

PROGRAMA DE SARKISOV

RESUMEN. Siete charlas del Seminario de Geometría Algebraica UC, dictadas durante el primer semestre 2023. El seminario fue dirigido por Pedro Montero, y las charlas fueron dadas por Pedro Montero, Jaime Negrete y Giancarlo Urzúa.

Notas transcritas por Nicolás Vilches. Versión del 5 de agosto de 2023.

ÍNDICE

1. MMP para superficies y Mori fiber spaces (Pedro, 16 de mayo)	2
1.1. El MMP de superficies	2
1.2. Transformaciones elementales	4
2. Links de Sarkisov y el 2-ray game (Pedro, 23 de mayo)	6
2.1. Links de Sarkisov	6
2.2. Grado de Sarkisov	7
2.3. El 2-ray game	12
3. Teorema de Noether–Fano–Iskovskikh (Pedro, 30 de mayo)	12
3.1. Demostración del teorema	13
3.2. Programa de Sarkisov	18
4. Sesión de ejercicios (Jaime, 6 de junio)	18
4.1. Lema de negatividad	18
4.2. Teorema de Noether–Fano–Iskovskikh en \mathbb{P}^2	20
5. Programa de Sarkisov en dimensión 2 (Pedro, 13 de junio)	22
5.1. Caso 1	22
5.2. Caso 2	25
5.3. Un ejemplo	28
6. Acotamiento efectivo de T-singularidades en superficies racionales I (Giancarlo, 20 de junio)	31
6.1. T-singularidades	32
6.2. Caso global y pregunta	34
6.3. Estrategia	34
6.4. Un ejemplo	36
7. Acotamiento efectivo de T-singularidades en superficies racionales II (Giancarlo, 27 de junio)	38
7.1. Cota en el caso racional	38
7.2. Secciones en fibraciones elípticas	39
7.3. Resultados relacionados	41
Referencias	43

1. MMP PARA SUPERFICIES Y MORI FIBER SPACES (PEDRO, 16 DE MAYO)

1.1. El MMP de superficies. Comencemos fijando un poco de notación. Sea X una superficie proyectiva suave sobre \mathbb{C} , y sea

$$\omega_X = \det(T_X^\vee) = \Omega_X^2 = \mathcal{O}_X(K_X)$$

el divisor canónico.

Definición 1. Una (-1) -curva es una curva suave irreducible $E \subseteq X$ tal que $E \cong \mathbb{P}^1$ y $E^2 = -1$. Equivalentemente, $K_X.E < 0$ y $E^2 < 0$. En ambos casos, necesariamente tenemos $K_X.E = -1$.

La equivalencia entre ambas definiciones es consecuencia de la fórmula del género aritmético

$$E.(E + K_X) = 2p_a(E) - 2.$$

En efecto, si $K_X.E \leq -1$ y $E^2 \leq -1$, entonces $p_a(E) \leq 0$. Pero $p_a(E) \geq 0$, y así E tiene género 0.

Una fuente natural de ejemplos de (-1) -curvas proviene del *blow-up* de un punto (suave) en una superficie X . El siguiente teorema clásico, debido a Guido Castelnuovo, muestra que toda (-1) -curva proviene de un blow-up.

Teorema 2 (Castelnuovo). *Supongamos que $E \subseteq X$ es una (-1) -curva. Luego, existe un único morfismo regular $\varphi: X \rightarrow Y$ tal que φ es birracional, $\varphi(E) = \{p\}$ es un punto, $\text{Exc}(\varphi) = E$, e Y es una superficie proyectiva suave. Con ello, φ identifica a X como el blow-up $\text{Bl}_p(Y)$.*

Este teorema puede utilizarse como punto de partida para estudiar las superficies salvo equivalencia birracional, a partir de buscar (-1) -curvas. En cambio, Mori (1982) sugiere reemplazar la pregunta “¿existe una (-1) -curva en X ?” por “¿es K_X nef?”.

Ejemplo 3. Supongamos que K_X es *semi-amplio*; esto es, que existe un $m > 0$ tal que el sistema lineal $|mK_X|$ no tiene puntos de base². Afirmamos que en tal caso K_X es nef. En efecto, dada una curva irreducible $C \subseteq X$, podemos tomar un elemento $D \in |mK_X|$ que no tenga componentes en común con C . Como D es efectivo, esto implica

$$C.K_X = \frac{1}{m}C.D \geq 0,$$

y así K_X es nef.

En caso que K_X no sea nef, obtenemos una curva C tal que $C.K_X < 0$. El siguiente teorema nos permite “contraer” C , en el mismo espíritu que el teorema de Castelnuovo.

Teorema 4 (Cono). *Sea $C \subseteq X$ una curva irreducible tal que $K_X.C < 0$, y tal que el rayo $R = [C]$ es extremal³. Luego, existe un único morfismo $\varphi: X \rightarrow Z$, llamado contracción extremal, satisfaciendo las siguientes condiciones.*

- (1) $\varphi(C) = \{p\}$ es un punto, y φ tiene fibras conexas.
- (2) Para toda curva $\Gamma \subseteq X$ contraída por φ , se tiene que $K_X.\Gamma < 0$.

¹Recordamos que un divisor de Cartier D es nef si $D.C \geq 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

²En tal caso, decimos que mK_X es *base-point-free*, usualmente abreviado como *bpf*.

³Esto es, es extremal en el conjunto convexo $\{[C'] \in N_1(X) : K_X.C' < 0\}$.

- (3) Si $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq X$ son contraídas por φ , entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\Gamma_1 \equiv \lambda \Gamma_2$ en $NS(X)_{\mathbb{R}}$. Así, Γ_1, Γ_2 pertenecen a R .
- (4) La variedad Z es proyectiva, normal y $\rho_Z = \rho_X - 1$.

Notar que no estamos exigiendo que Z tenga dimensión 2. Con ello, el teorema del cono de hecho nos da dos tipos de contracciones.

- (1) φ es birracional. En este caso, φ contrae un divisor, y Z es suave y proyectiva. Esto recupera el teorema de Castelnuovo. Llamamos a esta situación una *contracción divisorial*.
- (2) φ es una fibración. En este caso tenemos que $\dim Z < \dim X$. Acá Z es un punto o una curva. (En particular, Z es suave, pues Z es normal.) En este caso, decimos que φ es un *Mori fiber space*, abreviado *MFS*.

Para nuestra discusión, utilizaremos el siguiente resultado clásico.

Teorema 5 (Nakai–Moishezon). *Sea X una superficie y sea $A \in \text{Pic}(X)$. Luego, tenemos que A es amplio si y solo si $A^2 > 0$ y $A \cdot \Gamma > 0$ para toda curva $\Gamma \subseteq X$. En particular, si $\rho_X = 1$, resulta que un divisor A es amplio si y solo si $A \cdot \Gamma > 0$ para alguna curva $\Gamma \subseteq X$.*

Estamos listos para analizar el caso (2) en detalle. Separaremos nuestra discusión en dos casos, dependiendo de la dimensión de Z .

- (2.0) Supongamos que $\varphi: X \rightarrow Z$ es la contracción de un rayo extremal $[C]$, y que $\dim Z = 0$. En tal caso, tenemos que $\rho_X = 1$, pues $\rho_Z = 0$. Adicionalmente, toda curva es contraída por φ , por lo que $K_X \cdot \Gamma < 0$ para toda curva $\Gamma \subseteq X$.
Con ello, resulta que $-K_X$ es amplio; esto es, X es una *superficie de del Pezzo*. Dichas superficies están clasificadas: X debe ser isomorfa a \mathbb{P}^2 , $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, o al blow-up de \mathbb{P}^2 en a lo más ocho puntos. Como $\rho_X = 1$, la única opción es que $X \cong \mathbb{P}^2$.
- (2.1) Supongamos que $Z = B$ es una curva proyectiva suave. Tenemos que la fibra general de $\varphi: X \rightarrow B$ es suave⁴ Dada una fibra $F \subseteq X$, la fórmula de adjunción nos da

$$\omega_F \cong \omega_X|_F \otimes \det(N_{F/X}) \cong \omega_X|_F,$$

donde la segunda igualdad se sigue pues F es una fibra. En particular, al tomar grado en F , obtenemos que

$$2g(F) - 2 = \deg(\omega_X|_F) = K_X \cdot F < 0.$$

Resulta así que $g(F) = 0$, y así $F \cong \mathbb{P}^1$. En particular, $K_X \cdot F = -2$ para toda fibra F .

Veamos ahora qué pasa en las fibras que no son suaves. Por suavidad genérica, el subconjunto $\Delta \subseteq B$ correspondiente a las fibras que no son suaves es finito. Ahora bien, si $b \in \Delta$ y

$$F_b = a_1 C_1 + \cdots + a_n C_n, \quad a_i \geq 1$$

es una fibra no suave, tenemos que $C_i^2 < 0$ para todo i ⁵ A partir de $K_X \cdot F_b = 0$, obtenemos que $K_X \cdot C_j < 0$ para algún j . Así, la curva C_j respectiva es una (-1) -curva.

⁴Esto es una consecuencia de *suavidad genérica*, ver [Har77, Corollary III.3.7].

⁵Ver [Bea96, III.9].

Con ello, si no existen (-1) -curvas, resulta que $\Delta = \emptyset$, y así $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ es la proyectivización de un fibrado vectorial $\mathcal{E} \rightarrow B$ de rango 2, gracias al teorema de Noether–Enriques⁶.

De este modo, podemos enunciar el *programa de modelos minimales* (o *MMP* por su sigla en inglés) para dimensión 2 como sigue. Dada una superficie suave, proyectiva X , comenzamos preguntándonos si hay una curva (-1) en ella. De ser así, la contraemos a una superficie X_1 . Repetimos este proceso con X_1 , y así obtenemos

$$X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_m.$$

Tal proceso debe acabar, pues ρ_X decrece en 1 en cada blow-down. Obtenemos así una superficie X_m sin curvas (-1) , que llamaremos *modelo minimal*.

Para clasificar, utilizaremos la *dimensión de Kodaira*⁷ $\kappa(X)$ de la superficie.

- Si $\kappa(X) \geq 0$, entonces el modelo minimal es único. Ver [Bea96, V.19]. En tal caso, uno puede verificar que K_X es nef.
- Si $\kappa(X) = -\infty$, entonces X_m *no* es único, y K_m *no* es nef. Por la discusión anterior, necesariamente $X_m \cong \mathbb{P}^2 \rightarrow \{pt\}$ o $X_m \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow B$.

En este seminario centraremos nuestros esfuerzos en entender el caso de dimensión de Kodaira negativa. Nuestro objetivo central es cómo se relacionan los distintos modelos minimales de una superficie X dada.

1.2. Transformaciones elementales. Sea $\varphi: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow B$ la proyectivización de un fibrado vectorial de rango 2 sobre una curva B . Como discutimos anteriormente, tal morfismo es una fibración de B , cuyas fibras son isomorfas a \mathbb{P}^1 .

Observación 6. Las secciones de φ (esto es, morfismos $\sigma: B \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ tales que $\varphi \circ \sigma = \text{id}_B$) están en correspondencia con cocientes $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}$ para un fibrado vectorial \mathcal{L} de rango 1. Dada una sección σ , podemos tomar el morfismo tautológico

$$\varphi^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \rightarrow 0$$

y aplicar σ^* . Así, podemos tomar $\mathcal{L} = \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$, junto con el cociente $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$. No es difícil verificar que la curva $\sigma(B)$ tiene autointersección $2 \deg(\mathcal{L}) - \deg(\mathcal{E})$.

Ejemplo 7. Consideremos $B = \mathbb{P}^1$ y $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, para un $n \geq 0$ dado. La superficie \mathbb{F}_n así obtenida se llama *superficie de Hirzebruch*. El cociente

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0$$

induce una sección $C_n \subseteq \mathbb{F}_n$ con $C_n^2 = -n$.

Ahora, fijemos un punto $x \in \mathbb{P}(\mathcal{E})$, y sean $t = \varphi(x) \in B$ la imagen de x , $F_t = \varphi^{-1}(t)$ la fibra respectiva, como se muestra en la Figura 1.

Tomamos $\epsilon: Y \rightarrow X$ el blow-up en x . De este modo, afirmamos que la transformada estricta \hat{F}_t de F_t es una (-1) -curva, y podemos así considerar $\epsilon': Y \rightarrow X'$ la contracción de \hat{F}_t . Hemos mostrado esta construcción en la Figura 2.

Vimos que $K_X \cdot F_t = -2$, y que $F_t^2 = 0$. Así, tenemos que $\epsilon^* F_t = \hat{F}_t + E$, y al tomar intersección con \hat{F}_t

$$\epsilon^* F_t \cdot \hat{F}_t = \hat{F}_t^2 + E \cdot \hat{F}_t = \hat{F}_t^2 + 1.$$

⁶Ver [Bea96, III.4].

⁷Ver [Bea96, Chapter VII].

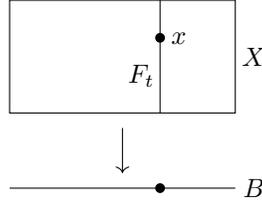
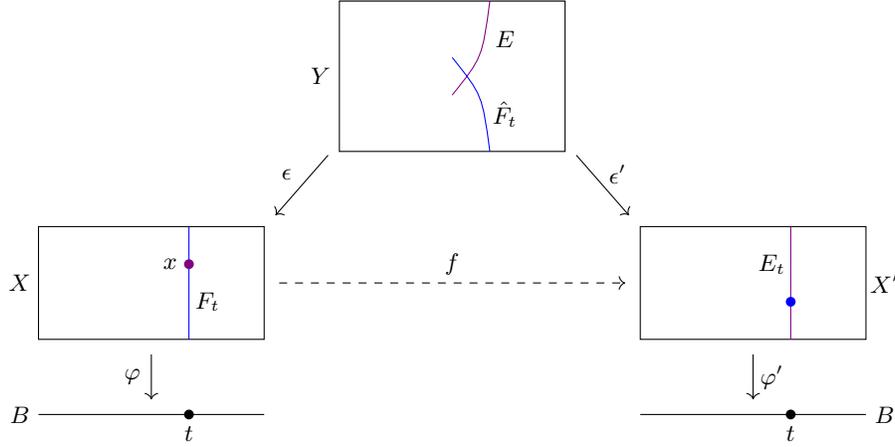
FIGURA 1. Fibración φ y la fibra en t .

FIGURA 2. Transformación elemental.

Por otro lado, la fórmula de proyección muestra que

$$\epsilon^* F_t \cdot \hat{F}_t = F_t \cdot \epsilon_*(\hat{F}_t) = 0,$$

pues \hat{F}_t es contraída. Así, resulta que $\hat{F}_t^2 = -1$, con lo que \hat{F}_t es una (-1) -curva.

Podemos verificar que $K_Y \cdot \hat{F}_t$ como sigue. Escribiendo $K_Y = \epsilon^* K_X + E$ y tomando intersección con \hat{F}_t , obtenemos

$$\begin{aligned} K_Y \cdot \hat{F}_t &= \epsilon^* K_X \cdot \hat{F}_t + E \cdot \hat{F}_t \\ &= K_X \cdot \epsilon_* \hat{F}_t + 1 \\ &= K_X \cdot F_t + 1 = -1. \end{aligned}$$

Observación 8. Supongamos que $E \equiv \lambda \hat{F}_t$, con un $\lambda > 0$. En tal caso, tomando la intersección con E obtendríamos que $\lambda = -1$. Esto es una contradicción, pues E y \hat{F}_t son efectivas.

De este modo, hemos obtenido una nueva fibración $X' \rightarrow B$, con la misma base. Llamamos a $f: X \dashrightarrow X'$ una *transformación elemental*.

Ejemplo 9. Supongamos que $X = \mathbb{F}_n$ es una superficie de Hirzebruch. Luego, tenemos que $X' = \mathbb{F}_{n+1}$ (resp. \mathbb{F}_{n-1}) si $x \in C_n$ (resp. $x \notin C_n$). Para ello, la idea clave es ver cómo cambia la autointersección de la curva C_n . Llamemos $C = C_n$ a la curva $(-n)$, y \hat{C} , C' las transformadas estrictas en Y , resp. X' .

Si $x \in C_n$, entonces podemos verificar que $\epsilon^*C = \hat{C} + E$. Al tomar intersección con E , resulta que $\hat{C}.E = 1$. Luego, al tomar autointersección obtenemos que $\hat{C}^2 = -n - 1$. Finalmente, al contraer \hat{F}_t no estamos modificando \hat{C} , y así $C'^2 = -(n+1)$.

El otro caso se puede verificar de manera completamente análoga.

De este modo, si $X \rightarrow B$ es un MFS con base de dimensión 1, podemos obtener muchas fibraciones nuevas $X' \rightarrow B$, birracionales a X , por medio de realizar transformaciones elementales. Debemos tener cuidado eso sí de verificar si en $X' \rightarrow B$ aparecen curvas (-1) .

