ЧТО ТАКОЕ "АБСОЛЮТ" И ПОЧЕМУ ОН НУЖЕН

ANATOLII M. VERSHIK (ST. PETERSBURG DEPT. OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES, DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES OF ST.PETERSBURG UNIVERSITY, MOSCOW INSTITUTE OF THE PROBLEMS OF TRANSMISSION INFORMATION)

3 февраля 2024 г.

КОНФЕРЕНЦИЯ, ПОСВЯЩЕННАЯ 75-ЛЕТИЮ Г.И.ОЛЬШАНСКОГО. МОСКВА - СПб, 3 ФЕВРАЛЯ 2024 г. ZOOM

PLAN

1.Определения абсолюта; сравнения с другими понятиями границ.

PLAN

1.Определения абсолюта; сравнения с другими понятиями границ.
2. Первые примеры. Свободная группа. Группа Гейзенберга.

PLAN

1.Определения абсолюта; сравнения с другими понятиями границ.
2. Первые примеры. Свободная группа. Группа Гейзенберга.
3.Абсолют дистрибутивных решеток и эргодический метод.

PLAN

1.Определения абсолюта; сравнения с другими понятиями границ.
2. Первые примеры. Свободная группа. Группа Гейзенберга.
3.Абсолют дистрибутивных решеток и эргодический метод.
4.Основной пример, граф Юнга. Меры типа Планшереля.

PLAN

1.Определения абсолюта; сравнения с другими понятиями границ.
2. Первые примеры. Свободная группа. Группа Гейзенберга.
3.Абсолют дистрибутивных решеток и эргодический метод.
4.Основной пример, граф Юнга. Меры типа Планшереля.
5.Марковость и бернуллиевость. Накрытие. RSK и кодирование с запаздыванием.

PLAN

1.Определения абсолюта; сравнения с другими понятиями границ.
2. Первые примеры. Свободная группа. Группа Гейзенберга.
3.Абсолют дистрибутивных решеток и эргодический метод.
4.Основной пример, граф Юнга. Меры типа Планшереля.
5.Марковость и бернуллиевость. Накрытие. RSK и кодирование с запаздыванием.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

ДАНО борелевское или топологическое пространтво X, в котором задана борелевская фильтрация $\{\xi_n\}_{n\in N}$ — иначе говоря, убывающая последовательность борелевски измеримых разбиений, на элементах (счётных) которого заданы (условные) сигма-конечными неотрицательные меры (коцикл).

Основной пример Пусть X есть пространство бесконечных (односторонних) слов $\{a_n\}_{n\in N}$,
а $\{\xi_n\}$ есть последовательность *хвостовых разбиений*, в частности, X— пространство путей градуированного графа или марковское пространство, с хвостовой фильтрацией и "копереходными вероятностями"на "хвостах т.е. коцикл: $\beta(x,y)=\frac{\mu(x)}{\mu(y)}$.

АБСОЛЮТ

АБСОЛЮТ

Definition

АБСОЛЮТ ПАРЫ (ПРОСТРАНСТВО, ФИЛЬТРАЦИЯ) — $\{X, \{\xi_n\}\}$ ЕСТЬ МНОЖЕСТВО ВСЕХ НЕРАЗЛОЖИМЫХ, БОРЕЛЕВСКИХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА X, СИСТЕМА УСЛОВНЫХ МЕР НА СЛОЯХ ХВОСТОВОГО РАЗБИЕНИЯ КОТОРЫХ, СОВПАДАЕТ С СИСТЕМОЙ УСЛОВНЫХ МЕР ЗАДАННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ.

КОММЕНТАРИИ

КОММЕНТАРИИ

1. Наиболее интересен случай, когда а условные меры — равномерны; в этом случае меры, называются "центральными мерами"; в этом случае коцикл $\beta(x, y) = 1$. Если фильтрация есть траекторное разбиение счетной группы, то центральные меры есть эргодические меры инвариантные относительно действия группы. Тем самым задача описания абсолюта включает задачу описания мер. инваринтных относительно группы.

КОММЕНТАРИИ

1. Наиболее интересен случай, когда а условные меры — равномерны; в этом случае меры, называются "центральными мерами"; в этом случае коцикл $\beta(x, y) = 1$. Если фильтрация есть траекторное разбиение счетной группы, то центральные меры есть эргодические меры инвариантные относительно действия группы. Тем самым задача описания абсолюта включает задачу описания мер. инваринтных относительно группы.
Пример конкретного свЕ'дение задачи описания инвариантных мер для произвольного действия группы Z к задаче об абсолюте графа — конструкции адического сдвига (преобразования пространтва путей диаграммы Браттели).

