Tr, April 19-20, 2018, Rome, Italy
- *The Second Main Atlantic Seminar in Number Theory (MASNT II)*, April 7-8, 2018, Towson University, Baltimore MD, USA
- *Workshop in Tokyo*, March 26-30, 2018, University of Tokyo
- *Workshop: Arithmetic of automorphic forms and special L-values*, March 26-27, 2018, Durham University, Durham, UK
- *2nd annual Automorphic Forms Workshop*, March 19-22, 2018, Tufts University, Medford, Massachusetts, USA
- *Modular Forms and Quantum Field Theories*, March 11-16, 2018, Banff, Canada
- *2018 Southern Regional Meeting on Numbers (SRM2018)*, March 10-11, 2018, East Tennessee State University, Johnson City, Tennessee, USA
- *The 11th Center for Mathematics Conference on Zeta Functions*, February 19-22, 2018, Room 532, Lecture Hall, Faculty of Science, Eblon University, Japan
- *Number Theory Workshop STN 2018 - 2nd edition*, Seminars de Teoria de Nombres de Barcelona, January 22-26, 2018, Faculty of Mathematics (FCM) Grup de Recerca en Teoria de Nombres, 501 08007 Barcelona/Catalunya
- *PARI/GP workshop*, January 15-19, 2018, Besancon University, France
- *CRMS Research School on Explicit Number Theory*, January 8-19, 2018, The University of the Witwatersrand Johannesburg, South Africa

Peut-être 20% de ces conférences touchent aux branches de la théorie algébrique des nombres concernées pas les travaux de Wiles. Ses méthodes de démonstration sont beaucoup trop spécialisées pour décrire ici, mais je peux confirmer qu'elles sont étudiées par tous les étudiants qui s'intéressent à ces branches de la théorie des nombres, soit dans les papiers de Wiles lui-même, soit dans les livres consacrés à ces méthodes, soit (dans la plupart des cas) dans les exposés des auteurs qui ont développé et raffiné ces méthodes — donc on peut logiquement se poser la question de qui au juste est l'auteur de ces méthodes. On y reviendra, comme à la question des concepts. Enfin, deux perspectives qui sont présentes dans les travaux de Wiles depuis ses débuts :

(a). L'idée que la théorie globale de corps de classes permet de réinterpréter les calculs très difficiles de ramification sauvage en un premier  $p$ , en termes de calculs beaucoup plus simples de ramification modérée en des premiers différents de  $p$ . C'était dans son papier avec Coates en 1976, et c'était aussi dans la première tentative de terminer sa démonstration de la modularité (et donc de FLT), ainsi que dans la bonne méthode qu'il a inventée avec Taylor. A noter que la première tentative était basée sur les systèmes d'Euler inventés par Rubin et Kolyvagin et qui ont aussi leurs origines dans les travaux antérieurs de Wiles.

(b) L'idée déjà mentionnée que le problème infini de comptage puisse être ramené à des calculs finis.

2. J'ai dit que les perspectives, méthodes, concepts introduits par Wiles ont permis d'établir des cas particuliers du grand programme de Langlands, le grand visionnaire de la théorie des nombres, qui peut facilement se comparer aux exemples de mathématiciens créatifs (Riemann, Galois, Grothendieck) mentionnés dans le passage en question du livre. Mais pour les mathématiciens en dehors du domaine l'importance de Langlands n'est pas si claire, et il a dû attendre longtemps avant d'être honoré par le Prix Abel — deux années après Wiles — justement parce que Langlands est surtout connu (sauf par des spécialistes) pour ses perspectives et concepts, et pas tellement pour les résultats qui portent son nom.

Cela dit, ce sont les méthodes introduites par Wiles qui, jusqu'à présent, ont permis d'établir les conjectures dans tous les cas connus, et c'est un programme de recherche encore loin d'être épuisé. Dernièrement la démonstration de la

conjecture de modularité pour les courbes elliptiques sur les corps quadratiques imaginaires était le sujet d'un papier avec 10 auteurs qui fait appel à toutes les méthodes qui trouvent leurs origines dans les travaux de Wiles, et bien plus encore.

Encore un mot sur la finitude. Une grande réussite des méthodes de Wiles est la démonstration (par Kisin et par Emerton) d'une conjecture de Fontaine et Mazur qui dit essentiellement que certains ensembles d'objets géométriques sont finis. Par ailleurs, un autre chemin proposé pour démontrer le théorème de Fermat était de rendre *effectif* le théorème de finitude de Faltings (conjecture de Mordell). Cela pourrait très bien correspondre à la description du *fini accessible*. Et plus généralement on peut voir tous les grands théorèmes de classification — par exemple, la classification des groupes de Lie semisimples — comme des victoires du fini sur un champ potentiellement infini. Les mathématiciens sont toujours très contents de pouvoir exprimer un tel champ par un fini accessible; typiquement on obtient les prix les plus prestigieux pour des résultats de ce genre. Alors je ne vois pas si cela veut dire que les mathématiciens opèrent leur propre *oppression*, ni que la finitude des objets d'un type donné (par exemple, le théorème de Faltings) les représente comme un *déchet*.