Observación 10. (1) Si tomamos $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, este espacio admite dos estructuras distintas de MFS, por medio de ambas proyecciones. Es importante destacar que los consideramos como MFS distintos, aún cuando el espacio total sea el mismo, pues la contracción (y el rayo extremal asociado) son parte de la información del MFS.

(2) Para nuestros análisis, incluiremos que $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un MFS válido, a pesar que $\mathbb{F}_1 \cong \text{Bl}_p \mathbb{P}^2$ tiene una curva (-1) .

2. LINKS DE SARKISOV Y EL 2-RAY GAME (PEDRO, 23 DE MAYO)

2.1. Links de Sarkisov. Hemos visto que si la dimensión de Kodaira es negativa, entonces los modelos minimales no son únicos. El siguiente teorema nos permitirá entender cómo se relacionan los distintos modelos minimales de dichas superficies.

Teorema 11 (Programa de Sarkisov, dimensión 2). *Sean X, X' superficies proyectivas suaves, y sea*

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\dashrightarrow} & X' \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi' \\ Z & & Z' \end{array}$$

un morfismo birracional entre dos MFS⁸ φ y φ' . Luego, f se puede descomponer usando finitos links de Sarkisov. Estos provienen en cuatro tipos.

(I) *Inverso del blow-up de \mathbb{P}^2 :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \overset{\epsilon^{-1}}{\dashrightarrow} & \mathbb{F}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{pt\} & & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

(II) *Transformación elemental:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{E}) & \dashrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{E}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & & B. \end{array}$$

⁸Tal morfismo se define como un morfismo entre X y X' , y no exige ninguna condición involucrando las bases.

(III) *Blow-up de \mathbb{P}^2* :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{P}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & & \{pt\}. \end{array}$$

(IV) *Intercambio de proyecciones en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$* :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 \\ \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

La demostración de este teorema es el objetivo central de las próximas charlas. Para ello, seguiremos una estrategia llamada *untwisting*. Informalmente, pensaremos en MFS de la derecha como fijo, e intentaremos medir qué tal lejos está φ de él. Esto requerirá la construcción de una tupla denominada *grado de Sarkisov*.

Mostraremos que si el grado de Sarkisov es suficientemente chico, entonces el morfismo f debe ser un isomorfismo. Esto será una consecuencia del Teorema de Noether–Fano–Iskovskikh. Posteriormente, mostraremos que si f no es un isomorfismo, entonces es posible utilizar alguno de los links de Sarkisov para reemplazar φ por un MFS con grado de Sarkisov menor. Esto utilizará el *2-ray game*, para construir nuevas contracciones. De este modo, obtendremos una secuencia de links

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \dashrightarrow & X_1 & \dashrightarrow & \cdots & \dashrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ Z = Z_0 & & Z_1 & & \cdots & & Z' \end{array}$$

que hagan decrecer el grado de Sarkisov en cada paso. De este modo, obtendremos una factorización de f en links de Sarkisov, obteniendo lo pedido.

2.2. Grado de Sarkisov. El objetivo de hoy es construir el grado de Sarkisov. Para ello, comenzaremos fijando la siguiente información. Fijamos el MFS $\varphi': X' \rightarrow Z'$. Luego, fijamos $A' \in \text{Pic}(Z')$ amplio, $\mu' \in \mathbb{Q}_{>0}$ tales que

$$H' := -\mu' K_{X'} + (\varphi')^* A$$

es muy amplio⁹.

Ejemplo 12. Si $X' = \mathbb{P}^2$, $Z' = \{pt\}$, y $\varphi': X' \rightarrow Z'$ es la proyección, podemos tomar $A' = 0$, $\mu' = 1/3$, y así $H' = L$ es una recta en \mathbb{P}^2 .

Para definir el grado de Sarkisov, comenzamos con un morfismo birracional $f: X \dashrightarrow X'$ desde un MFS $\varphi: X \rightarrow Z$. Tomamos una resolución Y del morfismo f , como se muestra en (1).

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \swarrow \sigma & & \searrow \sigma' & \\ X & \dashrightarrow & & \dashrightarrow & X' \\ \varphi \downarrow & & f & & \downarrow \varphi' \\ Z & & & & Z' \end{array}$$

⁹Ver [KM98, 1.45].

Definición 13. Dado $D' \in |H'|$, definimos la *transformada homaloïdal* como

$$D := \sigma_* \sigma'^* D'.$$

Tales D definen un sistema lineal, que denotamos $f^{-1}|H'|$.

Observación 14. Notemos que $f^{-1}|H'|$ no depende de la resolución escogida. En efecto, si $\alpha: \bar{Y} \rightarrow Y$ es cualquier morfismo regular brracional, entonces

$$(\sigma \circ \alpha)_*(\sigma' \circ \alpha)^* = \sigma_* \circ \alpha_* \circ \alpha^* \circ \sigma'^* = \sigma_* \circ \sigma'^*,$$

gracias a que $\alpha_* \circ \alpha^*$ es la identidad¹⁰. Para el caso general, basta dominar dos resoluciones de f por una tercera.

Fijado $D \in |H'|$, notemos que se tiene la inclusión $f^{-1}|H'| \subseteq |D|$. Veremos en un ejemplo más adelante que tal contención puede ser estricta.

Observación 15. Notemos que el base locus $\text{Bs}|D|$ de $|D|$ es de dimensión cero (o vacío). Esto se sigue pues las curvas de $|H'|$ se mueven en X' , y por ello en Y . Con ello, tenemos que D es nef en X (aunque puede que no sea amplio).

De hecho, gracias a un resultado de Zarkiski (1962) sabemos que mD es bpf para $m \gg 0$.

Estamos en condiciones de definir el primer número asociado al grado de Sarkisov.

Definición 16. El *umbral cuasi-efectivo*¹¹ $\mu = \mu(f)$ es el (único) número racional $\mu \in \mathbb{Q}$ tal que $\mu K_X + D \equiv_\varphi 0$; esto es, $(\mu K_X + D) \cdot \Gamma = 0$ para toda $\Gamma \subseteq X$ contraída por φ .

Notemos que tal μ debe existir, pues todas las curvas Γ contraídas por φ son numéricamente múltiplos unas de otras. Con ello, basta definir

$$(2) \quad \mu := \frac{D \cdot \Gamma}{-K_X \cdot \Gamma}.$$

Gracias a la Observación 15, tenemos que $D \cdot \Gamma \geq 0$. Más aún, si $D \cdot \Gamma = 0$, tenemos necesariamente que D es contraído por φ gracias a la fórmula de proyección. Esto llevaría a una contradicción con el hecho que $D^2 > 0$. Resulta así que $D \cdot \Gamma > 0$.

Por otro lado, tenemos que $-K_X \cdot \Gamma > 0$, pues $-K_X$ es positivo en las curvas contraídas por φ . De este modo, obtenemos que $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Observación 17. Notemos que si Z tiene dimensión 1 (i.e. φ es $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow Z$), entonces podemos tomar $\Gamma = F$ una fibra, y así $-K_X \cdot \Gamma = 2$. Si Z tiene dimensión 2 (i.e. φ es $\mathbb{P}^2 \rightarrow \{pt\}$), entonces podemos tomar $\Gamma = L$ una línea, y así $-K_X \cdot \Gamma = 3$.

En cualquier caso, tenemos que el denominador de (2) es divisible por 6. Obtenemos así que $\mu \in \frac{1}{6}\mathbb{N}$.

Observación 18. Una segunda manera de interpretar μ es como un umbral, como sigue. Veamos cómo evoluciona la función

$$t \mapsto (K_X + tD) \cdot \Gamma.$$

Para $t = 0$, esta función es negativa. Como $D \cdot \Gamma > 0$, esta función lineal en t alcanza el valor cero para un único $t > 0$. Este valor es exactamente $1/\mu$.

De este modo, si $(K_X + tD) \cdot \Gamma > 0$, entonces $t > 1/\mu$, y similarmente para la otra desigualdad. Esto será útil para obtener relaciones con el μ .

¹⁰Ver [Bea96, p. 2].

¹¹O *quasi-effective threshold* en inglés.

Informalmente, uno debería pensar en que los elementos de $|H'|$ son líneas, y que $f^{-1}|H'|$ son *líneas torcidas* (o *twisted lines*). Con ello, el proceso de factorizar f vía links de Sarkisov se conoce como *untwisting*.

Definición 19. La *multiplicidad maximal* $\lambda = \lambda(f)$ se define como sigue. Si $f^{-1}|H'|$ es bpf, definimos $\lambda = 0$. En caso contrario, tomamos

$$\lambda := \text{máx}\{\text{mult}_p(D) : p \in \text{Bs } f^{-1}|H'|\}$$

para un $D \in f^{-1}|H'|$ general.

Para el siguiente elemento del grado de Sarkisov, introducimos la siguiente notación. Llamaremos E_i a los divisores excepcionales de $\sigma: Y \rightarrow X$, y $E'_j: Y \rightarrow X'$ a los divisores excepcionales de σ' . Con ello, definimos

$$D_Y := \sigma'^* D'.$$

Definición 20. El *número de divisores crepantes* $\ell = \ell(f)$ se define como sigue. Si $f^{-1}|H'|$ no tiene puntos bases, dejaremos λ indefinido. En caso contrario, consideramos el par logarítmico

$$(X, \Delta_X), \quad \Delta_X = \frac{1}{\lambda} D.$$

Definimos los números a_i, b_i tales que

$$K_Y = \sigma^* K_X + \sum_i a_i E_i,$$

$$D_Y = \sigma^* D - \sum_i b_i E_i.$$

De este modo, podemos escribir

$$K_X + \Delta_Y = \sigma^*(K_X + \Delta_X) + \sum_i \delta_i E_i, \quad \delta_i = a_i - \frac{b_i}{\lambda}.$$

Definimos así ℓ como la cantidad de divisores E_i tales que $\delta_i = 0$. Esto es,

$$\ell = \#\{i : \lambda = b_i/a_i\}.$$

Con estos tres números, el *grado de Sarkisov* deg_{Sar} de f se define como

$$\text{deg}_{\text{Sar}}(f) = (\mu(f), \lambda(f), \ell(f)).$$

Veamos algunos ejemplos del grado de Sarkisov.

Ejemplo 21 (Cremona clásica). Consideremos la transformación de Cremona

$$f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad [x, y, z] \mapsto [yz, zx, xy] = [1/x, 1/y, 1/z].$$

Es fácil verificar que f está definida fuera de los puntos $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ y $[0, 0, 1]$. Adicionalmente, tenemos que $f^2 = \text{id}$. Este morfismo se resuelve tomando blow-ups en los tres puntos donde no está definido, como se muestra en la Figura 3.

El morfismo f define un morfismo de MFS, donde \mathbb{P}^2 es un MFS sobre un punto. Para calcular el grado de Sarkisov, necesitamos fijar A', μ' . Escogemos $A' = 0, \mu = 1/3$ como en el Ejemplo 12. De este modo, el sistema $|H'|$ viene dado por las líneas de \mathbb{P}^2 .

Comencemos determinando $f^{-1}|H'|$. Para ello, basta mirar los elementos generales $D' \in |H'|$, que en particular no pasan por los puntos donde f^{-1} no está

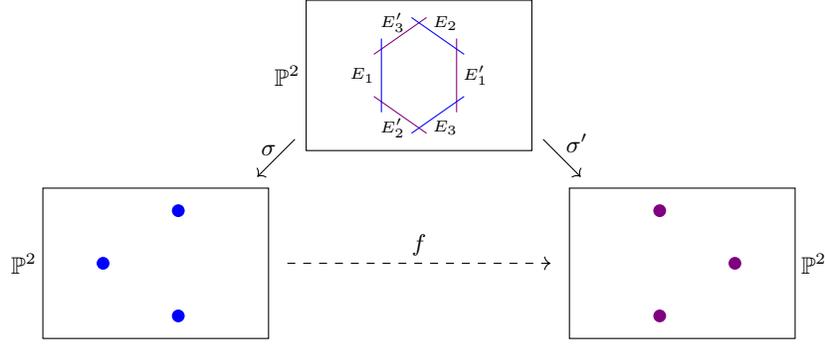


FIGURA 3. Transformación de Cremona.

definido. De este modo, la transformada $\sigma'^* D'$ consiste en una curva irreducible, al igual que $\sigma_* \sigma'^* D'$. Para calcularla, escribamos $D' = V(ax + by + cz)$, de modo que

$$D = V(ayz + bzx + cxy).$$

De este modo, el sistema $f^{-1} |H'|$ viene dado por un subespacio de dimensión 3 en $|2L|$. Más explícitamente,

$$f^{-1} |H'| = |2L - [1, 0, 0] - [0, 1, 0] - [0, 0, 1]| \subsetneq |2L|.$$

Estamos así en condiciones de calcular el grado de Sarkisov para f .

- Para calcular $\mu(f)$, debemos escoger una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^2$ contraída por φ . Basta tomar $\Gamma = L$ una recta cualquiera, pues φ contrae todo a un punto. De este modo, usando (2) obtenemos

$$\mu = \frac{D.L}{-K_{\mathbb{P}^2}.L} = \frac{2L.L}{3L.L} = \frac{2}{3}.$$

- Para determinar $\lambda(f)$, debemos estudiar con cuidado el sistema $f^{-1} |H'|$. Tenemos tres puntos bases, y un elemento general pasa con multiplicidad 3 en cada uno. Así, $\lambda = 1$.
- Para obtener ℓ , debemos obtener las discrepancias a_k y b_k como arriba. Utilizando la notación de la Figura 3 y de la Definición 20, tenemos

$$K_Y = \sigma^* K_X + (E_1 + E_2 + E_3),$$

y así $a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

Por otro lado,

$$\sigma^* D = \tilde{D} + E_1 + E_2 + E_3,$$

donde \tilde{D} denota la transformada estricta. Esto se sigue pues un elemento D genérico pasa con multiplicidad 1 por cada punto base del sistema lineal. Por otro lado, tenemos que

$$\sigma'^* D' = \tilde{D},$$

y así $b_1 = b_2 = b_3 = 1$.

Obtenemos con ello que $\delta_i = a_i - b_i/\lambda$ es cero para los tres divisores excepcionales, y así $\ell = 3$.

En suma, el grado de Sarkisov de f es

$$\deg_{\text{Sar}}(f) = (2/3, 1, 3).$$

Antes de continuar, buscaremos entender un poco mejor cómo se calcula ℓ . Para ello, necesitaremos precisar un poco cómo se relacionan las discrepancias con las multiplicidades.

Recordemos que el morfismo σ es una composición de blow-ups¹² No obstante, esto *no* significa que σ sea el blow-up en una colección de puntos (clásicos) $p_1, \dots, p_s \in X$. En cambio, hay una colección de puntos

$$p_1 \in X, \quad p_2 \in \text{Bl}_{p_1} X =: X_2, \quad p_3 \in \text{Bl}_{p_2} X_2, \quad \dots$$

tales que σ es la composición de dichos blow-ups.

Centrémonos en el caso $s = 2$, de modo que existe una superficie X_2 , y puntos $p_1 \in X, p_2 \in X_2$ tales que σ se factoriza como la composición

$$Y \rightarrow X_2 \rightarrow X,$$

donde $Y \rightarrow X_2$ es el blow-up en p_2 , y $X_2 \rightarrow X$ es el blow-up en p_1 .

Si p_2 no está contenido en el divisor excepcional de p_1 (o equivalentemente, si la imagen de p_2 en X es distinta a p_1), entonces es fácil verificar que σ es el blow-up de Y en p_1 y (la imagen de) p_2 . La situación donde $p_2 \in \text{Exc}(X_2 \rightarrow X)$ es distinta. En tal caso, decimos que p_2 es un punto *infinitamente cercano*¹³ a p_1 .

En general, decimos que p_i es *infinitamente cercano* a p_j si p_i está contenido en uno de los divisores que se contrae a p_j .

Fijemos ahora $p_1 \in X$ un punto (clásico), y sean p_2, \dots, p_j todos los puntos infinitamente cercanos a p_1 que aparecen al descomponer σ en blow-ups (en orden). Para cada p_i , consideramos \tilde{E}_i al divisor excepcional asociado (que vive en algún paso intermedio de la descomposición en blow-ups anterior). Luego, escribimos

$$\sigma^* \tilde{E}_i = E_i + \dots + r_i E_j$$

a la transformada total, donde E_i es la transformada estricta de \tilde{E}_i . Con ello, podemos calcular la discrepancia a_j como

$$a_j = r_1 + \dots + r_{j-1} + 1.$$

Por otro lado, si m_1, \dots, m_j denotan las multiplicidades de la transformada de D en cada p_i , tenemos que $m_1 \geq \dots \geq m_j$. Así, es fácil verificar que

$$b_1 = m_1, \quad b_j = r_1 m_1 + \dots + r_{j-1} m_{j-1} + m_j.$$

Con ello, obtenemos que $b_1/a_1 = m_1$, y

$$\frac{b_j}{a_j} = \frac{r_1 m_1 + \dots + r_{j-1} m_{j-1} + m_j}{r_1 + \dots + r_{j-1} + 1} \leq m.$$

Podemos resumir nuestras conclusiones en la siguiente proposición.