КОММЕНТАРИИ

1. Наиболее интересен случай, когда а условные меры — равномерны; в этом случае меры, называются "центральными мерами"; в этом случае коцикл $\beta(x, y) = 1$. Если фильтрация есть траекторное разбиение счетной группы, то центральные меры есть эргодические меры инвариантные относительно действия группы. Тем самым задача описания абсолюта включает задачу описания мер. инваринтных относительно группы.

Пример конкретного свЕ'дение задачи описания инвариантных мер для произвольного действия группы Z к задаче об абсолюте графа — конструкции адического сдвига (преобразования пространтва путей диаграммы Браттели).

2.Неразложимость меры равносильна эргодичности действия группы (полугрупп), если фильтрация порождена действием группы (полугруппой), но не всегда сводится к эргодичности в общем случае, поскольку не всякая фильтрация является траекторной.

ОТЛИЧИЯ АБСОЛЮТА

ОТЛИЧИЯ АБСОЛЮТА

3.Определение абсолюта не совпадает с определением —- границ Пуассона-Фюрстенберга, границ -вход -выход, поскольку эти границы есть в отличие от абсолюта границы пространств с мерой и несут каноническую (гармоническую) меру; на абсолюте нет канонической меры;

ОТЛИЧИЯ АБСОЛЮТА

3.Определение абсолюта не совпадает с определением
—- границ Пуассона-Фюрстенберга, границ -вход -выход, поскольку эти границы есть в отличие от абсолюта границы пространств с мерой и несут каноническую (гармоническую) меру; на абсолюте нет канонической меры;
—- границы Мартина, — так как меры опредляются не по переходным, как граница Мартина, а по копереходным вероятностям. — абсолют есть часть гр. Мартина, иногда они совпадают.

ПРИМЕРЫ

ПРИМЕРЫ

а) Теорема Дефинетти (центральные меры графв Паскаля).
АБСОЛЮТ —$[0, 1]$

ПРИМЕРЫ

а) Теорема Дефинетти (центральные меры графв Паскаля). АБСОЛЮТ —$[0, 1]$

б)Граф Юнга двустрочечных таблиц (граф "полу-Паскаля") $[1/2, 1]$.

ПРИМЕРЫ

а) Теорема Дефинетти (центральные меры графв Паскаля).
АБСОЛЮТ —$[0,1]$
б)Граф Юнга двустрочечных таблиц (граф "полу-Паскаля")
$[1/2,1]$.
в) Свободная группа (Вершик-Малютин — 2015)

ПРИМЕРЫ

а) Теорема Дефинетти (центральные меры графв Паскаля). АБСОЛЮТ —$[0, 1]$
б)Граф Юнга двустрочечных таблиц (граф "полу-Паскаля") $[1/2, 1]$.
в) Свободная группа (Вершик-Малютин — 2015)

Theorem

Абсолют есть произведение отрезка $(1/2, 1]$ на границу Пуассона-Фюрстенберга. Точнее, всякая неразложимая центральна мера с теми же условными вероятностями, что и у лапласиана, однозначно опредляется точкой границы ПФ, к которой она сходится и скоростью сходимости, которая подчинена единой оценке снизу. (при меньшей скорости теряется неразложимость).гр

ПРИМЕРЫ

а) Теорема Дефинетти (центральные меры графв Паскаля).
АБСОЛЮТ —$[0, 1]$
б)Граф Юнга двустрочечных таблиц (граф "полу-Паскаля")
$[1/2, 1]$.
в) Свободная группа (Вершик-Малютин — 2015)

Theorem

Абсолют есть произведение отрезка $(1/2, 1]$ *на границу Пуассона-Фюрстенберга. Точнее, всякая неразложимая центральна мера с теми же условными вероятностями, что и у лапласиана, однозначно опредляется точкой границы ПФ, к которой она сходится и скоростью сходимости, которая подчинена единой оценке снизу. (при меньшей скорости теряется неразложимость).гр*

Для многих групп абсолют так же является расслоением нал границы ПФ слои которого есть скорости фвижения к границе, во всяком случае, видимо, это так для тех групп, у которых граница ПФ нетривиальна.

