Интегралы Барнса–Исмагилова и гипергеометрические функции комплексного поля

Molchanov, V.F., Neretin, Yu. A. *A pair of commuting hypergeometric operators on the complex plane and bispectrality.* J. Spectr. Theory 11 (2021).

Neretin, Yu. A. *An analog of the Dougall formula and of the de Branges–Wilson integral.*Ramanujan J.54 (2021).

Neretin, Yu. A. *Barnes–Ismagilov integrals and hypergeometric functions of the complex field.* SIGMA 16(2020).

Источник - предсталения $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_0(1,3)$ (группы Лоренца) и связанный с ней гармонический анализ.

Если уйти от риманова симметрического пространства

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{SO}_0(1,3)/\mathrm{SO}(3)$$

то они лезут из всех щелей как схема Аски-Вильсона из представлений $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Но с некоторыми мучениями на уровне аналитических обоснований.

Двойная степень комплексного числа

$$z^{a|a'} := z^a\,\overline{z}^{a'} := (z/\overline{z})^{(a-a')/2}|z|^{(a+a')/2}.$$

здесь z, a, $a' \in \mathbb{C}$, $a - a' \in \mathbb{Z}$.

Это гомоморфизм мультипликативной группы комплексного поля $\mathbb{C}^\times$ в себя.

$$a|a' = \frac{k+\sigma}{2}\bigg|\frac{-k+\sigma}{2}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in \mathbb{C}$

Если $\sigma \in \mathbb{R}$, то это гомоморфизм в единичную окружность.

$$z^{a|a'} := z^a \overline{z}^{\,a'} := (z/\overline{z})^{(a-a')/2} |z|^{(a+a')/2}.$$

Гамма-функция

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, "Гипергеометрические функции над произвольным полем", УМН, 59 (2004)

Гамма-функция комплексного поля.

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mathbb{C}}\bigl(a\big|a'\bigr) &:= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} t^{a-1|a'-1} e^{2i\,\mathrm{Im}\,t}\, d\,\mathrm{Re}\,t\, d\,\mathrm{Im}\,t = \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{|t|\leqslant r} t^{a-1|a'-1} e^{2i\,\mathrm{Im}\,t}\, d\,\mathrm{Re}\,t\, d\,\mathrm{Im}\,t = \\ &= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-a')} = \frac{(-1)^{a-a'}\Gamma(a')}{\Gamma(1-a)} = \\ &= \frac{1}{\pi}\Gamma(a)\Gamma(a')\sin\pi a' = \frac{(-1)^{a-a'}}{\pi}\Gamma(a)\Gamma(a')\sin\pi a.\end{aligned}$$

Интеграл сходится условно при $0 < \mathrm{Re}(a+a') < 2$

$$z^{a|a'} := z^a \overline{z}^{a'} := (z/\overline{z})^{(a-a')/2} |z|^{(a+a')/2}.$$

Бета-функция

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Бета-функция комплексного поля

$$\mathrm{B}^{\mathbb{C}}(\alpha|\alpha', \beta|\beta') := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} t^{\alpha-1|\alpha'-1} (1-t)^{\beta-1|\beta'-1}\, d\,\mathrm{Re}\, t\, d\,\mathrm{Im}\, t = \\ = \frac{\Gamma^{\mathbb{C}}(\alpha|\alpha')\Gamma^{\mathbb{C}}(\beta|\beta')}{\Gamma^{\mathbb{C}}(\alpha+\beta|\alpha'+\beta')}$$

Есть область абсолютной сходимости.

$$
{}_2F_1^{\mathbb{C}}\left[\begin{matrix} a|a', a|a' \\ a|a' \end{matrix};z\right] := \frac{\Gamma^{\mathbb{C}}(b|b')}{\Gamma^{\mathbb{C}}(b|b')\,\Gamma^{\mathbb{C}}(c-b|c'-b')}\times
$$

$$
\times \int_{\mathbb{C}} t^{b-1|b'-1}(1-t)^{c-b-1|c'-b'-1}(1-zt)^{-a|-a'}\,d\,\mathrm{Re}\,t\,d\,\mathrm{Im}\,t.
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1^{\mathbb{C}}\left[\begin{matrix} a|a', b|b' \\ c|c' \end{matrix}\,;z\right] = {}_2F_1^{\mathbb{C}}\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\,;z\right] {}_2F_1^{\mathbb{C}}\left[\begin{matrix} a', b' \\ c' \end{matrix}\,;\overline{z}\right] + \\
+\left\{\begin{matrix}\text{product of}\\ \Gamma\text{-functions}\end{matrix}\right\}\times \\
\times z^{1-c|1-c'}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} a+1-c, b+1-c \\ 2-c \end{matrix}\,;z\right] {}_2F_1\left[\begin{matrix} a'+1-c', b'+1-c' \\ 2-c' \end{matrix}\,;\overline{z}\right].
\end{aligned}
$$