Proposición 22. *Sea $p_1 \in X$ un punto clásico y sea p_j un punto infinitamente cercano a p_1 . Luego, tenemos que*

$$\frac{b_j}{a_j} \leq \frac{b_1}{a_1} = \text{mult}_{p_1}(D).$$

De este modo, tenemos que

$$\lambda = \max_i \left\{ \frac{b_i}{a_i} \right\}.$$

¹²Ver [Bea96, II.11] o [Har77, V.5.4].

¹³Ver por ejemplo [Bea96, II.20(2)] para reforzar esta noción.

En particular, resulta que $\delta_i \geq 0$ para todo i ¹⁴. Adicionalmente, si $\lambda \neq 0$, obtenemos que $\ell > 0$.

2.3. El 2-ray game. Para finalizar la sesión de hoy, discutiremos la idea principal para demostrar el Teorema 11. Supongamos que tenemos un morfismo $f: X \dashrightarrow X'$ entre dos MFS (X, φ) y (X', φ') . En particular, tenemos que $\rho_X = \rho_Z - 1$, y así el grupo de Néron–Severi relativo $\text{NS}(X/Z)_{\mathbb{R}}$ es isomorfo a \mathbb{R} .

- (1) Si $\lambda > \mu$, entonces existe un punto $p \in X$ tal que $\text{mult}_p(D) = \lambda$. Sea $W = \text{Bl}_p X \rightarrow X$ el blow-up. Acá $\text{NS}(W/Z)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$, y con ello $\overline{\text{NE}}(W/Z)$ tiene *dos* rayos extremales. De ellos, ya conocemos uno: el que contrae el blow-up recién realizado.

Esta es la idea clave del *2-ray game*: como tenemos un cono en un espacio 2-dimensional, hay dos rayos extremales. Pasamos así de contraer uno a contraer el otro. Dependiendo del tipo de contracción, tenemos dos situaciones.

- (a) Si la contracción $W \rightarrow T$ es un MFS, caemos en el caso (I) del programa de Sarkisov.
 (b) Si $W \rightarrow W'$ es una contracción divisorial, estamos en el caso (II).
 (2) Si $\lambda \leq \mu$, probaremos con el teorema de Noether–Fano–Iskovskih que $K_X + \frac{1}{\mu}D$ *no* es nef. En particular, acá X admite una segunda¹⁵ contracción.
 (c) Si $X \rightarrow T$ es un MFS, tenemos el caso (IV).
 (d) Si $X \rightarrow W$ es una contracción divisorial, entonces probaremos que $W \cong \mathbb{P}^2$, y así estamos en el caso (III).

Todo esto será discutido en más detalle en las siguientes sesiones. Este algoritmo nos permitirá concluir el Teorema 11.

3. TEOREMA DE NOETHER–FANO–ISKOVSKIKH (PEDRO, 30 DE MAYO)

Las referencia principal para esta sección es [Mat02]; ver también [Kol19] y [Che05]. Comenzamos recordando un poco de notación anterior. Sea $\varphi': X' \rightarrow Z'$ un MFS fijo. Fijamos $\mu' \in \mathbb{Q}^{>0}$ y $A' \in \text{Pic}(Z')$ tales que

$$H' := -\mu' K_{X'} + (\varphi')^* A'$$

es muy amplio en X' .

Sea ahora $f: X \dashrightarrow X'$ un mapeo birracional, con $\varphi: X \rightarrow Z$ un MFS. Fijamos una resolución

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \sigma' \\ X & \dashrightarrow & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ Z & & Z' \end{array}$$

del mapeo f . Podemos asumir que σ' consiste en la menor cantidad de blow-ups posibles (por ejemplo, tomando σ' como el blow-up en los puntos base de f^{-1} , y luego $\sigma = f^{-1} \circ \sigma'$).

¹⁴Y así (X, Δ_X) es canónico.

¹⁵Debemos demostrar que de hecho esta contracción difiere de la que induce φ . Esto será demostrado posteriormente.

Dado $D' \in |H'|$, definimos $D = \sigma_* \sigma'^* D'$, y $f^{-1}|H'| = \sigma_* \sigma'^* |H'|$. A partir de ellos, definimos μ y λ como sigue¹⁶.

- Tomamos $\mu \in \frac{1}{6}\mathbb{N}$ tal que $(\mu K_X + D) \cdot \Gamma = 0$ para toda curva Γ contraída por φ .
- Escribamos $\text{Exc}(\sigma) = E_1 \cup \dots \cup E_n$ a los divisores excepcionales, y

$$\begin{aligned} K_Y &= \sigma^* K_X + \sum_{k=1}^n a_k E_k, \\ D_Y &:= \sigma'^* D' \\ &= \sigma^* D - \sum_{k=1}^n b_k E_k. \end{aligned}$$

Definimos así $\lambda = \max_k \{b_k/a_k\}$. Vimos en la Proposición 22 que esto equivale a

$$\lambda = \max_{i=1, \dots, s} \{\text{mult}_{p_i}(D)\},$$

donde $\text{Bs } f^{-1}|H'| = \{p_1, \dots, p_s\}$, y $D \in f^{-1}|H'|$ es un elemento general.

Nuestro objetivo para el día de hoy es dar una demostración detallada del siguiente resultado.

Teorema 23 (Noether–Fano–Iskovskikh). *Supongamos que $\lambda \leq \mu$, y que $K_X + \frac{1}{\mu}D$ es nef. Luego, se tiene que f es un isomorfismo de MFS¹⁷.*

Ideas similares fueron usadas por Iskovskikh y Manin para demostrar que $\text{Aut}(X)$ y $\text{Bir}(X)$ coinciden para una hipersuperficie $X \subseteq \mathbb{P}^4$ suave de grado 4.

3.1. Demostración del teorema. La demostración del teorema estará dividida en tres partes. En la primera demostraremos que μ (que depende de f) y μ' (que estaba fijo) son de hecho iguales. En la segunda, probaremos que $K_X + \frac{1}{\mu}D$ y $K_{X'} + \frac{1}{\mu'}D'$ tienen igual pullback en Y . En la tercera usaremos esto para concluir que f es un isomorfismo de MFS.

3.1.1. Paso 1: $\mu = \mu'$. En primer lugar, notemos que $H' + \mu'K_{X'} = (\varphi')^*A'$, por construcción. De este modo, si f es un isomorfismo de MFS deberíamos esperar que esta igualdad sea verdad¹⁸. Para probar la igualdad, haremos dos desigualdades.

Comenzaremos probando que $\mu' \leq \mu$. Esto es un resultado general, y aplica siempre que tengamos $f: X \dashrightarrow X'$ (sin usar las hipótesis adicionales del Teorema 23). Para ello, dado $\varepsilon > 0$ racional y $D' \in |H'|$ general, entonces

$$(1 + \varepsilon)D' + \mu'K_{X'} \sim \varepsilon D' + (\varphi')^*A'$$

es amplio, pues el primer término es amplio y el segundo nef¹⁹. De este modo, para todo $t \in (0, \mu')$, resulta que

$$L' := K_{X'} + \frac{1}{t}D'$$

es amplio.

¹⁶Habíamos definido además ℓ . Este tercer número no será necesario hoy.

¹⁷Esto es, no solo f es un isomorfismo entre X y X' , sino que adicionalmente induce un isomorfismo entre Z y Z' compatible con φ y φ' .

¹⁸En efecto, si Γ se contrae por φ , entonces $\varphi^*A \cdot \Gamma = 0$ por la fórmula de proyección.

¹⁹Esto es por ejemplo consecuencia del criterio de Kleiman, ver [Laz04, 1.4.10].

Con ello, $L := \sigma_*(\sigma')^*L'$ satisface $L.\Gamma > 0$ para toda Γ contraída por φ . Para entender qué significa esto, calculamos explícitamente. Primero,

$$\begin{aligned} (\sigma')^*L' &= (\sigma')^* \left(K_{X'} + \frac{1}{t}D' \right) \\ &= K_Y - E' + \frac{1}{t}(\sigma')^*D' \\ &= \sigma^*(K_X) + \sum_k a_k E_k - E' + \frac{1}{t}(\sigma')^*D', \end{aligned}$$

donde $E' \geq 0$ es el divisor excepcional. Así, al aplicar σ_* y usando la fórmula de proyección nuevamente, nos queda

$$(4) \quad L = \sigma_*(\sigma')^*L' = K_X + \frac{1}{t}D - \sigma_*(E').$$

De este modo, y como $L.\Gamma > 0$, podemos reordenar y escribir

$$\begin{aligned} \left(K_X + \frac{1}{t}D \right) .\Gamma &= L.\Gamma + \sigma_*(E').\Gamma \\ &\geq L.\Gamma \\ &> 0. \end{aligned}$$

Acá hemos usado que $\sigma_*(E') \geq 0$ es efectivo y que Γ es nef.

En resumen, hemos verificado que para todo $t \in (0, \mu')$, se tiene que

$$\left(K_X + \frac{1}{t}D \right) .\Gamma > 0.$$

Por la Observación 18, resulta que $1/t > 1/\mu$ para todo t en $(0, \mu')$. Tomando $t \rightarrow \mu'$, resulta que $\mu \geq \mu'$.

Observación 24. Como mencionamos arriba, la desigualdad $\mu \geq \mu'$ aplica para cualquier morfismo de MFS $f: X \dashrightarrow X'$.

Vamos a demostrar ahora que $\mu \leq \mu'$. Este paso utilizará que $K_X + \frac{1}{\mu}D$ es nef. Sea $\Gamma' \subseteq X'$ una fibra de φ' . Fijado t , la Observación 18 nos dice que

$$\left(K_{X'} + \frac{1}{t}D' \right) .\Gamma' < 0$$

para toda fibra Γ' de φ' , si $t > \mu'$. De este modo, buscaremos calcular esta intersección para $t = \mu$.

Llamemos $C = \sigma_*(\sigma')^*\Gamma'$ para una fibra Γ' genérica²⁰. Tenemos que

$$(\sigma')^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu}D' \right) = K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y - E',$$

donde $E' \geq 0$ es el divisor excepcional. De este modo,

$$\begin{aligned} \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu}D' \right) .\Gamma' &= (\sigma')^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu}D' \right) .(\sigma')^*\Gamma' \\ (5) \quad &= \left(K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y \right) .(\sigma')^*\Gamma'. \end{aligned}$$

²⁰En particular, C es efectiva e irreducible, pues podemos tomar Γ' evitando los puntos donde σ' no es un isomorfismo.

Realizamos el mismo tipo de comparación con las discrepancias para $K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y$. Escribimos

$$(6) \quad K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y = \sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu}D \right) + \sum_{k=1}^n \left(a_k - \frac{1}{\mu}b_k \right) E_k.$$

Ahora bien, como $\lambda \leq \mu$, tenemos que $a_k - \frac{1}{\mu}b_k \geq 0$, lo que nos permitirá continuar la comparación en (5). Tenemos

$$\begin{aligned} & \left(K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y \right) \cdot (\sigma')^* \Gamma' \\ \stackrel{(6)}{=} & \left(\sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu}D \right) + \sum_{k=1}^n \left(a_k - \frac{1}{\mu}b_k \right) E_k \right) \cdot (\sigma')^* \Gamma' \\ = & \sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu}D \right) \cdot (\sigma')^* \Gamma' + \sum_{k=1}^n \left(a_k - \frac{1}{\mu}b_k \right) E_k \cdot (\sigma')^* \Gamma' \\ = & \left(K_X + \frac{1}{\mu}D \right) \cdot C + \sum_{k=1}^n \left(a_k - \frac{1}{\mu}b_k \right) E_k \cdot (\sigma')^* \Gamma'. \end{aligned}$$

El primer sumando es no-negativo, pues $K_X + \frac{1}{\mu}D$ es nef. En el segundo, podemos asumir que $(\sigma')^* \Gamma'$ es distinta a las E_k , y así $E_k \cdot (\sigma')^* \Gamma' \geq 0$. Por la observación de arriba, los coeficientes son positivos, y así toda la suma es no-negativa.

De este modo, hemos probado que

$$\left(K_{X'} + \frac{1}{\mu}D' \right) \cdot \Gamma' \geq 0.$$

Por la Observación 18, esto implica que $\mu \leq \mu'$, probando la desigualdad faltante.

Con ambas desigualdades, concluimos que $\mu = \mu'$, probando lo pedido.

3.1.2. Paso 2: $\sigma^*(K_X + \frac{1}{\mu}D) = \sigma'^*(K_{X'} + \frac{1}{\mu}D')$. La estrategia básica para demostrar este paso es comparar discrepancias entre los log-pares $(X, \frac{1}{\mu}D)$, $(X', \frac{1}{\mu'}D')$, e $(Y, \frac{1}{\mu}D_Y)$.

Comencemos con el primer conjunto de discrepancias. Usando la notación anterior, escribimos

$$(7) \quad K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y = \sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu}D \right) + \sum_{k=1}^n \delta_k E_k,$$

con $\delta_k = a_k - b_k/\mu$.

Notamos acá dos desigualdades importantes. Primero, como $\lambda \leq \mu$, tenemos

$$\delta_k = a_k - \frac{b_k}{\mu} \geq a_k - \frac{b_k}{\lambda} \geq 0,$$

pues λ es el máximo de los b_k/a_k . Segundo, tenemos la desigualdad

$$\sum_{k=1}^n \delta_k E_k \leq \sum_{k=1}^n a_k E_k =: R,$$

el divisor que mide la diferencia entre σ^*K_X y K_Y .

Del mismo modo, podemos imitar esta comparación en σ' . Escribimos

$$(8) \quad K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y = (\sigma')^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu}D' \right) + \sum_{j=1}^m \delta'_j E'_j,$$

con $\delta'_j = a'_j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Esto utiliza que $D_Y = (\sigma')^*D'$ por construcción.

Comparando (7) y (8), nuestro objetivo es probar que

$$(9) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k E_k = \sum_{j=1}^m \delta'_j E'_j.$$

Para ello, introduciremos un poco de notación para las curvas excepcionales en Y . Llamaremos F_t a los elementos de $\{E_1, \dots, E_n, E'_1, \dots, E'_n\}$. Separamos a las curvas en tres grupos, dependiendo de si es contraída por σ o σ' . Más precisamente, escribimos

$$t \in \begin{cases} I_\sigma & \text{si } \begin{cases} \sigma(F_t) = \{pt\}, \sigma'(F_t) \neq \{pt\} \\ \sigma(F_t) \neq \{pt\}, \sigma'(F_t) = \{pt\} \\ \sigma(F_t) = \{pt\}, \sigma'(F_t) = \{pt\}. \end{cases} \\ I_{\sigma'} \\ I_{\sigma, \sigma'} \end{cases}$$

En esta notación, verificaremos que (9) separando las sumas en términos de I_σ , $I_{\sigma'}$ e $I_{\sigma, \sigma'}$.

Para realizar la comparación, necesitaremos la siguiente versión del lema de negatividad.

Proposición 25. *Sea $g: S \rightarrow T$ un morfismo birracional, donde S, T son superficies suaves, y escribamos $\text{Exc}(g) = F_1 \cup \dots \cup F_r$. Si $M = \sum_i \lambda_i F_i$ satisface que $M.F_i \geq 0$ para todo i , entonces $\lambda_i \leq 0$ para todo i .*

Comparando (7) y (8), tenemos que

$$\begin{aligned} M &:= (\sigma')^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu}D' \right) - \sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu}D \right) + \sum_{t \in I_{\sigma'}} \delta'_t F_t \\ &= \sum_{t \in I_\sigma} \delta_t F_t + \sum_{t \in I_{\sigma, \sigma'}} (\sigma_t - \sigma'_t) F_t. \end{aligned}$$

En particular, esto implica que M es un divisor excepcional respecto a σ . De este modo, buscaremos aplicar la Proposición 25. Dado $s \in I_\sigma$, tenemos que

$$\begin{aligned} M.F_s &= (\sigma')^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu}D' \right).F_s - \sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu}D \right).F_s + \sum_{t \in I_{\sigma'}} \delta'_t F_t.F_s \\ &= \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu}D' \right).\sigma'_*(F_s) + \sum_{t \in I_{\sigma'}} \delta'_t F_t.F_s. \end{aligned}$$

El primer término es no-negativo, pues $K_{X'} + \frac{1}{\mu}D' = K_{X'} + \frac{1}{\mu'}D'$ es nef (por construcción de D'). El segundo término es no-negativo, pues las curvas F_t y F_s son distintas. Así, la Proposición 25 nos asegura que $\delta_t \leq 0$ si $t \in I_\sigma$, y $\delta_t - \delta'_t \leq 0$ si $t \in I_{\sigma, \sigma'}$.

Luego, realizamos el mismo argumento con respecto a σ' . Acá usaremos que $K_X + \frac{1}{\mu}D$ es nef, por hipótesis. Resulta con ello que $\delta_t \leq 0$ si $t \in I_{\sigma'}$, y que $\delta'_t - \delta_t \leq 0$ si $t \in I_{\sigma, \sigma'}$.