Группа Гейзенберга

Группа Гейзенберга

Но вот для нильпотентных групп ситуация иная, например, для группы Гейзенберга. — граница ПФ тривиальна, а абсолют -нет.

Группа Гейзенберга

Но вот для нильпотентных групп ситуация иная, например, для группы Гейзенберга. — граница ПФ тривиальна, а абсолют -нет. г)Группа Гейзенберга (В.& Малютин 2023)

Группа Гейзенберга

Но вот для нильпотентных групп ситуация иная, например, для группы Гейзенберга. — граница ПФ тривиальна, а абсолют -нет. г)Группа Гейзенберга (В.& Малютин 2023)

Theorem

Абсолют этой группы есть объединение единичный квадрата и ограниченного счетного множества, точки накопления которого есть вся граница квадрата.

Здесь "квадрат"есть абсолют абелизации группы, а счетнаячасть — вклад центра группы.

Абсолют дистрибутивных решеток

Абсолют дистрибутивных решеток

Рассмотри счетный посет P и дистрибутивную, градуированную решетку его конечных идеалов $J(P)$. Пространство бесконечных путей решетке (=таблиц) — $Y(P)$, т.е. монотонных нумераций посета, вместе с его хвостовым рарбиением позволяют поставить задачу об абсолюте посета $Abs(P)$ (или его дистрибутивной решетки). Точки абсолюта есть случайные, инвариантные, монотонные нумерации посета P и уже поэтому представляют несомненный интерес. В случае $P = \mathbb{Z}_+^2$ граф соответствующей решетки есть граф Юнга. Ставится общая задача об описании абсолюта дистрибутивных решеток.

Об Абсолюте графа Юнга и общий случай

Об Абсолюте графа Юнга и общий случай

Абсолют графа Юнга дается теоремой Тома (симплекс Тома). Однако до сих пор все доказательства этого факта не вляются комбинаторно-вероятностными, обобщаемыми на другие решетки. Лишь недавно появилась уверенность в наличии такого доказательства.

Прежде всего, определяются термины в которых дается следует дать ответ в общем случае, т.е. аналог симплекса Тома, им служит еще одна решетка $J_\infty(P)$ а именно, решетка минимальных бесконечных идеалов исходной решетки (конечных идеалов). Это было ясно давно.

Об Абсолюте графа Юнга и общий случай

Абсолют графа Юнга дается теоремой Тома (симплекс Тома). Однако до сих пор все доказательства этого факта не вляются комбинаторно-вероятностными, обобщаемыми на другие решетки. Лишь недавно появилась уверенность в наличии такого доказательства.

Прежде всего, определяются термины в которых дается следует дать ответ в общем случае, т.е. аналог симплекса Тома, им служит еще одна решетка $J_\infty(P)$ а именно, решетка минимальных бесконечных идеалов исходной решетки (конечных идеалов). Это было ясно давно. Но важно, что решетка $J_\infty(P)$ посета P стратифицирована, как и абсолют; её "дискретная"страта состоит из простейших мер, сосредоточенных на дискретных нумерациях, а высшая ("планшерелевская") страта абсолюта есть предположительно либо одноточечное пространтство, либо орбита транзитивной группы.

Об Абсолюте графа Юнга и общий случай

Абсолют графа Юнга дается теоремой Тома (симплекс Тома). Однако до сих пор все доказательства этого факта не вляются комбинаторно-вероятностными, обобщаемыми на другие решетки. Лишь недавно появилась уверенность в наличии такого доказательства.

Прежде всего, определяются термины в которых дается следует дать ответ в общем случае, т.е. аналог симплекса Тома, им служит еще одна решетка $J_\infty(P)$ а именно, решетка минимальных бесконечных идеалов исходной решетки (конечных идеалов). Это было ясно давно. Но важно, что решетка $J_\infty(P)$ посета P стратифицирована, как и абсолют; её "дискретная"страта состоит из простейших мер, сосредоточенных на дискретных нумерациях, а высшая ("планшерелевская") страта абсолюта есть предположительно либо одноточечное пространтство, либо орбита транзитивной группы.

Гипотеза: Абсолют дистрибутивной решетки P параметризуется решеткой $J_\infty(P)$.

Бернуллиевская факторизация и марковские факторы

Бернуллиевская факторизация и марковские факторы

Любопытная и, повидимому, новая связь между бернуллиевскими и марковскими мерами появилась в связи с изучением абсолюта.
Это связь геометрии градуированных графов и бернуллиевости центральных мер. Примеры этой связи дает уже граф Юнга и дистрибутивные решетки некоторых посетов.