3. Langlands lui-même a souvent exprimé de l'impatience avec les arithméticiens qui travaillent dans le champ ouvert par les travaux de Wiles, Taylor, et al. Il a même indiqué, pas toujours avec beaucoup de tact, qu'ils perdent leur temps (et le sien) et qu'ils feraient mieux de travailler sur les méthodes qu'il a proposées pour réaliser les correspondances prévues par ses conjectures.

Il est clair en tout cas que les travaux de Wiles et al sont provisoires, du point de vue du programme de Langlands. Ils ont réussi à résoudre des questions brûlantes mais qui ne brûlent plus depuis qu'elles ont été résolues. C'est le moment de citer André Weil, qui parle de l'ennui qui arrive après l'extase, dans un contexte légèrement différent :

Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la Gita, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.

Je ne sais pas si la remarque de Weil sur la connaissance et l'indifférence qui arrivent en même temps exprime en quelque sorte l'oppression de la finitude. Toujours est-il que la résolution d'une grande conjecture ne laisse ni un vide, ni une beauté froide, mais plutôt le sentiment **qu'on n'a pas encore trouvé la question qui aurait dû être posée** à la place de la conjecture. C'est certainement le cas des travaux de Wiles. Il y a les conjectures de Langlands qui vont bien au-delà de tous les cas spécifiques où elles ont été démontrées. La résolution du théorème de Fermat dans le cadre du programme de Langlands ne pourrait jamais être un déchet, parce qu'elle confirme la profondeur de ce

programme. Mais il ne réalise pas non plus la *raison profonde* de ce programme. Il y a ici trois travaux créatifs à distinguer :

Le travail de Langlands et ses précurseurs : formulation du programme

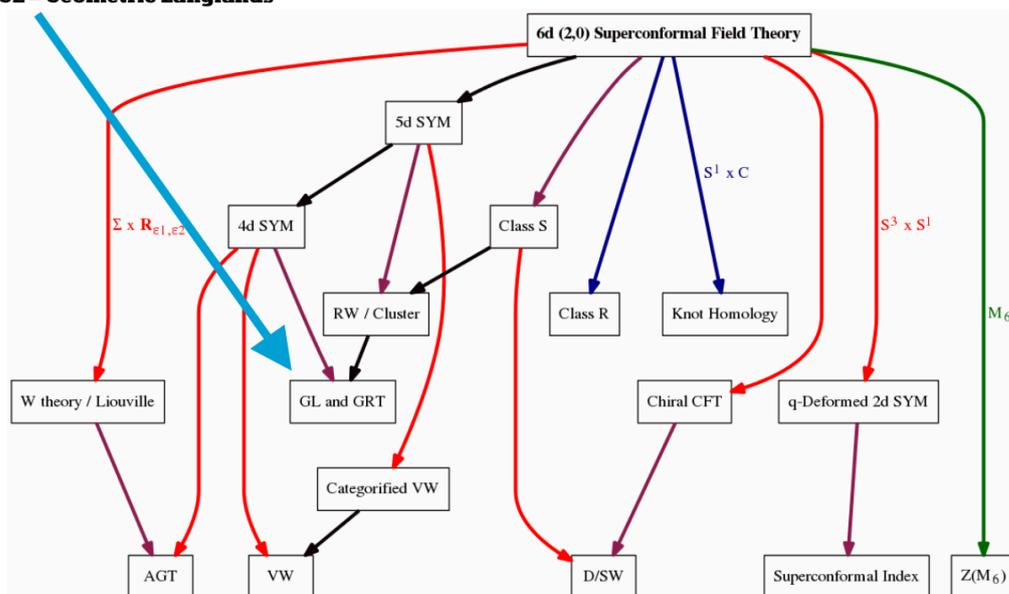
Le travail de Wiles et ceux qui l'ont suivi : vérification du programme et conséquences

Le travail d'un groupe de mathématiciens qui ne sont pas encore nés: détermination de la *raison profonde* du programme.

Je ne crois pas à l'existence de *raisons profondes* en général ; c'est peut-être justement une tentative de trouver un *index* pour le travail réalisé. Cependant la quête des raisons profondes caractérise toujours le mouvement d'un programme mathématique. Langlands a formulé son programme comme une unification de beaucoup de résultats disparates dans différents domaines de la théorie des nombres et aussi de la théorie des représentations de groupes de Lie semisimples. On a tendance à dire que son programme *explique* tous ces résultats qui désormais sont perçus comme des *phenomènes* plus ou moins superficiels qui proviennent de la structure exprimée par le programme de Langlands. Mais ensuite on peut demander une explication pour cette structure. Pourquoi cette dualité et pas une autre?