Para concluir, basta recordar que $\delta_t, \delta'_t \geq 0$ para todo t , por construcción. Resulta así que $\delta_t, \delta'_t = 0$ a menos que $t \in I_{\sigma, \sigma'}$, en cuyo caso $\delta_t = \delta'_t$. Esto muestra que (9) se satisface, y con ello demostramos lo buscado.

3.1.3. Paso 3: f isomorfismo. A partir del Paso 2, tenemos que si E'_j es una curva excepcional para σ' , entonces $\delta'_j = 0$ a menos que $j \in I_{\sigma, \sigma'}$. Pero $\delta'_j > 0$ para todo j . De este modo, resulta que toda curva contraída por σ' es contraída por σ , esto es, que $\text{Exc}(\sigma') \subseteq \text{Exc}(\sigma)$.

Ahora bien, hemos escogido σ' de modo que sea minimal. Con ello, necesariamente σ' debe ser un isomorfismo. Podemos por tanto asumir que $Y = X$, $\sigma' = \text{id}_{X'}$, y que $\sigma = f^{-1}$. En particular, esto muestra que f es un isomorfismo entre las superficies X y X' . Nos falta verificar que f induce un isomorfismo de los MFS asociados.

Llamemos $h: X' \rightarrow Z$ a la composición

$$h: X' \xrightarrow{\sigma=f^{-1}} X \xrightarrow{\varphi} Z.$$

Notemos que h tiene fibras conexas, pues tanto σ como φ tienen fibras conexas. Sea B una fibra de h , de modo que $\sigma_*(B)$ es una fibra de φ . Con ello, la definición de μ garantiza que

$$\sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} D \right) . B = 0.$$

Por otro lado, usando los pasos anteriores podemos calcular

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} D \right) . B \\ &= (\sigma')^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu'} D' \right) . B \\ &= \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu'} D' \right) . B \\ &= \frac{1}{\mu'} (\varphi')^* (A') . B \\ &= \frac{1}{\mu'} A' . \varphi'_*(B). \end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos que A' es amplio en Z , y que $\varphi'_*(B)$ es efectivo. Con ello, resulta que $\varphi'_*(B) = 0$, y así φ' contrae a B .

Con esto en mente, inducir el morfismo $g: Z \rightarrow Z'$ se hace como sigue. A nivel de puntos (cerrados), definimos $g(z)$ como $\varphi'(h^{-1}(z))$. Usando [Mat02, 1-8-1], uno verifica que esta construcción de hecho define un morfismo de variedades. Por construcción, tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\sigma=f^{-1}} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ Z & \xrightarrow{g} & Z'. \end{array}$$

Afirmamos ahora que σ es un isomorfismo. En caso contrario, existiría un divisor $E \subseteq X'$ contraído por σ . Pero así E sería contraído por φ' . Esto contradice el Teorema 4, pues E corresponde a una contracción divisorial. Con ello, σ debe ser un isomorfismo.

Para concluir, basta verificar que g es un isomorfismo. Esto se verifica caso a caso, comparando los distintos tipos de MFS. Esto concluye la demostración del Paso 3, y con ello el Teorema 23.

3.2. Programa de Sarkisov. La aplicación principal del Teorema 23 es probar el programa de Sarkisov. Comenzaremos preguntándonos si $\lambda \leq \mu$.

- Si $\lambda \leq \mu$, entonces vemos si $K_X + \frac{1}{\mu}D$ es nef. De serlo, f es un isomorfismo gracias al Teorema 23.

En caso contrario, $K_X + \frac{1}{\mu}D$ no es nef. Esto es, existe una curva $\Gamma \subseteq X$ negativa para $K_X + \frac{1}{\mu}D$. Ahora bien, $(K_X + \frac{1}{\mu}D) \cdot \Gamma = 0$ si Γ es contraída por φ . De este modo, una curva negativa para $K_X + \frac{1}{\mu}D$ pertenece a un rayo extremal distinto al de φ .

Esto nos permitirá, escogiendo adecuadamente Γ , utilizar el *2-ray game* directamente en X , y repetimos el proceso.

- Si $\lambda > \mu$, escogeremos un punto $p \in X$ tal que p es un punto base de multiplicidad λ para D . El grupo de Néron–Severi relativo a $\text{Bl}_p(X) \rightarrow Z'$ tiene rango 2, y en él aplicaremos el *2-ray game*.

Debemos verificar eso sí que el algoritmo termina luego de finitos pasos. Para ello, mostraremos que podemos realizar cada paso de modo que el grado de Sarkisov decrezca. Nos dedicaremos a demostrar esto cuidadosamente en una sesión posterior.

4. SESIÓN DE EJERCICIOS (JAIME, 6 DE JUNIO)

El objetivo de esta sesión es discutir algunos problemas y resultados relacionados a lo que hemos visto en las sesiones anteriores.

4.1. Lema de negatividad. Vamos a demostrar el lema de negatividad en dimensión 2. Para ello, fijamos X una superficie suave, proyectiva. Nuestro punto de partida es el siguiente resultado.

Teorema 26 (Índice de Hodge, [Har77, V.1.9]). *Sea H un divisor amplio y sea D un divisor con $D \neq 0$ y $D \cdot H = 0$. Luego, tenemos que $D^2 < 0$.*

Consideremos el espacio vectorial $V = \text{Num}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Sea $\rho = \text{rk NS}(X)$ la dimensión de este espacio²¹. El producto de intersección en $\text{Pic}(X)$ extiende a una forma bilineal no degenerada

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

que escribiremos con la misma notación.

Fijemos $h \in V$ la clase de un divisor amplio en X , y extendemos esto a una base $\{h, h_2, \dots, h_\rho\}$. Así, por el teorema de índice de Hodge obtenemos que $h_i^2 < 0$. Esto es, el producto de intersección tiene signatura $(1, \rho - 1)$. Resumimos las conclusiones en el siguiente enunciado.

Teorema 27 (Índice de Hodge). *La forma de intersección en X tiene signatura $(1, \rho(X) - 1)$. En particular, si un divisor $E \neq 0$ satisface $E \cdot D = 0$ para algún divisor D con $D^2 > 0$, entonces $E^2 < 0$.*

A partir de este teorema, podemos probar una primera versión del lema de negatividad.

²¹Que es finita, gracias al teorema de Néron–Severi.

Teorema 28 (Negatividad de curvas contraídas). *Sea $\phi: X \rightarrow Y$ un morfismo propio, birracional, con X no singular (pero Y posiblemente singular). Si E es un divisor en X contraído por ϕ , tenemos que $E^2 < 0$. La igualdad se alcanza solo si $E = 0$.*

Demostración. Sea H un divisor amplio en Y , y tomemos $D = \phi^*H$. Notemos que D es big²² y nef. De este modo, tenemos que²³

$$D^2 = \phi^*H \cdot \phi^*H = H^2 > 0.$$

Ahora, la fórmula de proyección²⁴ permite verificar que

$$D \cdot E = \phi^*H \cdot E = H \cdot \phi_*E = 0,$$

pues E es contraída.

Para concluir, necesitamos verificar que E no es numéricamente trivial. Para ello, separamos en dos casos.

- Si E es efectivo (y no cero), entonces E no es numéricamente trivial. En efecto, esto se sigue de que cada componente de E tiene intersección positiva con un divisor amplio en X . Obtenemos así que $E^2 < 0$.
- En el caso general, escribimos

$$E = E_+ - E_-,$$

donde E_+, E_- son divisores efectivos sin divisores en común. Tenemos que $E_+ \cdot E_- \geq 0$, al no tener divisores en común. Por otro lado, el punto anterior muestra que $E_+^2, E_-^2 \leq 0$, y alguno de ellos es negativo. Así, obtenemos que

$$E^2 = (E_+ - E_-)^2 = E_+^2 - 2E_+ \cdot E_- + E_-^2 < 0.$$

Esto demuestra lo pedido. □

Corolario 29. *Sea $\phi: X \rightarrow Y$ como en el enunciado anterior, y sean E_1, \dots, E_n curvas contraídas por ϕ . Luego, tenemos que la matriz de autointersección $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ es negativa definida.*

El siguiente resultado fue utilizado anteriormente para obtener desigualdades sobre los coeficientes de divisores relativamente nef.

Teorema 30 (Lema de negatividad en dimensión 2). *Sea $f: X \rightarrow Y$ un morfismo birracional entre superficies, con X proyectivo y no singular (pero Y potencialmente singular). Sea $E = \sum_i \alpha_i E_i$ un divisor, con E_i curvas contraídas por f . Supongamos que E es relativamente nef sobre Y ; esto es, que $E \cdot E_j \geq 0$ para todo j . Luego, tenemos que $\alpha_i \leq 0$ para todo i .*

Demostración. Por contradicción, supongamos que algún α_i es positivo. Escribimos

$$E = \sum_{i: \alpha_i > 0} \alpha_i E_i + \sum_{j: \alpha_j < 0} \alpha_j E_j,$$

²²Informalmente, un divisor D en X es big si $\dim |mD|$ crece como $m^{\dim X}$. Ver [Laz04, §2.2] para una discusión más detallada.

²³Alternativamente, podemos tomar $C_1, C_2 \in |H|$ generales, tales que estén contenidas en el abierto donde ϕ es un isomorfismo. Esto es posible pues ϕ^{-1} está definida en el complemento de un cerrado de codimensión 2. Con ello, las preimágenes $\phi^{-1}C_1, \phi^{-1}C_2$ permiten verificar que $D^2 > 0$.

²⁴O utilizando $\phi^{-1}C_1$ como antes.

de modo que la primera sumatoria es no cero. Adicionalmente, ambas sumatorias no tienen componentes en común. De este modo, calculamos

$$E \cdot \left(\sum_{i: \alpha_i > 0} \alpha_i E_i \right) = \left(\sum_{i: \alpha_i > 0} \alpha_i E_i \right)^2 + \left(\sum_{i: \alpha_i > 0} \alpha_i E_i \right) \left(\sum_{j: \alpha_j < 0} \alpha_j E_j \right).$$

El primer sumando es negativo, gracias al Teorema 28. El segundo es no-positivo, pues cada $E_i \cdot E_j$ es no-negativo, y $\alpha_i \alpha_j < 0$. Esto contradice el hecho que E es relativamente nef sobre Y , probando lo pedido. \square

4.2. Teorema de Noether–Fano–Iskovskikh en \mathbb{P}^2 . Discutiremos una demostración del Teorema 23 en el caso de \mathbb{P}^2 . Esto utilizará fuertemente el hecho que entendemos explícitamente la geometría de \mathbb{P}^2 y de las superficies de Hirzebruch, que corresponden a las otras superficies birracionalmente a \mathbb{P}^2 que admiten estructura de MFS.

Teorema 31 (Noether–Fano–Iskovskikh en \mathbb{P}^2). *Sea S una superficie isomorfa a \mathbb{P}^2 o a alguna \mathbb{F}_n , y sea $f: S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ una aplicación birracional. Supongamos que f no es un isomorfismo, y que $K_S + \frac{1}{\mu} D$ es nef, donde $F \in f^{-1} |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ es general. Luego, D posee un punto base de multiplicidad mayor a μ .*

Esto es, el teorema dice que el λ asociado a f será mayor a μ . Tomando el converso, recuperamos el Teorema 23 para \mathbb{P}^2 .

Observación 32. Como hemos mencionado implícitamente arriba, el valor de μ que consideramos corresponde al valor del umbral cuasi-efectivo, viendo a S como un MFS y tomando $A' = 0, \mu' = 1/3$ como en el Ejemplo 12. Por supuesto, es posible escribir el valor de μ explícitamente, de modo que el enunciado no dependa del grado de Sarkisov. Ver por ejemplo la formulación del teorema en [Isk04, 1.2].

Para demostrar el Teorema 31, comenzamos fijando una resolución de f como es usual.usual.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \sigma' \\ S & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & f & \end{array}$$

Sea $L \subseteq \mathbb{P}^2$ una recta general, y sea $\ell \subseteq Y$ la transformada estricta²⁵.

Afirmación 33. Tenemos que $\mu > 1/3$. Para probar esto verificaremos explícitamente el caso $S = \mathbb{P}^2$ y $S = \mathbb{F}_n$.

- Si $S = \mathbb{P}^2$, entonces f es un morfismo de grado $d = \deg f > 1$. Esto se sigue de que f es birracional pero no un isomorfismo. Así $D = dL$, y con ello

$$\mu = \frac{D \cdot L}{-K_{\mathbb{P}^2} \cdot L} = \frac{d}{3} > \frac{1}{3},$$

probando lo pedido.

- Si $S = \mathbb{F}_n$ es una superficie de Hirzebruch, entonces

$$\mu = \frac{D \cdot F}{-K_S \cdot F} = \frac{D \cdot F}{2},$$

²⁵No confundir con el número de divisores crepantes, que no será utilizado en esta discusión.

donde $F \subseteq S$ es una fibra. Ahora bien, si $D.F = 0$, entonces $D = aF$ para $a \geq 1$. Esto contradice el hecho que D es big en S . Resulta así que $D.F \geq 1$, y así $\mu \geq 1/2$.

Esto muestra lo pedido.

En particular, de la Afirmación 33 obtenemos que

$$(10) \quad 0 > \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L \right) .L,$$

lo que nos será útil luego.

Para continuar, escribimos

$$(11) \quad \begin{aligned} K_Y &= \sigma^* K_S + \sum_{i=1}^n a_i E_i, \\ D_Y &= \sigma'^* L = \sigma^* D - \sum_{i=1}^n b_i E_i, \end{aligned}$$

donde en (11) hemos usado que $D = \sigma_* \sigma'^* L$. Así, escribimos

$$(12) \quad K_X + \frac{1}{\mu} D_Y = \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} D \right) + \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{b_i}{\mu} \right) E_i$$

$$(13) \quad = \sigma'^* \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L \right) + \sum_j c_j E'_j.$$

Recordemos que estamos tomando $L \subseteq \mathbb{P}^2$ una recta general, de modo que podemos asumir que L está contenida en el abierto donde σ es un isomorfismo, y que ℓ es diferente a todas las curvas excepcionales de σ . En particular, tenemos que $\sigma'^* L = \ell$, y así

$$(14) \quad E'_j . \ell = \sigma'_*(E'_j) . L = 0$$

gracias a la fórmula de proyección. Adicionalmente, tenemos que $E_i . \ell \geq 0$, pues son curvas irreducibles distintas.

Juntando los cálculos anteriores, podemos escribir $(K_X + \frac{1}{\mu} D_Y) . \ell$ de dos maneras. Primero, usando (13) podemos escribir

$$\left(K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y \right) . \ell = \left(\sigma' \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L \right) + \sum_j c_j E'_j \right) . \left(\sigma'^*(L) - \sum_j d_j E'_j \right),$$

donde $d_j \geq 0$. La fórmula de proyección nos entrega

$$\left(K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y \right) . \ell = \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L \right) . L < 0,$$

gracias a (10). Segundo, podemos calcular $(K_X + \frac{1}{\mu} D_Y) . \ell$ con (12), lo que nos entrega

$$\begin{aligned} \left(K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y \right) . \ell &= \left(\sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} D \right) + \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{b_i}{\mu} \right) E_i \right) . \ell \\ &= \left(K_S + \frac{1}{\mu} D \right) . \sigma_*(\ell) + \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{b_i}{\mu} \right) E_i . \ell. \end{aligned}$$

El primer sumando es no-negativo, pues $K_S + \frac{1}{\mu}D$ es nef. Comparando ambos cálculos, resulta que para algún i debemos tener $E_i.\ell > 0$ y $a_i - \frac{b_i}{\mu} < 0$. Para concluir, basta notar de la Proposición 22 que podemos asumir que E_i proviene del blow-up en un punto $p \in S$, y $b_i/a_i = \text{mult}_p(D)$. Esto muestra lo pedido.

5. PROGRAMA DE SARKISOV EN DIMENSIÓN 2 (PEDRO, 13 DE JUNIO)

El objetivo central de esta charla es demostrar que el programa de Sarkisov termina en finitos pasos; ver Teorema 11 para recordar la notación. Fijamos el MFS $\varphi': X' \rightarrow Z'$, junto con $A' \in \text{Pic}(Z')$, $\mu \in \mathbb{Q}^{>0}$ como hemos hecho antes.

La estrategia básica es la siguiente. Dado un mapeo birracional $f: X \dashrightarrow X'$ desde un MFS $\varphi: X \rightarrow Z$, asociamos el grado de Sarkisov

$$\text{deg}_{\text{Sar}}(f) = (\mu(f), \lambda(f), \ell(f))$$

que hemos definido anteriormente. Probaremos que si f no es un isomorfismo, entonces es posible componer f con alguno de los links de Sarkisov (I)–(IV), de modo que el grado de Sarkisov decrezca (en el orden lexicográfico). De este modo, el proceso acabará luego de finitos pasos, pues el grado de Sarkisov vive en $\frac{1}{6}\mathbb{N} \times \mathbb{N}^2$.

El argumento puede resumirse en el diagrama de flujo mostrado en la Figura 4. Como se observa, hay cinco resultados posibles: si f es un isomorfismo (garantizado por el Teorema 23), y los cuatro links de Sarkisov. En estos últimos repetimos el proceso.