Бернуллиевская факторизация и марковские факторы

Любопытная и, повидимому, новая связь между бернуллиевскими и марковскими мерами появилась в связи с изучением абсолюта.
Это связь геометрии градуированных графов и бернуллиевости центральных мер. Примеры этой связи дает уже граф Юнга и дистрибутивные решетки некоторых посетов.
Бернуллиевость означает, что всякая центральная мера есть ПОЧТИ бернуллиевской. а более точно марковская мера на стратах пространства минимальных идеалов. Уточнение этого тезиса требует подробного анализа. Проиллюстрируем это на примере произвольных (включая меру Планшереля) центральных мер графа Юнга:

Бернуллиевская факторизация и марковские факторы

Любопытная и, повидимому, новая связь между бернуллиевскими и марковскими мерами появилась в связи с изучением абсолюта.

Это связь геометрии градуированных графов и бернуллиевости центральных мер. Примеры этой связи дает уже граф Юнга и дистрибутивные решетки некоторых посетов.

Бернуллиевость означает, что всякая центральная мера есть ПОЧТИ бернуллиевской. а более точно марковская мера на стратах пространства минимальных идеалов. Уточнение этого тезиса требует подробного анализа. Проиллюстрируем это на примере произвольных (включая меру Планшереля) центральных мер графа Юнга:

Теорема (В.& Керов '86, Sniady& Romik '17, V.'23) Любая точка абсолюта (в.т.ч.случайное блуждания в камере Вейля) с заданным одномерным распределнием является изоморфным фактором бернуллиевской послдовательности с тем же распределением относительно отображения юнгизации.

Проекция ГКФ и вопрос о случайном посете

Проекция ГКФ и вопрос о случайном посете

Этот пример дает нетривиальный изморфизм *с запаздыванием* бернуллиевского и марковского процессов. Изоморфзимом явялется так называемая юнгизация (то есть RSK).

Проекция ГКФ и вопрос о случайном посете

Этот пример дает нетривиальный изморфизм *с запаздыванием* бернуллиевского и марковского процессов. Изоморфзимом является так называемая юнгизация (то есть RSK).

Грин-Клейтман и, независимо, Фомин опредлили проекцию произвольного посета на диаграммы Юнга.

Если зафиксиовать число n и взять проекцию ГКФ множества всех посетов с n точками на множество диагрмм Юнга, то можно рассмотреть образ равномерной меры на всех посетах с n точками. Совпадает ли она с мерой Планшереля?

Проекция ГКФ и вопрос о случайном посете

Этот пример дает нетривиальный изморфизм *с запаздыванием* бернуллиевского и марковского процессов. Изоморфзимом явялется так называемая юнгизация (то есть RSK).

Грин-Клейтман и, независимо, Фомин опредлили проекцию произвольного посета на диаграммы Юнга.

Если зафиксиовать число n и взять проекцию ГКФ множества всех посетов с n точками на множество диагрмм Юнга, то можно рассмотреть образ равномерной меры на всех посетах с n точками. Совпадает ли она с мерой Планшереля?

Более подробный вопрос: какова эта мера для того или иного класса посетов данного комбинаторного типа. Например, посеты, являющиеся диаграммами заданного вида — многомерные диаграммы Юнга и т.д. В этом случае вопрсо связаны с абсолютом соответствующего графа.

Проекция ГКФ и вопрос о случайном посете

Этот пример дает нетривиальный изморфизм *с запаздыванием* бернуллиевского и марковского процессов. Изоморфзимом является так называемая юнгизация (то есть RSK).

Грин-Клейтман и, независимо, Фомин опредлили проекцию произвольного посета на диаграммы Юнга.

Если зафиксиовать число n и взять проекцию ГКФ множества всех посетов с n точками на множество диагрмм Юнга, то можно рассмотреть образ равномерной меры на всех посетах с n точками. Совпадает ли она с мерой Планшереля?

Более подробный вопрос: какова эта мера для того или иного класса посетов данного комбинаторного типа. Например, посеты, являющиеся диаграммами заданного вида — многомерные диаграммы Юнга и т.д. В этом случае вопрсо связаны с абсолютом соответствующего графа.

Предположительно, все это сложные вопросы, которые определяют развитие асимптотической комбинаторики случайных конфигураций.