La démonstration éventuelle (dans 200 ans...) des conjectures de Langlands n'est pas garantie de répondre à cette question. Au contraire, dans la littérature de physique mathématique il y a une théorie hypothétique appelée "six dimensional (2,0) superconformal QFT" qui inclut la version géométrique de la dualité de Langlands dans un petit coin.

**C'est ici!**  
**GL = Geometric Langlands**



Mais alors où est la théorie qui explique la relation de tout cela avec la théorie des nombres?

Comme j'ai écrit dans mon livre,

*Physicists like Steven Weinberg can "Dream of a final theory" but mathematicians can realistically dream only of an endlessly receding horizon.*

Pour construire cette théorie en 6-dimensions il faut faire appel à la théorie de catégories supérieures. On le fait sans se soucier beaucoup des éventuels paradoxes ensemblistes. Et ceci n'est pas parce qu'on ne reconnaît pas leur pertinence, mais plutôt parce qu'on sait bien que la théorie sera inévitablement provisoire. Quand le moment arrive (dans 2000 ans) où l'on se rapproche de sa construction, où l'on risque d'atteindre "à la connaissance et à l'indifférence en même temps", la théorie en question aura longtemps été dépassée comme structure globale de notre imagination mathématique. C'est une situation que Grothendieck a décrit avec le mot *avatar*: les objets mathématiques que nous connaissons sont perçus comme des *avatars* d'une réalité sous-jacente mais cachée.

Sur la page 34 on lit

*Dans l'oeuvre d'art, dans la situation politique et plus encore dans la situation amoureuse, la question de savoir si on n'est pas constamment aux prises avec l'incertitude quant à ce qui est dedans et ce qui est dehors est constitutive du processus lui-même.*

Mais cela s'applique tout autant à la situation où se trouvent les mathématiciens. La question que j'ai proposée aux philosophes va dans ce sens :

*How can we talk to one another, or to ourselves, about the mathematics we were born too soon to understand?*

Dans le chap. C15 M. Badiou écrit (plus ou moins à ce propos) "Mais la mathématique n'est pas le lieu du sens." Je pense plutôt qu'il y a toujours un sens mais c'est relatif au langage utilisé par la communauté contemporaine — je dirais "immanente" si je savais ce que cela veut dire — des mathématiciens. Cette communauté, ce langage, leurs préoccupations, etc. sont toujours en mouvement, et le sens aussi. Et en dehors d'un sens incarné dans un langage vivant, où est la mathématique?

4. Enfin, de ce point de vue l'absolu n'est pas l'ensemble impossible de tous les ensembles mais plutôt le processus même qui cherche à arriver à une limite qu'on sait d'avance qu'on n'atteindra jamais :

*when after a long and arduous climb we finally find our way to the concepts we had been seeking, we see that they are in turn the avatars of concepts we glimpse only dimly, and so on without end.*

On peut tracer l'histoire collective de la pensée de Wiles, et s'il faut prouver qu'elle mérite le nom d'oeuvre c'est de ce côté collectif qu'il faut chercher la justification. Dans le livre "Eloge des mathématiques" on trouve des expressions comme "confrérie des mathématiciens" ou "authentique Internationale... des mathématiciens" et d'autres encore. C'est certainement une telle confrérie — je peux donner une liste de noms, avec la contribution de chacun — qui a réalisé une grande oeuvre. En se focalisant sur l'apport d'un individu on perd le sens de la véritable dynamique de la pratique. Ou peut-être on peut affirmer avec Badiou (p. 23) — et je l'affirmerais, encore une fois, si je le comprenais — que "le devenir-sujet d'un individu ou d'un collectif dépend de sa capacité à être immanent au processus d'une vérité." Il s'agit donc de voir le sujet des mathématiques comme la tout-à-fait réelle communauté des mathématiciens. Encore, sans attacher trop d'importance à la notion de *vérités*, on peut affirmer (p. 21) pour les mathématiques que *"les vérités sont créées par un sujet humain, personnel ou impersonnel, individuel ou collectif, dans des mondes déterminés, avec des matériaux déterminés."*

Ou enfin, si un des buts de la philosophie est d'identifier ce que Badiou appelle les lieux où être et être-pensé sont identiques (p. 70), alors c'est effectivement une description possible des mathématiques, à ceci près qu'il ne faut pas se tromper sur l'identité de ceux ou celles qui pensent ce dont l'être est "être-pensé".