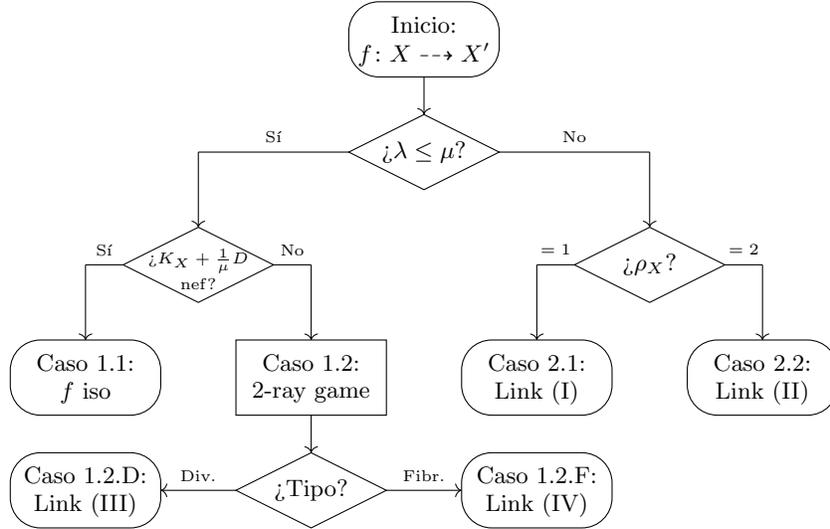


FIGURA 4. Diagrama de flujo, programa de Sarkisov.

Estamos en condiciones de iniciar la demostración. Dado $f: X \dashrightarrow X'$, nos preguntamos si $\lambda \leq \mu$.

5.1. Caso 1. Supongamos que $\lambda \leq \mu$. Nos preguntamos ahora si $K_X + \frac{1}{\mu}D$ es nef en X .

5.1.1. *Caso 1.1.* Supongamos que $K_X + \frac{1}{\mu}D$ es nef. En este caso, el teorema de Noether–Fano–Iskovskikh (Teorema 23) aplica. Obtenemos así que f es un isomorfismo, y el programa termina.

5.1.2. *Caso 1.2.* Supongamos que $K_X + \frac{1}{\mu}D$ no es nef. Realizaremos el *2-ray game* directamente en X .

En primer lugar, notemos que φ no es $\mathbb{P}^2 \rightarrow \{pt\}$. En efecto, en tal caso $(\mu K_X + D).C$ es cero para toda curva $C \subseteq X$, y en particular $K_X + \frac{1}{\mu}D$ sería nef. De este modo, tenemos que

$$\varphi: X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow B$$

es una fibración sobre una curva, y así $\text{NS}(X)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ está generado por $[F]$ (la clase de una fibra) y $\xi = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)]$.

Veamos qué podemos decir del cono de curvas negativas para $K_X + \frac{1}{\mu}D$. Por construcción de μ , tenemos que $(\mu K_X + D).[F] = 0$. Pero $(\mu K_X + D)$ no es un divisor nef; así que podemos tomar un rayo extremal

$$R = \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$$

con $(K_X + \frac{1}{\mu}D).C$, y $C \subseteq X$ una curva racional que no es una fibra. Al escribir, resulta que

$$0 \leq \frac{1}{\mu}D.C < -K_X.C,$$

donde hemos usado que D es nef. Resulta así que $K_X.C < 0$, y así el rayo R induce una contracción extremal $\psi: X \rightarrow T$, distinta a φ .

- Caso 1.2.D: ψ es una contracción divisorial. En este caso $\psi(C) = \{pt\}$ es un punto donde $C \subset X$ es una (-1) -curva. Acá T tiene dimensión 2, $\kappa(T) = -\infty$, y $\rho_T = 2 - 1 = 1$. De este modo, resulta que $T = \mathbb{P}^2$, y $X = \mathbb{F}_1$ es el blow-up de \mathbb{P}^2 en un punto. A posteriori, resulta que $\varphi: X \rightarrow B$ es la fibración de \mathbb{F}_1 sobre \mathbb{P}^1 .

En particular, podemos notar que este caso recupera un link de tipo (III).

- Caso 1.2.F: ψ es una fibración. En este caso, tenemos que X admite dos fibraciones distintas, como se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \psi \swarrow & & \searrow \varphi \\ B' & & B. \end{array}$$

Tomemos una fibra $\Gamma \subseteq X$ de φ . Esta fibra no es contraída por ψ , pues ψ está inducida por un rayo extremal distinto. De este modo, la imagen de B vía ψ es todo B .

Por el teorema de Lüroth, resulta que B es isomorfo a \mathbb{P}^1 . En particular, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ es una fibración asociada a una superficie de Hirzebruch. Es directo verificar²⁶ que la única que admite una segunda fibración es $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, donde φ y ψ son las proyecciones a ambas componentes.

Esta construcción produce un link de tipo (IV).

²⁶Por ejemplo, si $X = \mathbb{F}_n$, entonces la curva $(-n)$ corresponde al segundo rayo negativo para $n \geq 1$; y hay solo dos rayos negativos pues $\rho = 2$.

Hasta ahora, hemos producido un link de tipo (III) o (IV) para reemplazar $\varphi: X \rightarrow Z$ por $\varphi_1: X_1 \rightarrow Z_1$, como se muestra en (15).

$$(15) \quad \begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & & \curvearrowright & & \\ X & \dashrightarrow & X_1 & \dashrightarrow & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi' \\ Z & & Z_1 & & Z' \end{array}$$

Nos queda demostrar que esta elección mejora el grado de Sarkisov. Utilizaremos la notación $(\mu_1, \lambda_1, \ell_1)$ para el grado de Sarkisov de φ_1 .

Afirmación 34. En el Caso 1.2.D y en el Caso 1.2.F se tiene que $\mu_1 < \mu$, y así

$$\deg_{\text{Sar}}(f) > \deg_{\text{Sar}}(f_1).$$

Demostración. (Caso 1.2.D) Adaptaremos (15) para nuestra notación del caso divisorial. Hemos anotado también una resolución de f , que además resuelve f_1 pues ϵ es un morfismo regular.

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \swarrow \sigma & \downarrow \sigma_1 & \searrow \sigma' & \\ X = \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{\epsilon} & X_1 = \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi' \\ \mathbb{P}^1 & & \{pt\} & & Z' \end{array}$$

De este modo, podemos usar Y para calcular ambos grados de Sarkisov.

Llamemos $L \subseteq X_1$ a una línea en X_1 , y $F \subseteq X$ a la fibra de φ . Notemos que

$$F = \epsilon^*(L) - E,$$

donde E es el divisor excepcional de ϵ . Adicionalmente,

$$K_{X_1} = -3L, \quad K_X = \epsilon^*(-3L) + E = -3F - 2E.$$

El cono de curvas en \mathbb{F}_1 está generado por F y E . De este modo, podemos escribir

$$D = aF + bE = \epsilon^*(aL) + (b - a)E, \quad a, b \geq 0.$$

Usando esta notación, tenemos que $D_1 = aL$.

Empecemos a calcular. Hemos escogido E de modo que sea un rayo negativo para $K_X + \frac{1}{\mu}D$. Así, resulta que

$$(16) \quad 0 > \left(K_X + \frac{1}{\mu}D \right) \cdot E = -1 + \frac{a - b}{\mu}.$$

Por otro lado, tenemos que μ está escogido de modo que

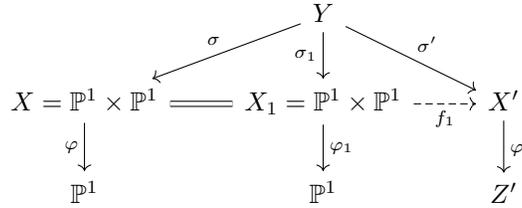
$$(17) \quad 0 = \left(K_X + \frac{1}{\mu}D \right) \cdot F = -2 + \frac{b}{\mu}.$$

Ahora, calculamos

$$\begin{aligned} \left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1\right) \cdot L &= \left(-3 + \frac{a}{\mu}\right) L^2 \\ &= \left(-1 + \frac{a-b}{\mu}\right) + \left(-2 + \frac{b}{\mu}\right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

gracias a (16) y (17). Utilizando la Observación 18, resulta que $\mu_1 < \mu$. \square

Demostración. (Caso 1.2.F) Como en el caso anterior, comenzamos escribiendo (15) en nuestra notación para el caso fibración.



En este caso, las dos fibrationes son distintas. Llamemos Γ y Γ_1 a las clases de las fibras respectivas, de modo que

$$K_X = K_{X_1} = -2\Gamma - 2\Gamma_1.$$

Escribamos $D = a\Gamma + b\Gamma_1$, con $a, b \geq 0$. Tenemos que Γ_1 es un rayo extremal para $K_X + \frac{1}{\mu}\Gamma_1$, y así

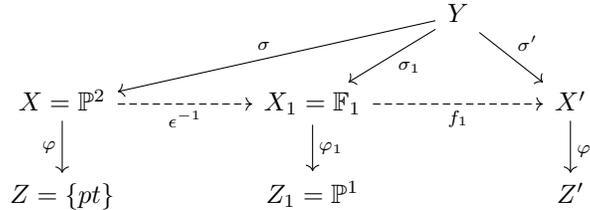
$$0 > \left(K_X + \frac{1}{\mu}D\right) \Gamma_1 = -2 + a.$$

Pero ahora por la Observación 18 obtenemos que $\mu_1 < \mu$, probando lo pedido. \square

En resumen, luego del Caso 1.2 obtenemos que μ decrece al componer con el link de tipo (III) o (IV) escogido adecuadamente.

5.2. Caso 2. Supongamos que $\lambda > \mu$. Nos preguntamos ahora si ρ_X es 1 o 2; i.e si ρ_Z es 0 o 1, respectivamente.

5.2.1. Caso 2.1. Supongamos que $\rho_X = 1$; esto es, $X = \mathbb{P}^2$. Escogemos $p \in X$ tal que el sistema lineal $f^{-1}|H'|$ tenga multiplicidad igual a λ en p . Tomamos el blow-up en p , que induce un link de tipo (I). En la siguiente figura hemos adaptado la factorización (15) a esta notación, junto con una resolución de f_1 .



Notamos adicionalmente que Y induce una resolución de $f = f_1 \circ \epsilon^{-1}$, pues ϵ es un morfismo.

Afirmación 35. En el Caso 2.1 se tiene que $\mu_1 < \mu$, y así

$$\deg_{\text{Sar}}(f) > \deg_{\text{Sar}}(f_1).$$

Para calcular, notamos que $D = aL$, con un $a \geq 1$. De este modo, tenemos que

$$(18) \quad \mu = \frac{D.L}{-K_X.L} = \frac{a}{3}$$

gracias a la definición de μ .

De este modo, $D_1 = \epsilon^*(aL) - \lambda E$, por como escogimos p . Para calcular, recordamos que

$$K_{X_1} = \epsilon^*(-3L) + E, \quad F_1 = \epsilon^*(L) + E,$$

donde F_1 es la fibra asociada al MFS φ_1 .

Con ello en mente, tenemos

$$K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1 = \left(-3 + \frac{a}{\mu}\right)\epsilon^*(L) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)E.$$

Tomando la intersección con F_1 , obtenemos

$$\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1\right).F_1 = \left(-3 + \frac{a}{\mu}\right) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

El primer sumando es cero gracias a (18); mientras que el segundo es negativo pues $\lambda > \mu$. Por la Observación 18, resulta que $\mu_1 < \mu$. Esto muestra lo buscado.

5.2.2. Caso 2.2. Supongamos que $\rho_X = 2$; esto es, $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ y $\varphi: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow B$ es una fibración. Tomamos $p \in X$ un punto de multiplicidad λ , y realizamos la transformación elemental en p .

Obtenemos así un link de tipo (II). Es interesante notar que este es el único caso donde será necesario calcular el resto de números del grado de Sarkisov; en los tres anteriores, hemos probado simplemente que $\mu_1 < \mu$.

Para resolver los morfismos f y f_1 , tomaremos una resolución del mapeo $W \dashrightarrow X'$ así inducido. De este modo, podremos utilizar la resolución inducida para calcular y comparar los grados de Sarkisov en f y f_1 . El diagrama asociado se muestra en (19).

$$(19) \quad \begin{array}{ccccc} & & & & Y \\ & & & & \swarrow \tau \\ & & W & & \searrow \sigma' \\ & \swarrow \epsilon & & \searrow \epsilon' & \\ X & \dashrightarrow g & X_1 & \dashrightarrow f_1 & X' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi' \\ B & & B_1 = B & & Z' \end{array}$$

Afirmación 36. En el Caso 2.2 se tiene que $\mu_1 = \mu$, y que $\lambda_1 \leq \lambda$. Más aún, en el caso de igualdad tenemos que $\ell_1 < \ell$. En cualquier caso, obtenemos que

$$\deg_{\text{Sar}}(f) > \deg_{\text{Sar}}(f_1).$$

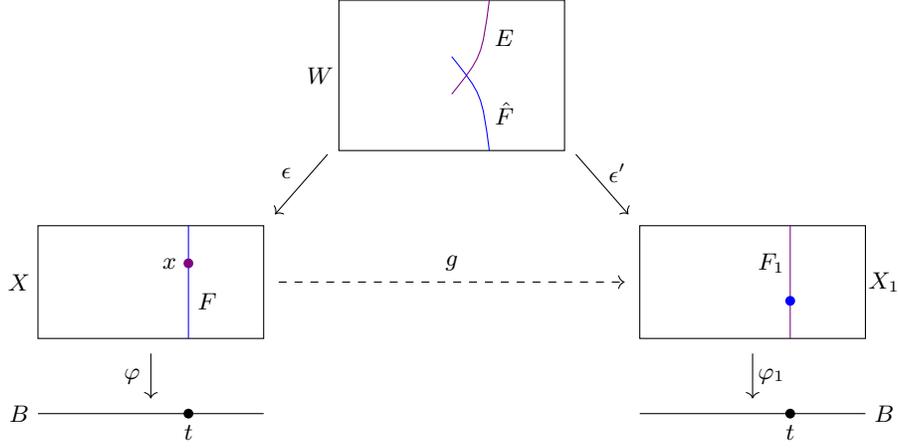


FIGURA 5. Caso 2.2, transformación elemental.

Para probar esto, fijemos algo de notación. En primer lugar, denotamos F, F_1 a las fibras correspondientes a la transformación elemental, como se muestra en la Figura 5. Llamemos G al divisor

$$G = \epsilon^*(F) = \epsilon'^*(F_1) = E + \hat{F},$$

y notemos que $K_W = \epsilon^*(K_X) + E$. Por construcción, tenemos que

$$D_W := \tau_*\sigma'^*D' = \epsilon^*(D) - \lambda E,$$

lo que implica

$$K_W + \frac{1}{\mu}D_W = \epsilon^*\left(K_X + \frac{1}{\mu}D\right) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)E,$$

y similar con ϵ' en vez de ϵ .

Con lo anterior en mente, podemos calcular la intersección del divisor anterior con G , por la fórmula de proyección. Obtenemos

$$\begin{aligned} \left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1\right) \cdot F_1 &= \epsilon'^*\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1\right) \cdot G \\ &= \left(K_W + \frac{1}{\mu}D_W\right) \cdot G - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)E \cdot G \\ &= \left(K_W + \frac{1}{\mu}D_W\right) \cdot G, \end{aligned}$$

donde la última igualdad usa que $E \cdot G = 0$. El mismo cálculo aplica para ϵ , y así

$$\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1\right) \cdot F_1 = \left(K_X + \frac{1}{\mu}D\right) \cdot F.$$

Ahora, basta notar que el lado derecho es igual a cero, por definición de μ . Con ello, el lado izquierdo es cero, y así $\mu_1 = \mu$ por definición nuevamente.

Para continuar, utilizaremos un argumento de [BM97], que utiliza un poco de MMP²⁷. Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \text{máx}\{r \in \mathbb{Q}_{>0} : a_k - rb_k \geq 0 \forall k\}, \\ &= \text{máx}\{r \in \mathbb{Q}_{>0} : (X, rD) \text{ es canónico}\}. \end{aligned}$$

Ahora, el par $(X_1, \frac{1}{\lambda}D_1)$ se obtiene mediante un log-MMP para el par $(X, \frac{1}{\lambda}D)$. De este modo, $(X_1, \frac{1}{\lambda}D_1)$ es canónico²⁸. Así, obtenemos que

$$\frac{1}{\lambda_1} \geq \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda.$$

En caso de tener igualdad, obtenemos que

$$K_W + \frac{1}{\lambda}D_W = \epsilon^*(K_X + \frac{1}{\lambda}D),$$

donde hemos usado que E es un divisor crepante para ϵ . De este modo, por proyección obtenemos que

$$\left(K_W + \frac{1}{\lambda}D_W\right) \cdot \hat{F} = \left(K_X + \frac{1}{\lambda}D\right) \cdot F < 0,$$

pues $\lambda > \mu$ (y por la Observación 18). De este modo, si esta expresión es igual a $-\delta$, debemos tener

$$K_W + \frac{1}{\lambda}D_W = \epsilon'^* \left(K_{X_1} + \frac{1}{\lambda_1}D_1\right) + \delta\hat{F},$$

y así \hat{F} no es un divisor crepante en X_1 . Con ello, la cantidad de divisores crepantes para X_1 ha disminuido en 1. Esto concluye lo pedido.