$$
{}_p\mathcal{K}_q^{\mathbb{C}}\left[\begin{array}{c}(a|a')\\(b|b')\end{array};\frac{k+\sigma}{2}\right]:=
$$

$$
:=\prod_{\alpha=1}^{q}\Gamma^{\mathbb{C}}\Big(a_\alpha+\tfrac{k+\sigma}{2}\Big|a'_\alpha+\tfrac{-k+\sigma}{2}\Big)\prod_{\beta=1}^{p}\Gamma^{\mathbb{C}}\Big(b_\beta+\tfrac{-k-\sigma}{2}\Big|b'_\beta+\tfrac{k-\sigma}{2}\Big).
$$

$$
{}_p\mathcal{K}_q^{\mathbb{C}}\left[\begin{array}{c}(a|a')\\(b|b')\end{array};\frac{k+\sigma}{2}\right]:=
$$

$$
:=\prod_{\alpha=1}^{q}\Gamma^{\mathbb{C}}\Big(a_\alpha+\tfrac{k+\sigma}{2}\Big|a'_\alpha+\tfrac{-k+\sigma}{2}\Big)\prod_{\beta=1}^{p}\Gamma^{\mathbb{C}}\Big(b_\beta+\tfrac{-k-\sigma}{2}\Big|b'_\beta+\tfrac{k-\sigma}{2}\Big).
$$

Обратное преобразование Меллина

$$
{}_pG_q^{\mathbb{C}}\left[\begin{array}{c}(a|a')\\(b|b')\end{array};z\right]:=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{i\mathbb{R}}{}_p\mathcal{K}_q^{\mathbb{C}}\left[\begin{array}{c}(a|a')\\(b|b')\end{array};\tfrac{k+\sigma}{2}\right]z^{\frac{-k-\sigma}{2}\Big|\frac{k-\sigma}{2}}\,d\sigma.
$$

Это буквально аналог функции Мейера (не совсем ${}_pF_q$).

$$\Sigma_+^{\mathbb{C}}\left[\begin{array}{c}(a|a')\\(b|b')\end{array};z\right]:=$$

$$:=2\sum_{j=1}^{q} z^{a_j|a'_j}\cdot\prod_{\beta}\Gamma^{\mathbb{C}}\big(b_\alpha+a_j\big|b'_\alpha+a'_j\big)\cdot\prod_{\alpha\neq j}\Gamma^{\mathbb{C}}\big(a_\alpha-a_j\big|a'_\alpha-a'_j\big)\times$$

$$\times\,{}_pF_{q-1}\left[\begin{array}{c}(b_\alpha+a_j)\\(1-a_\alpha+a_j)_{\setminus j}\end{array};(-1)^q z\right]\times$$

$$\times\,{}_pF_{q-1}\left[\begin{array}{c}(b'_\alpha+a'_j)\\(1-a'_\alpha+a'_j)_{\setminus j}\end{array};(-1)^p\overline{z}\right].$$

Функция ${}_pG_q^{\mathbb{C}}\left[\begin{array}{c}(a|a')\\(b|b')\end{array};z\right]$ равна Σ_+:

– если $p<q$ и G аналитична на всей плоскости

– или если $p=q$, $|z|<1$ (и есть особенность в $z=1$)

Можно поменять p с q и $z\mapsto z^{-1}$. Тогда покрываются случаи:

– $p>q$

– $p=q+|z|>1$.

В случае $p=q$ функция аналитична на $\mathbb{C}\setminus 1$

Функция $F =_p G_q^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} (a|a') \\ (b|b') \end{matrix} ; z \right]$ удовлетворяет системе уравнений

$$\mathcal{D}F = 0, \qquad \overline{\mathcal{D}}F = 0,$$

$$\mathcal{D} := (-1)^q \prod_{\alpha=1}^{p} \Big(z \frac{\partial}{\partial z} + a_\alpha \Big) - z \prod_{\beta=1}^{q} \Big(z \frac{\partial}{\partial z} - b_\beta \Big);$$

$$\overline{\mathcal{D}} := (-1)^p \prod_{\alpha=1}^{p} \Big(\overline{z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} + a'_\alpha \Big) - \overline{z} \prod_{\beta=1}^{q} \Big(\overline{z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} - b'_\beta \Big).$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} {}_pG_q^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} (a|a') \\ (b|b') \end{matrix} ; z \right] \cdot {}_rG_s^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} (c|c') \\ (d|d') \end{matrix} ; \frac{t}{z} \right] \frac{d \operatorname{Re} z \, d \operatorname{Im} z}{z^{1|1}} = \\ = {}_{p+r}G_{q+s}^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} (a|a'), (c|c') \\ (b|b'), (d|d') \end{matrix} ; t \right].$$

Для (почти) любого гипергеометрического тождества (дифференциально-разностное уравнение, определенный интеграл, интегральное преобразование) есть двойник с функциями ${}_pG_q^{\mathbb{C}}$

У разных тождеств может быть один двойник.

Берем Бейтмена или Андрюса-Аски-Роя

Пример с бета-интегралами.
Интеграл де Бранжа–Вильсона (1972 без доказательства, 1980)

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\prod_{\alpha=1}^{4}\Gamma(a_\alpha+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2 ds=\frac{\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant 4}\Gamma(a_\alpha+a_\beta)}{\Gamma(a_1+a_2+a_3+a_4)}.$$

Классический интеграл де Бранжа–Вильсона

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\prod_{\alpha=1}^{4}\Gamma(a_\alpha+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2 ds=\frac{\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant 4}\Gamma(a_\alpha+a_\beta)}{\Gamma(a_1+a_2+a_3+a_4)}.$$

Его другой классический близнец – Формула Дуголла (Бейли, 1936)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k+\theta}{\prod_{\alpha=1}^{4}\Gamma(b_\alpha+\theta+k)\Gamma(b_\alpha-\theta-k)}=$$

$$=\frac{\sin 2\pi\theta}{2\pi}\,\frac{\Gamma(b_1+b_2+b_3+b_4-3)}{\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant 4}\Gamma(b_\alpha+b_\beta-1)}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|(k+is)\prod_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\mathbb{C}}\Big(a_\alpha+\tfrac{k+is}{2}\Big|a_\alpha+\tfrac{-k+is}{2}\Big)\right|^2 ds =$$

$$= \frac{\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant 4}\Gamma^{\mathbb{C}}(a_\alpha+a_\beta|a_\alpha+a_\beta)}{\Gamma^{\mathbb{C}}\big(a_1+a_2+a_3+a_4\big|a_1+a_2+a_3+a_4\big)}.$$

Там больше параметров
(Саркисян, Спиридонов)
вырождение с эллиптических бета-интегралов

Известно много многомерных бета интегралов имени комплексного поля (Доценко-Фатеев; Аомото; Бажанов, Мангазеев, Сергеев; Деркачев, Манашов, Валиневич; ЮН)

Самый старый Доценко-Фатеев (1985 без доказательства) и Аомото (1987)

$$\int\limits_{[0,1]^n} \prod_{j=1}^{n} z_j^{\sigma-1}(1-z_j)^{\tau-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (z_i - z_j)^{2\theta} \prod_{j=1}^{n} dz_j =$$

$$= n! \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\sigma+(j-1)\theta)\,\Gamma(\tau+(j-1)\theta)\,\Gamma(j\theta)}{\Gamma(\sigma+\tau+(n+j-2)\theta)\,\Gamma(\theta)}.$$

$$\int_{[0,1]^n} \prod_{j=1}^n z_j^{\sigma-1}(1-z_j)^{\tau-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (z_i-z_j)^{2\theta} \prod_{j=1}^n dz_j =$$

$$= n! \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma+(j-1)\theta)\,\Gamma(\tau+(j-1)\theta)\,\Gamma(j\theta)}{\Gamma(\sigma+\tau+(n+j-2)\theta)\,\Gamma(\theta)}.$$

Доценко-Фатеев (1985)

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma|\sigma', \qquad \boldsymbol{\tau} := \tau|\tau', \qquad \boldsymbol{\theta} = \theta|\theta', \qquad \mathbf{1} = 1|1$$

$$\int_{\mathbb{C}^n} \prod_{j=1}^n z_j^{\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{1}}(1-z_j)^{\boldsymbol{\tau}-\mathbf{1}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (z_i-z_j)^{2\boldsymbol{\theta}} \prod_{j=1}^n d\,\mathrm{Re}\,z_j\,d\,\mathrm{Im}\,z_j =$$

$$= (-1)^{\boldsymbol{\theta}\cdot n(n-1)/2} n!\,\pi^n \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\sigma}+(j-1)\boldsymbol{\theta})\,\Gamma^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\tau}+(j-1)\boldsymbol{\theta})\,\Gamma^{\mathbb{C}}(j\boldsymbol{\theta})}{\Gamma^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau}+(n+j-2)\boldsymbol{\theta})\,\Gamma^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\theta})}.$$

(тут дополнительные целые параметры по сравнению с 1985г.)

Есть ли гипергеометрические функции комплексного поля нескольких переменных?

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1^{\mathbb{C}}\left[\begin{matrix} a|a', b|b' \\ c|c' \end{matrix}; z\right] &= {}_2F_1^{\mathbb{C}}\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right] {}_2F_1^{\mathbb{C}}\left[\begin{matrix} a', b' \\ c' \end{matrix}; \overline{z}\right] + \qquad (??) \\
&+ \begin{Bmatrix} \text{product of} \\ \Gamma\text{-functions} \end{Bmatrix} z^{1-c|1-c'} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a+1-c, b+1-c \\ 2-c \end{matrix}; z\right] {}_2F_1\left[\begin{matrix} a'+1-c', b'+1-c' \\ 2-c' \end{matrix}; \overline{z}\right].
\end{aligned}
$$