5.3. Un ejemplo. Para finalizar, veamos un ejemplo de cómo aplicar el programa de Sarkisov para factorizar un morfismo. Nuestro objetivo será factorizar la transformación de Cremona clásica,

$$f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad [x, y, z] \mapsto [yz, zx, xy],$$

que hemos discutido en el Ejemplo 21.

Para calcular, comenzamos fijando el lado derecho con $A' = 0$ y $\mu' = 1/3$, como en el Ejemplo 12.

5.3.1. Primer link. El morfismo f tiene grado de Sarkisov $(2/3, 1, 3)$. En particular, $\lambda > \mu$ y $\rho_X = 1$, de modo que estamos en el Caso 2.1.

Para calcular el link de Sarkisov respectivo, debemos hacer el blow-up en uno de los puntos base de multiplicidad máxima. Obtenemos la situación de la Figura 6, donde hemos hecho el blow-up en el punto de la izquierda. Hemos nombrado las imágenes de las curvas de la resolución de la Figura 3 utilizando la misma letra, por claridad. Adicionalmente, en X_1 tenemos que

$$E_1^2 = -1, \quad E_1'^2 = 1, \quad E_2'^2 = E_3'^2 = 0.$$

De este modo, tanto E_2' como E_3' son fibras del MFS $X_1 \rightarrow Z_1 = \mathbb{P}^1$. Notamos adicionalmente que $X_1 \cong \mathbb{F}_1$, al ser obtenida como el blow-up de \mathbb{P}_2 en un punto.

²⁷Adicionalmente, hay un argumento elemental en [Mat02, p. 105].

²⁸Ver [KM98, Corollary 3.43].

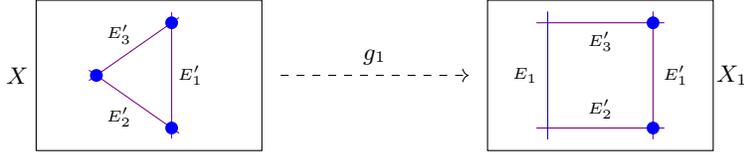


FIGURA 6. Primer link, tipo (I).

5.3.2. *Segundo link.* Comencemos calculando el grado de Sarkisov del morfismo inducido $f_1: X_1 \dashrightarrow X'$. Tenemos que $D_1 = (g_1^{-1})^*D - E_1$, pues hemos realizado el blow-up en un punto donde D tiene multiplicidad 1. De este modo,

$$E'_2.D_1 = E'_2.\left((g_1^{-1})^*D - E_1\right) = E'_2.D - E'_2.E_1 = 1,$$

gracias a la fórmula de proyección²⁹. Con ello,

$$\mu_1 = \frac{E'_2.D_1}{-E'_2.K_{X_1}} = \frac{1}{2}.$$

Continuamos calculando λ_1 y ℓ_1 . No es difícil darse cuenta que $\lambda_1 = 1$ y $\ell_1 = 2$, pues los otros dos puntos bases (de la intersección de E'_1 con E'_2 y E'_3) se mantienen. De este modo,

$$\deg_{\text{Sar}}(f_1) = (1/2, 1, 2).$$

De este modo, al aplicar el programa de Sarkisov estamos en el Caso 2.2, y así aparece un link de tipo (II). Debemos por tanto escoger un punto base del sistema lineal, tomar el blow-up en él, y contraer la transformada estricta de la fibra que pasaba por él. En nuestro caso tomaremos el blow-up en la intersección de E'_1 y E'_3 , y así resulta la situación de la Figura 7.

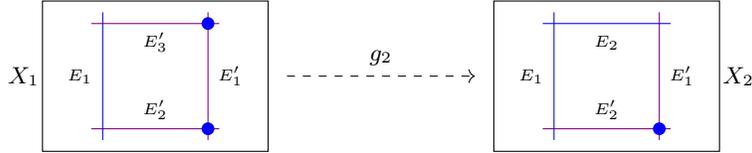


FIGURA 7. Segundo link, tipo (II).

Notamos que la superficie X_2 es isomorfa a $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, pues hemos hecho la transformación elemental en un punto fuera de la curva de autointersección negativa de la superficie original³⁰. En particular, acá es necesario explicitar cuál proyección está dotando a X_2 de una estructura de MFS. Por construcción de la transformación elemental, tenemos que la recta E'_2 en X_2 debe seguir siendo una fibra, y por ello debemos tomar la proyección que tiene a E'_2 como una fibra.

²⁹Hemos abusado un poco de la notación, de modo que en $E'_2.D - 2E'_2.E_1$, el primer E'_2 vive en X y el segundo en X_1 . Esperamos que esto no cause confusión.

³⁰Ver por ejemplo [Bea96, p.38]. Alternativamente, la descripción geométrica de f_2 dada más abajo puede utilizarse para identificar X_2

5.3.3. *Tercer link.* Para calcular el grado de Sarkisov, debemos estudiar el morfismo inducido $f_2: X_2 \dashrightarrow X'$. Esto corresponde a tomar el blow-up en la intersección de E'_1 y E'_2 , y luego contraer ambas transformadas estrictas.

Con ello, si llamamos F a la clase de una fibra (del MFS φ_2) y G a la clase de la otra fibración³¹, tenemos que

$$F = E'_2 = E_2, \quad G = E_1 = E'_1,$$

y $D_2 = F + G$. Adicionalmente $K_{X_2} = -2F - 2G$, y con ello

$$\mu_2 = \frac{F.D_2}{-F.K_{X_2}} = \frac{1}{2}.$$

Esto calcula el primer número del grado de Sarkisov³².

Por construcción, no es difícil verificar que $\lambda = 1$ y $\ell = 1$. En efecto, los elementos de $f_2^{-1}|H'|$ corresponden a las curvas de bigrado $(1, 1)$ que pasan por la intersección de E'_1 y E'_2 . Obtenemos así que el grado de Sarkisov de f_2 es

$$\deg_{\text{Sar}}(f_2) = (1/2, 1, 1).$$

Es interesante notar que en este caso λ disminuyó. A la luz del Caso 2.2 esto tiene sentido, pues lo que hicimos fue remover un punto base del sistema $f_2^{-1}|H'|$.

Ahora, el programa de Sarkisov nos indica que debemos realizar un link de tipo (II) nuevamente. Para ello, hacemos el blow-up en el punto base del sistema lineal (la intersección de E'_1 y E'_2), y luego contraemos E'_2 (la fibra del MFS que pasaba por ese punto). Obtenemos la situación de la Figura 8.

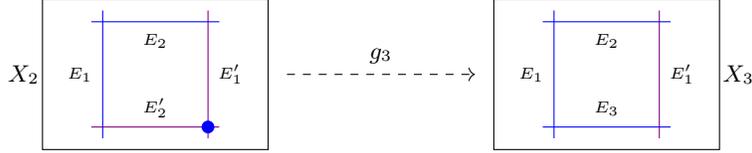


FIGURA 8. Tercer link, tipo (II).

En este caso, tenemos que $X_3 \cong \mathbb{F}_1$, y el mapeo $f_2: X_3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es el blow-down de la curva E'_1 . Notamos adicionalmente que $\varphi_3: X_3 \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un MFS donde E_2 y E_3 son fibras.

5.3.4. *Cuarto link.* Comenzamos calculando el grado de Sarkisov. Llamemos F a la clase de una fibra de φ_3 y G a la clase de la transformada estricta de una recta en \mathbb{P}^2 , de modo que

$$F = E_2 = E_3, \quad G = E_1 = D_1 = F + E'_1,$$

y $K_{X_3} = -2G - F$. Resulta con ello que

$$\mu_3 = \frac{F.D_3}{-F.K_{D_3}} = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, el sistema $f_3^{-1}|H'|$ no tiene puntos base, y así $\lambda_3 = 0$. El valor ℓ_3 queda indefinido, y así

$$\deg_{\text{Sar}}(f_3) = (1/2, 0, *).$$

³¹De modo que $F^2 = G^2 = 0, F.G = 1$.

³²Alternativamente, podríamos haber usado la Afirmación 36, donde mostramos que μ no cambia en el Caso 2.2.

Con ello, el programa de Sarkisov nos indica primero que estamos en el Caso 1, y debemos verificar si

$$K_{X_3} + \frac{1}{\mu_3} D_3 = -F$$

es nef. En este caso $(K_{X_3} + \frac{1}{\mu_3} D_3).G = -1$, y así el divisor no es nef³³.

De este modo, nos encontramos en el Caso 1.2. Debemos buscar el segundo rayo extremal de $X_3 \cong \mathbb{F}_1$. En este caso, basta tomar la recta E'_1 , pues $K_{X_3}.E'_1 = -1$ y $E_1'^2 = -1$. La contracción asociada a este rayo es divisorial, y obtenemos el Caso 1.2.D. Resulta así un link de tipo (III). Más aún, esta contracción coincide con el morfismo f_3 . Hemos mostrado la situación en la Figura 9.

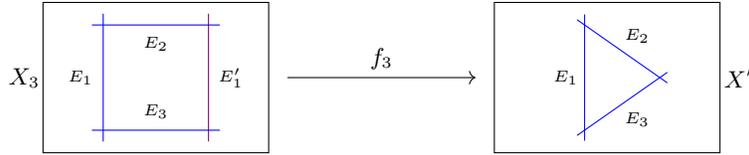


FIGURA 9. Cuarto link, tipo (III).

5.3.5. *Resumen.* Como hemos mencionado arriba, en este momento paramos, pues f_4 es la identidad en X' . Hemos así factorizado la transformación de Cremona clásica en cuatro links de Sarkisov, mostrados en (20).

$$(20) \quad \begin{array}{ccccccccc} X \cong \mathbb{P}^2 & \xrightarrow[-g_1]{(I)} & X_1 \cong \mathbb{F}_1 & \xrightarrow[-g_2]{(II)} & X_2 \cong \mathbb{F}_0 & \xrightarrow[-g_3]{(II)} & X_3 \cong \mathbb{F}_1 & \xrightarrow[-g_4]{(III)} & X' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{pt\} & & \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 & & \{pt\}. \end{array}$$

Esto concluye nuestro ejemplo.

6. ACOTAMIENTO EFECTIVO DE T-SINGULARIDADES EN SUPERFICIES RACIONALES I (GIANCARLO, 20 DE JUNIO)

La sesión de hoy busca discutir un problema de acotamiento de singularidades en superficies. En nuestro contexto, nos enfocaremos en el caso racional, pues es aquí donde la existencia de varios modelos minimales puede provocar problemas. Así, la motivación central es ver si las técnicas del programa de Sarkisov permiten entender cómo se relacionan los diversos modelos minimales, y en particular si nos permiten ayudar a acotar ciertos grados que veremos a continuación.

Comenzaremos introduciendo los tipos de singularidades a estudiar, para luego enunciar el problema preciso a atacar. Posteriormente, veremos un ejemplo explícito de la situación que queremos analizar.

³³Alternativamente, sabemos que f_3 no es un isomorfismo, y así esto sigue directamente del teorema de Noether–Fano–Iskovskikh.

6.1. T-singularidades.

Definición 37 ([KSB88, 3.7]). Una *T-singularidad* es una singularidad de dimensión 2, cociente³⁴ tal que admite una suavización \mathbb{Q} -Gorenstein³⁵.

Este tipo de singularidades fueron introducidas por Kollár y Shepherd-Barron en 1988. De hecho, ellos demostraron la siguiente clasificación.

Teorema 38 ([KSB88, 3.11]). *Una singularidad es una T-singularidad si y solo si corresponde a uno de los siguientes dos tipos.*

- (1) *Singularidades ADE (o Du Val).*
- (2) *Singularidades de cociente cíclico de la forma $\frac{1}{dn^2}(1, dna - 1)$, donde $d \geq 1$ y $\text{mcd}(n, a) = 1$.*

Para el problema que tenemos en mente nos interesan solo las singularidades del segundo tipo. Para $d = 1$, las singularidades de la forma $\frac{1}{n^2}(1, na - 1)$ se conocen como *singularidades de Wahl*.

Ejemplo 39. Una manera de producir singularidades de Wahl aparece al estudiar fibras I_1 de una superficie elíptica. Recordemos que una fibra I_1 corresponde a una cúbica nodal de autointersección cero. Comenzamos haciendo el blow-up en el nodo, y así nos queda una curva suave de autointersección -4 , como se muestra en la Figura 10. Esta curva puede contraerse a una singularidad de Wahl $\frac{1}{4}(1, 3)$, con $n = 2$ y $a = 1$ en la notación anterior.

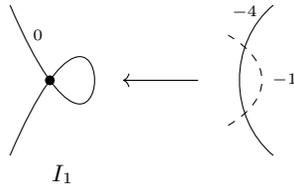


FIGURA 10. Fibra I_1 y un blow-up.

Podemos seguir realizando blow-ups, en la intersección de la curva (-1) con alguna de las curvas anteriores. Así obtenemos primero una cadena con una curva -5 y una curva -2 ; luego, las dos cadenas de la Figura 11.

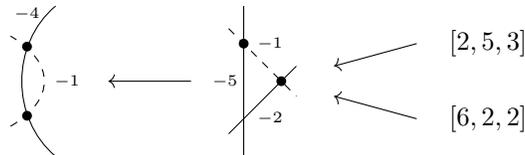


FIGURA 11. Sigüientes blow-ups.

En el ejemplo anterior hemos utilizado la siguiente notación. Consideremos una cadena de r curvas racionales suaves E_1, \dots, E_r , que se cortan transversalmente, y con $E_i^2 = -b_i$ (para $b_i \geq 2$), como se muestra en la Figura 12.

³⁴Esto es, analíticamente isomorfa a \mathbb{C}^2/G para un grupo G finito.

³⁵Esto es, que el divisor canónico sea \mathbb{Q} -Cartier, junto con que la superficie sea Cohen-Macaulay; ver [KSB88, 3.1].

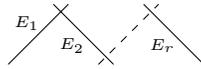


FIGURA 12. Cadena de curvas racionales.

A una cadena de esta forma, asociamos el símbolo $[b_1, \dots, b_r]$, y la fracción continua

$$[b_1, \dots, b_r] = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_r}}}.$$

Por ejemplo, tenemos que $[2, 5] = 9/5$ y $[2, 5, 3] = 25/14$. El siguiente teorema, debido a Artin, nos indica que este tipo de cadenas aparece al resolver singularidades de cociente cíclico.

Teorema 40 (Artin). *Sea X una superficie normal, que contiene una cadena $[b_1, \dots, b_r]$ como antes, tal que X es suave alrededor de la cadena. Escribamos*

$$[b_1, \dots, b_r] = \frac{n}{a}.$$

Luego, existe una superficie normal X' junto con un morfismo birracional $X \rightarrow X'$ que contrae la cadena a una singularidad $\frac{1}{n}(1, a)$.

De este modo, para producir singularidades de cociente cíclico basta construir cadenas adecuadas de curvas racionales. En particular, abusaremos de la notación y diremos “una singularidad $\frac{1}{n}(1, a)$ ” para referirnos a una cadena $[b_1, \dots, b_r]$ como arriba.

El Ejemplo 39 puede extenderse a una fibra I_d : para $d \geq 2$, corresponde a un ciclo de d curvas racionales, cada una de autointersección -2 . Por ejemplo, en la Figura 13 hemos mostrado una fibra I_4 junto con el blow-up en una intersección. Repetimos así la idea del Ejemplo 39: hacemos blow-ups en las intersecciones de la curva (-1) con alguna de las anteriores.

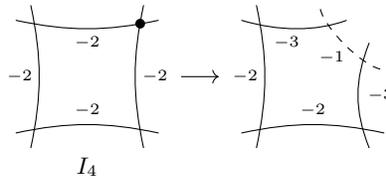


FIGURA 13. Fibra I_4 y un blow-up.

Notemos que en la Figura 13 hemos obtenido una singularidad $[3, 2, 2, 3]$. Esto es una T-singularidad $\frac{1}{16}(1, 7)$, donde $d = 4$, $n = 2$ y $a = 1$. El siguiente resultado muestra que esto no es casualidad.

Teorema 41 (Kollár–Shepherd-Barron, [KSB88, 3.11]). *Toda T-singularidad de la forma $\frac{1}{dn^2}(1, dna - 1)$ se obtiene del algoritmo anterior partiendo de un ciclo I_d . Más explícitamente, para $d = 1$ (resp. $d = 2, d \geq 3$), toda T-singularidad $\frac{1}{dn^2}(1, dna - 1)$ se obtiene comenzando de*

$$[4], \quad \text{resp. } [3, 3], \quad [3, \underbrace{2, \dots, 2}_{d-2}, 3]$$

y aplicando las operaciones

$$[b_1, \dots, b_r] \mapsto \begin{cases} [2, b_1, \dots, b_{r-1}, b_r + 1], \\ [b_1 + 1, b_2, \dots, b_r, 2] \end{cases}$$

una cantidad finita de veces.

6.2. Caso global y pregunta. Estamos en condiciones de enunciar el problema de acotamiento. Sea W una superficie proyectiva que tiene solo T -singularidades. Llamaremos ℓ a la cantidad de dichas singularidades.

Observación 42. Para toda la discusión que viene, asumiremos que W es una superficie que puede suavizarse. Esto es, que existe una deformación $\mathcal{W}_t \rightsquigarrow \mathcal{W}_0 = W$, \mathbb{Q} -Gorenstein, y \mathcal{W}_t no singular para $t \neq 0$.

No ahondaremos en los detalles técnicos relacionados a la existencia de tal \mathcal{W} , pues para la estrategia que viene más adelante no usaremos \mathcal{W} . Por ahora, mencionamos que K_W^2 debe ser un entero si W admite una suavización.

Estamos interesados en acotar las T -singularidades que pueden aparecer una vez fijado K_W^2 . Esto es, fijado $C \in \mathbb{Z}$, entender el conjunto

$$(21) \quad \{(d, n, a) : \text{existe } W \text{ con una singularidad } \frac{1}{dn^2}(1, dna - 1) \text{ y } K_W^2 = C\}$$

Separaremos en dos casos, dependiendo del valor de C . Si $C \leq 0$, entonces hay infinitas T -singularidades que pueden aparecer en dichas superficies. En cambio, si $C > 0$, y pedimos adicionalmente que K_W sea amplio, un teorema de Alexeev³⁶ garantiza que el conjunto (21) es *finito*. Esto es, fijado $C > 0$, hay una cantidad finita de T -singularidades que pueden aparecer en una superficie W con K_W amplio y $K_W^2 = C$.

Pregunta 43. Encontrar una cota explícita³⁷ (e idealmente óptima) a la lista de singularidades que pueden aparecer en (21).

6.3. Estrategia. Una versión de la Pregunta 43 fue abordada por Rana y Urzúa en [RU19]. Bosquejaremos las ideas claves de su enfoque, junto con mencionar las dificultades que aparecen en este proceso.

En primer lugar, dada una T -singularidad

$$(22) \quad \frac{1}{dn^2}(1, dna - 1), \quad [b_1, \dots, b_r] = \frac{dn^2}{dna - 1},$$

intentaremos acotar $r - d$. Una vez acotado este valor, es fácil verificar que las T -singularidades respectivas estarán acotadas.

Sea $\phi: X \rightarrow W$ la resolución minimal de W . La superficie X puede no ser minimal, por lo que tomamos $\pi: X \rightarrow S$ un modelo minimal de X . Obtenemos así el diagrama (23).

$$(23) \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ \pi \swarrow & & \searrow \phi \\ S & & W. \end{array}$$

³⁶Ver [Ale94] y [AM04].

³⁷De hecho, en principio el teorema de Alexeev sí permite obtener una cota explícita, pero no necesariamente es óptima.

Observación 44. Es importante mencionar que, a pesar que W tiene K_W amplio, esto *no* implica que $\kappa(S) = 2$. De hecho, es posible que W y S sean superficies racionales³⁸.

En particular, al construir π , estamos haciendo una elección de un modelo minimal para X . Si $\kappa(X) \geq 0$, entonces π está únicamente determinado. En cambio, si $\kappa(X) = -\infty$, entonces potencialmente hay una elección al escoger π .

Es esta razón la que conecta nuestra pregunta con el programa de Sarkisov. Nos gustaría ver si es posible utilizar la descripción explícita del programa de Sarkisov para comparar los distintos modelos minimales de X en el caso $\kappa(X) = -\infty$.

Denotemos por $C_1, \dots, C_\ell \subseteq X$ las configuraciones de curvas asociadas a la resolución de cada singularidad de W . De este modo, cada C_i es una cadena de curvas racionales, y C_i, C_j no se cortan si $i \neq j$. Adicionalmente, por construcción tenemos que $\text{Exc}(\phi) = \bigcup_i C_i$.

Teorema 45. *La imagen $\pi(\text{Exc}(\phi))$ es una configuración de curvas no vacía en S .*

Denotemos $C = \sum_i C_i$, y consideremos su imagen $\pi(C) \subseteq S$. A priori, es posible que algunas de las curvas que forman a C sean contraídas por π , y con ello que $\pi(C)$ tenga menos componentes irreducibles que C .

Teorema 46 (Rana–Urzúa, [RU19]). *Supongamos que $\ell = 1$, y que W no es una superficie racional³⁹.*

- (1) *Si $\kappa(S) = 0$, entonces $r - d \leq 4K_W^2$.*
- (2) *Si $\kappa(S) = 1$, entonces $r - d \leq 4K_W^2 - 2$.*
- (3) *Si $\kappa(S) = 2$, entonces $r - d \leq 4(K_W^2 - K_S^2) - 4$ si $K_W^2 - K_S^2 > 1$; en caso contrario, $r - d \leq 1$.*

Más aún, todas las cotas son óptimas.

Para $\ell \geq 2$, la cota combinatorial es más difícil de lograr. Un trabajo en progreso de Figueroa, Rana y Urzúa muestra una cota óptima si $\ell \geq 2$.

La idea para demostrar este tipo de resultados es la siguiente. Supongamos que W tiene ℓ singularidades. Para cada una, escribimos r_i y d_i para los números de cada singularidad como en (22). Uno puede probar que existen $\alpha_i, \beta > 0$ y una función f tales que

$$(24) \quad \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i (r_i - d_i) \leq f(K_W^2, \ell) - \beta \cdot K_S \cdot \pi(C).$$

Si K_S es nef, el término de la derecha puede olvidarse. En caso contrario, debemos tener $S = \mathbb{P}^2$ o \mathbb{F}_n .

- Si $S = \mathbb{P}^2$, tenemos que $K_S \cdot \pi(C) = -3d$, donde d es el grado de $\pi(C)$.
- Si $S = \mathbb{F}_m$, entonces $K_S \cdot \pi(C) = (-2\Gamma^- + (2 + m)F) \cdot \pi(C)$.

Informalmente, el objetivo es ser capaz de escoger π adecuadamente de modo que $K_S \cdot \pi(C)$ esté acotado de alguna manera explícita.

³⁸Acá, W racional es lo mismo que W sea birracional a \mathbb{P}^2 .

³⁹En particular, esto implica que K_S es nef.

6.4. Un ejemplo. Construiremos un ejemplo explícito de una superficie W como arriba, y veremos cómo cambia el valor de $K_S \cdot \pi(C)$ al escoger distintos modelos minimales.

Sea $S = \mathbb{P}^2$. Consideramos cuatro rectas y una cónica en \mathbb{P}^2 , en posición general. Con ellas, obtenemos dos cúbicas (singulares) en S , como hemos mostrado en la Figura 14.

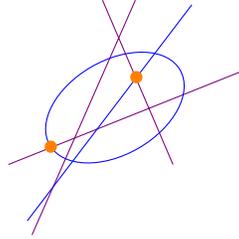


FIGURA 14. Dos cúbicas singulares en \mathbb{P}^2 .

A partir de las dos cúbicas, consideramos el *pencil* de cúbicas inducido. Tenemos nueve puntos bases (dos de ellos marcados en la Figura 14), por lo que al resolver obtenemos una superficie elíptica $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Observación 47. Uno puede demostrar que genéricamente esta fibración tiene nueve fibras singulares: una I_2 , una I_3 (inducidas por las dos cúbicas singulares originales), y otras siete I_1 . Adicionalmente, el grupo de Mordell–Weil de $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ es de rango 4.

Hemos mostrado algunas de las fibras singulares en la Figura 15, junto con las dos secciones correspondientes a los puntos base antes destacados.

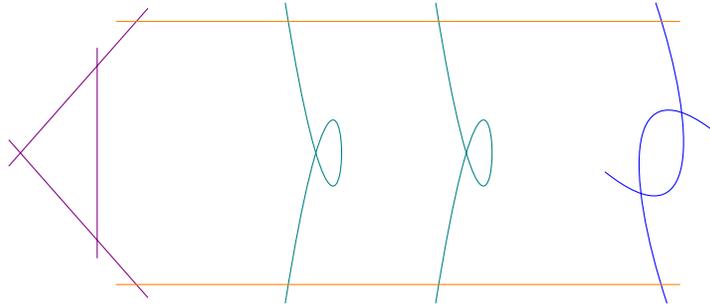


FIGURA 15. Tres fibras singulares y dos secciones de Z .

Observación 48. Un hecho útil es que las curvas (-1) de Z corresponden exactamente a las secciones de la fibración $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Realizaremos diez blow-ups en la Figura 15, cinco en cada una de las dos fibras I_1 antes marcadas. Obtenemos con ello la superficie X de la Figura 16, donde hemos indicado la autointersección de cada curva. La superficie así obtenida tiene $K_X^2 = -10$.

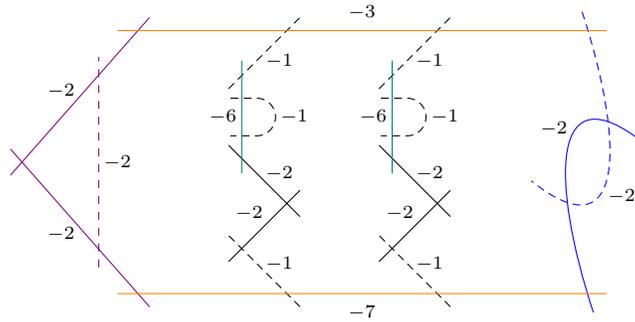


FIGURA 16. La superficie X .

En la Figura 16 podemos considerar las tres cadenas destacadas, que al contraer nos produce una superficie W con tres singularidades de Wahl: dos $[6, 2, 2]$ y una $[2, 7, 2, 2, 3]$.

Proposición 49. *La superficie W satisface que K_W es big y nef. Además, $K_W^2 = 1$, $p_g = q = 0$, $H^2(W, T_W) = 0$, y W no tiene obstrucciones para suavizar.*

Notemos que, por construcción, el mapeo $\phi: X \rightarrow W$ corresponde a la resolución minimal. Veamos dos ejemplos de modelos minimales $\pi_i: X \rightarrow S_i$ de X , para comparar los valores de $\pi_i(C).K_{S_i}$ así obtenidos.

6.4.1. *Primer modelo.* Podemos tomar $S_1 = \mathbb{P}^2$, y $\pi_1: X \rightarrow S_1$ como el mapeo $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ original. Veamos entonces qué sucede con las curvas que forman a C .

Al tomar el morfismo $X \rightarrow Z$, desaparecen las curvas (-2) que forman las cadenas $[6, 2, 2]$. Posteriormente, al tomar $Z \rightarrow \mathbb{P}^2$ el blow-down de los nueve puntos base del sistema de cúbicas, las dos secciones consideradas son contraídas. Resulta así que la imagen $\pi_1(C)$ tiene cinco componentes irreducibles: tres de las cuatro líneas originales y dos cúbicas suaves. Con ello, $\pi_1(C)$ tiene grado 9 en \mathbb{P}^2 , y

$$\pi_1(C).K_{\mathbb{P}^2} = -27.$$

6.4.2. *Segundo modelo.* Tomaremos $S_2 = \mathbb{P}^2$, igual que en el caso anterior. Eso sí, haremos una secuencia distinta de contracciones. En primer lugar, tomamos la contracción $X \rightarrow Z$ del modelo anterior. Posteriormente, contraemos las siguientes nueve curvas. Cuatro de ellas corresponden a curvas que ya hemos considerado: dos de las curvas en la fibra I_3 , una sección, y una curva de la fibra I_2 . Las cinco restantes corresponden a secciones obtenidas a partir del *pencil* original, como hemos marcado en la Figura 17.

Acá hemos utilizado que si una recta en \mathbb{P}^2 pasa por dos de los puntos base, su transformada estricta tiene autointersección -1 . De este modo, es una sección gracias a la Observación 48.

Hemos indicado las curvas nuevas, junto con números para indicar en qué orden contraer las curvas, en la Figura 18.

Como hemos contraído nueve curvas, la superficie resultante tiene número de Picard igual a 1, y por ello $S_2 = \mathbb{P}^2$. Calculemos ahora $\pi_2(C).K_{\mathbb{P}^2}$. La curva $\pi_2(C)$ tiene tres componentes: la imagen de la sección inferior, y de las dos fibras I_1 consideradas. La sección inferior tiene autointersección $-1 + 2 \cdot 1 = 1$, y con ello es una recta. En cambio, las fibras I_1 tienen autointersección $0 + 9 = 9$, y por ello

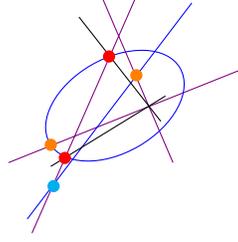


FIGURA 17. Cinco nuevas fibras

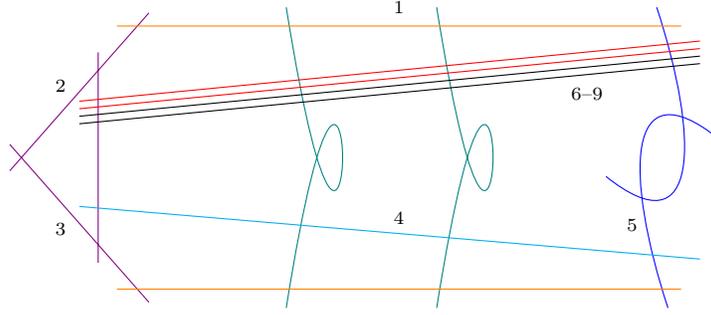


FIGURA 18. Curvas a contraer en el segundo modelo.

obtenemos dos cúbicas. En resumen, la curva $\pi_2(C)$ es una curva de grado 7, de donde

$$\pi_2(C).K_{\mathbb{P}^2} = -21.$$

7. ACOTAMIENTO EFECTIVO DE T-SINGULARIDADES EN SUPERFICIES RACIONALES II (GIANCARLO, 27 DE JUNIO)

7.1. Cota en el caso racional. Empecemos recordando la notación utilizada. Sea W una superficie con singularidades de Wahl y K_W amplio, $\phi: X \rightarrow W$ la resolución minimal, y $\pi: X \rightarrow S$ un modelo minimal de X . Supongamos que ℓ es la cantidad de singularidades de W , y llamemos $C_i \subseteq X$ a la configuración de curvas para cada una. Así, el divisor excepcional de ϕ es $C := \sum_i C_i$.

Estamos buscando una manera de acotar las singulares que pueden aparecer en W en términos de K_W^2 . De hecho, en el Teorema 46 discutimos una cota en el caso que W no es racional. Para el caso racional, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 50 (Rana-Urzúa, [RU19]). *Supongamos que $\ell = 1$, y que W es racional. Entonces*

$$r - d \leq \begin{cases} 2(K_W^2 - K_S^2) - \pi(C).K_S, & \text{si no long diagonals,} \\ 2(K_W^2 - K_S^2) - \pi(C).K_S + 1 & \text{si long diagonals I,} \\ 4(K_W^2 - K_S^2) - 2\pi(C).K_S & \text{si long diagonals II.} \end{cases}$$

No precisaremos qué significan los casos *long diagonals*. Por ahora, basta notar que las cotas tienen la forma (24). Al estar en el caso racional, no podemos eliminar el término $\pi(C).K_S$, y por ello el problema pasa a ser cómo acotar esta expresión.

Para demostrar el Teorema 50 parte de la estrategia es la siguiente. Supongamos que π es composición de m blow-ups. De este modo, podemos comparar K_S^2 , K_X^2 y K_W^2 para obtener

$$K_S^2 - m + \sum_{i=1}^{\ell} (r_i - d_i + 1) = K_W^2.$$

Ahora, llamemos E_i al pullback de la (-1) -curva obtenida en el i -ésimo blow-up realizado en S . De este modo, tenemos que E_m es una (-1) -curva en X , pero posiblemente el resto no lo serán⁴⁰. La ventaja de trabajar con E_i en vez de las transformadas estrictas es que

$$E_i \cdot E_j = \begin{cases} -1 & i = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esto se sigue de la fórmula de proyección.

Escribamos $E = \sum_{i=1}^m E_i$. De este modo, tenemos que

$$K_X = \pi^*(K_S) + E.$$

Tomando la intersección con C , obtenemos la expresión

$$K_X \cdot C = K_S \cdot \pi_*(C) + E \cdot C,$$

gracias a la fórmula de proyección. Uno verifica directamente⁴¹ que el lado izquierdo depende solamente de $r_i - d_i$. En [RU19] se trabaja en acotar la expresión $E \cdot C$, y así recuperamos las cotas del Teorema 50.

7.2. Secciones en fibraciones elípticas. Hasta ahora, hemos discutido bastante que el problema de minimizar $\pi(C) \cdot K_S$ no parece sencillo. A partir de algunos casos pequeños (como el blow-up de \mathbb{P}^2 en uno o dos puntos) podríamos sospechar que hay una cota uniforme para $\pi(C) \cdot K_S$. Esto es, que dada una superficie X y una curva $C \subseteq X$, existe un $M > 0$ tal que $|\pi(C) \cdot K_S| < M$ para *cualquier* modelo minimal $\pi: X \rightarrow S$ de X .

Es claro que tal cota existe para X superficie con $\kappa(X) = 2$, pues en tal caso el modelo minimal es único. Esto también es verdad para $X = \mathbb{P}^2$, o para el blow-up de \mathbb{P}^2 en uno o dos puntos, pues hay una cantidad finita de modelos minimales. No obstante, el siguiente lema muestra que esto *no* es verdad en general: una superficie racional puede tener una cantidad infinita de modelos minimales, en la que $|\pi(C) \cdot K_S|$ se va a infinito.

Lema 51 ([RU19, 2.20]). *Sea $g: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ una fibración elíptica racional con infinitas (-1) curvas⁴². Fijemos una sección D de Z . Luego, existen secciones Γ_i de Z , y contracciones $\sigma_i: Z \rightarrow \mathbb{P}^2$ de Γ_i , tales que $\Gamma_i \cdot D$ tiende a infinito.*

En particular, se tiene que $\deg_{\mathbb{P}^2} \sigma_i(D)$ tiende a infinito cuando $i \rightarrow \infty$, al igual que $|\sigma_i(D) \cdot K_{\mathbb{P}^2}|$.

Para la demostración necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 52 ([KM98, 2.61], cf. [Laz04, 2.2.7]). *Sea B un divisor big en Z . Luego, existe un divisor amplio A , un divisor efectivo N , y un entero $k > 0$ tales que $kB \equiv kA + N$.*

⁴⁰Esto ocurre si hacemos blow-ups en puntos infinitamente cercanos.

⁴¹Utilizando que si $[b_1, \dots, b_r]$ es una T-singularidad, entonces $\sum_i b_i = 3r + 2 - d$.

⁴²Por la Observación 48, esto es lo mismo que tener infinitas secciones.

Demostración. (del Lema 51) Sea F una fibra de g , y consideremos el divisor $B = F + D$. Notemos que $B^2 = 1$, $B.F = 1$ y $B.D = 0$. Ahora bien, el grupo de Picard de Z está generado por F y D . Así, es directo verificar que B es big y nef en Z . De este modo, el Lema 52 garantiza que existen A , N y k (como en el lema) tales que $kB \equiv kA + N$.

Fijemos una constante $C > 0$, y consideremos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in \overline{NE}(Z) : x.A \leq C\}.$$

Tenemos que \mathcal{C} es compacto, pues A es amplio. En particular, \mathcal{C} contiene una cantidad finita de curvas salvo equivalencia numérica. Ahora bien, como dos curvas (-1) distintas no son equivalentes numéricamente⁴³, resulta que existe una secuencia Γ_i de curvas (-1) tales que $\Gamma_i.A \rightarrow \infty$. Descartando finitas de ellas, podemos asumir que ninguna aparece en el soporte de N .

Ahora, podemos calcular

$$\begin{aligned} \Gamma_i.A &= \Gamma_i.\left(F + D - \frac{N}{k}\right) \\ &= 1 + \Gamma_i.D - \frac{\Gamma_i.N}{k} \\ &\leq 1 + \Gamma_i.D, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad usa que N es efectivo y Γ_i no aparece en el soporte. De este modo, obtenemos que $\Gamma_i.D$ tiende a infinito, probando la primera parte.

Para probar la existencia de σ_i , comencemos considerando la contracción $Z \rightarrow Z_i$ de la curva Γ_i . Notemos que $\rho_{Z_i} = 9$, y así Z_i no es minimal, gracias a la clasificación de superficies racionales minimales. De este modo, debemos seguir contrayendo curvas para llegar a un modelo minimal. Escojamos un modelo arbitrario, digamos $\tilde{\sigma}_i: Z \rightarrow \tilde{S}_i$. Mostraremos que, quizá deshaciendo alguna de las contracciones realizadas, es posible llegar a \mathbb{P}^2 .

Si \tilde{S}_i es \mathbb{P}^2 , terminamos inmediatamente. En caso contrario, $\tilde{S}_i = \mathbb{F}_n$ para algún $n \geq 0$, distinto de 1 (pues \mathbb{F}_1 no es minimal).

- Si $n = 0$, entonces $\tilde{\sigma}_i$ se factoriza como

$$\tilde{\sigma}_i: Z \rightarrow Z_i \rightarrow \text{Bl}_p \mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{F}_0$$

para algún punto $p \in \mathbb{F}_0$. Ahora, tenemos que $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, y así $\text{Bl}_p \mathbb{F}_0$ es isomorfo al blow-up de \mathbb{P}^2 en dos puntos. Tomamos así σ_i como la composición

$$\sigma_i: Z \rightarrow Z_i \rightarrow \text{Bl}_p \mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

respectiva.

- Si $n = 2$, llamemos $C \subseteq \mathbb{F}_2$ a la (única) curva negativa de \mathbb{F}_2 . Como antes, tenemos que $\tilde{\sigma}_i$ factoriza como

$$\tilde{\sigma}_i: Z \rightarrow Z_i \rightarrow \text{Bl}_p \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2.$$

Supongamos que $p \notin C$; el otro caso lo trataremos en el siguiente punto.

Como $p \notin C$, la transformada estricta de C en $\text{Bl}_p \mathbb{F}_2$ sigue teniendo autointersección -2 . De este modo, podemos contraer la transformada estricta de la fibra de \mathbb{F}_2 que pasa por p , y con ello C^2 aumenta en 1. Esto corresponde a haber hecho una transformación elemental en \mathbb{F}_2 ; el punto clave es

⁴³Si C_1 y C_2 son curvas (-1) distintas, entonces $C_1.C_2 \geq 0$, pero $C_1.C_1 = -1$.

que estamos haciendo la transformación usando una curva negativa que ya estaba en Z . Obtenemos así la superficie \mathbb{F}_1 , y podemos tomar

$$\sigma_i: Z \rightarrow Z_i \rightarrow \mathrm{Bl}_p \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

como el modelo minimal pedido.

- Si $n = 2$ y $p \in C$ (usando la notación del problema anterior), tenemos que la transformada estricta de C en $\mathrm{Bl}_p \mathbb{F}_2$ tiene autointersección -3 . De este modo, la transformada estricta de C en Z tiene autointersección menor o igual a -3 .

Ahora bien, como Z es una fibración elíptica, tenemos que las únicas curvas negativas que aparecen son curvas (-1) o (-2) . De este modo, tal C no puede existir, y obtenemos una contradicción.

- Si $n \geq 3$, obtenemos una contradicción de la misma manera que en el caso anterior, pues la transformada estricta de C en Z tiene autointersección menor o igual a $-n \leq -3$.

Por último, basta notar que la curva D no es contraída por tal σ_i , pues tiene un punto de multiplicidad $\Gamma_i.D$. En particular, su imagen en \mathbb{P}^2 tiene grado mayor o igual a $\Gamma_i.D$, y con ello tiende a infinito. \square

Como consecuencia directa del lema, resulta que $|\pi(D).K_S|$ es arbitrariamente grande, y en particular no puede ser acotado solo en términos de X y D .

7.3. Resultados relacionados. Para finalizar, mencionaremos brevemente algunos teoremas relacionadas al programa de Sarkisov, que pueden ser útiles para abordar el problema de acotamiento. Para comenzar, el siguiente resultado clásico puede ser demostrado como una consecuencia del programa.

Teorema 53 (Noether–Castelnuovo). *Sea $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ un mapeo birracional. Luego, f puede escribirse como composición de isomorfismos y de transformaciones de Cremona.*

Para nuestro problema, es útil mencionar que no podemos llegar y componer $S = \mathbb{P}^2$ con otro modelo birracional S' , pues queremos que $W \rightarrow S'$ sea un morfismo regular. Informalmente, solo permitimos reemplazos $S \dashrightarrow S'$ dominados por W .

Otra pregunta clásica involucra estudiar sistemas lineales en \mathbb{P}^2 . Acá, recordamos que un sistema lineal \mathcal{L} en \mathbb{P}^2 es un subespacio vectorial de $|\mathcal{O}_X(d)|$ para algún d .

Definición 54. Dado d natural, y dados $m_1 \geq \dots \geq m_s$, decimos que un sistema lineal \mathcal{L} en \mathbb{P}^2 es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(d; m_1, \dots, m_s)$$

si cumple lo siguiente. Primero, \mathcal{L} es un sistema de grado d (esto es, $\mathcal{L} \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$). Segundo, el sistema tiene s puntos base, de multiplicidades m_1, \dots, m_s respectivamente.

Observación 55. Los puntos base pueden ser infinitamente cercanos. Por ejemplo, si $p \in \mathbb{P}^2$ y $q \in \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2$ está en la fibra sobre p , tenemos que q es un punto base si los elementos de \mathcal{L} pasan por p , con tangente determinada por q .

Ejemplo 56. El sistema lineal

$$\mathcal{L} = \{axy + byz + czx : a, b, c \in \mathbb{C}\} \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|$$

es un $\mathcal{L}(2; 1, 1, 1)$. Este sistema apareció al estudiar la transformación de Cremona en el Ejemplo 21.

De hecho, si $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ es la transformación de Cremona estándar, tenemos que $f^{-1}|\mathcal{O}_X(1)| = \mathcal{L}$. De este modo, vía la transformación de Cremona podemos cambiar \mathcal{L} por el sistema $|\mathcal{O}_X(1)|$, de menor grado.

El ejemplo anterior abre una pregunta interesante: ¿es posible bajar el grado de \mathcal{L} usando transformaciones de Cremona? Es claro que en general no es posible; por ejemplo, para $|\mathcal{O}_X(d)|$, un tema de dimensión muestra que no es posible bajar su grado. El siguiente resultado de Jung da una condición para que \mathcal{L} tenga grado minimal.

Teorema 57 (Jung, 1988). *Sea*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(d; m_1, \dots, m_s)$$

un sistema lineal en \mathbb{P}^2 . Si $d \geq m_1 + m_2 + m_3$, entonces el grado de \mathcal{L} es minimal con respecto a transformaciones de Cremona.

Para finalizar, consideremos el siguiente ejemplo. Afirmamos que existe una superficie X , obtenida por el blow-up de \mathbb{P}^2 en 13 puntos, tal que existe una configuración de 14 curvas como en la Figura 19. En dicha figura hemos llamado Γ a una curva de autointersección -8 , y las otras 13 son las curvas excepcionales de los blow-up. La existencia de dicha superficie puede verificarse a partir de MMP.

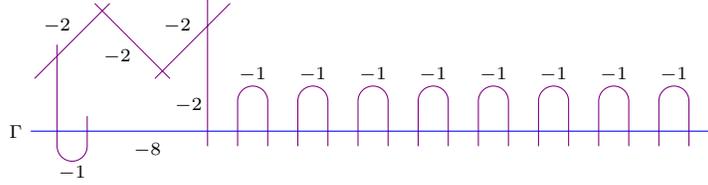


FIGURA 19. La superficie X y 14 curvas.

Al contraer todas las curvas excepcionales, obtenemos un morfismo $\pi: X \rightarrow S = \mathbb{P}^2$, de modo que la imagen de Γ es una curva de grado siete⁴⁴.

La curva $\pi(\Gamma) =: \Gamma_S$ tiene varios puntos singulares. De hecho, es directo verificar que Γ_S induce un sistema

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(7; 3, \underbrace{2, \dots, 2}_{12}),$$

que verificamos rápidamente al comparar cada curva excepcional dibujada. De este modo, el sistema \mathcal{L} así obtenido satisface la cota del Teorema 57.

Por otro lado, en la Figura 19 podemos contraer la curva Γ junto con las cuatro curvas de autointersección -2 . Esto produce un morfismo $\phi: X \rightarrow W$, donde W es una superficie con un único punto singular, correspondiente a $[8, 2, 2, 2, 2]$. Esto es una singularidad de Wahl con $r = 5$ y $d = 1$.

Podemos entonces comparar la cota del Teorema 50 en este escenario. La superficie W es de hecho una superficie de Godeaux, con $K_W^2 = 1$ y $\pi_1(W) = \{e\}$. Por último, en esta situación no tenemos *long diagonals*. Así, nuestra cota predice

$$5 - 1 \leq 2(1 - 9) - 7 \cdot (-3),$$

⁴⁴Por ejemplo, tenemos que si E es una (-1) curva que corta a Γ en m puntos, entonces al contraerla la autointersección de Γ aumenta en m^2 . De este modo, la autointersección de la imagen de Γ es $-8 + 3^2 + 12 \cdot 2^2 = 49$

o $4 \leq 5$. La cota resulta no ser óptima, pero es bastante cercana a serlo.

Veamos ahora con más cuidado la curva Γ_S . Ella tiene nueve puntos singulares (clásicos) en \mathbb{P}^2 . Ocho de ellos son nodos, inducidos por las curvas (-1) que solo cortan a Γ en la Figura 19. El noveno también es un punto doble, pero en que las dos direcciones tangentes coinciden.

Prestemos atención a los ocho nodos de Γ_S . Podemos tomar tres de ellos y realizar una transformación de Cremona respecto a esos tres puntos. Esto produce una curva de grado 8, con cinco nodos y tres puntos de multiplicidad 3. Repetimos este procedimiento realizando transformaciones de Cremona en distintos puntos. Hemos registrado el resultado de estas operaciones en la Tabla 1.

Cremona realizada	Grado	Puntos múltiples						
		2	3	4	5	6	7	8
Inicial	7	8	0	0	0	0	0	0
Tres 2	8	5	3	0	0	0	0	0
Una 3 , dos 2	9	3	4	1	0	0	0	0
Dos 3 , una 2	10	2	3	3	0	0	0	0
Una 4 , una 3 , una 2	11	1	3	3	1	0	0	0
Una 5 , una 3 , una 2	12	0	3	4	0	1	0	0
Dos 3 , una 4	14	0	1	3	2	2	0	0
Una 5 , una 4	15	0	1	1	3	3	0	0
Una 4 , una 5	16	0	1	0	2	5	0	0
Una 3 , una 6	17	0	0	1	2	3	2	0
Dos 6 , una 4	18	0	0	0	3	1	4	0
Dos 5 , una 6	20	0	0	0	1	0	6	1
Dos 7 , una 5	21	0	0	0	0	1	4	3
Dos 7 , una 6	22	0	0	0	0	0	3	5
Tres 7	23	0	0	0	0	0	0	8

TABLA 1. Curva Γ_S y transformaciones de Cremona.

REFERENCIAS

- [Ale94] Valery Alexeev, *Boundedness and K^2 for log surfaces*, Internat. J. Math. **5** (1994), no. 6, 779–810, DOI 10.1142/S0129167X94000395. MR1298994
- [AM04] Valery Alexeev and Shigefumi Mori, *Bounding singular surfaces of general type*, Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, IN, 2000), Springer, Berlin, 2004, pp. 143–174. MR2037085
- [Bea96] Arnaud Beauville, *Complex algebraic surfaces*, 2nd ed., London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. MR1406314
- [BM97] Andrea Bruno and Kenji Matsuki, *Log Sarkisov program*, Internat. J. Math. **8** (1997), no. 4, 451–494, DOI 10.1142/S0129167X97000238. MR1460896
- [Che05] I. A. Chel'tsov, *Birationally rigid Fano varieties*, Uspekhi Mat. Nauk **60** (2005), no. 5(365), 71–160, DOI 10.1070/RM2005v060n05ABEH003736 (Russian, with Russian summary); English transl., Russian Math. Surveys **60** (2005), no. 5, 875–965. MR2195677
- [Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR0463157

- [Isk04] Vasilij A. Iskovskikh, *On the Noether-Fano inequalities*, The Fano Conference, Univ. Torino, Turin, 2004, pp. 25–35. MR2112565
- [Kol19] János Kollár, *The rigidity theorem of Fano-Segre-Iskovskikh-Manin-Pukhlikov-Corti-Cheltsov-de Fernex-Ein-Mustață-Zhuang*, Birational geometry of hypersurfaces, Lect. Notes Unione Mat. Ital., vol. 26, Springer, Cham, 2019, pp. 129–164, DOI 10.1007/978-3-030-18638-8_4. MR4401011
- [KM98] János Kollár and Shigefumi Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti; Translated from the 1998 Japanese original. MR1658959
- [KSB88] J. Kollár and N. I. Shepherd-Barron, *Threefolds and deformations of surface singularities*, Invent. Math. **91** (1988), no. 2, 299–338, DOI 10.1007/BF01389370. MR0922803
- [Laz04] Robert Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series. MR2095471
- [Mat02] Kenji Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002. MR1875410
- [RU19] Julie Rana and Giancarlo Urzúa, *Optimal bounds for T -singularities in stable surfaces*, Adv. Math. **345** (2019), 814–844, DOI 10.1016/j.aim.2019.01.029. MR3901675

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, COLUMBIA UNIVERSITY, 2990 BROADWAY, NEW YORK, NY 10027, USA

Email address: nivilches@math.columbia.edu